УДК 535.42

S-АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ С КОМПЛЕКСНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

© 2001 г. **А. Я. Перельман*, Н. В. Вощинников****

**Санкт-Петербургская лесотехническая академия, Санкт-Петербург, Россия*

***Астрономический институт им. В.В. Соболева, Санкт-Петербургский университет*

Поступила в редакцию 00.00.2001 г.

В рамках проблемы дифракции плоской электромагнитной волны на шаре рассмотрено приближение оптически мягких частиц (S-аппроксимация) для компонентов электромагнитного поля и факторов эффективности. Для слабо поглощающих частиц с помощью (S-аппроксимации) получены представления для факторов эффективности рассеяния и поглощения в приближении Релея-Ганса. Предложенная модификация S-аппроксимации с учетом коротковолновой асимптотики для компонентов поля позволяет с хорошей точностью рассчитывать факторы эффективности ослабления для больших шаров с комплексным показателем преломления $m = n - ki$, где $1.0 \leq n \leq 2.0$ и $0 \leq k \leq 0.5$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1 – 3] приведены разложения Ми для компонентов электромагнитного поля м факторов эффективности в проблеме дифракции плоской волны на шаре. При условии, что относительный показатель преломления вещества близок к единице, эти выражения преобразуются в простые формулы (приближение мягких частиц, S-аппроксимация), дающие удовлетворительную точность для частиц умеренных и больших размеров [4]. S-аппроксимация особенно удобна при исследовании факторов эффективности для рассеивающих частиц, погруженных в непоглощающую среду, так как в этом случае точные значения факторов совпадают с их приближениями дальней зоны [3, 5].

Использование дополнительной информации относительно коротковолновой асимптотики компонентов поля позволяет существенно расширить область применимости S-аппроксимации. В [6] показано, что основанная на этой информации модифицированная S-аппроксимация дает удовлетворительную точность для диэлектрических шаров, во всяком случае, при показателях преломления $m \leq 2.0$. В настоящей статье результаты работы [6] распространены на случаи слабо поглощающих и поглощающих шаров.

2. S-АППРОКСИМАЦИЯ И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ

S-аппроксимация в задачах дифракции на малых частицах основана на использовании приближенных соотношений, ошибка при расчетах по которым становится пренебрежимо малой при значениях относительного комплексного показателя преломления $m = n - ki$ $(k \geq 0)$, близких к единице (оптически мягкие частицы). Для шара компоненты поля и факторы эффективности записываются через ряды, зависящие от коэффициентов Ми $(n = 1, 2, ...)$

$$a_{1n} = \frac{h_{1n}^2 - ih_{1n}h_{3n}}{h_{1n}^2 + h_{3n}^2}, \qquad a_{2n} = \frac{h_{2n}^2 - ih_{2n}h_{4n}}{h_{2n}^2 + h_{4n}^2}, \tag{1}$$

где

$$\begin{cases} h_{1n} = x\psi_n'(mx)\psi_n(x) - mx\psi_n(mx)\psi_n'(x)\,, \\ h_{2n} = mx\psi_n'(mx)\psi_n(x) - x\psi_n(mx)\psi_n'(x)\,, \\ h_{3n} = x\psi_n'(mx)\chi_n(x) - mx\psi_n(mx)\chi_n'(x)\,, \\ h_{4n} = mx\psi_n'(mx)\chi_n(x) - x\psi_n(mx)\chi_n'(x) \end{cases} \tag{2}$$

и $x = 2\pi a/\lambda$ – безразмерный параметр (a – радиус шара, λ – длина волны падающего излучения), $\psi_n(z), \chi_n(z), \psi_n'(z), \chi_n'(z)$ – функции Риккати-Бесселя и их первые производные. В данном случае приближенные равенства, соответствующие S-аппроксимации имеют вид

$$h_{1n}^2 + h_{3n}^2 \approx \frac{|m|x^2}{g_1(m,x)}, \qquad h_{2n}^2 + h_{4n}^2 \approx \frac{|m|x^2}{g_2(m,x)},$$
$$g_{1,2}(m,x) = \mathrm{O}(1) \qquad \text{при} \qquad x \longrightarrow \infty\,. \tag{3}$$

Соотношения (3) основаны на равенстве единице вронскиана функций $\psi_n(z), \chi_n(z)$. В [4] S-аппроксимация соответствует предположению

$$g_{1,2}(m,x) = 1. \tag{4}$$

Различные модификации S-аппроксимации основаны на анализе поведения величин (3) и использовании дополнительной информации о свойствах поля рассеянного излучения [6].

