РАССЕЯНИЕ СВЕТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ С АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ. II

© 2000 г. **В. Г. Фарафонов* и В. Б. Ильин****

**Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия*

** *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 00.00.2000 г.

Развивается новый метод расчета оптических характеристик осесимметричных частиц. Электромагнитные поля разделяются на две части (осесимметричную и неосесимметричную). Проблема рассеяния света формулируется в интегральном виде и решается независимо для каждой из частей, используя специально выбранные скалярные потенциалы. Потенциалы разлагаются в ряды по сферическим волновым функциям, и коэффициенты разложения вычисляются из решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Кратко обсуждается применимость предложенного метода к решению задачи рассеяния света чебышевскими частицами, сфероидами и конечными круговыми цилиндрами и приводятся некоторые результаты расчетов, выполненных для этих частиц.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует много методов расчета рассеяния света несферическими частицами (см., например, [1]). Некоторые методы являются универсальными и могут быть применены к рассеивателям любой формы. Однако в приложениях обычно используют осесимметричные модели частиц – сфероиды, конечные круговые цилиндры и т.д. – поскольку в ином случае вычисления требуют слишком больших компьютерным ресурсов.

Рассеяние света сфероидами (простейшая после шаров осесимметричная модель частиц) представляет особый интерес. В этом случае граница рассеивателя совпадает с одной из координатных поверхностей, и можно разделить переменные в скалярном уравнении Гельмгольца. Решения, использующие этот подход, различаются в основном выбором потенциалов (см., например, [2,3]).

Мы развиваем новый метод расчета оптических характеристик осесимметричных частиц, который должен совместить достоинства подхода, предложенного в [3] (см. также [4,5]), и метода T-матрицы. С одной стороны, проблема светорассеяния разделяется на две части (осесимметричную и неосесимметричную) и скалярные потенциалы для каждой из частей выбираются примерно так же, как ранее для сфероидов. С другой стороны, потенциалы разлагаются в ряды по сферическим волновым функциям и проблема формулируется в интегральном виде.

В предыдущих работах [6,7] мы описали основную идею метода, привели некоторые формулы для ТМ моды и выполнили тестовые расчеты для случая аксиального падения излучения на сфероиды. В данной статье мы рассматриваем более сложный случай ТЕ моды и представляем некоторые результаты расчетов при наклонном падении излучения (ТЕ и ТМ моды) для сфероидов и конечных цилиндров. Для чебышевских частиц, сфероидов и конечных цилиндров кратко рассмотрена обоснованность предлагаемого решения.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим рассеяние электромагнитного излучения отдельной диэлектрической частицей. Введем следующие обозначения: $\vec{E}^{(j)}$, $\vec{H}^{(j)}$ – напряженности электрического и магнитного полей падающего, рассеянного и излучения внутри частицы (соответственно $j = 0, 1$ и 2); ε_j и μ_j – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды вне и внутри рассеивателя (j =1 и 2); $k_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}\, k_0$ – волновое число в среде; $k_0 = \omega/c$ – волновое число в свободном пространстве, где ω – частота излучения, а c – скорость света в вакууме.

Задача рассеяния света может быть сформулирована следующим образом: найти поля $\vec{E}^{(j)}$ и $\vec{H}^{(j)}$, удовлетворящие уравнениям Максвелла вне и внутри рассеивателя, а также граничным условиям на поверхности частицы (непрерывность тангенциальных составляющих электромагнитных полей) и условиям излучения на бесконечности для рассеянного излучения (подробнее см. [6,7]).

Мы предполагаем, что рассеивающая частица имеет аксиальную симметрию. Если ввести декартовую систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы ось $\vec{z}$ совпадала с осью вращения частицы, то уравнение поверхности S в сферической системе координат (r, θ, φ) записывается в виде

$$r = r(\theta). \tag{1}$$

Произвольно поляризованная плоская волна, падающая под углом α к оси вращения частицы, может быть представлена в виде суперпозиции волн двух типов (ТЕ и ТМ моды). Для волн ТЕ типа

$$\vec{E}^{(0)} = -\vec{i}_{\mathrm{y}}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \tag{2}$$

для волн ТМ типа

$$\vec{E}^{(0)} = \left(\vec{i}_{\mathrm{x}}\cos\alpha - \vec{i}_{\mathrm{z}}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \tag{3}$$

где $(\vec{i}_{\mathrm{x}}, \vec{i}_{\mathrm{y}}, \vec{i}_{\mathrm{z}})$ – орты декартовой системы координат.

