РАССЕЯНИЕ СВЕТА ОДНОРОДНЫМИ И МНОГОСЛОЙНЫМИ ЭЛЛИПСОИДАМИ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2001 г. В. Г. Фарафонов*, В. Б. Ильин и М. С. Прокопьева****

**Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия*

*** Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 28.06.2001 г.

Подробно рассмотрено квазистатическое приближение для однородных и многослойных эллипсоидальных частиц. Даны выражения для элементов амплитудной матрицы рассеяния, а также сечений рассеяния и поглощения при произвольной ориентации частиц относительно падающего излучения. Точность и область применимости приближения исследованы для элементов матрицы рассеяния поглощающих частиц. Сравнение нескольких приближенных и точных методов показало, что квазистатическое приближение дает хорошие результаты (существенно предпочтительнее приближений Рэлея и Рэлея-Ганса), если отношение наибольшего размера частицы (или границ основного слоя) к наименьшему превышает $\sim$3. Предложено новое правило теории эффективной среды для многослойных эллипсоидальных частиц, адекватно учитывающее их структуру.

ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние света конечными несферическими частицами является важной проблемой, с которой сталкиваются при рассмотрении многих прикладных задач в различных областях науки и техники. Эллипсоидальная модель подобных частиц представляется одной из наиболее общих, поскольку в этом случае, кроме дифракционного параметра $x_{\rm V} = 2\pi r_{\rm V}/\lambda$ ($r_{\rm V}$ – радиус эквиобъемного шара, λ – длина волны излучения), существует еще два независимых параметра: отношения полуосей a/c и b/c, которые характеризуют отклонение формы частицы от сферической в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

В настоящее время вычисление характеристик рассеянного излучения для эллипсоидов на основе строгих методов решения весьма трудоемко. В силу этого представляют большой интерес приближенные решения этой задачи: рэлеевское приближение, приближения Рэлея-Ганса и ван де Хюлста и др. [1–4]. Ниже рассматривается квазистатическое приближение для однородных и многослойных эллипсоидальных частиц. Оно является обобщением приближений Рэлея и Рэлея-Ганса, что выражается в представлении внутреннего поля в виде падающей плоской волны (приближение Рэлея-Ганса) с учетом поляризуемости частицы (приближение Рэлея). Впервые, видимо, подобный подход был использован для тонких цилиндров [5] и сфероидов (эллипсоидов вращения) [6]. К сожалению, квазистатическое приближение применяется весьма редко и, в основном, для сфероидальных частиц и их ансамблей [7–9]. Для многослойных частиц приближение ранее не рассматривалось.

Лишь недавно было проведено первое систематическое исследование области применимости квазистатического приближения для сфероидальных частиц [10]. Оказалось, что исключительно хорошие результаты оно дает для частиц, форма которых значительно отклоняется от сферической. Это подтверждается тем, что данное приближение для сильно вытянутых или сплюснутых однородных сфероидов дает главный член асимптотики рассеянного поля относительно отношения их полуосей [8].

В данной статье мы распространяем квазистатическое приближение на многослойные эллипсоидальные частицы и приводим выражения для элементов амплитудной матрицы рассеяния и сечений рассеяния и поглощения как в общем случае, так и при распространении плоской волны вдоль одной из осей частицы. Результаты работы [10] дополняются рассмотрением области применимости приближения для элементов матрицы рассеяния для однородных частиц с поглощением. Сопоставляются результаты численных расчетов, проведенных для многослойных частиц как на основе квазистатического и других приближений [11–12], так и строгих методов [13–15], и обсуждается новое правило теории эффективной среды для малых по сравнению с длиной волны многослойных эллипсоидальных частиц.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем две декартовые системы координат с началом отсчета в центре эллипсоидальной частицы. В одной из них (X, Y, Z) главные оси эллипсоида совпадают с координатными осями. В другой (x, y, z) ось z параллельна направлению распространения падающего излучения. Матрица преобразования векторов при переходе от системы (x, y, z) к системе (X, Y, Z) имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} (\vec{l}_{\mathrm{X}}, \vec{l}_{\mathrm{x}}) & (\vec{l}_{\mathrm{X}}, \vec{l}_{\mathrm{y}}) & (\vec{l}_{\mathrm{X}}, \vec{l}_{\mathrm{z}}) \\ (\vec{l}_{\mathrm{Y}}, \vec{l}_{\mathrm{x}}) & (\vec{l}_{\mathrm{Y}}, \vec{l}_{\mathrm{y}}) & (\vec{l}_{\mathrm{Y}}, \vec{l}_{\mathrm{z}}) \\ (\vec{l}_{\mathrm{Z}}, \vec{l}_{\mathrm{x}}) & (\vec{l}_{\mathrm{Z}}, \vec{l}_{\mathrm{y}}) & (\vec{l}_{\mathrm{Z}}, \vec{l}_{\mathrm{z}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\chi\cos\gamma - \sin\chi\sin\gamma & \cos\beta\sin\chi\cos\gamma + \cos\chi\sin\gamma & -\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\cos\chi\sin\gamma - \sin\chi\cos\gamma & -\cos\beta\sin\chi\sin\gamma + \cos\chi\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\chi & \sin\beta\sin\chi & \cos\beta \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1}$$