3. S-АППРОКСИМАЦИЯ ФАКТОРА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОСЛАБЛЕНИЯ ДЛЯ ПОГЛОЩАЮЩИХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

В рамках S-аппроксимации в [4] получено выражение для фактора эффективности ослабления

$$Q_{\text{ext}}^{rmSA} = \frac{2}{x^2}\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(a_{1n} + a_{2n}) \tag{5}$$

в форме[1]

$$Q_{\rm ext}(m,x) = \frac{1}{2|m|}{\rm Re}\left[(m^2+1)^2 + \frac{\omega(m,\rho)-\omega(-m,R)}{2m}\right], \tag{6}$$

где

$$\rho = 2(m-1)x \qquad R = 2(m+1)x, \tag{7}$$

$$\omega(m,z) = \left[a(m) + \frac{a_0(m)}{z^2}\right]{\rm ei}(z) + ia_1(m)\frac{\exp(-iz)}{z} + a_2(m)\frac{1-\exp(-iz)}{z^2}, \tag{8}$$

$${\rm ei}(z) = \int_0^z \frac{1-\exp(-it)}{t}{\rm d}t, \tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a(m) = (m^2-1)^2(m^2+1) \\ a_0(m) = -2(m^2-1)^2(m-1)^2 \\ a_1(m) = (m+1)^2(m^4-2m^3-2m^2-2m+1) \\ a_2(m) = -a_0(m) - a_1(m). \end{array}\right. \tag{10}$$

Функция ${\rm ei}(z)$ выражается через интегральную показательную функцию ${\rm Ein}(iz)$ [7]

$${\rm ei}(z) = {\rm Ein}(iz), \tag{11}$$

где

$${\rm Ein}(z) = \int_0^z \frac{1-\exp(-t)}{t}{\rm d}t. \tag{12}$$

При больших значениях z справедлива асимптотика [7]

$${\rm Ein}(z) = \gamma + \ln z + \exp(-z)\left(\frac{0.711093}{z+0.415775} + \frac{0.278518}{z+2.29428} + \frac{0.010389}{z+6.2900} + \epsilon\right), \tag{13}$$

где $|\epsilon| < 3\cdot 10^{-6}$, если ${\rm Re}z > 10$ или ${\rm Im}z > 10$ $\gamma = 0.577216$ – постоянная Эйлера. При малых значениях z удобно использовать разложение интегральной показательной функции в степенной ряд

$${\rm Ein}(z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{nn!}. \tag{14}$$

4. S-АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ СЛАБО ПОГЛОЩАЮЩИХ ШАРОВ

Применим S-аппроксимацию для расчета факторов $Q_{\rm ext}(m,x)$ для слабо поглощающих частиц, используя условия приближения Релея-Ганса [1]

$$|m-1| \ll 1\ , \quad \rho \ll 1\,. \tag{15}$$

[1]Формула (6) в [4] записана неточно: вместо R стоит $-R$.

С этой целью перепишем формулу (6) в виде (с точностью до множителя $1/|m|$)

$$Q_{\rm ext} = Q_{\rm S}^{+} + Q_{\rm S}^{-},$$

$$Q_{\rm S}^{+} = \mathrm{Re}\left[\frac{(m^2+1)^2}{2} + \frac{\omega^{+}(m,\rho)-\omega^{+}(-m,R)}{4m}\right], \tag{16}$$

$$Q_{\rm S}^{-} = \mathrm{Re}\left[i\frac{\omega^{-}(m,\rho)-\omega^{-}(-m,R)}{4m}\right].$$

Здесь

$$\omega^{+}(m,z) = \left[a(m) + \frac{a_0(m)}{z^2}\right]\mathrm{Cin}(z) + a_1(m)\mathrm{s}_z + a_2(m)\mathrm{c}_z,$$

$$\omega^{-}(m,z) = \left[a(m) + \frac{a_0(m)}{z^2}\right]\mathrm{Si}(z) + a_1(m)\sigma_z + a_2(m)\gamma_z, \tag{17}$$