Представим электромагнитные поля как суммы

$$\vec{E}^{(j)} = \vec{E}_1^{(j)} + \vec{E}_2^{(j)}, \qquad \vec{H}^{(j)} = \vec{H}_1^{(j)} + \vec{H}_2^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{4}$$

где $\vec{E}_1^{(j)}$, $\vec{H}_1^{(j)}$ не зависят от азимутального угла φ, а усреднение $\vec{E}_2^{(j)}$, $\vec{H}_2^{(j)}$ по этому углу равно нулю. Подобное представление полей возможно из-за коммутативности оператора, соответствующего проблеме дифракции, и оператора $L_{\mathrm{z}} = \partial/\partial\varphi$ (см. подробнее [7]).

Осесимметричная задача для полей $\vec{E}_1^{(j)}$, $\vec{H}_1^{(j)}$ и неосесимметричная задача для полей $\vec{E}_2^{(j)}$, $\vec{H}_2^{(j)}$ решаются независимо друг от друга.

2.1. Осесимметричная задача

Введем скалярные потенциалы

$$p^{(j)} = E_{1\varphi}^{(j)} \cos\varphi, \qquad q^{(j)} = H_{1\varphi}^{(j)} \cos\varphi, \tag{5}$$

где $E_{1\varphi}^{(j)}$, $H_{1\varphi}^{(j)}$ – φ-компоненты векторов $\vec{E}_1^{(j)}$, $\vec{H}_1^{(j)}$. Остальные составляющие электромагнитных полей выражаются через азимутальные компоненты из уравнений Максвелла.

Потенциалы являются решениями скалярных уравнений Гельмгольца

$$\Delta p^{(j)} + k_j^2 p^{(j)} = 0, \qquad \Delta q^{(j)} + k_j^2 q^{(j)} = 0 \tag{6}$$

и могут быть представлены в виде разложений по волновым сферическим функциям с индексом $m = 1$, поскольку их зависимость от азимутального угла φ задана множителем $\cos\varphi$ (см. соотношение (5)):

$$\begin{matrix} p^{(j)} \\ q^{(j)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_l^{(j)} \\ b_l^{(j)} \end{matrix} \; \psi_l^{(j)}(k_j r) \; P_l^1(\cos\theta) \; \cos\varphi, \tag{7}$$

где $\psi_l^{(j)}(k_j r)$ – радиальные сферические функции (сферические функции Бесселя $j_l(k_1 r)$ и $j_l(k_2 r)$ для потенциалов падающего и внутреннего излучения и функции Ганкеля первого рода $h_l^{(1)}(k_1 r)$ для потенциала рассеянного излучения), $P_l^m(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

Неизвестные коэффициенты разложений потенциала рассеяного излучения $p^{(1)}$ определяются из решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ln}^{(2)} \; a_n^{(2)} = -a_l^{(0)}, \quad l = 1, 2, \ldots \quad , \tag{8}$$

$$a_l^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ln}^{(1)} \; a_n^{(2)}, \quad l = 1, 2, \ldots \quad , \tag{9}$$

где матричные элементы $\alpha_{ln}^{(1)}$, $\alpha_{ln}^{(2)}$ – поверхностные интегралы от произведений сферических волновых функций и их производных. Более подробно данная задача рассмотрена в работах [6,7]. Там же можно найти выражения и для коэффициентов разложения потенциала падающего излучения в случае плоской волны.

Заметим, что для TM моды отличны от нуля потенциала $q^{(j)}$, и соответствующие уравнения для них получаются после замены $p^{(j)} \to q^{(j)}$, $\mu_j \to \varepsilon_j$ и $a_n^{(j)} \to b_n^{(j)}$ [7].

2.2. Неосесимметричная задача

Для определения неосесимметричных частей электромагнитных полей ($\vec{E}_2^{(j)}$, $\vec{H}_2^{(j)}$, $j = 0, 1$ и 2) будем использовать скалярные потенциала $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$. Первый из них является z-компонентом магнитного или электрического вектора Герца, а второй – соответствующим потенциалом Дебая. Для TE моды положим

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2^{(j)} &= \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)} \ \vec{i}_{\rm z} + V^{(j)} \ \vec{r} \right), \\
\vec{H}_2^{(j)} &= \tfrac{1}{i\mu_j k_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)} \ \vec{i}_{\rm z} + V^{(j)} \ \vec{r} \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что потенциалы Дебая используются при решении задачи рассеяния для шаров (теория Ми), а z-компоненты вектора Герца – для бесконечных круговых цилиндров.