где χ, β, γ – углы Эйлера [16], которые определяют ориентацию системы (X, Y, Z) относительно системы (x, y, z). Отметим, что β, χ – обычные полярные координаты оси эллипсоида относительно лабораторной системы координат (x, y, z). Аналогично $\beta, \pi - \gamma$ – направления падения плоской волны в системе (X, Y, Z), жестко связанной с частицей. Здесь нужно учесть, что матрица A является ортогональной, поэтому обратная матрица совпадает с транспонированной матрицей $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

Тензор поляризуемости эллипсоидальной частицы в лабораторной системе координат (x, y, z) вычисляется по формулам [2]

$$\alpha = A^{\mathrm{T}} \tilde{\alpha} A, \tag{2}$$

где $\tilde{\alpha}$ – тензор поляризуемости в системе $(X,\, Y,\, Z)$, связанной с осями эллипсоида,

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\alpha}_3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Величины $\tilde{\alpha}_j$ для однородных частиц определяются следующим образом [1,2]:

$$\tilde{\alpha}_j = (\varepsilon - 1) V K_j,\ \ K_j = \frac{1}{1 + L_j(\varepsilon - 1)},\ \ j = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость вещества частицы (магнитная проницаемость $\mu = 1$; считаем, что частица находится в вакууме, т.е. $\varepsilon_0 = 1, \mu_0 = 1$), $V = \frac{4}{3}\pi abc$ – объем эллипсоида с полуосями a, b и c. Геометрические факторы эллипсоида вычисляются по формуле

$$L_1 = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q}{(a^2 + q) f(q)}, \tag{5}$$

где $f(q) = [(a^2+q)(b^2+q)(c^2+q)]^{\frac{1}{2}}$. Для определения L_2 и L_3 в выражении (5) надо заменить (a^2+q) на (b^2+q) и (c^2+q) соответственно [1,2]. Отметим, что $L_1+L_2+L_3 = 1$. Выражения для $\tilde{\alpha}_j$ в случае многослойных частиц приведены в Приложении.

В квазистатическом приближении поле внутри частицы аппроксимируется падающим полем $\vec{E}^{(0)}$ (как в приближении Рэлея-Ганса) с учетом поляризуемости частицы (как в приближении Рэлея)

$$\vec{E}^{(2)} = K_1 \left(\vec{E}^{(0)}, \vec{i}_{\mathrm{X}}\right) \vec{i}_{\mathrm{X}} + K_2 \left(\vec{E}^{(0)}, \vec{i}_{\mathrm{Y}}\right) \vec{i}_{\mathrm{Y}} + K_3 \left(\vec{E}^{(0)}, \vec{i}_{\mathrm{Z}}\right) \vec{i}_{\mathrm{Z}}, \tag{6}$$

где $(\vec{i}_{\mathrm{X}}, \vec{i}_{\mathrm{Y}}, \vec{i}_{\mathrm{Z}})$ – орты декартовой системы (X, Y, Z).