где использованы соотношения (10) и обозначения

$$\mathrm{Cin}(z) = \int_0^z \frac{1-\cos t}{t}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{s}_z = \frac{\sin z}{z}, \qquad \mathrm{c}_z = \frac{1-\cos z}{z^2},$$

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \qquad \sigma_z = \frac{\cos z}{z}, \qquad \gamma_z = \frac{\sin z}{z^2}. \tag{18}$$

В формуле (16) [в соответствии с условиями (15)] удержим только главные части входящих в нее функций. Тогда имеем

$$\begin{cases} (m+1)^2 = 4 + 8(m-1) + 8(m-1)^2\,, & \\ m^{-1}a(m) = m^{-1}a(-m) = 8(m-1)^2\,, & \\ m^{-1}a_0(m) = -8(m-1)^4\,, & m^{-1}a_0(-m) = -32(m-1)^2\,, \\ m^{-1}a_1(m) = -16 - 32(m-1) - 12(m-1)^2\,, & m^{-1}a_1(-m) = 4(m-1)^2\,, \\ m^{-1}a_2(m) = 16 + 32(m-1) + 12(m-1)^2\,, & m^{-1}a_2(-m) = 28(m-1)^2\,, \end{cases} \tag{19}$$

и

$$\mathrm{Cin}(\rho) = \frac{\rho^2}{4}, \qquad \mathrm{s}_\rho = 1 - \frac{\rho^2}{6}, \qquad \mathrm{c}_\rho = \frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{24},$$

$$\mathrm{Si}(\rho) = \rho, \qquad \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{2}, \qquad \gamma_\rho = \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{6}. \tag{20}$$

Используя (19) и (20), получаем

$$\frac{(m^2+1)^2}{2} + \frac{\omega^{+}(m,\rho)}{4m} = 5(m-1)^2 + \frac{\rho^2}{2},$$

$$\frac{\omega^{-}(m,\rho)}{4m} = \rho\frac{4+8(m-1)}{3},$$

$$-\frac{\omega^{+}(-m,R)}{4m} = (m-1)^2\left[\left(\frac{8}{R^2}-2\right)\mathrm{Cin}(R) - \mathrm{s}_R - 7\mathrm{c}_R\right], \tag{21}$$

$$-\frac{\omega^{-}(-m,R)}{4m} = (m-1)^2\left[\left(\frac{8}{R^2}-2\right)\mathrm{Si}(R) - \sigma_R - 7\gamma_R\right].$$

С учетом формул (7), (16), (17) и (21) имеем

$$Q_{\mathrm{S}}^{+} = \mathrm{Re}\left\{(m-1)^2\left[\frac{5}{2}+2x^2+\left(\frac{8}{R^2}-2\right)\mathrm{Cin}(R)-\mathrm{s}_R-7\mathrm{c}_R\right]\right\},$$
$$Q_{\mathrm{S}}^{-} = \frac{8}{3}kx+\frac{32}{3}(n-1)kx+\mathrm{Re}\left\{i(m-1)^2\left[\left(\frac{8}{R^2}-2\right)\mathrm{Si}(R)-\sigma_R-7\gamma_R\right].\right\} \qquad (22)$$

Учитывая условие (15) и соотношение [см.(7)]

$$R = 4x+\rho, \qquad (23)$$

в первом приближении находим

$$Q_{\mathrm{S}}^{+} = \left[(n-1)^2-k^2\right]\left[\frac{5}{2}+2x^2+\left(\frac{1}{2x^2}-2\right)\mathrm{Cin}(4x)-\mathrm{s}_{4x}-7\mathrm{c}4x\right],$$
$$Q_{\mathrm{S}}^{-} = \frac{8}{3}kx. \qquad (24)$$

На основании равенства [7]

$$\mathrm{Cin}(x) = \gamma+\ln x-\int_{\infty}^{x}\frac{\cos t)}{t}\mathrm{d}t \qquad (25)$$

можно сделать вывод, что выражения (24) для $Q_{\mathrm{S}}^{+}(m,x)$ и $Q_{\mathrm{S}}^{-}(m,x)$ совпадают соответственно с известными представлениями факторов эффективности рассеяния и поглощения в рамках теории Релея-Ганса [1]. Учет в (16) вклада от слагаемых более высоких степеней малости относительно $(m-1)$ и ρ позволяет уточнить приближение Релея-Ганса. Однако практически расчет факторов удобнее осуществлять, непосредственно используя S-аппроксимацию.

