УДК 535.42

РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА СФЕРЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОПТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ

©2001 г. А.Я.Перельман*, Т.В.Зиновьева**

* *Санкт-Петербургская лесотехническая академия, 194021 Санкт-Петербург, Россия*

** *Институт астрономии им. В.В.Соболева Санкт-Петербургского университета, 198504 Петергоф, Санкт-Петербург, Россия*

Предложена двухпараметрическая модель рассеивающей сферической частицы сс слоем переменной толщины (первый параметр), внутри которого показатель преломления задается произвольной непрерывной функцией(второй параметр). Приведен алгоритм расчета факторов эффективности ослабления и обратного рассеяния для этой модели с помощью развитой кусочно-гиперболической аппросимации коэффициентов рассеяния. Корректный подбор параметров позволяет получить хорошее согласование между экспериментальными и расчетными данными о факторах эффективности ослабления и обратного рассеяния для типичных полидисперсных систем частиц неправильной формы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В классической задаче дифракции плоской волны на сферических частицах предполагается, что показатель преломления терпит разрыв на их границе[1–3]. Вместе с тем, допустимо предположение, что в реальных частицах существует слой, внутри которого происходит постепенное изменение показателя преломления. Естественно считать, что показатель преломления дается непрерывной функцией параметра размера внутри некоторого промежуточного слоя, ширина которого заранее неизвестна. Для типичных частиц высокой степени однородности ширина слоя должна быть значительно меньше радиуса частицы.

В настоящей работе сравниваются факторы эффективности ослабления [1] и обратного рассеяния [2] для сфер с промежуточными слоями переменной толщины. Расчеты проводятся в рамках модели, предложенной в [4–5]. Показано, что характеристики светорассеяния являются непрерывными функциями ширины промежуточного слоя независимо от конкретного вида непрерывной аппроксимации показателя преломления. В частности, установлено, что предельные значения характеристик светорассеяния при стремлении к нулю ширины промежуточного слоя совпадают с их значениями, вычисленными по теории Ми. Оценены размеры промежуточных слоев, в которых характеристики светорассеяния значимо отличаются от соответствующих характеристик модели Ми. Использование модели сферической частицы с промежуточным слоем позволяет существенно уменьшить расхождения между значениями оптических характеристик, найденными экспериментально и вычисленными по теории Ми. Этот факт был проиллюстрирован на примере космических частиц неправильной формы (fluffy particles) в [6–7]. Предложенная в данной работе модель промежуточного слоя представляет существенное обобщение модели, использованной в [6–7].

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЕТОРАССЕЯНИЯ

Введем обозначения: λ — длина волны в вакууме, r и $\rho = 2\pi r/\lambda$ — соответственно геометрическое и дифракционное расстояния от центра сферы радиуса a, $R = 2\pi a/\lambda$ — параметр размера, $m = \mathcal{M}(\rho)$ — контур показателя преломления. Для модели Ми

$$\mathcal{M}(\rho) = \begin{cases} m_0, & 0 \le \rho < R \\ M, & \rho > R \end{cases} \tag{1}$$

где m_0 и M — постоянные величины.

Факторы эффективности ослабления Q_{ext}, рассеяния Q_{sca} и эффективность обратного рассеяния Q_b представимы разложениями [1–3]

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} Re \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n) \tag{2}$$

$$Q_{sca} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(\mid a_n \mid^2 + \mid b_n \mid^2) \tag{3}$$

$$Q_b = \frac{1}{x^2} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(-1)^n (a_n - b_n) \Big|^2 \tag{4}$$

В случае, когда показатель преломления задается выражением (1), коэффициенты рассеяния a_n и b_n имеют вид

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{R\psi_n'(mR)\psi_n(R) - mR\psi_n(mR)\psi_n'(R)}{R\zeta_n'(mR)\psi_n(R) - mR\zeta_n(mR)\psi_n'(R)}, \\[2ex] b_n = \dfrac{mR\psi_n'(mR)\psi_n(R) - R\psi_n(mR)\psi_n'(R)}{mR\zeta_n'(mR)\psi_n(R) - R\zeta_n(mR)\psi_n'(R)}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\psi_n(x)$, $\zeta_n(x)$ — функции Риккати-Бесселя и $m = m_0 M^{-1}$.