В монографии [2] приведены формулы для элементов амплитудной матрицы рассеяния в рамках приближения Рэлея. Поскольку квазистатическое приближение является обобщением приближений Рэлея и Рэлея-Ганса, отличаясь от первого наличием форм-фактора, соответствующего приближению Рэлея-Ганса [3–4], то элементы амплитудной матрицы рассеяния можно записать в виде $(\theta, \varphi$ – сферические углы в системе $(x, y, z))$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi} \left(\alpha_{11} \sin^2\varphi - 2\alpha_{12} \sin\varphi \cos\varphi + \alpha_{22} \cos^2\varphi\right) G(u), \\
S_2 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi} \Big[\cos\theta \left(\alpha_{11} \cos^2\varphi + 2\alpha_{12} \sin\varphi \cos\varphi + \alpha_{22} \sin^2\varphi\right) \\
&\quad - \sin\theta \left(\alpha_{13} \cos\varphi + \alpha_{23} \sin\varphi\right)\Big] G(u), \\
S_3 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi} \Big[\cos\theta \left(\alpha_{11} \sin\varphi \cos\varphi + \alpha_{12}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - \alpha_{22} \sin\varphi \cos\varphi\right) \\
&\quad - \sin\theta \left(\alpha_{13} \sin\varphi - \alpha_{23} \cos\varphi\right)\Big] G(u), \\
S_4 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi} \left[\alpha_{11} \sin\varphi \cos\varphi + \alpha_{12}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - \alpha_{22} \sin\varphi \cos\varphi\right] G(u),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число в вакууме, λ_0 – длина волны падающего излучения,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \sum_{k=1}^{3} \tilde{\alpha}_k a_{ki} a_{kj} \tag{8}$$

– компоненты тензора поляризуемости α в системе координат (x, y, z), связанной с направлением распространения падающего излучения, при этом a_{ki} – элементы матрицы A (см. выражение (1)). Форм-фактор $G(u)$ имеет вид [3,4]

$$G(u) = \frac{3}{u^3}(\sin u - u \cos u), \tag{9}$$

где

$$u = 2k_0 \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{a^2(\vec{i}_\mathrm{X}, \vec{i}_\mathrm{b})^2 + b^2(\vec{i}_\mathrm{Y}, \vec{i}_\mathrm{b})^2 + c^2(\vec{i}_\mathrm{Z}, \vec{i}_\mathrm{b})^2}, \tag{10}$$

а $(\vec{i}_\mathrm{X}, \vec{i}_\mathrm{b})$, $(\vec{i}_\mathrm{Y}, \vec{i}_\mathrm{b})$, $(\vec{i}_\mathrm{Z}, \vec{i}_\mathrm{b})$ – косинусы углов между соответствующими осями эллипсоида и биссектрисой дополнительного угла рассеяния (т.е. угла между направлением рассеянного излучения и направлением, противоположным направлению распространения падающего излучения). Отметим, что эти косинусы удовлетворяют соотношению

$$(\vec{i}_\mathrm{X}, \vec{i}_\mathrm{b})^2 + (\vec{i}_\mathrm{Y}, \vec{i}_\mathrm{b})^2 + (\vec{i}_\mathrm{Z}, \vec{i}_\mathrm{b})^2 = 1. \tag{11}$$

Направление биссектрисы дополнительного угла рассеяния (орт $\vec{i}_\mathrm{b}$) определяется полярными координатами $(\frac{\pi+\theta}{2}, \varphi)$ в лабораторной системе (x, y, z). Учитывая соотношение (1), находим косинусы углов между осями эллипсоида и биссектрисой

$$\begin{aligned}
(\vec{i}_\mathrm{X}, \vec{i}_\mathrm{b}) &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\beta\cos\gamma + \cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\beta\cos\gamma\cos(\varphi-\chi) + \sin\gamma\sin(\varphi-\chi)\right], \\
(\vec{i}_\mathrm{Y}, \vec{i}_\mathrm{b}) &= -\sin\frac{\theta}{2}\sin\beta\sin\gamma - \cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\beta\sin\gamma\cos(\varphi-\chi) - \cos\gamma\sin(\varphi-\chi)\right], \\
(\vec{i}_\mathrm{Z}, \vec{i}_\mathrm{b}) &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\beta\cos(\varphi-\chi) - \sin\frac{\theta}{2}\cos\beta.
\end{aligned} \tag{12}$$

Если эллипсоид является сфероидом (т.е. $a = b$), то $\gamma = \pi$ и выражения (12) преобразуются в формулы, приведенные в монографии [4].