5. МОДИФИЦИРОВАННАЯ S-АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ ПОГЛОЩАЮЩИХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Пусть

$$\mathcal{S}(m) = \lim_{x\to\infty} Q_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{SA}}(m,x). \qquad (26)$$

Используя соотношения (6) – (13), находим

$$\mathcal{S}(m) = \frac{1}{2|m|}\mathrm{Re}\left[(m^2+1)^2+\frac{(m^2+1)(m^2-1)^2}{2m}\ln\frac{m-1}{m+1}\right]. \qquad (27)$$

Известно [1 – 3], что коротковолновая асимптотика фактора эффективности ослабления $Q_{\mathrm{ext}}(m,x)$ характеризуется соотношением

$$\lim_{x\to\infty} Q_{\mathrm{ext}}(m,x) = 2. \qquad (28)$$

Согласно (26) и (28), модифицированная S-аппроксимация (improved S-approximation, ISA) для фактора эффективности ослабления с учетом поправки коротковолновой асимптотики может быть представлена в виде

$$Q_{\rm ext}^{\rm ISA}(m,x) = g(m,x) Q_{\rm ext}^{\rm SA}(m,x). \tag{29}$$

Здесь

$$g(m,x) = 1 - \frac{\mathcal{S}(m)-2}{\mathcal{S}(m)} f(m,x), \tag{30}$$

где функция $f(m,x)$ должна удовлетворять условию

$$\lim_{x\to\infty} f(m,x) = 1. \tag{31}$$

В свою очередь, конкретный вид функции $f(m,x)$ определяется на основе исследования приближений (3), в которых функции $g_{1,2}(m,x)$ не должны зависеть от n. Результаты анализа этих приближений показывают, что соотношение для $f(m,x)$ можно записать в виде

$$f(m,x) = \exp\left[-\frac{0.01\,(1-8{\rm Im}(m))\,x(|m|)\,\exp(4|m|)}{x}\right], \tag{32}$$

где

$$x(m) \approx 290\, m^{-11}. \tag{33}$$

При $m \le 1.5$ выражение (33) ограничивает область $0 \le x < x(m)$, в которой ошибка при расчетах факторов ослабления по формуле (6) не превосходит 5% [6]. На основании соотношений (29), (30), (32) и (33) получим

$$Q_{\rm ext}^{\rm ISA}(m,x) = \left[1 - \frac{\mathcal{S}(m)-2}{\mathcal{S}(m)} \exp\left(-\frac{2.9\,(1-8{\rm Im}(m))\,\exp(4|m|)}{|m|^{11}x}\right)\right] Q_{\rm ext}^{\rm SA}(m,x). \tag{34}$$

Отметим, что приближение (34) соответствует выбору в (3) функций

$$g_{1,2}(m,x) = g(m,x), \tag{35}$$

где $g(m,x)$ определяется по формуле (30).

В случае непоглощающихся шаров ($n = {\rm Re}(m)$) из (34) находим

$$Q_{\rm ext}^{\rm ISA}(n,x) = \left[1 - \frac{\mathcal{S}(n)-2}{\mathcal{S}(n)} \exp\left(-\frac{2.9\,\exp(4n)}{n^{11}x}\right)\right] Q_{\rm ext}^{\rm SA}(n,x). \tag{36}$$

Этот результат был получен в [6]. Там же представлены результаты расчетов, показавшие, что для показателей преломления $n \le 2$ приближение (36) дает удовлетворительную точность при любых значениях параметрах x.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Модифицированная S-аппроксимация для фактора эффективности ослабления (34) может быть записана в виде

$$Q_{\rm ext}^{\rm ISA}(m,x) = \left[1 - \frac{\mathcal{S}(m)-2}{\mathcal{S}(m)} \exp\left(-\frac{t(m)}{x}\right)\right] Q_{\rm ext}^{\rm SA}(m,x). \tag{37}$$

Здесь факторы $Q_{\rm ext}^{\rm ISA}(m,x)$ вычисляются по формулам (6) – (10), $\mathcal{S}(m)$ дается формулой (27) и

$$t(m) = \frac{2.9\,(1+8k)\,\exp(4|m|)}{|m|^{11}}, \qquad m = n - ki, \qquad (k>0). \tag{38}$$