В [4] показано, что введенные характеристики светорассеяния представимы в виде (2)—(4) для любого контура показателя преломления $\mathcal{M}(\rho)$, но с коэффициентами рассеяния a_n и b_n, отличающимися от коэффициентов Ми.

3. КУСОЧНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОНТУРА ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Предположим, что контур показателя преломления имеет вид

$$\mathcal{M}(\rho) = \begin{cases} m_0, & 0 \le \rho < \rho_0, \\ M(\rho), & \rho_0 < \rho < R, \\ M, & \rho > R. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{M}(\rho)$ — непрерывная функция, $M(\rho)$ — произвольная невозрастающая функция, ρ_0, R, m_0 и M $(m_0 > M)$ — любые фиксированные постоянные величины. Для контура (6) используем кусочно-гиперболическую аппроксимацию (КГА) порядка k [4]

$$m(\rho) = \begin{cases} m_0, & 0 \le \rho < \rho_0, \\ x_i M(x_i)\rho^{-1}, & \rho_{i-1} < \rho < \rho_i \quad (i = 1 \ldots k), \\ \mu_k, & \rho > \rho_k = R, \end{cases} \tag{7}$$

где $\rho_1, ..., \rho_{k-1}$ и $x_1, ..., x_k$ — произвольные наборы чисел, удовлетворяющие условию

$$\rho_0 < x_1 < \rho_1 < x_2 < \rho_2 < ... < \rho_{k-1} < x_k < \rho_k. \tag{8}$$

Выражения для коэффициентов рассеяния a_n, b_n, входящих в представления (2)—(4), в случае контура показателя преломления (7) были получены в [5]. Имеем (j=1 соответствует электрической волне, j=2 — магнитной волне)

$$A_{jn} = -B_{jn}(\psi_n)/B_{jn}(\zeta_n), \tag{9}$$

где $A_{1n} = a_n$ и $A_{2n} = b_n$. Здесь (ниже индекс суммирования $n = 1, 2, ...$ опускается, k — порядок аппроксимации)

$$B_j(g) = (a_{jk}\Delta_{j+} + c_{jk}\Delta_{j-})\delta_{j-}(g) - (b_{jk}\Delta_{j+} + d_{jk}\Delta_{j-})\delta_{j+}(g), \tag{10}$$

где

$$\Delta_{j\pm} = \begin{vmatrix} \rho_0^{-1.5+j\pm\nu_1} & \psi(m_0\rho_0) \\ (-1.5 + j \pm \nu_1)\rho_0^{-2.5+j\pm\nu_1} & \tau_{j0}^{-1} m_0 \psi'(m_0\rho_0) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$\delta_{j\pm}(g) = \begin{vmatrix} \rho_k^{-1.5+j\pm\nu_k} & g(\mu_k\rho_k) \\ (-1.5 + j \pm \nu_k)\rho_k^{-2.5+j\pm\nu_k} & \tau_{jk}\mu_k g'(\mu_k\rho_k) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$\nu_i = [(n + 0.5)^2 - \gamma_i^2]^{0.5}, \quad \gamma_i = x_i M(x_i), \quad i = 1 \ldots k, \tag{13}$$

$$m_i = \lim_{\substack{\rho\to\rho_i \\ \rho<\rho_i}} m(\rho), \quad \mu_i = \lim_{\substack{\rho\to\rho_i \\ \rho>\rho_i}} m(\rho), \quad i = 1 \ldots k, \tag{14}$$

$$\tau_{1i} = m_i^2 \mu_i^{-2}, \quad \tau_{2i} = 1, \quad i = 1 \dots k. \tag{15}$$

В свою очередь, коэффициенты a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk} находятся по следующей схеме, представленной в матричной форме. Имеем $(k = 1)$

$$\begin{bmatrix} a_{j1} & b_{j1} \\ c_{j1} & d_{j1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