Потенциалы $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца, и после некоторых преобразований можно получить для них граничные условия. Эти условия существенно упрощаются в стандартном случае немагнитной среды ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Для TE моды имеем

$$\left.\begin{aligned}
U &= U^{(2)} - \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \tfrac{r}{\sin\theta (r^2 + r_\theta'^2)} \left[\left(r'_\theta \cos\theta - r \sin\theta \right) U^{(2)} + r r'_\theta V^{(2)} \right], \\
V &= V^{(2)} - \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \tfrac{r'_\theta \sin\theta + r \cos\theta}{r \sin\theta (r^2 + r_\theta'^2)} \left[\left(r'_\theta \cos\theta - r \sin\theta \right) U^{(2)} + r r'_\theta V^{(2)} \right], \\
\frac{\partial U}{\partial n} &= \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial n} + \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \tfrac{1}{r \sin\theta \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}} \left\{ \tfrac{(r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta)^2}{r^2 + r_\theta'^2} \left(r'_\theta \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \tfrac{r r'_\theta (r'_\theta \cos\theta - r \sin\theta)}{r^2 + r_\theta'^2} \left(r'_\theta \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial \theta} \right) - F_3(\theta) U^{(2)} - r F_4(\theta) V^{(2)} \right\}, \\
\frac{\partial V}{\partial n} &= \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial n} + \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \tfrac{1}{\sin\theta \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}} \left\{ \tfrac{r'_\theta (r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta)}{r^2 + r_\theta'^2} \left(r'_\theta \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \tfrac{r r_\theta'^2}{r^2 + r_\theta'^2} \left(r'_\theta \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial \theta} \right) - F_1(\theta) U^{(2)} - r'_\theta F_2(\theta) V^{(2)} \right\},
\end{aligned}\right\}_{\vec{r} \in S} \tag{11}$$

где $U = U^{(0)} + U^{(1)}$ и $V = V^{(0)} + V^{(1)}$, а

$$F_1(\theta) = \frac{(r^2 + {r'_\theta}^2) + ({r'_\theta}^2 - r r''_\theta)}{(r^2 + {r'_\theta}^2)^2} \left[r(r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta) + r'_\theta (r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta) \right], \tag{12}$$

$$F_2(\theta) = \frac{(r^2 + {r'_\theta}^2)(r^2 - {r'_\theta}^2) + 2r^2({r'_\theta}^2 - r r''_\theta)}{(r^2 + {r'_\theta}^2)^2}, \tag{13}$$

$$F_3(\theta) = \frac{2(r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta)(r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta) \left[(r^2 + {r'_\theta}^2)({r'_\theta}^2 - r r''_\theta) \right]}{(r^2 + {r'_\theta}^2)^2}, \tag{14}$$

$$F_4(\theta) = \frac{(r^3 r''_\theta + r^2 {r'_\theta}^2 - r {r'_\theta}^2 r''_\theta + 3{r'_\theta}^4)\sin\theta + \frac{r'_\theta}{r}(r^4 - 2r^3 r''_\theta + 2r^2 {r'_\theta}^2 - {r'_\theta}^4)\cos\theta}{(r^2 + {r'_\theta}^2)^2}. \tag{15}$$

Для TM моды граничные условия существенно проще (см. [7]).

Интегральные уравнения для потенциалов $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ могут быть получены так же, как ранее соответствующие уравнениям в осесимметричном случае (см. [6,7]).

Скалярные потенциалы представляются в виде разложений по волновым сферическим функциям

$$\begin{matrix} U^{(0)} \\ V^{(0)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a^{(0)}_{ml} \\ b^{(0)}_{ml} \end{matrix} \; j_l(k_1 r) \; P_l^m(\cos\theta) \; \cos m\varphi, \tag{16}$$

$$\begin{matrix} U^{(1)} \\ V^{(1)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a^{(1)}_{ml} \\ b^{(1)}_{ml} \end{matrix} \; h_l^{(1)}(k_1 r) \; P_l^m(\cos\theta) \; \cos m\varphi, \tag{17}$$

$$\begin{matrix} U^{(2)} \\ V^{(2)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a^{(2)}_{ml} \\ b^{(2)}_{ml} \end{matrix} \; j_l(k_2 r) \; P_l^m(\cos\theta) \; \cos m\varphi, \tag{18}$$

где суммы начинаются с $m = 1$, поскольку усреднение потенциалов по азимутальному углу φ должно давать ноль.