Соотношение (37) проверялось в области значений действительных и мнимых частей показателя преломления

$$1.0 < n \le 2.0, \qquad 0 \le k \le 0.5 \tag{39}$$

и различных значений параметра x. На рис. 1, 2 и 4 приведены факторы эффективности ослабления, рассчитанные по теории Ми и в рамках модифицированной S-аппроксимации. На рис. 1 и 2 иллюстрируется влияние изменений действительной и мнимой частей показателя преломления соответственно. Из них следует, что S-аппроксимация достаточно хорошо воспроизводит изменения факторов $Q_{\rm ext}$ даже для таких значительных показателей преломления как $m = 2.00 - 0.20i$ или $m = 1.50 - 0.50i$. При этом, как следует из рис. 3, относительные ошибки вычисления факторов $Q_{\rm ext}$ для S-аппроксимации не превосходят $\pm 10\%$.

На рис. 4 для шаров с показателями преломления $m = 1.30 - 0.10i$ изображены зависимости $Q_{\rm ext}$ от x, вычисленные по теории Ми, в рамках S-аппроксимации и по аппроксимации ван де Хюлста [1]

$$Q_{\rm ext}^{\rm vdHA}(m,x) = 2 - 4s_\rho + 4c_\rho\,. \tag{40}$$

На рис. 5 представлены относительные ошибки для обеих аппроксимаций. Отметим, что аналогичные результаты получаются и для других значений n и k.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модифицированная S-аппроксимация дает хорошую точность при расчетах факторов эффективности ослабления $Q_{\rm ext}$ широком диапазоне значений комплексного показателя преломления $m = n - ki$ [см. (39)]. Показатели преломления многих веществ, представляющих интерес для оптики аэрозолей, гидрозолей, космической пыли, биологических частиц заключены в этих границах. Малые расчетные ошибки для S-аппроксимации объясняются тем, что для нее сохраняются основные аналитические свойства точного решения Ми. Кроме этого, при выполнении дополнительных условий [см. (15)] возможен переход от S-аппроксимации к различным известным приближениям для факторов эффективности.

Модифицированную S-аппроксимацию удобно применять при решении обратных задач в теории рассеяния света. Равномерная (по параметру x) близость факторов дает возможность заменять функцией $Q_{\rm ext}^{\rm ISA}(m,x)$ ядро интегрального уравнения первого рода, используемое для оценки микроструктуры дисперсных систем по известным оптическим данным. Простая аналитическая структура выражений для $Q_{\rm ext}^{\rm ISA}(m,x)$ позволяет решить это интегральное уравнение и, тем самым, рассматривать не плохо обусловленную (некорректную) обратную задачу, а корректную.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант 99/652).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами. ИЛ. М., 1961. 536 с.
2. *Шифрин К.С.* Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат. М., 1951. 288 с.
3. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. Мир. М., 1986. 660 с.
4. *Perelman A.Y.* Appl. Opt. 1991. V. 30. N 4. P. 475–484.
5. *Perelman A.Y.* Appl. Opt. 1979. V. 18. N13. P. 2307–2314.
6. *Perelman A.Y., Voshchinnikov N.V.* J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 2000 (submitted).
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. Наука. М., 1979. 832 с.

Подписи под рисунками к статье А.Я. Перельмана и Н. В. Вощинникова "S-АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ С КОМПЛЕКСНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ"

Рис. 1. Зависимость факторов эффективности ослабления, вычисленных по теории Ми и с помощью модифицированной S-аппроксимации от параметра x. Иллюстрируется эффект изменения действительной части показателя преломления.