и $(k \geq 2)$

$$\begin{bmatrix} a_{jk} & b_{jk} \\ c_{jk} & d_{jk} \end{bmatrix} = \prod_{i=2}^{k} \begin{bmatrix} \alpha_{ji} & \beta_{ji} \\ \gamma_{ji} & \delta_{ji} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Здесь

$$\begin{cases} \alpha_{ji+1} = \omega_{ji}(\nu_i, \nu_{i+1}), & \beta_{ji+1} = \omega_{ji}(\nu_i, -\nu_{i+1}), \\ \gamma_{ji+1} = \omega_{ji}(-\nu_i, \nu_{i+1}), & \delta_{ji+1} = \omega_{ji}(-\nu_i, -\nu_{i+1}), \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\omega_{ji}(u, v) = 0.5 \rho_i^{-u+v} \{1 + u^{-1}[0.5 + \tau_{ji}(-0.5 + v)]\}. \tag{19}$$

В настоящей статье значения $\rho_1, \dots, \rho_{k-1}$ и $x_1, \dots, x_k$ были выбраны по формулам

$$\rho_i = \rho_0 + i \frac{\rho_k - \rho_0}{k}, \tag{20}$$

$$x_i = \frac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2}. \tag{21}$$

Отметим, что разница между электрическими и магнитными волнами отражается формулой (15).

4. ТОЧНОСТЬ КУСОЧНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ КОНТУРА ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Рассмотрим сферическую частицу с промежуточным слоем

$$\Delta = R - \rho_0 \tag{22}$$

[см.(6)] и будем предполагать, что ширина слоя мала, то есть

$$\Delta / R \ll 1 \tag{23}$$

Типичный контур показателя преломления такой частицы изображен на рис.1. В соответствии с условием (23) можно принять, что функция $M(\rho)$, удовлетворяющая соотношениям

$$M(\rho_0) = m_0, \quad M(R) = M, \tag{24}$$

в остальном произвольна. В качестве модели $M(\rho)$ выберем

$$M(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} \quad (\rho_0 < \rho < R) \tag{25}$$

где численные значения α и β определяются по (24).

Исследуем точность аппроксимации (7). С этой целью рассчитаем величины (2) и (4) при различных ширинах промежуточного слоя Δ ($\Delta = 0$ соответствует проблеме Ми) для выбранной модели (25). Расчеты проводятся при a=2 μm для $m = 1.5$ и $m = 1.7$ (в предположении, что $M = 1$). В табл.1 и табл.2 приведены минимальные порядки k кусочно-гиперболической аппроксимации, которые определяются требованием: при увеличении числа k первые три значащие цифры Q^p_{ext} и Q^p_b не меняются. Здесь p — относительная ширина промежуточного слоя,

$$p = \frac{\Delta}{R} 100\% \tag{26}$$

Табл.1. Зависимость порядка аппроксимации от ширины слоя при $m_0 = 1.50$

Δ	$p, \%$	k	Q^p_{ext}	k	Q^p_b
0	0	0	2.512	0	2.635
10^{-4}	0.005	5	2.507	25	2.444
10^{-3}	0.05	25	2.494	65	2.064
$5 \cdot 10^{-3}$	0.25	55	2.443	95	0.886
10^{-2}	0.5	55	2.403	95	0.275
$5 \cdot 10^{-2}$	1	65	2.294	95	0.135
10^{-1}	5	65	2.317	100	2.868
$2 \cdot 10^{-1}$	10	65	2.039	100	0.042

Табл.2. Зависимость порядка аппроксимации
от ширины слоя при $m_0 = 1.70$

Δ	$p, \%$	k	Q^p_{ext}	k	Q^p_b
0	0	0	2.050	0	33.420
10^{-4}	0.005	5	2.054	25	33.333
10^{-3}	0.05	55	2.053	65	33.171
$5 \cdot 10^{-3}$	0.25	55	2.054	95	32.812
10^{-2}	0.5	65	2.083	125	34.044
$5 \cdot 10^{-2}$	1	85	2.107	125	11.277
10^{-1}	5	95	2.325	125	16.003
$2 \cdot 10^{-1}$	10	95	2.292	155	2.260

Аналогичные результаты получаются при замене контура показателя преломления (25) на любой другой контур типа (6), удовлетворяющий условиям (24). Из табл.1 и табл.2 следует, что для произвольной ширины промежуточного слоя и любого контура показателя преломления внутри него существует $k = k^*$ такое, что Q_{ext} и Q_b практически не меняются при $k > k^*$. Таким образом, КГА представляет эффективный метод решения проблемы рассеяния на сферической частице с радиально меняющимся показателем преломления.

5. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ШАРОВЫЕ ЧАСТИЦЫ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СЛОЕМ

Рассмотрим диэлектрические шары с переменными параметрами размеров R и ширинами промежуточных слоев Δ. Для таких шаров справедливо равенство

$$Q_{ext} = Q_{sca}, \quad (m = Rem). \tag{27}$$

Покажем, что равенство (27) имеет место для кусочно-гиперболической аппроксимации (7) любого порядка k. В самом деле, в силу вещественности функций Риккати-Бесселя $\psi_n(x)$ и $\chi_n(x)$ при вещественных x коэффициенты A_{jn} из (9) имеют следующую структуру

$$A = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + i\beta}, & \gamma_i < n + 0.5, \\ \\ \frac{i\beta}{\alpha + i\beta}, & \gamma_i > n + 0.5, \end{cases} \tag{28}$$

где α и β — вещественные числа. Из (28) следует

$$A = \begin{cases} \left|\frac{\alpha}{\alpha+i\beta}\right|^2 & = Re\frac{\alpha}{\alpha+i\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}, \\ \\ \left|\frac{i\beta}{\alpha+i\beta}\right|^2 & = Re\frac{i\beta}{\alpha+i\beta} = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}, \end{cases} \quad (29)$$

то есть $a_n = A_{1n}$ и $b_n = A_{2n}$ удовлетворяют условию

$$|a_n|^2 = Rea_n, \quad |b_n|^2 = Reb_n \quad (30)$$

Из (2), (3) и (30) следует (27).

6. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Пусть Q означает факторы Q_{ext} или Q_b. Обозначим $Q_{exp}(m_0, R)$ — фактор, определяемый экспериментально, $Q_{Mie}(m_0, R)$ — фактор, вычисленный по теории Ми и $Q_{M,k}(\mathcal{M}, R, \Delta)$ — фактор, найденный по КГА порядка k для частицы с контуром показателя преломления $M = M(\rho)$ внутри промежуточного слоя ширины Δ [см. (6), (22) и (24)]. При узком промежуточном слое ($\Delta \ll R$) фактор $Q_{M,k}(\mathcal{M}, R, \Delta)$ мало чувствителен к вариациям $M(\rho)$ из (6) и, вместо $Q_{M,k}(\mathcal{M}, R, \Delta)$ фактически можно рассматривать фактор $Q_k = Q_k(\mathcal{M}, R, \Delta)$. При фиксированном Δ эти факторы, рассматриваемые как функции порядка k, сходятся в себе,

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty} \mid Q_{k_1}(\mathcal{M}, R, \Delta) - Q_{k_2}(\mathcal{M}, R, \Delta) \mid = 0 \quad (31)$$

Предположим, что ε (ε — любое положительное число) и Δ — фиксированы. Определим функцию $k^* = k(\Delta, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\mid Q_{k_1}(\mathcal{M}, R, \Delta) - Q_{k_2}(\mathcal{M}, R, \Delta) \mid < \varepsilon \quad (k_1, k_2 > k^*). \quad (32)$$

В п.4 эта функция описана для $m = 1.50$ (табл.1) и $m = 1.70$ (табл.2). Отметим, что функция $k^* = k(\Delta, \varepsilon)$ растет с ростом Δ и убыванием ε. Таким образом, $Q_{Mie}(m_0, R)$ можно рассматривать как $Q_\Delta(\mathcal{M}, R)$ шара с промежуточным слоем $\Delta = 0$. Отсюда следует, что абсолютная ошибка приближения

$$Q_k(\mathcal{M}, R, \Delta) \approx Q_{k^*}(\mathcal{M}, R, \Delta) \quad (k \geq k^*) \quad (33)$$