В частном случае, когда плоская волна падает вдоль оси Z эллипсоида ($\beta = 0$), получим

$$\begin{aligned}
(\vec{i}_\mathrm{X}, \vec{i}_\mathrm{b}) &= \cos\frac{\theta}{2}\cos(\varphi-\chi-\gamma), \\
(\vec{i}_\mathrm{Y}, \vec{i}_\mathrm{b}) &= \cos\frac{\theta}{2}\sin(\varphi-\chi-\gamma), \\
(\vec{i}_\mathrm{Z}, \vec{i}_\mathrm{b}) &= -\sin\frac{\theta}{2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Будем считать, что $\gamma = \chi = 0$. В этом случае матрица перехода A (см. ф-лу (1)) становится единичной, а тензор поляризуемости α представляется в диагональном виде, т.е. совпадает с $\tilde{\alpha}$. Амплитудная матрица рассеяния записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi}\left(\tilde{\alpha}_1\sin^2\varphi+\tilde{\alpha}_2\cos^2\varphi\right)G(u),\\
S_2 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi}\left(\tilde{\alpha}_1\cos^2\varphi+\tilde{\alpha}_2\sin^2\varphi\right)\cos\theta\,G(u),\\
S_3 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi}\left(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2\right)\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,G(u),\\
S_4 &= \frac{-ik_0^3}{4\pi}\left(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2\right)\sin\varphi\cos\varphi\,G(u),
\end{aligned}\tag{14}$$

где аргумент функции $G(u)$ имеет вид

$$u=2k_0\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)\cos^2\frac{\theta}{2}+c^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.\tag{15}$$

Амплитудная матрица рассеяния связывает рассеянное поле с падающим [2]

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel\,\mathrm{s}} \\ E_{\perp\,\mathrm{s}} \end{pmatrix}=\frac{e^{ik_0(r-z)}}{-ik_0r}\begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{\parallel\,\mathrm{i}} \\ E_{\perp\,\mathrm{i}} \end{pmatrix},\tag{16}$$

где $E_{\parallel\,\mathrm{i}}, E_{\perp\,\mathrm{i}}$ и $E_{\parallel\,\mathrm{s}}, E_{\perp\,\mathrm{s}}$ – параллельные и перпендикулярные составляющие падающего и рассеянного полей относительно плоскости рассеяния, которую образуют орты вдоль направлений падающего и рассеянного излучений. Обозначим через $E_{\mathrm{x\,i}}$ и $E_{\mathrm{y\,i}}$ декартовые компоненты напряженности электрического падающего поля $\vec{E}^{(0)}$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
E_{\parallel\,\mathrm{i}} &= \cos\varphi E_{\mathrm{x\,i}}+\sin\varphi E_{\mathrm{y\,i}},\\
E_{\perp\,\mathrm{i}} &= \sin\varphi E_{\mathrm{x\,i}}-\cos\varphi E_{\mathrm{y\,i}}.
\end{aligned}\tag{17}$$

Сечение рассеяния определяется интегрированием интенсивности рассеянного излучения по бесконечно удаленной сфере [2]

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sca}} &= \int_\Omega\int\left(|E_{\parallel\,\mathrm{s}}|^2+|E_{\perp\,\mathrm{s}}|^2\right)d\omega\\
&= \frac{1}{k_0^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(|S_2E_{\parallel\,\mathrm{i}}+S_3E_{\perp\,\mathrm{i}}|^2+|S_4E_{\parallel\,\mathrm{i}}+S_1E_{\perp\,\mathrm{i}}|^2\right)\sin\theta d\theta d\varphi.
\end{aligned}\tag{18}$$

Для x-поляризованной плоской волны из соотношений (7) и (17)–(18) получим

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sca,x}} &= \frac{k_0^4}{16\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[|\alpha_{11}\sin\varphi-\alpha_{12}\cos\varphi|^2+|\left(\alpha_{11}\cos\varphi+\alpha_{12}\sin\varphi\right)\cos\theta\\
&\quad-\alpha_{13}\sin\theta|^2\Big]G^2(u)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.
\end{aligned}\tag{19}$$