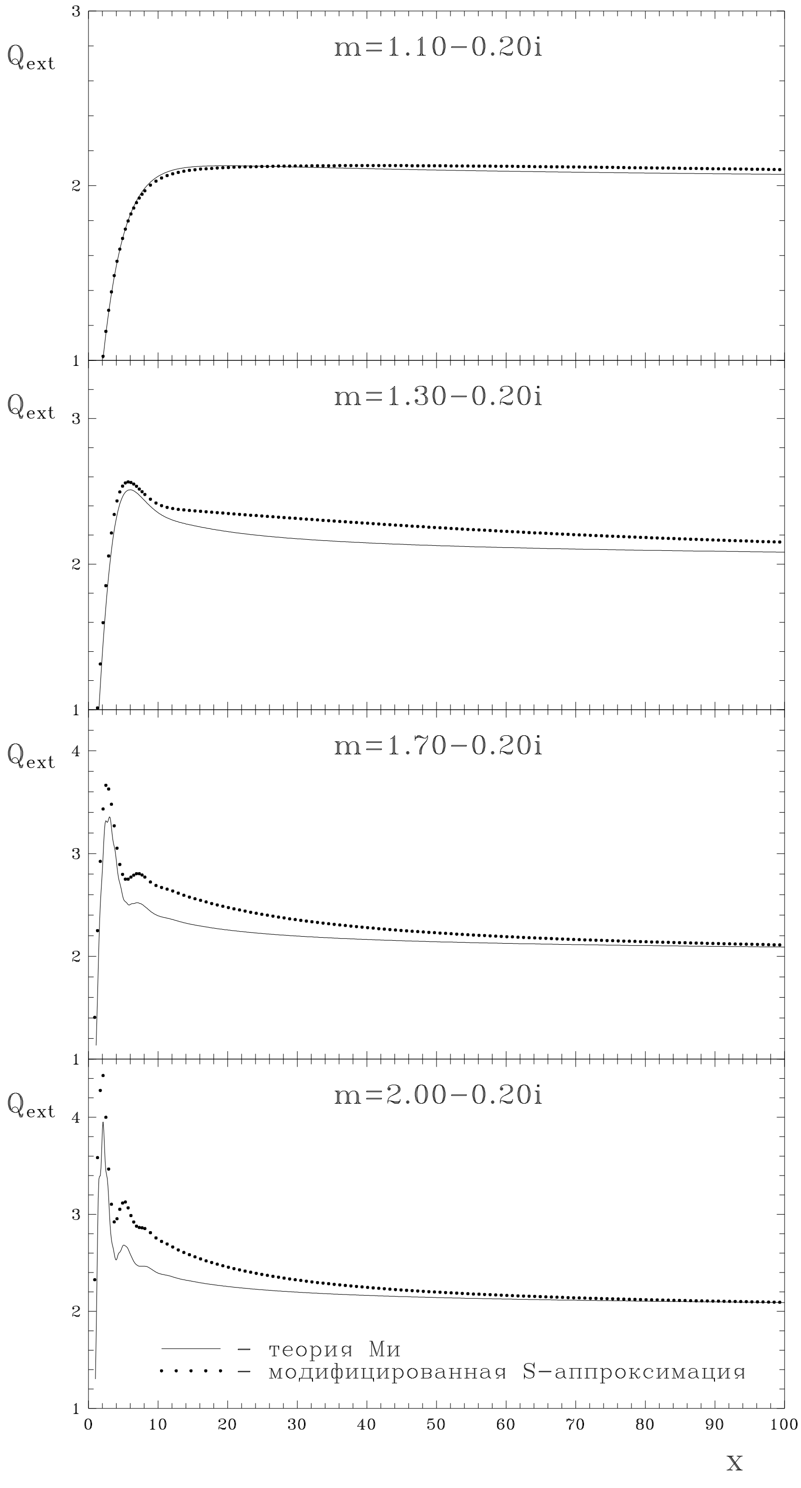
Рис. 2. То же, что на рис. 1, но иллюстрируется эффект изменения мнимой части показателя преломления.

Рис. 3. Относительная погрешность при расчетах факторов эффективности ослабления с помощью модифицированной S-аппроксимации для случаев, показанных на рис. 2.

