

Вычисление параметрических производных поляризованного излучения и решение обратных задач атмосферной оптики *

С. А. Ухинов[†] и Д. И. Юрков

14 апреля 2003 г.

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН,
Новосибирск, 630090, Россия

Аннотация

Авторами рассмотрены вопросы вычисления производных от параметров поляризованного солнечного излучения и вопросы решения обратных задач атмосферной оптики с использованием модифицированной двойной локальной оценки метода Монте-Карло при наблюдениях с Земли. Исследована применимость итерационного процесса Ньютона-Канторовича и предложен метод, основанный на минимизации квадрата нормы разности вычисленных и наблюдаемых характеристик поляризованного излучения.

Целью настоящей статьи является продолжение разработки методов Монте-Карло для решения задач теории переноса излучения с учетом поляризации. Интерес вызывает исследование возможностей решения обратных задач атмосферной оптики по результатам наземных измерений поляризационных характеристик рассеянного солнечного излучения. В частности разрабатываются алгоритмы восстановления высотного хода коэффициентов аэрозольного рассеяния по измерениям степени поляризации излучения с вычислением соответствующих параметрических производных методом Монте-Карло. Сложность поставленной задачи состоит в том, что наземные измерения информативны, по-видимому, только при зенитных углах Солнца больших 90° (в сумерках). Погрешности же метода Монте-Карло в сумеречных расчетах на порядок больше погрешностей расчетов в дневной области Земли, а погрешности расчетов параметрических производных от функционалов на порядок больше погрешностей расчета самих функционалов. Поэтому важными этапами решения обратных задач являются как разработка и исследование алгоритмов расчета соответствующих параметрических производных, так и анализ оценок их погрешностей. В работе строятся алгоритмы определения коэффициентов аэрозольного рассеяния с использованием итерационного метода метода Ньютона-Канторовича и метода Монте-Карло для вычисления коэффициентов возникающих при этом систем линейных алгебраических уравнений. Предложен метод, аналогичный методу покоординатного спуска, полученный из принципа минимизации квадрата нормы разности вычисленных и наблюдаемых характеристик поляризационного излучения. Численно исследуется применимость и эффективность этих методов. Проводится их сравнительный анализ.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты IR 00-01-00797, 00-15-96173), Интеграционного гранта СО РАН 2000 – No 43, ФЦП “Интеграция”.

[†]E-mail: sau@osmf.sccc.ru

1 Общие положения

Рассмотрим уравнение переноса с учетом поляризации [1,2] в $L_1(X)$:

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^4 \int_X K_{ij}(x', x) \varphi_j(x') dx' + S_i(x), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1.1)$$

или в операторной форме $\Phi = \mathbf{K}\Phi + S$, и сопряженное к нему уравнение в $L_\infty(X)$:

$$\varphi_i^*(x) = \sum_{j=1}^4 \int_X K_{ji}(x, x') \varphi_j^*(x') dx' + h_i(x), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1.2)$$

или в операторной форме $\Phi^* = \mathbf{K}^*\Phi + H$.

Здесь $X = R \times \Omega$, где R — пространство координат, Ω — пространство направлений. Нормы в пространствах вектор-функций $L_1(X)$ и $L_\infty(X)$ задаются равенствами $\|F\|_{L_1(X)} = \sum_{i=1}^4 \int_X |f_i(x)| dx$ и $\|H\|_{L_\infty(X)} = \text{vraisup}_{i,x} |h_i(x)|$ соответственно.

Оператор $\mathbf{K}$ описывает изменение вектор-функции Φ плотности рассеянных фотонов и является композицией операторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{C}$ [2]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} \circ \mathbf{I},$$

где скалярный оператор $\mathbf{I}$ описывает изменение вектор-функции Φ при перемещении фотона от точки рассеяния до точки столкновения, а оператор $\mathbf{C}$ описывает изменение вектор-функции плотности столкновений $\mathbf{I}\Phi$ при изменении направления движения фотона. Следовательно ядро оператора $\mathbf{K}$ имеет вид:

$$K(x', x) = \frac{\exp\{-\tau(r, r')\} \sigma_s(r) P(\omega', \omega, r)}{|r - r'|^2} \delta(\omega' - s) \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_s(r)$ — коэффициент рассеяния, $\sigma(r) = \sigma_c(r) + \sigma_s(r)$ — коэффициент полного взаимодействия со средой, $\sigma_c(r)$ — коэффициент поглощения; $\tau(r, r') = \int_0^{|r'-r|} \sigma(r+st) dt$ — оптическая толщина отрезка (r', r) ; $s = (r' - r)/|r' - r|$, $P(\omega', \omega, r)$ — угловая матрица рассеяния.

Коэффициент рассеяния σ_s может быть представлен в виде суммы аэрозольного σ_a и молекулярного σ_m коэффициентов рассеяния: $\sigma_s = \sigma_a + \sigma_m$. Соответственно, физическая матрица рассеяния имеет вид:

$$R(\sigma_a, \sigma_m, \mu, r) = \frac{R_a(\mu, r) \sigma_a + R_m(\mu, r) \sigma_m}{\sigma_a + \sigma_m}.$$

Здесь R_a и R_m — матрицы аэрозольного и молекулярного рассеяния соответственно.

Вектор-функция $S(x)$ является физической плотностью распределения источника; её конкретный вид зависит от реальных источников излучения.

Вектор-функция плотности рассеяний $\Phi(x)$ связана с классической вектор-функцией Стокса $I(x)$, описывающей интенсивность, степень поляризации, плоскость поляризации и степень эллиптичности излучения [1] следующим образом:

$$I(x) = \frac{[\mathbf{I}\Phi](x)}{\sigma(r)}. \quad (1.4)$$

при этом компоненты φ_i функции $\Phi(x)$ обладают свойствами $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 \leq \varphi_1^2$. В дальнейшем произвольную функцию, удовлетворяющую этим условиям, будем называть стоксовской.

Будем предполагать, что оператор $\mathbf{K}$ является положительным на воспроизводящем конусе S_t вектор-функций Стокса, т. е. если $\Phi \in S_t$, то $\mathbf{K}\Phi \in S_t$.