Аналогично для y-поляризованной плоской волны имеем

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sca,y}} &= \frac{k_0^4}{16\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[|\alpha_{22}\cos\varphi-\alpha_{12}\sin\varphi|^2+|\left(\alpha_{22}\sin\varphi+\alpha_{12}\cos\varphi\right)\cos\theta\\
&\quad-\alpha_{23}\sin\theta|^2\Big]G^2(u)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.
\end{aligned}\tag{20}$$

В формулах (19) и (20) аргумент функции $G(u)$ определяется выражениями (10), (12).

В частном случае $\beta = 0$ получим

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sca,x}} &= \frac{k_0^4}{16\pi^2}|\tilde{\alpha}_1|^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi\right) G^2(u)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \\
C_{\mathrm{sca,y}} &= \frac{k_0^4}{16\pi^2}|\tilde{\alpha}_2|^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi\right) G^2(u)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,
\end{aligned} \tag{21}$$

где аргумент функции $G(u)$ определяется по формуле (15).

В приближении Рэлея форм-фактор $G(0) = 1$. В результате выражения (19)–(20) принимают вид

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sca,x}} &= \frac{k_0^4}{6\pi}\left(|\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{13}|^2\right), \\
C_{\mathrm{sca,y}} &= \frac{k_0^4}{6\pi}\left(|\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{22}|^2 + |\alpha_{23}|^2\right),
\end{aligned} \tag{22}$$

а выражения (21) упрощаются в еще большей степени

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sca,x}} &= \frac{k_0^4}{6\pi}|\tilde{\alpha}_1|^2, \\
C_{\mathrm{sca,y}} &= \frac{k_0^4}{6\pi}|\tilde{\alpha}_2|^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

Отметим, что в силу ортогональности матрицы A (см. (1)) выражения (22) преобразуются к известному виду [2]

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{sca,x}} &= \frac{k_0^4}{6\pi}\left(|\tilde{\alpha}_1|^2 a_{11}^2 + |\tilde{\alpha}_2|^2 a_{21}^2 + |\tilde{\alpha}_3|^2 a_{31}^2\right), \\
C_{\mathrm{sca,y}} &= \frac{k_0^4}{6\pi}\left(|\tilde{\alpha}_1|^2 a_{12}^2 + |\tilde{\alpha}_2|^2 a_{22}^2 + |\tilde{\alpha}_3|^2 a_{32}^2\right),
\end{aligned} \tag{24}$$

где a_{ik} – элементы матрицы A (см. (1)).

Сечения поглощения определяются интегрированием внутреннего поля (6) по объему частицы

$$C_{\mathrm{abs}} = k_0 \int_{\mathrm{V}} \mathrm{Im}(\varepsilon - 1)|\vec{E}^{(2)}(\vec{r})|^2 dV. \tag{25}$$

Поскольку модуль напряженности электрического поля в рэлеевском и квазистатическом приближениях совпадают, то в обоих случаях получим одинаковый результат [1,2]

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{abs,x}} &= k_0\,\mathrm{Im}\left(\tilde{\alpha}_1 a_{11}^2 + \tilde{\alpha}_2 a_{21}^2 + \tilde{\alpha}_3 a_{31}^2\right), \\
C_{\mathrm{abs,y}} &= k_0\,\mathrm{Im}\left(\tilde{\alpha}_1 a_{12}^2 + \tilde{\alpha}_2 a_{22}^2 + \tilde{\alpha}_3 a_{32}^2\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

В частном случае $\beta = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
C_{\mathrm{abs,x}} &= k_0\,\mathrm{Im}\tilde{\alpha}_1, \\
C_{\mathrm{abs,y}} &= k_0\,\mathrm{Im}\tilde{\alpha}_2.
\end{aligned} \tag{27}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На основании описанного подхода мы составили программу расчета оптических свойств эллипсоидальных частиц, имеющих различную форму и внутреннюю структуру. Как показало тестирование, в случае многослойных неконфокальных частиц для достижения точности δ достаточно использовать менее $1/\delta$ подслоев, что указывает на эффективность предлагаемого подхода. Программа была использована как для определения области применимости данного приближения, так и для сравнения его с другими методами.