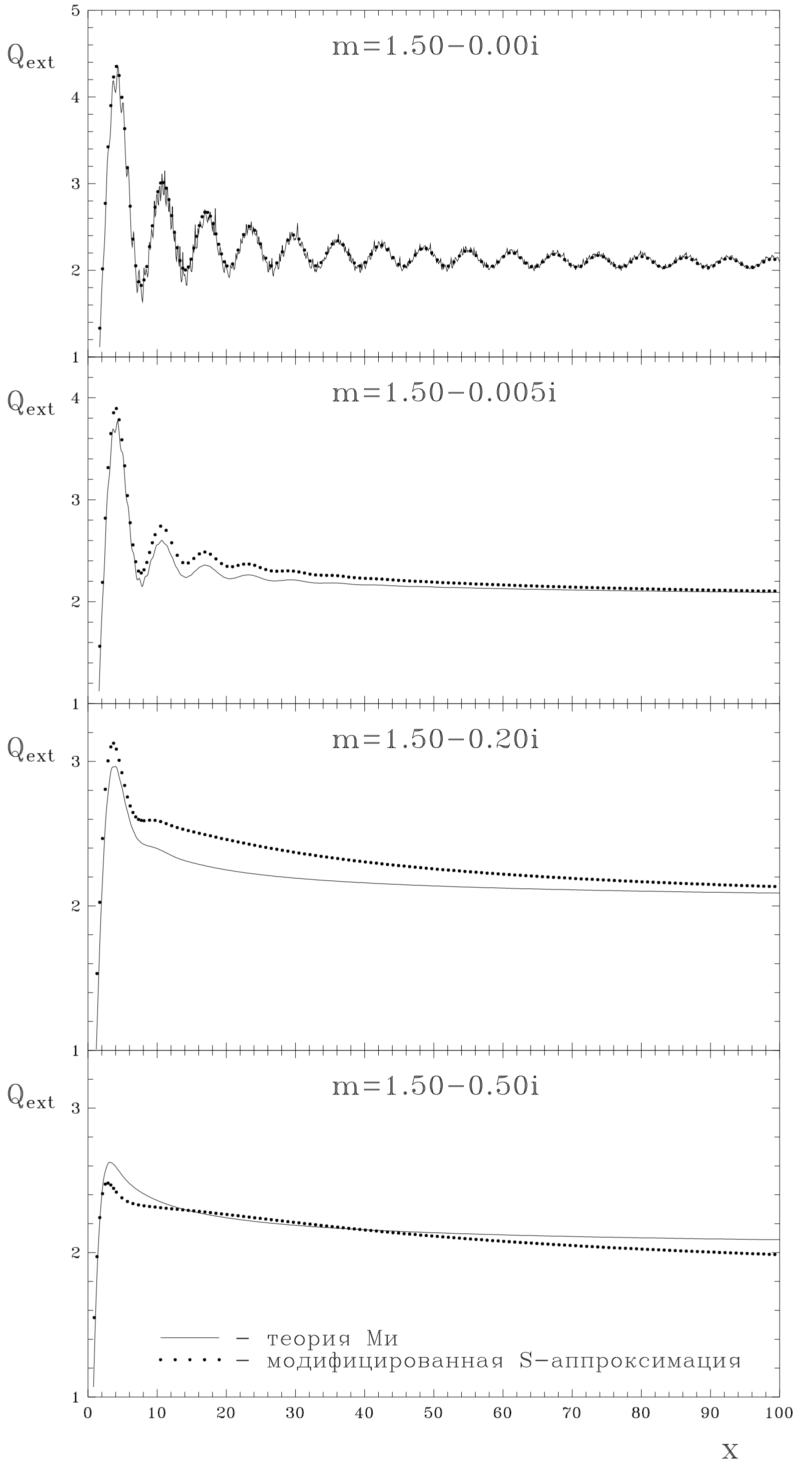
Рис. 4. Зависимость факторов эффективности ослабления от параметра x. Факторы рассчитывались по теории Ми, S-аппроксимации и с использованием приближения ван де Хюлста.

Рис. 5. Относительная погрешность при расчетах факторов эффективности ослабления по S-аппроксимации и для приближения ван де Хюлста.