не превосходит ε, которое может быть выбрано равным сколь угодно малому положительному числу. Это означает, что КГА

$$Q_\Delta(\mathcal{M}, R) = Q_{k^*}(\mathcal{M}, R, \Delta) \quad (34)$$

дает решение проблемы рассеяния света для частицы с контуром показателя преломления, описанным формулой (6) при условии, что ширина промежуточного слоя $\Delta \ll R$. Из табл.1 и табл.2 следует также, что КГА $Q_\Delta(\mathcal{M}, R)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\Delta\to 0} Q_\Delta(\mathcal{M}, R) = Q_{Mie}(m_0, R) \tag{35}$$

Рис.2-4 иллюстрируют характер приближения КГА $Q_\Delta(\mathcal{M}, R)$ к фактору Ми Q при $m_0 = 1.50$ и $m_0 = 1.70$ для различных R [см.(6)] в зависимости от ширины промежуточного слоя Δ. В качестве примера рассматривались космические частицы неправильной формы (fluffy particles), для которых были измерены факторы $Q_{exp}(1.50, 20)$ [8]. Расчеты показали, что, например, в случае фактора обратного рассеяния разность $Q_{exp}(1.50, 20) - Q_{Mie}(1.50, 20)$ весьма существенна. В то же время, существуют Δ такие, что разность $Q_{exp}(1.50, 20) - Q_\Delta(\mathcal{M}, 20)$ пренебрежимо мала (см. рис.5). Значит, можно подобрать число Δ, такое, что модель шара с промежуточным слоем ширины Δ значительно точнее воспроизводит характеристики рассеяния реальных частиц, найденные экспериментально, чем модель Ми.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов работы следует:
1. Факторы ослабления Q_{ext} и обратного рассеяния Q_b можно интерпретировать как непрерывные функционалы на пространстве функций (7) с равномерной метрикой.
2. Справедливы равенства

$$\lim_{p\to 0} Q^p_{ext} = Q^0_{ext}, \quad \lim_{p\to 0} Q^p_b = Q^0_b, \tag{36}$$

где Q^0_{ext} и Q^0_b совпадают с факторами ослабления и обратного рассеяния найденными по теории Ми (при $\Delta = 0$).
3. Порядки аппроксимации k монотонно растут с ростом ширины промежуточного слоя Δ, причем скорость этого роста для Q_b больше, чем для Q_{ext}.
4. С ростом относительной ширины промежуточного слоя p значения Q_{ext} меняются существенно медленнее, чем значения Q_b.

Таким образом, при достаточно большом порядке k кусочно-гиперболическая аппроксимация (7) с удовлетворительной точностью воспроизводит факторы Q_{ext} и Q_b, соответствующие показателю преломления типа (6). Пределы факторов Q_{ext} и Q_b при $\Delta \to 0$, независимо от контура показателя преломления типа (6) и порядка k апппроксимации совпадают с их значениями, вычисленными по теории Ми.

Целесообразность перехода от модели многослойных сфер с кусочно-постоянным показателем преломления к КГА объясняется также как и целесообразность перехода от квадратурной формулы прямоугольников к формуле парабол [9]. Существенно, что в случае КГА упрощаются расчеты — внутри слоев вычисление Бесселевых функций заменяется вычислением степенных функций.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант 99/652).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хюлст ван де Г.* Рассеяние света малыми частицами. ИЛ. М., 1961. 356 с.
2. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. Мир. М., 1986. 660 с.
3. *Шифрин К.С.* Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат. М., 1951. 288 с.
4. *Perelman A.Y.* Appl.Opt. 1979. V. 18. N13. P. 2307–2314.
5. *Perelman A.Y.* Appl.Opt. 1996. V. 35. N27. P. 5452–5460.
6. *Шифрин К.С., Перельман А.Я., Кокорин А.М.* Опт. и спектр. 1985. V. 59. N3. P. 597–602.
7. *Шифрин К.С., Перельман А.Я., Кокорин А.М.* Письма в ЖТФ. 1985. V. 11. N13. P. 790–794.
8. *Giese R.H., Weiss K., Zerull R.H.,Ono T.* A&A. 1978. V. 65. P.265–272.
9. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. Физматиздат. М., 1961. 234 с.