Коэффициенты для падающего плоской волны в случае TE моды равны

$$\begin{aligned} a^{(0)}_{ml} &= \tfrac{2i^{l-1}(2l+1)}{k_0\mu_1 \sin\alpha} \; \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!} \; P_l^m(\cos\alpha), \\ b^{(0)}_{ml} &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким же образом, как мы получили бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов в случае TM моды (см. [7]), можно найти системы уравнений и для коэффициентов разложения $a^{(1)}_{mn}$, $b^{(1)}_{mn}$, $a^{(2)}_{mn}$ и $b^{(2)}_{mn}$ в случае TE моды

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(2)}_{1,mln} \; k_1 a^{(2)}_{mn} + \beta^{(2)}_{1,mln} \; b^{(2)}_{mn} \right) &= -k_1 a^{(0)}_{ml}, \\ \sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(2)}_{2,mln} \; k_1 a^{(2)}_{mn} + \beta^{(2)}_{2,mln} \; b^{(2)}_{mn} \right) &= -b^{(0)}_{ml}, \end{aligned} \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned} k_1 a^{(1)}_{ml} &= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(1)}_{1,mln} \; k_1 a^{(2)}_{mn} + \beta^{(1)}_{1,mln} \; b^{(2)}_{mn} \right), \\ b^{(1)}_{ml} &= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(1)}_{2,mln} \; k_1 a^{(2)}_{mn} + \beta^{(1)}_{2,mln} \; b^{(2)}_{mn} \right), \end{aligned} \tag{21}$$

где $m = 1, 2, ...; l = m, m+1, ...$

Матричные элементы $\alpha^{(1)}_{1,mln}$, $\alpha^{(1)}_{2,mln}$, $\alpha^{(2)}_{1,mln}$ и $\alpha^{(2)}_{2,mln}$ являются поверхностными интегралами от произведений сферических волновых функций и их производных. Для TE моды, элементы вычисляются по формулам (ниже считаем, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$)

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)}_{1,mln} = \; & \frac{i(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \int_0^{\pi} \left\{ k_1^2 r^2 \left[j_n(k_2 r) h_l^{(1)\prime}(k_1 r) - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} j_n'(k_2 r) h_l^{(1)}(k_1 r) \right] P_n^m(\cos\theta) \right. \\ & \times P_l^m(\cos\theta) \sin\theta + k_1 r_\theta' j_n(k_2 r) h_l^{(1)}(k_1 r) \left[P_n^m(\cos\theta) P_l^{m\prime}(\cos\theta) - P_n^{m\prime}(\cos\theta) \right. \\ & \times P_l^m(\cos\theta)] \sin^2\theta - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \left\{ \frac{k_1 r^2 (r_\theta' \cos\theta - r \sin\theta)}{r^2 + {r_\theta'}^2} j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) \right. \end{aligned} \tag{22}$$

$$\times\left[k_1 r h_l^{(1)\prime}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r} h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^{m\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right] - \frac{k_1 r r'_\theta (r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2 + {r'_\theta}^2}$$
$$\times\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} k_1 r'_\theta j'_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) - j_n(k_2 r) P_n^{m\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right] h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta)$$
$$+ k_1 r F_1(\theta) j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta)\Big\}\Big\}\, d\theta,$$