Для решения задачи вычисления линейного функционала $\mathcal{I}_H = \langle \Phi, H \rangle = \langle \Phi^*, S \rangle$, где $\langle \Phi, H \rangle = \int_X \Phi^T(x) H(x) dx$, $\langle \Phi^*, S \rangle = \int_X S^T(x) \Phi^*(x) dx$, строится оценка “по рассеяниям” ξ метода Монте-Карло [3] на однородной цепи Маркова $x_0, \dots, x_N$ с начальной плотностью $p(x', x)$, имеющая вид:

$$\xi = \sum_{n=0}^N q_n^T H(x_n), \quad (1.5)$$

где векторные веса q_n определяются через матричные веса Q_n по рекуррентным формулам:

$$q_0 = \frac{S(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_0 = \{\delta_{ij}\},$$

$$Q_n = Q_{n-1} \frac{K^T(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}, \quad q_n = Q_n^T q_0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.6)$$

Для обеспечения несмещенности оценки ξ на начальную $\pi(x)$ и переходную $p(x', x)$ плотности цепи Маркова следует наложить следующие условия несмещенности:

$$\begin{aligned} \pi(x) \neq 0 & \quad S^T(x) \Phi^*(x) \neq 0, \\ p(x', x) \neq 0 & \quad K^T(x', x) \Phi^*(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $\xi = q_0^T \xi_{x_0}$, где

$$\xi_{x_0} = \sum_{n=0}^N Q_n H(x_n). \quad (1.7)$$

Тогда, при выполнении соответствующих условий [1] на оператор $\mathbf{K}$ выполняются равенства:

$$\mathcal{I}_H = E\xi = E_{x_0}\{q_0^T E(\xi_{x_0}|x_0)\}, \quad (1.8)$$

$$E\xi_x = \Phi^*(x), \quad (1.9)$$

то есть величина ξ_x может рассматриваться как локальная оценка решения Φ^* сопряженного уравнения переноса (1.2).

Дисперсия исходной оценки ξ связана с ковариационной матрицей $\Psi(x)$ векторной оценки ξ_x следующим соотношением:

$$V\xi = E_{x_0}(q_0^T \Psi(x_0) q_0) - (\mathcal{I}_H)^2.$$

Таким образом, из ограниченности ковариационной матрицы $\Psi(x)$ следует конечность дисперсии оценки ξ . Если, кроме того, плотность распределения $\pi(x)$ пропорциональна $(S^T(x) \Psi(x) S(x))^{1/2}$, то дисперсия оценки (1.5) очевидно минимальна.

2 Вычисление локальных характеристик поляризованного излучения

Для вычисления вектор-функции Стокса $I(x^*)$ в точке $x^* = (r^*, \omega^*)$, где r^* и $-\omega^* = -(a^*, b^*, c^*)$ — точка и направление наблюдения соответственно, будем использовать известную модификацию двойной локальной оценки для задач атмосферной оптики в сферической атмосфере. Возможность применения этой модификации обусловлена симметричностью искомой функции относительно оси, параллельной направлению солнечного излучения [1].

Рис. 1. Геометрия среды

Будем считать, что система “Солнце-атмосфера-Земля” симметрична относительно оси OX , солнечное излучение падает на атмосферу по направлению $(-1, 0, 0)$ (см. рис. 1). Пусть Γ — поверхность, образованная лучом $r^* - \omega^*t$, $t \geq 0$ при вращении вокруг оси симметрии OX ; $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ — точка пересечения направления ω с поверхностью Γ . Точку r_1 поворачиваем вокруг оси симметрии в азимутальную плоскость наблюдения. При этом точка r_1 переходит в точку r_2 на луче $r^* - \omega^*t$, а направление ω — в ω_1 . Модифицированную двойную локальную оценку метода Монте-Карло для вычисления $I(x^*)$ запишем в виде оценки “по рассеяниям” следующим образом:

$$\xi_i(x^*) = \sum_{n=0}^N q_n^T (\widetilde{H}(x_n, x^*))_i = q_0^T \sum_{n=0}^N Q_n (\widetilde{H}(x_n, x^*))_i,$$

$$E\xi_i(x^*) = I_i(x^*) = \mathcal{I}_{H_i}^e = \langle \Phi^e, H_i \rangle.$$

Здесь $\widetilde{H}(x_n, x^*) = \sigma_s(r_{n,1}) \exp\{-\tau(r_n, r_{n,1}) - \tau(r_{n,2}, r^*)\} P^T(\omega_{n,1}, \omega^*, r_{n,1}) \frac{\sqrt{1-n_1^2}}{2\pi|a^*|\rho_1|\langle n, \omega_n \rangle|} \Delta_\Gamma(x_n)$ — матрица размера 4×4 ; $H_i(x) = (\widetilde{H}(x, x^*))_i$ — столбец матрицы $\widetilde{H}(x, x^*)$, $\Delta_\Gamma(x_n)$ — индикатор того, что после рассеяния в точке r_n направление ω_n пересекает поверхность Γ ; $n = (n_1, n_2, n_3)$ — нормаль к поверхности Γ в точке r_1 ; $\rho_1 = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$.

Введя вектор $\xi(x^*) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T(x^*)$ можно записать:

$$\xi^T(x^*) = \frac{S^T(x_\odot)}{\pi(x_\odot)} \sum_{n=0}^N Q_n \widetilde{H}(x_n, x^*) = \frac{S^T(x_\odot)}{\pi(x_\odot)} \xi_{x_0}, \quad E\xi(x^*) = I(x^*).$$

Как известно, дисперсия этой оценки расходится логарифмически. Однако при расчетах величину $\widetilde{H}(x, x^*)$ заменяют на величину $\widetilde{H}_\varepsilon(x, x^*) = \widetilde{H}(x, x^*) \Delta_\varepsilon$, где Δ_ε — индикатор того, что знаменатель в выражении $\widetilde{H}$ больше ε . Для реальной атмосферы с сильно вытянутой индикатрисой это мало меняет результат, а дисперсия оценок $(\xi_\varepsilon)_i(x^*)$ становится конечной.

Рассмотрим вопросы, связанные с вычислением параметрических производных от модифицированной двойной локальной оценки. В дальнейшем будут в основном рассматриваться производные по сечению аэрозольного рассеяния для вычисления которых использовались следующие алгоритмы [2].

Пусть в каждом из n непересекающихся областей D_i , интересующие нас коэффициенты задаются следующим образом:

$$\sigma_{\cdot,i} = \begin{cases} \sigma_{\cdot,i}^0, & \text{при } i \neq i_0 \\ \sigma_{\cdot,i}^0 + t, & \text{при } i = i_0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

Тогда коэффициент поглощения в среде будет равен $\sigma_c(r) = \sum_{i=1}^m \sigma_{c,i} \Delta_i(r)$, а коэффициент рассеяния $\sigma_s(r) = \sum_{i=1}^m \sigma_{s,i} \Delta_i(r)$. Здесь и далее символом $\Delta_i(r)$ будем обозначать индикатор того, что $r \in D_i$. Предполагается также, что моделируемая плотность перехода $p(x', x)$ не зависит от t .