Подписи под рисунками к статье А.Я.Перельмана и Т.В.Зиновьевой
" РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА СФЕРЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОПТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ"

Рис.1. Контур показателя преломления диэлектрической сферы с промежуточным слоем.

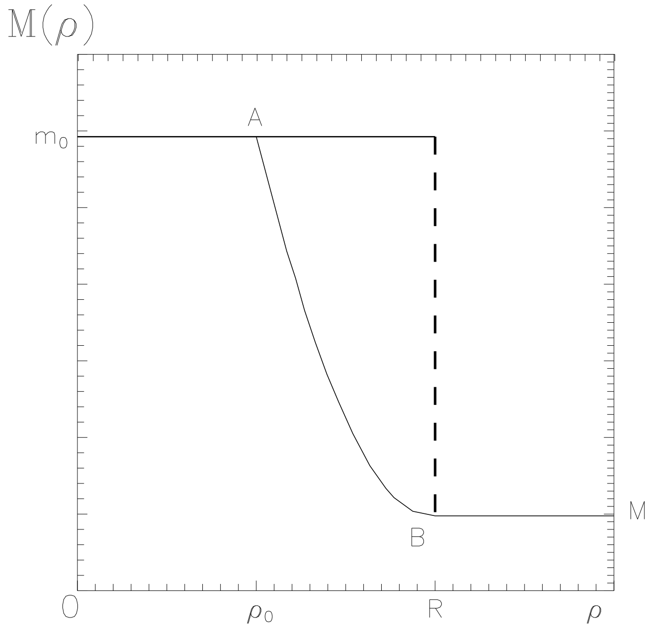
Рис.2. Зависимость факторов эффективности ослабления и обратного рассеяния от ширины промежуточного слоя для $0 \leq \rho \leq 10$ в случае $m = 1.50$.

Рис.3. То же, что и на рис.2 в случае $m = 1.70$.

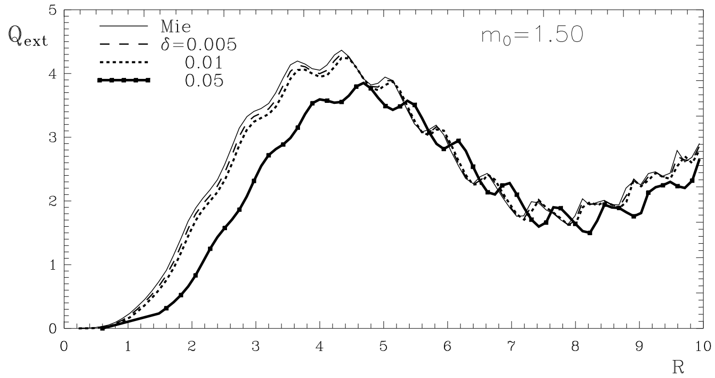
Рис.4. То же, что и на рис.2 для $0 \leq \rho \leq 100$.

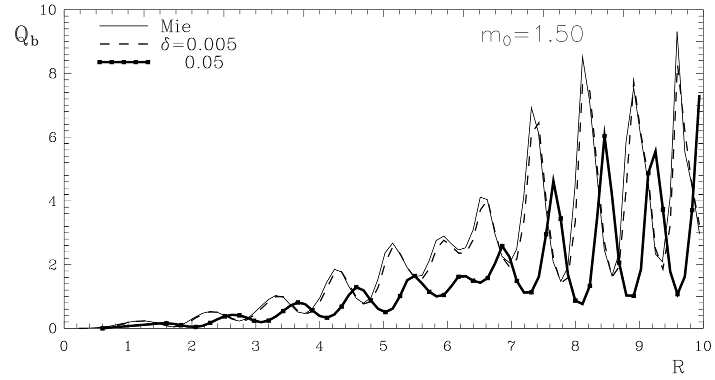
Рис.5. Выбор оптимальной ширины промежуточного слоя.