$$\begin{aligned}\beta^{(2)}_{1,mln} &= -\frac{i(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\int_0^\pi \left\{\frac{k_1^2 r^3 r'_\theta}{r^2+{r'_\theta}^2} j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta)\left[k_1 r h_l^{(1)\prime}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta)\right.\right. \\ &\left. + \frac{r'_\theta}{r} h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^{m\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right] - \frac{k_1^2 r^2 r'_\theta}{r^2+{r'_\theta}^2}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} k_1 r'_\theta j'_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) - j_n(k_2 r)\right. \\ &\left.\left. \times P_l^{m\prime}(\cos\theta)\right] h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta) + k_1^2 r r'_\theta F_2(\theta) j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta)\right\} d\theta,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\alpha^{(2)}_{2,mln} &= \frac{i(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\int_0^\pi \left\{\frac{(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)(r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2+{r'_\theta}^2} j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta)\right. \\ &\times\left[k_1 r h_l^{(1)\prime}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r} h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^{m\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right] - \frac{(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)^2}{r^2+{r'_\theta}^2} \\ &\times\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} k_1 r'_\theta j'_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) + j_n(k_2 r) P_l^{m\prime}(\cos\theta)\right] h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta) \\ &\left. + F_3(\theta) j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta)\right\} d\theta,\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\beta^{(2)}_{2,mln} &= \frac{i(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}\int_0^\pi \left\{k_1^2 r^2\left[j_n(k_2 r) h_l^{(1)\prime}(k_1 r) - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} j'_n(k_2 r) h_l^{(1)}(k_1 r)\right] P_n^m(\cos\theta)\right. \\ &\times P_l^m(\cos\theta)\sin\theta + k_1 r'_\theta j_n(k_2 r) h_l^{(1)}(k_1 r)\left[P_n^m(\cos\theta) P_l^{m\prime}(\cos\theta) - P_n^{m\prime}(\cos\theta)\right. \\ &\times P_l^m(\cos\theta)]\sin^2\theta + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\left\{\frac{k_1 r r'_\theta (r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta)}{r^2+{r'_\theta}^2} j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta)\right. \\ &\times\left[k_1 r h_l^{(1)\prime}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r} h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^{m\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right] - \frac{k_1 r r'_\theta (r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)}{r^2+{r'_\theta}^2} \\ &\times\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} k_1 r'_\theta j'_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) + j_n(k_2 r) P_l^{m\prime}(\cos\theta)\right] h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta) \\ &\left.\left. + k_1 r F_4(\theta) j_n(k_2 r) P_n^m(\cos\theta) h_l^{(1)}(k_1 r) P_l^m(\cos\theta)\right\}\right\} d\theta.\end{aligned} \tag{25}$$

Матричные элементы второй системы (21) получаются из вышеприведенных (22)–(25) после замены $h_l^{(1)}(k_1 r) \to j_l(k_1 r)$. Выражения для случая ТМ моды даны в [7].

2.3. Характеристики рассеянного излучения

Связь падающего и рассеянного излучений в дальней зоне ($r \to \infty$) определяется амплитудной матрицей рассеяния

$$\begin{pmatrix} E_\parallel^{(1)} \\ E_\perp^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{-ik_1 r} e^{i(k_1 r - \vec{k_1}\vec{r})} \begin{pmatrix} A_2 & A_3 \\ A_4 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\parallel^{(0)} \\ E_\perp^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Ниже мы считаем, что плоскостью отсчета для падающей волны является плоскость xz, для рассеянной волны – плоскость, проходящая через ось z (ось вращения частицы) и направление рассеянного излучения. В рассматриваемом случае мы имеем

$$A_1 = \sum_{l=1}^{\infty} i^{-l} a_l^{(1)} P_l^1(\cos\theta) - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-(l-1)} \left(k_1 a_{ml}^{(1)} P_l^m(\cos\theta) + i b_{ml}^{(1)} P_l^{m\ \prime}(\cos\theta)\right)\sin\theta\cos m\varphi, \tag{27}$$

$$A_2 = -\sum_{l=1}^{\infty} i^{-l} b_l^{(1)} P_l^1(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-(l-1)} \left(k_1 a_{ml}^{(1)} P_l^m(\cos\theta) + i b_{ml}^{(1)} P_l^{m\ \prime}(\cos\theta)\right)\sin\theta\cos m\varphi, \tag{28}$$

$$A_3 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-l} b_{ml}^{(1)} \frac{m P_l^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin m\varphi, \tag{29}$$

$$A_4 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-l} b_{ml}^{(1)} \frac{m P_l^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin m\varphi. \tag{30}$$

Отметим, что в выражения для A_1 и A_3 входят коэффициенты, получающиеся при решении задачи рассеяния для TE моды, а в выражения для A_2 и A_4 – для TM моды.