Как отмечалось, применимость квазистатического приближения недавно была изучена в случае сечений рассеяния для однородных диэлектрических сфероидов [10]. Мы расширили это исследование рассмотрением элементов матрицы рассеяния для сфероидальных частиц с поглощением. Расчеты выполнялись для сплюснутых и вытянутых сфероидов с отношением полуосей от 2 до 100 и показателем преломления в диапазоне от $1.7{+}0.01i$ до $3{+}4i$. Некоторые результаты приведены на рис.1–5.

На рис.1 показана относительная ошибка квазистатического приближения в случае элемента F_{11} для вытянутых диэлектрических сфероидов с разным отношение полуосей при различной геометрии рассеяния (угол α определяет ориентацию частицы относительно падающего излучения; углы θ и φ – направление рассеянного излучения). Точными считались значения элементов, полученные при помощи программы [17]. Рисунок иллюстрирует тот факт, что как и для сечений (см. [10]) практически при любой геометрии рассеяния относительная ошибка приближения убывает с ростом a/b. Исключение составляет лишь рассеяние назад ($\theta > 130^\circ$), особенно при $\alpha \sim 45^\circ$ и больших a/b ($\sim$100).

Для сильно поглощающих вытянутых частиц монотонное увеличение точности приближения с отношением a/b наблюдается в основном при падении излучения вдоль оси симметрии частицы ($\alpha = 0^\circ$), в остальных случаях эта зависимость может быть более сложной (см. рис.2).

Для сплюснутых диэлектрических сфероидов ситуация существенно иная. Рассеяние назад не является выделенным случаем, и трудно определить общий характер зависимости погрешности приближения от a/b (рис.3). Однако для сплюснутых частиц с поглощением (рис.4) наблюдается картина, обратная как по сравнению с вытянутыми частицами, так и с выводами работы [10]: с ростом a/b ошибка не уменьшается, а увеличивается (исключая рассеяние под углом $\theta \approx 90^\circ$).

Заметим, что для вытянутых диэлектрических частиц в среднем погрешность квазистатического приближения для F_{11} убывает с θ, а для поглощающих – наоборот растет; при этом влияние φ всегда малозаметно. Ошибка максимальна при $\alpha > 30^\circ$. Для сплюснутых сфероидов точность приближения слабо зависит от θ, φ, α (исключая область $\theta \approx 90^\circ$). Погрешность приближения для элементов матрицы рассеяния зависит от показателя преломления m в среднем сильнее, чем для сечений [10]: примерно пропорционально $|m-1|$. Поведение погрешности для других элементов матрицы рассеяния в целом сходно с рассмотренным выше для F_{11}. При этом в подавляющем большинстве случаев квазистатическое приближение дает наименьшую точность для элемента F_{34}.

Несмотря на выявленные отличия в поведении погрешности элементов матрицы рассеяния по сравнению с сечениями, общие выводы об области применимости квазистатического приближения, сделанные в [10], достаточно верны. В частности, границы этой области, т.е. значения параметра x_{V}, при которых элементы матрицы рассеяния рассчитываются в данном приближении с определенной погрешностью, представляются практически линейными функциями $\lg a/b$ (см., например, рис.6). При этом зависимость от $\lg a/b$ (наклон прямых) является весьма слабой. Так же, как и для сечений, область сужается с ростом m (примерно обратно пропорционально $|m-1|$) и расширяется при увеличении p – допустимой погрешности как $p^{1/2}$ (например, на рис.6 для погрешности в 10% предельное x_{V} увеличивается существенно: с 0.1–0.2 до ∼0.4–0.7).

Таким образом, сравнение полученных результатов с выводами работы [10] показывает, что последние не могут быть автоматически распространены и на элементы матрицы рассеяния. Аналогично обстоит дело и с однородными эллипсоидами (точными считались результаты, полученные при помощи программы [18]). Здесь даже для сечений рассеяния зависимость погрешности приближения от показателя преломления, ориентации частицы и т.д. более сложна, чем сформулированная для сфероидов в [10]. С другой стороны, наши расчеты подтверждают главный вывод работы [10] о том, что точность квазистатического приближения, в отличие от других приближений, практически не уменьшается с ростом a/b.