А.Я.Перельман, Т.В.Зиновьева: Рис.1.

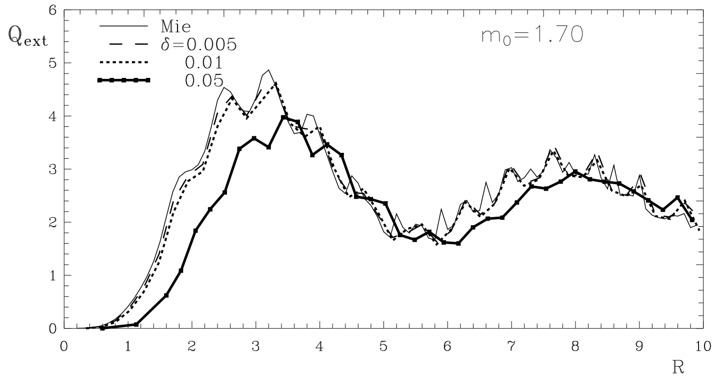


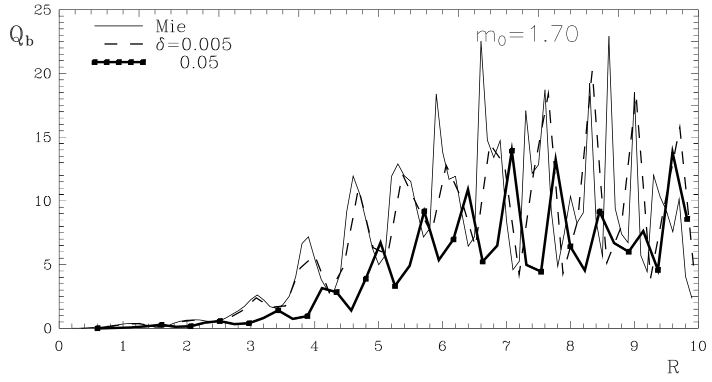
А.Я.Перельман, Т.В.Зиновьева: Рис.2.



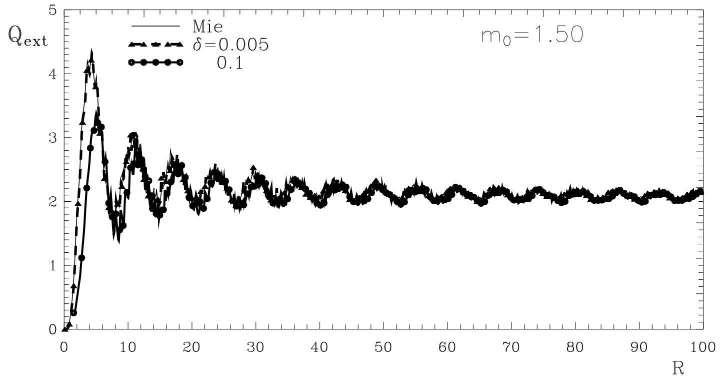


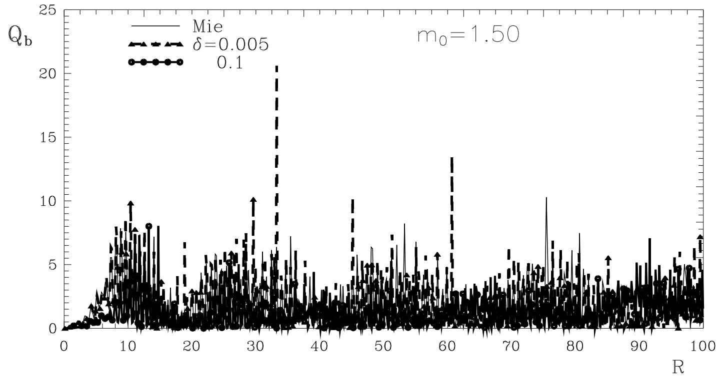
А.Я.Перельман, Т.В.Зиновьева: Рис.3.





А.Я.Перельман, Т.В.Зиновьева: Рис.4.





А.Я.Перельман, Т.В.Зиновьева: Рис.5.