По амплитудной матрице рассеяния можно определить все характеристики рассеянного излучения – безразмерные индикатрисы рассеяния, матрицу рассеяния, степень линейной поляризации и т.д. Ниже мы приводим выражения для интегральных сечений ослабления и рассеяния в случае TE моды

$$\begin{aligned} C_{\rm ext} &= \frac{4\pi}{k_1^2}\,{\rm Re}\,\left[\vec{A}^{(1)}, \vec{i}^{(0)}\right]\Big|_{\Theta=0} \\ &= \frac{4\pi}{k_1^2}\,{\rm Re}\Bigg[\sum_{l=1}^{\infty} i^{-l}\, a_l^{(1)}\, P_l^1\,(\cos\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} i^{-(l-1)}\Bigg(k_1\ a_{ml}^{(1)}\ P_l^m\,(\cos\alpha) \\ &\quad + i\, b_{ml}^{(1)}\ \frac{{\rm d}P_l^m\,(\cos\alpha)}{{\rm d}\cos\alpha}\Bigg)\sin\alpha\Bigg] \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} C_{\rm sca} &= \frac{1}{k_1^2}\int_{4\pi}\!\!\int |\vec{A}^{(1)}|^2{\rm d}\Omega \\ &= \frac{\pi}{k_1^2}\Bigg\{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l(l+1)}{2l+1}\ |a_l^{(1)}|^2\ +\ {\rm Re}\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} i^{(n-l)}\Bigg[k_1^2\ a_{ml}^{(1)}\ a_{mn}^{(1)*}\ \omega_{ln}^m \\ &\quad + i\,k_1\left(b_{ml}^{(1)}\ a_{mn}^{(1)*}\ \kappa_{ln}^m - a_{ml}^{(1)}\ b_{mn}^{(1)*}\ \kappa_{nl}^m\right)\ + b_{ml}^{(1)}\ b_{mn}^{(1)*}\ \tau_{ln}^m\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \tag{32}$$

Здесь $\vec{A}^{(1)}$ – амплитуда электрического поля рассеянного излучения, $\vec{i}^{(0)}$ – единичный вектор, определяющий поляризацию падающего излучения, Ω – телесный угол, Θ – угол между направлениями падающего и рассеянного излучения. Интегралы от функций Лежандра и ее производных κ_{ln}^m, ω_{ln}^m и τ_{ln}^m были приведены ранее (см. [6,7]). Для TM моды выражения для сечения аналогичны после замены $a_l^{(1)}$ на $b_l^{(1)}$ [7].

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Описанный подход к решению проблемы рассеяния света был реализован в виде компьютерной программы на Фортране. Тестирование программы включало сравнение результатов, полученных для сфероидальных частиц, имеющих разный размер, показатель преломления и отношение полуосей, с результатами аналогичных расчетов, выполненных с использованием программ, основанных на других подходах: на методе разделения переменных [4] и методе T-матрицы [10]. Были также выполнены тестовые расчеты и для некоторого набора чебышевских частиц и конечных цилиндров и произведено сопоставление с имеющимися в литературе данными. Основываясь на результатах этих расчетов и теоретических соображениях, рассмотрим обоснованность предлагаемого решения для перечисленных выше типов осесимметричных частиц.

3.1. Чебышевские частицы

Уравнение поверхности этих частиц записывается в виде

$$r(\theta) = r_0[1 + \epsilon \cos(n\theta)], \tag{33}$$

где r_0 – радиус невозмущенного шара, ϵ – амплитуда возмущения, n – количество гармоник (максимумов). Частицы являются выпуклыми, если

$$|\varepsilon| < \frac{1}{n^2+1}. \tag{34}$$

Оптические свойства чебышевских частиц были сравнительно подробно рассмотрены в литературе (см., например, [11]).

Для обсуждения применимости предлагаемого метода необходимо рассмотреть расположенные внутри рассеивателя особенности аналитического продолжения поля рассеянного излучения. В случае чебышевских частиц они образуют правильный n-угольник в плоскости xz, при этом расстояние от начала координат до особых точек равно [12]

$$\sigma_1 = r_0 \frac{n\left[n + (1+\epsilon^2(n^2-1))^{1/2}\right]}{n^2-1} \left[\frac{-1 + (1+\epsilon^2(n^2-1))^{1/2}}{|\epsilon|(n+1)}\right]^{1/n}, \tag{35}$$

а полярные углы (при $\epsilon > 0$) –

$$\varphi_{1,j} = \frac{2j}{n}\pi, \quad j = 0, 1, ..., (n-1). \tag{36}$$

Особенности аналитического продолжения поля внутреннего излучения, расположенные вне рассеивателя, также образуют правильный n-угольник в плоскости xz, и расстояние от начала координат до особых точек равно [12]

$$\sigma_2 = r_0 \frac{n\left[n - (1+\epsilon^2(n^2-1))^{1/2}\right]}{n^2-1} \left[\frac{1 + (1+\epsilon^2(n^2-1))^{1/2}}{|\epsilon|(n+1)}\right]^{1/n}, \tag{37}$$