При рассмотрении применимости квазистатического приближения для многослойных частиц мы сравнивали его с несколькими точными решениями. В качестве таковых были использованы модифицированная нами программа для многослойных эллипсоидов на базе метода дискретных диполей (Discrete Dipole Approximation, DDA) [18], а также разработанные нами программы на основе модифицированного метода Т-матриц для многослойных неконфокальных осесимметричных частиц [14] и метода разделения переменных для двухслойных конфокальных сфероидов [15].

Общее заключение предыдущих исследований квазистатического приближения состоит в том, что данный подход дает удовлетворительные результаты в широкой области изменения параметров, однако лучше всего он годится для сильно вытянутых или сплюснутых частиц [8,10]. Наши расчеты подтверждают данный вывод и для многослойных эллипсоидов. Рис.6–7 иллюстрируют тот факт, что квазистатическое приближение почти всегда дает лучшие результаты по сравнению с приближением Рэлея. Даже в противоположных ситуациях (возможных при отношениях полуосей ≤ 2) квазистатика дает вполне приемлемые результаты. Ошибки в квазистатическом приближении отличаются очень плавным ходом по мере увеличения размера частиц по сравнению с длиной волны. Рэлеевское приближение может оказаться несколько лучше в области, где приближенные значения начинают увеличиваться, приближаясь к точным значениям. Поскольку нарастание происходит достаточно быстро (как парабола четвертого порядка), то подобная область невелика по размерам. Точность квазистатического приближения в среднем увеличивается с ростом отношения полуосей эллипсоидов и уменьшением показателя преломления до единицы (т.е. для мягких частиц). Отметим, что в приближении Рэлея-Ганса в наших расчетах всегда получались худшие результаты.

Из сравнения соотношений (4) и (30) для диагональных элементов тензора поляризуемости в случаях однородного и многослойного эллипсоидов легко увидеть новое правило в теории эффективной среды

$$\varepsilon_{\text{eff}} = A_2/A_1. \qquad (28)$$

Отметим, что однородная частица с эффективной диэлектрической проницаемостью становится анизотропной. При этом влияние собственно анизотропии (если таковая существует) и анизотропии формы одинаковым образом сказывается на оптических свойствах эллипсоидальных частиц. Если направление напряженности падающего электрического поля совпадает с одной из осей эллипсоида, то применение формулы (28) достаточно очевидно. В противном случае требуется соблюдать определенную осторожность и выбирать усредненное значение эффективной диэлектрической проницаемости (например, пропорционально квадратам косинусов направляющих углов, см. формулу (24)).

Как видно из рис.7, для малых частиц ($x_{\rm V} \leq 0.1$) широко используемое привило Бруггемана [2] имеет всегда существенную ошибку ($\sim 3\%$) в отличие от правила (28) (срав. кривые, помеченные SVM и SVM+). Причина этого состоит в том, что правило Бруггемана и другие известные правила теории эффективной среды усредняют диэлектрическую проницаемость без учета внутренней структуры частицы, тогда как правило (28) учитывает структуру достаточно полно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квазистатическое приближение распространено на случай многослойных эллипсоидальных частиц. Выражения для элементов амплитудной матрицы рассеяния и сечений даны как в общем случае, так и при распространении плоской волны вдоль одной из осей частицы.

Исследование точности и области применимости квазистатического приближения из работы [10] дополнено обсуждением поведения элементов матрицы рассеяния для поглощающих частиц.

Расчеты, проведенные для эллипсоидов показали, что квазистатическое приближение существенно предпочтительнее приближений Рэлея и Рэлея-Ганса, если наибольший размер однородной частицы превышает наименьшей более, чем в ~3 раза; Для многослойной частицы аналогичное условие накладывается на границы слоя, дающего основной вклад в ослабление изучения.

Предложено новое правило теории эффективной среды, которое является существенно более точным для многослойных эллипсоидальных частиц, малых по сравнению с длиной волны падающего излучения, чем известные правила.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке по программе INTAS (грант 99/652).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *ван де Хюлст Г.* Рассеяние света малыми частицами. М., ИЛ, 1961.
2. *Борен К., Хафмен Д.* Рассеяние и поглощение света малыми частицами. М., Мир, 1986.
3. *Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г.* Оптические свойства кристаллических облаков. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1984.