Тогда для производной модифицированной двойной локальной оценки по сечению аэрозольного рассеяния в слое i_0 получаем следующие вычислительные формулы:

$$\xi'_x(x^*) = \sum_{n=0}^N (Q'_n \widetilde{H}(x_n, x^*) + Q_n \widetilde{H}'(x_n, x^*)), \quad (2.2)$$

$$Q'_n = Q'_{n-1} \frac{K^T(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)} + Q_{n-1} \frac{-|r_{n-1} - r_n|_{i_0} K^T(x_{n-1}, x_n) + \check{K}^T(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)},$$

$$\widetilde{H}'(x_n, x^*) = -(|r_{n,1} - r_n|_{i_0} + |r_{n,2} - r^*|_{i_0}) \widetilde{H}(x_n, x^*) + \check{\widetilde{H}}(x_n, x^*).$$

Здесь $|r - r'|_{i_0}$ — длина части отрезка (r', r) , лежащая в области D_{i_0} , $L_{n,i_0} = \sum_{k=1}^n |r_k - r_{k-1}|_{i_0}$. Величина $\check{K}(x, x')$ соответствует величине $K(x, x')$ с матрицей рассеяния $R(\mu) = R_a(\mu)/\sigma_s^0(r')$, а величина $\check{\widetilde{H}}(x, x^*)$ — величине $\widetilde{H}(x, x^*)$ с матрицей рассеяния $R(\mu) = R_a(\mu)/\sigma_s^0(r_1)$.

Условия несмещенности и конечности дисперсии оценок $(\xi_\varepsilon)_i(x^*)$ и $(\xi'_\varepsilon)_i(x^*)$, даются следующим утверждением [2]:

Утверждение 1. Пусть выполнены следующие условия:

1. оператор $\mathbf{K}^*$ является положительным и $\rho(\mathbf{K}) < 1$,
2. в некотором интервале $\lambda - \varepsilon \leq \lambda' \leq \lambda + \varepsilon$ выполнены условия равномерной ограниченности по λ : $\|\mathbf{K}^{*(i)}(\lambda')\| \leq C_k < \infty$ и $\|H^{(i)}(\lambda')\| \leq C_h < \infty$, $i = 0, \dots, m$.

Тогда оценки $(\xi_\varepsilon)_i(x^*)$ и $(\xi'_\varepsilon)_i(x^*)$ являются несмещенными. Если, кроме того, выполнены условия $\rho(\mathbf{K}_p) < 1$, $\|\mathbf{K}_p^{(i)(j)}\| < \infty$, $i, j = 0, 1$ где

$$\mathbf{K}_p^{(i)(j)} \Psi(x) = \int_X \frac{(\frac{\partial^i}{\partial t^i} K(x, x'))^T \Psi(x') \frac{\partial^j}{\partial t^j} K(x, x')}{p(x, x')} dx'$$

то дисперсия данных оценок конечна.

Рассмотрим подробнее вопрос обоснования несмещенности и конечности дисперсии полученных производных двойной локальной оценки. Нетрудно убедиться, что производные оператора $\mathbf{K}^*$ по сечениям поглощения и аэрозольного рассеяния удовлетворяют вышеприведенным условиям. Иначе обстоит дело с функцией $\widetilde{H}(x, x^*)$. Вследствие того, что $\widetilde{H}(x, x^*) \notin L_\infty(X)$ указанные требования теряют смысл. Но для величины $\widetilde{H}_\varepsilon(x, x^*) \in L_\infty(X)$ все рассуждения справедливы. Таким образом можно говорить лишь о том, что мы имеем формулы дифференцирования для смещенной оценки $\xi_{\varepsilon,x}(x^*)$. Однако, вследствие ограниченности физической среды и свойств оператора $\mathbf{K}$, можно заметить, что в некотором интервале параметров дифференцирования сходимость

$$I'_\varepsilon(x^*) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I'(x^*)$$

является равномерной по параметру дифференцирования. Это позволяет предположить, что выполнено соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x^*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \lambda} I_\varepsilon(x^*) = \frac{\partial}{\partial \lambda} I(x^*),$$

на основании которого можно ожидать, что производные смещенной оценки будут сходиться к производным несмещенной оценки при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обладая возможностями вычисления локальных характеристик излучения, например при помощи обсуждавшейся выше двойной локальной оценки, можно решать задачи оценивания производных различных функций от компонент вектор-функции $I(x^*)$. Из подобных функций наиболее используемой является так называемая степень поляризации $P(x^*)$, описываемая следующим образом:

$$P(x^*) = \frac{I_2(x^*)}{I_1(x^*)} \times 100\%.$$

Рассмотрим задачу вычисления степени поляризации и ее производных.

Справедлива следующая общая теорема [4].

Теорема 1. Пусть $\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_s^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ — выборка из s -мерного распределения с конечными средними значениями $E\xi_k^{(i)} = E\xi_k$, $k = 1, \dots, s$, и положительно определенной ковариационной $s \times s$ матрицей $\{\sigma_{kl}\}$. Пусть также $g(x_1, \dots, x_s)$ — функция, имеющая первые производные $\frac{\partial g}{\partial x_k} = g_k$, $k = 1, \dots, s$ во всех точках некоторой окрестности точки $(E\xi_1, \dots, E\xi_s)$ и $g_k^0 = g_k(E\xi_1, \dots, E\xi_s)$. Тогда, если по крайней мере одна из величин $g_k^0 \neq 0$, то $g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_1^{(i)}, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_s^{(i)}\right)$ имеет для больших n асимптотически нормальное распределение со средним $g(E\xi_1, \dots, E\xi_s)$ и дисперсией $\frac{1}{n} \sum_{k,l=1}^s \sigma_{kl} g_k^0 g_l^0$.