а полярные углы (при $\epsilon > 0$) –

$$\varphi_{2,j} = \frac{2j+1}{n}\pi, \quad j = 0, 1, ..., (n-1). \tag{38}$$

Наконец, гипотеза Релея, предполагающая, что разложения полей по волновым сферическим функциям сходятся вплоть до границы рассеивателя, справедлива при следующих условиях [12,13]:
а) внешняя задача

$$\sigma_1 < \min|r(\theta)| = r_{\min} = (1-\epsilon)r_0, \tag{39}$$

б) внутренняя задача

$$\sigma_2 > \max|r(\theta)| = r_{\max} = (1+\epsilon)r_0. \tag{40}$$

Предлагаемое решение, по-видимому, можно строго обосновать, когда аналитические продолжения рассеянных и внутренних полей имеют непустое пересечение в виде кольца с центром в начале координат, т.е. при условии

$$\sigma_1 < \sigma_2. \tag{41}$$

Сравнительно подробное исследование этого вопроса в скалярном случае можно найти в статье [14], где частицы, удовлетворяющие условию (41), називаны "слабо невыпуклыми".

На рис. 1 мы привели зависимость относительной ошибки, с которой выполняется оптическая теорема, от числа учитываемых слагаемых в разложениях потенциалов по сферическим функциям (7) и (16)–(18) для чебышевских частиц с n =10 и разными значениями ϵ ($m = 1.5$, $\alpha = 0°$). Отметим, что при $\epsilon = 0$ мы имеем шар; при ϵ =0.01 – почти выпуклую частицу (см. (34)); при ϵ =0.03 – релеевскую (т.к. условия (39)–(40) выполняются при ϵ <0.046, если n =10); при ϵ =0.05 – нерелеевскую, но слабо невыпуклую, и при ϵ =0.07 нарушается условие слабой невыпуклости (41), т.к. для n =10 равенство $\sigma_1 = \sigma_2$ справедливо при $\epsilon \approx$0.0663.

Легко видеть, что увеличение дифракционного параметра x_V с 1 до 7 проявляется в основном в увеличении разброса ошибок и не меняет характер рисунков. При $\epsilon \geq 0.07$ сходимости фактически нет как и предсказывалось выше. Аналогичная ситуация наблюдается и при других значениях параметров n, m и α.

3.2. Сплюснутые и вытянутые сфероиды

Как и все гладкие выпуклые частицы, сфероиды входят в класс слабо невыпуклых, по крайней мере в скалярном случае [14]. Гипотеза Релея справедлива при отношении полуосей $a/b < \sqrt{2}$ [12,13]. На рис. 2 приведена относительная ошибка, с которой выполняется оптическая теорема, в зависимости от числа учитываемых слагаемых в разложениях потенциалов по сферическим функциям для вытянутых и сплюснутых сфероидов разными значениями a/b ($m = 1.5$, $\alpha = 0°$). Из рисунка видно, что сходимость имеет место для нерелеевских частиц, как и в вышерассмотренном случае чебышевских частиц.

3.3. Конечные цилиндры

Эти частицы в отличие от сфероидов не входят в класс слабо невыпуклых частиц, поскольку их поверхности не являются аналитическими. При наличии ребер, где не определена нормаль, вообще говоря, нужно провести специальное исследование аналитических свойств электромагнитных полей в их окрестностях. Тем не менее о достоверности численных расчетов можно судить на основании следующих соображений, которые имеют место и для частиц других форм.

Во-первых, для непоглощающих частиц выполняется оптическая теорема. В случае конечных цилиндров это равенство справедливо с точностью до 3–4 значащих цифр. Во-вторых, наблюдается сходимость результатов расчетов с увеличением числа учитываемых слагаемых (до разумных пределов) в формулах для сечений (31) и (32). В-третьих, полученные нами значения сечений достаточно хорошо согласуются с результатами аналогичных расчетов, выполненных методом Т-матрицы (в рассмотренной нами области значений параметров).