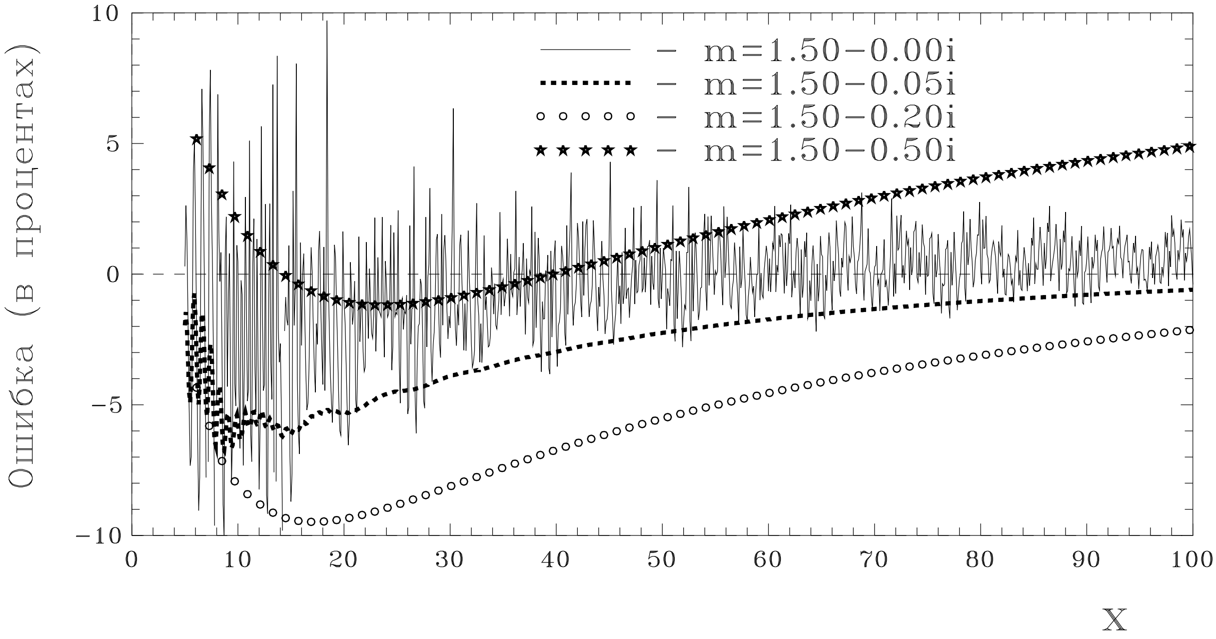
А.Я. Перельман, Н. В. Вощинников: Рис. 1.



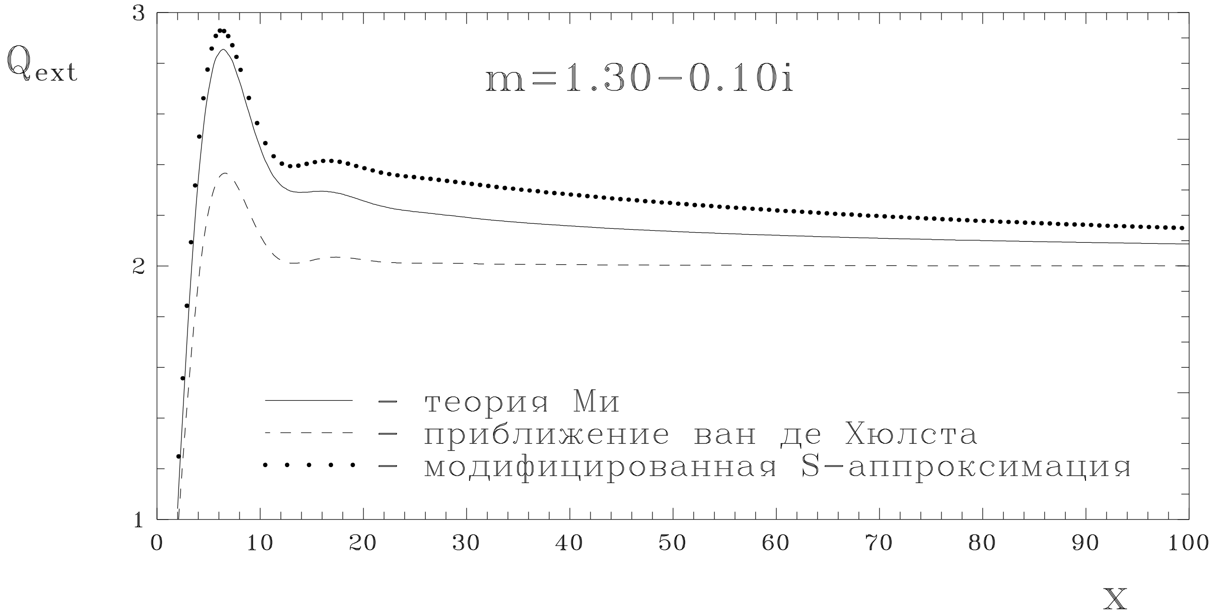
А.Я. Перельман, Н. В. Вощинников: Рис. 2.



А.Я. Перельман, Н. В. Вощинников: Рис. 3.



А.Я. Перельман, Н. В. Вощинников: Рис. 4.



А.Я. Перельман, Н. В. Вощинников: Рис. 5.