Пусть $\xi_k^{(1)}(x^*), \dots, \xi_k^{(n)}(x^*)$ — независимые реализации случайных величин $\xi_k(x^*)$ таких, что $E\xi_k(x^*) = I_k(x^*)$, $k = 1, 2$. Здесь неважно, каким способом получена эта статистика, следует лишь потребовать невырожденность ковариационной матрицы $\{E((\xi_k(x^*) - I_k(x^*))(\xi_l(x^*) - I_l(x^*)))\}$, $k, l = 1, 2$. В этом случае в качестве приближенной оценки функции $g(I_1(x^*), I_2(x^*)) = P(x^*)$ в соответствии с теоремой 1 следует взять выражение

$$g_n = \frac{\bar{\xi}_2(x^*)}{\bar{\xi}_1(x^*)}, \quad (2.3)$$

где

$$\bar{\xi}_1(x^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_1^{(i)}(x^*), \quad \bar{\xi}_2(x^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_2^{(i)}(x^*).$$

При этом дисперсия асимптотического распределения такой случайной величины будет выражаться следующим образом:

$$\tilde{V}g_n = \frac{1}{n} \left[\frac{V\xi_2(x^*) - 2P(x^*)\text{cov}(\xi_1(x^*), \xi_2(x^*)) + P^2(x^*)V\xi_1(x^*)}{I_1^2(x^*)} \right].$$

Для того, чтобы при помощи теоремы 1 получить выражения для оценивания производных степени поляризации, рассмотрим следующую функцию:

$$\tilde{g}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_4}{x_1} - \frac{x_2 x_3}{x_1^2}.$$

Нетрудно видеть, что, если компоненты $I_i(x^*)$ вектор-функции Стокса зависят от некоторого параметра λ , то $\tilde{g}(I_1(x^*), I_2(x^*), \frac{\partial}{\partial \lambda} I_1(x^*), \frac{\partial}{\partial \lambda} I_2(x^*))$ является аналитическим выражением для $\frac{\partial}{\partial \lambda} P(x^*)$. В этом случае в качестве оценки $\tilde{g}$ можно использовать величину:

$$\tilde{g}_n = \frac{\bar{\xi}_2'(x^*)}{\bar{\xi}_1'(x^*)} - g_n \frac{\bar{\xi}_1'(x^*)}{\bar{\xi}_1(x^*)}, \quad (2.4)$$

где

$$\bar{\xi}_1'(x^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_1'^{(i)}(x^*), \quad \bar{\xi}_2'(x^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_2'^{(i)}(x^*).$$

При этом дисперсия асимптотического распределения такой оценки будет выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{V}\tilde{g}_n = & \left[V\xi_1 \left(\frac{I'_2 - 2PI'_1}{I_1^2} \right)^2 + V\xi_2 \left(\frac{I'_1}{I_1^2} \right)^2 + V\xi'_1 \left(\frac{P}{I_1} \right)^2 + V\xi'_2 \frac{1}{I_1^2} + \right. \\ & + \left(\frac{I'_2 - 2PI'_1}{I_1^2} \right) \left(2\frac{I'_1}{I_1^2} \text{cov}(\xi_1, \xi_2) + 2\frac{P}{I_1} \text{cov}(\xi_1, \xi'_1) - 2\frac{1}{I_1} \text{cov}(\xi_1, \xi'_2) \right) + \\ & \left. + 2P\frac{I'_1}{I_1^3} \text{cov}(\xi_2, \xi'_1) - 2\frac{I'_1}{I_1^3} \text{cov}(\xi_2, \xi'_2) - 2\frac{I_2}{I_1^3} \text{cov}(\xi'_1, \xi'_2) \right] (x^*) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что условия несмещенности и конечности дисперсии асимптотических распределений оценок степени поляризации и ее параметрических производных (2.3) и (2.4) практически совпадают с условиями несмещенности и конечности дисперсии соответствующих оценок вектор-функции Стокса $I(x^*)$ и ее производных, приведенными выше.

3 Оценки производных однократно рассеянного излучения

Нетрудно видеть, что для вклада однократно рассеянного излучения справедлива следующая формула:

$$I^{(1)}(x^*) = \sum_{i=1}^m I_i,$$

$$I_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_s(A_i) \exp\{-\tau_0(r^* - t\omega^*) - \tau(r^*, r^* - t\omega^*)\} R(A_i, -a^*) \begin{pmatrix} S_\odot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

Здесь A_i , $i = 1, \dots, m$ — номера слоёв, через которые проходит луч $r^* - t\omega^*$, $t \geq 0$; t_{i-1} и t_i — точки пересечения границ слоя A_i с вышеуказанным лучом; $\tau_0(r^* - t\omega^*)$ — оптическая длина отрезка, образованного точкой $r^* - t\omega^*$ и точкой $r_\odot(t)$ пересечения внешней границы атмосферы лучом $r^* - t\omega^* + l(1, 0, 0)^T$, $l \geq 0$; $R(A_i, -a^*)$ — матрица рассеяния в A_i -м слое.

Тогда справедлива следующая формула для вычисления производной вклада однократно рассеянного излучения по коэффициенту поглощения в i_0 -м слое:

$$\frac{\partial I^{(1)}(x^*)}{\partial \sigma_c} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial I_i(x^*)}{\partial \sigma_c},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_i(x^*)}{\partial \sigma_c} = & - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_s(A_i) \exp\{-\tau_0(r^* - t\omega^*) - \tau(r^*, r^* - t\omega^*)\} \times \\ & \times [r_0(t) - (r^* - t\omega^*)|_{i_0} + |r^* - (r^* - t\omega^*)|_{i_0}] R(A_i, -a^*) \begin{pmatrix} S_\odot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

Для производной вклада однократно рассеянного излучения по коэффициенту аэрозольного рассеяния в i_0 -м слое справедливы аналогичные выражения:

$$\frac{\partial I^{(1)}(x^*)}{\partial \sigma_a} = \sum_i \frac{\partial I_i(x^*)}{\partial \sigma_a},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_i(x^*)}{\partial \sigma_a} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_s(A_i) \exp\{-\tau_0(r^* - t\omega^*) - \tau(r^*, r^* - t\omega^*)\} \times \\ &\times \left[-(|r_0(t) - (r^* - t\omega^*)|_{i_0} + |r^* - (r^* - t\omega^*)|_{i_0}) R(A_i, -a^*) + \Delta_{i_0}(A_i) \frac{R_a(A_i, -a^*)}{\sigma_s(A_i)} \right] \begin{pmatrix} S_\odot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{i_0}(A_i)$ — индикатор того, что $i_0 = A_i$.

С помощью данных формул, используя какие-либо процедуры численного интегрирования, можно проводить вычисления производных вкладов однократного рассеяния по коэффициентам σ_c и σ_a .