В виде иллюстрации мы рассчитали и представили на рис. 3–4 нормированные сечения рассеяния для конечных цилиндров и сфероидов одного объема и одного отношения наибольшего размера к наименьшему (отношение полуосей a/b для сфероидов и отношение длины к диаметру L/D для цилиндров) при наклонном падении излучения ($\alpha = 45°$). Отметим, с одной стороны, примерное совпадение положения максимумов и минимумов кривых, в с другой – различия в силе максимумов, связанные с геометрией рассеивателей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное недавно решение задачи рассеяния света несферическими частицами с аксиальной симметрией [6,7] распространено на случай падения плоской волны ТЕ типа (для ТМ моды соответствующие формулы приведены в [6,7]). Составлена программа, реализующая новый метод, и выполнены тестовые расчеты для широкого набора осесимметричных частиц: вытянутых и сплюснутых сфероидов, конечных цилиндров и чебышевских частиц.

Кратко рассмотрена обоснованность предлагаемого решения для каждого вида частиц. Показано, что в случае невыпуклых частиц при выполнении условия "слабой невыпуклости" (41) наблюдается сходимость метода.

Произведено также сопоставление разработанной программы с широкоизвестной, стандартной программой Барбера и Хилла [10], использующей метод Т-матрицы, и найдено, что обе программы имеют сравнимое быстродействие. Отметим, что предлагаемый нами подход к решению задачи рассеяния света осесимметричными частицами, по всей видимости, более эффективен в применении к многослойным частицам (см. описание и обсуждение соответствующего алгоритма в [15]), чем подобная модификация обычного метода Т-матрицы [16] или недавно предложенный вариант метода разделения переменных [17].

Данная работа выполнена при финансовой поддержке по программе INTAS (грант 99/652), а также Госкомвуза России (грант N 97-0-13.3-30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D. Light Scattering by Nonspherical particles. San Diego: Academic Press, 2000.
2. Asano S., Yamamoto G. // Appl. Opt. 1975. V.14. P.29.
3. Фарафонов В.Г. // Диф. уравн. 1983. Т.19. С.1765.
4. Voshchinnikov N.V., Farafonov V.G. // Astrophys. Space Sci. 1993. V.204. P.19.
5. Voshchinnikov N.V. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1996. V.55. P.627.
6. Farafonov V.G., Il'in V.B., Henning Th. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1999. V.63. P.205.
7. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектроск. 2000. Т.88. С.70.
8. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
9. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.2. М.: ИЛ, 1960.
10. Barber P.W., Hill S.C. Light Scattering by Particles: Computational Methods. World Scientific, 1990.
11. Wiscombe W.J., Mugnai A. Single Scattering From Nonspherical Chebyshev Particles: A Compendium of Calculations. NASA Ref. Publ. 1986. V.1157, P.1.
12. Кюркчан А.Г. // Радиотехн. и электрон. 1986. Т.31. С.1294.
13. Кюркчан А.Г. // Радиотехн. и электрон. 1984. Т.29. С.2129.
14. Кюркчан А.Г. // Докл. Росс. Акад. Наук. 1994. Т.337. С.728.
15. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектроск. 2000, в печати.
16. Wang D., Barber P.W. // Appl. Opt. 1979. V.18. P.1190.
17. Gurwich I., Shiloah N., Cohen A. // Appl. Opt. 2000. V.39. P.470.

Подписи под рисунками
к статье В.Г.Фарафонова и В.Б.Ильина
"Рассеяние света диэлектрическими частицами с аксиальной симметрией. II"

Рис. 1. Относительная ошибка $\delta = |C_{\rm ext} - C_{\rm sca}|/[(C_{\rm ext} + C_{\rm sca})/2]$ в зависимости от числа учитываемых слагаемых N в разложениях потенциалов по сферическим функциям для чебышевских частиц с n =10 и разными значениями ϵ, показанными числами около кривых. Прямые показывают усредненное поведение ошибок. Показатель преломления $m = 1.5$, излучение падает под углом $\alpha = 0°$ к оси симметрии частиц. **a** – $x_{\rm V}$ =1; **b** – $x_{\rm V}$ =7.

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для вытянутых (сплошные линии) и сплюснутых (пунктир) сфероидов с разными значениями a/b, показанными числами около кривых (для сплюснутых сфероидов дано отношение b/a).

Рис. 3. Сечения рассеяния, нормированные на геометрическое сечение эквиобъемного шара, для вытянутых сфероидов (сплошная линия) и цилиндров (пунктир), имеющих отношение наибольшего размера к наименьшему, равное 2. Показатель преломления $m = 1.7$, излучение (ТМ и ТМ моды) падает под углом $\alpha = 45°$ к оси симметрии частиц.

Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но для сплюснутых сфероидов и цилиндров.