4 Сравнительный анализ метода зависимых испытаний и метода прямого дифференцирования для вычисления производных по параметрам

Рассмотрим метод зависимых испытаний в его применении к вычислению производных рассеянного излучения по сечениям взаимодействия со средой.

В данном случае следует изучить вопрос трудоемкости данного алгоритма в сравнении с трудоемкостью метода прямого дифференцирования уравнения переноса.

Пусть $\{\xi_x(h)\}$ — множество оценок решения сопряженного уравнения переноса с учетом поляризации, смоделированных на одних и тех же цепях Маркова для сред, в которых соответствующий коэффициент взаимодействия равен $\sigma + h$. Введем обозначение: $\xi^\Delta(h) = \frac{\xi(h) - \xi(0)}{h}$. Отметим, что сходимость

$$E\xi^\Delta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} E \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}(0)$$

прямо следует из свойства $\rho(\mathbf{K}) < 1$ интегрального оператора $\mathbf{K}$ уравнения переноса и мажорантного свойства первой компоненты вектор-функции Стокса. Покажем, что для оценок метода зависимых испытаний и метода прямого дифференцирования, построенных на одних и тех же цепях Маркова, существует сходимость

$$V\xi^\Delta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} V \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}(0)$$

Нетрудно видеть, что, используя известное соотношение $V\xi = E_{x_0}(q_0^T \Psi_{\xi\xi}(x_0)q_0) - (\mathcal{I}_H)^2$, задачу сходимости дисперсий можно свести к задаче сходимости ковариационных матриц $\Psi_{\xi^\Delta \xi^\Delta}$ следующим образом:

$$V\xi^\Delta = V(q_0^T \xi_{x_0}^\Delta) = E_{x_0}(q_0^T \Psi_{\xi^\Delta \xi^\Delta}(x_0)q_0) - \left(\frac{\mathcal{I}_H(h) - \mathcal{I}_H(0)}{h} \right)^2$$

Рассмотрим подробнее условия сходимости

$$\Psi_{\xi^\Delta \xi^\Delta} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \Psi_{\xi' \xi'}. \quad (4.1)$$

Введем обозначение $\Psi(x, h_1, h_2) = \Psi_{\xi_{x(h_1)}, \xi_{x(h_2)}}$. Заметим, что данная ковариационная матрица является решением следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \Psi(x, h_1, h_2) &= \left[H(h_1)(\Phi^*(h_2))^T + \Phi^*(h_1)H^T(h_2) - H(h_1)H^T(h_2) \right] (x) + \\ &+ \int_X \frac{K^T(x, x', h_1)\Psi(x', h_1, h_2)K(x, x', h_2)}{p(x', x)} dx' \end{aligned}$$

или в операторной форме $\Psi(\cdot, h_1, h_2) = \mu(\cdot, h_1, h_2) + \mathbf{K}_p(h_1, h_2)\Psi(\cdot, h_1, h_2)$, при выполнении условия $\rho(\mathbf{K}_p(h_1, h_2)) < 1$.

Нетрудно убедиться, что сходимость (4.1) эквивалентна существованию обобщенной второй смешанной производной $\left. \frac{\partial^2 \Psi(x, h_1, h_2)}{\partial h_1 \partial h_2} \right|_{h_1=h_2=0}$. Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 2. Пусть выполнены следующие условия:

1. оператор $\mathbf{K}$ сохраняет мажорантное свойство первой компоненты вектор-функции Стокса,
2. в некотором интервале значений $-\varepsilon_1 < h_1 < \varepsilon_1$, $-\varepsilon_2 < h_2 < \varepsilon_2$ выполняется неравенство $\rho(\mathbf{K}_p(h_1, h_2)) \leq q_p < 1$, причем операторы $\frac{\partial \mathbf{K}_p(h_1, h_2)}{\partial h_1}$, $\frac{\partial \mathbf{K}_p(h_1, h_2)}{\partial h_2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{K}_p(h_1, h_2)}{\partial h_1 \partial h_2}$ равномерно ограничены.

Тогда существует сходимость

$$V \frac{\xi(h) - \xi(0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} V \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}(0)$$

Таким образом, погрешность метода зависимых испытаний стремится к погрешности метода прямого дифференцирования при уменьшении шага h . В этом нет ничего удивительного, так как нетрудно заметить, что все вышеприведенные формулы для метода зависимых испытаний являются конечно-разностными аналогами соответствующих выражений для метода прямого дифференцирования. При этом справедливо следующее выражение:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \xi_n}{\partial \sigma}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n^\Delta(h) + C(N)h + O(h^2)$$

Нетрудно заметить, что величина $C(N) = \frac{1}{N} \xi_n''(0)$ является асимптотически нормально распределенной с математическим ожиданием $\mathcal{I}''(0)$ и дисперсией $V \leq \frac{2}{h \cdot N} [(V\xi^\Delta)^2 + (V\xi')^2] + O(h)$.

5 Методы решения обратной задачи атмосферной оптики

На внешнюю поверхность атмосферы, окружающей сферическую планету, падает параллельный поток солнечного излучения. Атмосфера считается разбитой на n слоев, в каждом из которых коэффициенты взаимодействия со средой считаются постоянными. Введем обозначение $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где σ_i , $i = 1, \dots, n$ — значения коэффициентов взаимодействия со средой в слоях разбиения.

Обозначим через $I(r, \omega) = (I_1, I_2, I_3, I_4)^T(r, \omega)$ значение вектор-функции Стокса, наблюдаемое в точке r в направлении ω .

Пусть $f_i(I(r, \omega))$, $i = 1, \dots, m$ — некоторые функции от компонент вектора $I(r, \omega)$. Ставится задача: по заданным значениям

$$f_1(I(\bar{\sigma}_a^*; r_1, \omega_1)), \dots, f_m(I(\bar{\sigma}_a^*; r_m, \omega_m))$$

вычислить значения коэффициентов аэрозольного рассеяния $\bar{\sigma}_a$ в слоях разбиения ($m \geq n$). Матрицы аэрозольного и молекулярного рассеяния, значения коэффициентов поглощения и молекулярного рассеяния, альbedo подстилающей поверхности и закон отражения от подстилающей поверхности считаются известными.

Получающаяся система нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} f_1(I(\bar{\sigma}_a; r_1, \omega_1)) &= f_1(I(\bar{\sigma}_a^*; r_1, \omega_1)), \\ &\dots \\ f_m(I(\bar{\sigma}_a; r_m, \omega_m)) &= f_m(I(\bar{\sigma}_a^*; r_m, \omega_m)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

может быть решена итерационным методом Ньютона-Канторовича. Соответствующая линеаризованная система для нахождения s -го приближения $\bar{\sigma}_a^{(s)}$ записывается, очевидно, в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_1}{\partial I_j} \frac{\partial I_j}{\partial \sigma_{a,i}}(\bar{\sigma}_a^{(s-1)}; r_1, \omega_1) (\bar{\sigma}_a^{(s)} - \bar{\sigma}_a^{(s-1)}) = f_1(I(\bar{\sigma}_a^*; r_1, \omega_1)) - f_1(I(\bar{\sigma}_a^{(s-1)}; r_1, \omega_1)) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_m}{\partial I_j} \frac{\partial I_j}{\partial \sigma_{a,i}}(\bar{\sigma}_a^{(s-1)}; r_m, \omega_m) (\bar{\sigma}_a^{(s)} - \bar{\sigma}_a^{(s-1)}) = f_m(I(\bar{\sigma}_a^*; r_m, \omega_m)) - f_m(I(\bar{\sigma}_a^{(s-1)}; r_m, \omega_m)) \end{cases} \quad (5.2)$$

или, в матричном виде, $D^{(s)}\delta^{(s)}\bar{\sigma}_a = \delta^{(s)}F^{(s)}$. Здесь

$$\delta^{(s)}\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_a^{(s)} - \bar{\sigma}_a^{(s-1)},$$

$$\delta^{(s)}F^{(s)} = \begin{pmatrix} f_1(I(\bar{\sigma}_a^*; r_1, \omega_1)) - f_1(I(\bar{\sigma}_a^{(s-1)}; r_1, \omega_1)) \\ \vdots \\ f_m(I(\bar{\sigma}_a^*; r_m, \omega_m)) - f_m(I(\bar{\sigma}_a^{(s-1)}; r_m, \omega_m)) \end{pmatrix}$$

Матрица производных $D = \{d_{ij}\} = \left\{ \sum_{k=1}^4 \frac{\partial f_i}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial \sigma_{a,j}}(\bar{\sigma}_a^{(s-1)}; r_m, \omega_m) \right\}_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ является при $m > n$ прямоугольной, вследствие чего система (5.2) оказывается переопределенной. В этом случае для решения системы (5.2) применяется метод наименьших квадратов, приводящий, как известно, к необходимости решения следующей задачи:

$$\left\langle D^{(s)}\delta^{(s)}\bar{\sigma}_a - \delta^{(s)}F^{(s)}, D^{(s)}\delta^{(s)}\bar{\sigma}_a - \delta^{(s)}F^{(s)} \right\rangle \longrightarrow \min_{\delta^{(s)}\bar{\sigma}_a}$$

Отсюда получается квадратная система линейных уравнений относительно $\delta^{(s)}\bar{\sigma}_a$:

$$\left(D^{(s)}\right)^T D^{(s)}\delta^{(s)}\bar{\sigma}_a = \left(D^{(s)}\right)^T \delta^{(s)}F^{(s)} \quad (5.3)$$

Как известно, относительная погрешность решения системы линейных уравнений $Ax = b$ с возмущенной матрицей $\tilde{A} = A + \delta A$ и вектором правых частей $\tilde{b} = b + \delta b$ задается следующей формулой [5]:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\nu(A)}{1 - \nu(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right), \quad (5.4)$$

где $\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. При этом оценка (5.4) является неулучшаемой. Отсюда видно, что, чем больше число обусловленности матрицы $\left(D^{(s)}\right)^T D^{(s)}\delta^{(s)}$, тем точнее следует вычислять элементы рассматриваемой системы линейных уравнений.

Выражение (5.4) позволяет исследовать сходимость решения $\tilde{x}$ системы линейных уравнений $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, элементы которой рассчитаны методом Монте-Карло, к решению x системы линейных уравнений $Ax = b$, где $A = E\tilde{A}$, $b = E\tilde{b}$. Действительно, для погрешности $\delta x = \tilde{x} - x$ получаем:

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} > \varepsilon \right\} &= P \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} > \varepsilon, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \nu^{-1}(A) \right\} + P \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} > \varepsilon, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > \nu^{-1}(A) \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} > \varepsilon, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \nu^{-1}(A) \right\} + P \left\{ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > \nu^{-1}(A) \right\} \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое. С учетом формулы (5.4) имеем:

$$P \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} > \varepsilon, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \nu^{-1}(A) \right\} \leq P \left\{ \frac{\nu(A)}{1 - \nu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) > \varepsilon, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \nu^{-1}(A) \right\}$$

Так как функция $f(x) = \frac{\nu(A)x+c}{1-\nu(A)x}$ возрастает при любом положительном c , то существует не зависящая от δA и δb константа k такая, что выполнены оценки:

$$\begin{aligned} & P \left\{ \frac{\nu(A)}{1 - \nu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) > \varepsilon, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \nu^{-1}(A) \right\} = \\ & = P \left\{ \frac{\nu(A)}{1 - \nu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) > \varepsilon, \frac{\varepsilon}{k} < \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \nu^{-1}(A) \right\} + \\ & + P \left\{ \frac{\nu(A)}{1 - \nu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) > \varepsilon, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{\varepsilon}{k} \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > \frac{\varepsilon}{k} \right\} + P \left\{ \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} > \varepsilon \frac{k - \nu(A)(1 + \varepsilon)}{k\nu(A)}, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{\varepsilon}{k} \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > \frac{\varepsilon}{k} \right\} + P \left\{ \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} > \varepsilon \frac{k - \nu(A)(1 + \varepsilon)}{k\nu(A)} \right\} \end{aligned}$$

Будем считать, что $\varepsilon < 1$. Тогда, выбирая $k = 3\nu(A)$, получаем:

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} > \varepsilon \right\} & \leq P \left\{ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > \frac{\varepsilon}{3\nu(A)} \right\} + P \left\{ \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} > \frac{\varepsilon}{3\nu(A)} \right\} + P \left\{ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > \nu^{-1}(A) \right\} \leq \\ & \leq 2P \left\{ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > \frac{\varepsilon}{3\nu(A)} \right\} + P \left\{ \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} > \frac{\varepsilon}{3\nu(A)} \right\} \end{aligned}$$

Наши дальнейшие рассуждения будут зависеть от выбора векторной нормы $\|b\|$ и согласованной с ней матричной нормы $\|A\|$. Возьмем, например, в качестве векторной нормы $\|b\|_\infty = \max_i |b_i|$, а в качестве матричной нормы $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$. Тогда, с учетом очевидного соотношения $\|A\|_\infty \leq n^2 \max_{i,j} |a_{ij}|$, получаем:

$$P \left\{ \max_i |\delta x_i| > \varepsilon \|x\| \right\} \leq 2P \left\{ \max_{i,j} |\delta a_{ij}| > \varepsilon \frac{\|A\|}{3n^2\nu(A)} \right\} + P \left\{ \max_i |\delta b_i| > \varepsilon \frac{\|b\|}{3\nu(A)} \right\}$$

Это выражение позволяет нам утверждать, что порядок сходимости по вероятности решения системы линейных уравнений $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ не меньше, чем порядок сходимости элементов матрицы $\tilde{A}$ и вектора $\tilde{b}$ к их математическим ожиданиям.

Результаты численных экспериментов (смотри раздел 6.) показывают, что дисперсии характеристик поляризованного излучения и их производных различаются почти на порядок. Таким образом, число моделируемых траекторий для вычисления этих величин с одинаковой статистической погрешностью будет различаться на два порядка. Разумеется, этот факт, вкупе с жесткостью получающихся систем линейных уравнений, сильно повышает трудоемкость алгоритма.

Данное обстоятельство, в частности, явилось причиной использования в расчетах еще одного подхода, основанного на решении следующей задачи:

$$F(\bar{\sigma}_a) = \sum_{i=1}^m (f_i(I(\bar{\sigma}_a^*; r_i, \omega_i)) - f_i(I(\bar{\sigma}_a; r_i, \omega_i)))^2 \longrightarrow \min_{\bar{\sigma}_a}$$

для нахождения минимума функционала $F(\bar{\sigma}_a)$ использовался метод покоординатного спуска.

Этот метод имеет следующие преимущества. Для вычисления нескольких первых итераций можно использовать гораздо меньшее число траекторий и учитывать только знаки получающихся производных; другими словами, можно воспользоваться следующим итерационным процессом:

$$\sigma_{a,i}^{(n)} = \left(1 - \alpha \operatorname{sgn} \left(\frac{F(\bar{\sigma}_a^{(n-1)})}{F'_{\sigma_{a,i}}(\bar{\sigma}_a^{(n-1)})} \right) \right) \sigma_{a,i}^{(n-1)} = \left(1 - \alpha \operatorname{sgn} \left(F'_{\sigma_{a,i}}(\bar{\sigma}_a^{(n-1)}) \right) \right) \sigma_{a,i}^{(n-1)} \quad (5.5)$$

При этом время счета можно существенно сократить.

6 Численные результаты

В качестве тестовой задачи рассмотрим модель земной атмосферы, в которой распределение по слоям коэффициентов поглощения, молекулярного и аэрозольного рассеяния задается таблицей 1. Альbedo подстилающей поверхности (Земли) равно нулю. Матрица аэрозольного рассеяния рассчитана по теории Ми на основе данных о микрофизических параметрах атмосферного аэрозоля.

Таблица 1. Коэффициенты взаимодействия со средой

Слой	σ_m	σ_a	σ_c
0 – 2	1.106×10^{-2}	0.283×10^{-3}	0.456×10^{-1}
2 – 5	0.906×10^{-2}	0.357×10^{-3}	0.695×10^{-2}
5 – 11	0.594×10^{-2}	0.306×10^{-3}	0.474×10^{-3}
11 – 25	0.258×10^{-2}	0.483×10^{-3}	0.131×10^{-3}
25 – 38	0.264×10^{-3}	0.128×10^{-2}	0.187×10^{-4}
38 – 55	0.384×10^{-4}	0.251×10^{-3}	0.387×10^{-5}
55 – 70	0.248×10^{-5}	0.267×10^{-5}	0.300×10^{-6}
70 – 80	0.430×10^{-6}	0.815×10^{-7}	0.518×10^{-7}
80 – 100	0.743×10^{-7}	0.558×10^{-8}	0.964×10^{-8}
100 – 120	0.176×10^{-8}	0.417×10^{-10}	0.219×10^{-9}
120 – 150	0.998×10^{-10}	0	0.107×10^{-10}
150 – 500	0.254×10^{-11}	0	0.697×10^{-12}

Наблюдения проводятся с высоты 2.7 км в направлении в зенит при различных зенитных расстояниях Солнца. На рис. 2–3 приведены рассчитанные степени поляризации P и компоненты I_1 , I_2 вектора Стокса. Рис. 4–7 иллюстрируют зависимость производных степени поляризации по сечениям аэрозольного рассеяния от зенитных расстояний Солнца. Пунктиром показаны соответствующие характеристики однократно рассеянного излучения. Вычисления проводились на 1000000 траекториях. Погрешности соответствующих рассчитанных величин представлены в таблице 2:

Таблица 2. Погрешности производных степени поляризации.

Зенитн. расст. Солнца, °	$\sqrt{\frac{VP}{(EP)^2}}, \%$	$\sqrt{\frac{VP'_{\sigma_{a,2}}}{(EP'_{\sigma_{a,2}})^2}}, \%$	$\sqrt{\frac{VP'_{\sigma_{a,5}}}{(EP'_{\sigma_{a,5}})^2}}, \%$
90.5	0.19	1.25	1.17
91	0.17	1.34	1.02
92	0.24	1.48	1.27
93	0.34	1.97	1.58
94	0.47	1.71	2.40
95	0.91	6.73	5.22
96	1.32	14.02	5.06
97	1.58	10.73	9.16
98	1.67	9.26	12.38
99	2.00	12.63	21.21
100	3.66	42.40	34.49
101	4.79	12.51	70.08

Рис. 2 Степень поляризации P

Рис. 3 Компоненты $\ln(10^7 I_1)$ (I) и $\ln(10^7 I_2)$ (II)

Рис. 4 Производная P во втором слое

Рис. 5 Производная I_2 во втором слое

Рис. 6 Производная P в пятом слое

Рис. 7 Производная I_2 в пятом слое

В Таблице 3 приводятся числа обусловленности $\tilde{\nu}(A) = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)$ для матриц $A = (D^{(s)})^T D^{(s)}$, построенных в соответствии с п. 5 при помощи следующих наборов функций $f_i(I(\bar{\sigma}_a; r_i, \omega_i))$, $i = 1, \dots, m$:

1. $f_i = I_1(r_i, \omega_i)$, $i = 1, \dots, m$;
2. $f_i = I_2(r_i, \omega_i)$, $i = 1, \dots, m$;
3. $f_{2i} = I_1(r_i, \omega_i)$, $f_{2i+1} = I_2(r_i, \omega_i)$, $i = 1, \dots, m$;
4. $f_i = P(r_i, \omega_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Для сравнения приводятся также числа обусловленности матриц, построенных при помощи первого набора функций для излучения без учета поляризации (т. е. для уравнения вида (1.1) с ядром $K_{ij}(x', x) = 0$ при $i, j \neq 1$).

Таблица 3. Числа обусловленности матриц $(D^{(s)})^T D^{(s)}$

Зенит. расст. Солнца	Поляриз. излучение				Неполяриз. излучение
	I_1	I_2	I_1, I_2	I_2/I_1	
$[90.5^\circ, 91.7^\circ]$, шаг 0.1°	1.8×10^6	2.1×10^5	1.0×10^6	1.1×10^{15}	4.0×10^5
$[90.5^\circ, 92.3^\circ]$, шаг 0.1°	1.5×10^6	1.4×10^5	1.2×10^6	4.6×10^{14}	4.5×10^5
$[90.5^\circ, 95.5^\circ]$, шаг 0.1°	4.6×10^6	4.1×10^5	3.3×10^6	4.8×10^{16}	1.2×10^6
$[90.5^\circ, 98.5^\circ]$, шаг 0.1°	8.6×10^6	8.4×10^5	6.9×10^6	1.4×10^{21}	2.1×10^6
$[90.5^\circ, 100.5^\circ]$, шаг 0.1°	1.1×10^7	1.0×10^6	8.9×10^6	7.4×10^{21}	2.7×10^6

Как известно, решение систем линейных уравнений с подобными плохо обусловленными матрицами сопряжено с определенными трудностями. В частности, такие задачи являются чувствительными к точности задания входных данных. В нашем случае ситуация усугубляется наличием вероятностных погрешностей компонент рассчитываемой матрицы решаемой системы.

Очевидно, приведенные в Таблице 3 значения $\tilde{\nu}(A)$ являются оценками снизу для величин $\nu(A)$. Таким образом, видно, что при решении обратных задач необходимо весьма точно рассчитывать производные характеристик поляризованного излучения.

Однако и в этом случае при проведении численных экспериментов выяснилось, что алгоритм восстановления высотного хода коэффициента аэрозольного рассеяния в атмосфере, разбитой на большое число слоев, расходится. В Таблице 4 приведены значения коэффициентов аэрозольного рассеяния, вычисленные на 100000 траекториях методом Ньютона-Канторовича с использованием функций $f_i = I_2(r_i, \omega_i)$. Атмосфера толщины 100 км была разбита на пять слоёв толщиной 10, 5, 15, 40 и 20 км. Время счета на компьютере Pentium III 665 МГц составило 364 с.

Таблица 4. Значения коэффициентов σ_a , рассчитанных методом Ньютона-Канторовича

Приближение		Точное значение
Начальное	1-е	
3.962×10^{-4}	1.981×10^{-4}	2.830×10^{-4}
6.768×10^{-4}	4.725×10^{-4}	4.834×10^{-4}
3.741×10^{-5}	2.496×10^{-5}	2.672×10^{-5}
1.141×10^{-5}	9.564×10^{-6}	8.153×10^{-6}
7.811×10^{-7}	3.905×10^{-7}	5.579×10^{-7}

Попытки рассчитать рассматриваемым методом параметры атмосферы, разбитой на число слоев большее или равное 6, с использованием любого из вышеприведенных наборов функций f_i

не увенчались успехом. Таким образом, становится понятно, что метод Ньютона-Канторовича не подходит для решения обратных задач атмосферной оптики для атмосферы, разбитой на большое число слоев.

Итерационный процесс (5.5) в данном случае обнаруживает следующие преимущества. Во-первых, для его применения не требуется большая точность в расчетах производных поляризованного излучения. Во-вторых, результаты, приведенные в п. 3, показывают, что, по крайней мере для зенитных расстояний Солнца в интервале $90.5^\circ - 95.5^\circ$, для определения знака производных можно пользоваться производными однократно рассеянного излучения, что также уменьшает время счета алгоритма.

В качестве примера в Таблице 5 приведены значения коэффициентов аэрозольного рассеяния, вычисленные при помощи итерационного процесса (5.5) на 10000 траекториях. Коэффициент α был взят равным 0.03. Время счета на компьютере Pentium III 665 МГц составило 1935 с.

Таблица 5. Значения коэффициентов σ_a , рассчитанных методом (5.5)

Приближение			
Начальное	1-е	10-е	Точное значение
3.962×10^{-4}	3.843×10^{-4}	2.922×10^{-4}	2.830×10^{-4}
5.001×10^{-4}	4.851×10^{-4}	3.688×10^{-4}	3.572×10^{-4}
4.291×10^{-4}	4.162×10^{-4}	3.164×10^{-4}	3.065×10^{-4}
6.768×10^{-4}	6.565×10^{-4}	4.991×10^{-4}	4.834×10^{-4}
1.788×10^{-3}	1.734×10^{-3}	1.400×10^{-3}	1.277×10^{-3}
3.507×10^{-4}	3.402×10^{-4}	2.586×10^{-4}	2.505×10^{-4}
2.672×10^{-6}	3.629×10^{-6}	3.110×10^{-6}	2.672×10^{-6}
1.141×10^{-7}	1.107×10^{-7}	1.008×10^{-7}	8.153×10^{-8}
7.811×10^{-9}	7.576×10^{-9}	6.494×10^{-9}	5.579×10^{-9}
5.845×10^{-11}	5.670×10^{-11}	4.577×10^{-11}	4.175×10^{-11}
Время счета, сек.:	197	1935	

7 Литература

1. G. I. Marchuk, G. A. Mikhailov, M. A. Nazaraliev, *et al.*, *The Monte Carlo Method in Atmospheric Optics*. Springer Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1980
2. S. A. Ukhinov, D. I. Yurkov, Monte Carlo method of calculating the derivatives of polarized radiation. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1998, Vol. 13, No. 5, 425-444.
3. G. A. Mikhailov, *Minimization of Computational Costs of Non-analogue Monte Carlo Methods*. World Scientific, Singapore; New Jersey; London; Hong Kong, 1991
4. С. Уилкс, *Математическая статистика*. М., Наука, 1967
5. А. Н. Коновалов, *Вычислительные методы линейной алгебры*. Новосибирск, Наука, 1989