4. *Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я.* Введение в оптику взвесей клеток. Новосибирск, Наука, 1988.
5. *Burberg R.* // Z. Naturforschg. 1956. V. 11a. N 10. P. 807.
6. *Шатилов А.В.* // Опт. и спектр. 1960. Т. 9. N 1. С. 86.
7. *Хлебцов Н.Г.* // Опт. и спектр. 1979. Т. 46. В. 2. С. 341.
8. *Фарафонов В.Г.* // Опт. и спектр. 1990. Т. 69. В. 4. С. 866.
9. *Фарафонов В.Г.* // Опт. и спектр. 1994. Т. 77. N 3. С. 455.
10. *Вощинников Н.В., Фарафонов В.Г.* // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. N 1. С. 78.
11. *Фарафонов В.Г.* // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. N 3. С. 492.
12. *Фарафонов В.Г.* // Опт. и спектр. 2001. Т. 90. N 4. С. 646.
13. *Draine B.T.* // Astrophys.J. 1988. V. 333. P. 848.
14. *Фарафонов В.Г.* // Опт. и спектр. 2001. Т. 91. N 1. С. .
15. *Farafonov V.G., Voshchinnikov N.V., Somsikov V.V.* // Appl. Opt. 1996. V.35. N 27. P.5412.
16. *Мэтьюз Дж., Уокер Р.*// Математические методы физики. М., Атомиздат, 1972.
17. *Voshchinnikov N.V., Farafonov V.G.* // Astrophys. Space Sci. 1993. V.204. N 1. P.19.
18. *Draine B.T., Flatau P.J.* // Preprint Princeton Univ. Obs. 1999. N 785.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим $N-$слойную соосную эллипсоидальную частицу, у которой $a_{l-1}, b_{l-1}, c_{l-1}$ и a_l, b_l, c_l – полуоси эллипсоидов, образующих l-й слой. Условие конфокальности можно записать следующим образом:

$$a_l^2 - a_{l-1}^2 = b_l^2 - b_{l-1}^2 = c_l^2 - c_{l-1}^2, \quad l = 2, ..., N, \tag{29}$$

при этом общий центр совпадает с началом системы координат (X, Y, Z). В этом случае тензор поляризуемости многослойной частицы остается диагональным, и его компоненты вычисляются по формулам рэлеевского приближения [11]

$$\tilde{\alpha}_j = V \, \frac{A_{2,j} - A_{1,j}}{(A_{2,j} - A_{1,j}) L_j^{(N)} + A_{1,j}}, \tag{30}$$

где $V = 4\pi \, a_N \, b_N \, c_N / 3$ – объем всей частицы, $L_j^{(N)}$ – ее геометрические факторы (см. ф-лу (5)). Величины $A_{1,j}$ и $A_{2,j}$ определяются матричным уравнением [11]

$$\begin{pmatrix} A_{1,j} \\ A_{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_j^{(N)} \\ \epsilon_N & \epsilon_N (L_j^{(N)} - 1) \end{pmatrix} \cdot \Psi \cdot \begin{pmatrix} (\epsilon_1 - 1) L_j^{(1)} + 1 \\ -(\epsilon_1 - 1)\delta_1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где $L_j^{(1)}$ – фактор для ядра частицы, а матрица Ψ представляется в виде произведения квадратных матриц $2{\times}2$

$$\Psi = \Pi_{l=2}^{N-1} \, \Gamma_l, \tag{32}$$

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} (\epsilon_l - 1)L_j^{(l)} + 1 & \frac{\epsilon_l - 1}{\delta_l} L_j^{(l)}(L_j^{(l)} - 1) \\ -(\epsilon_l - 1)\delta_l & -(\epsilon_l - 1)(L_j^{(l)} - 1) + 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Выше $\epsilon_l = \varepsilon_l/\varepsilon_{l+1}$ – относительные диэлектрические проницаемости, $\delta_l = (a_l\, b_l\, c_l)/(a_N\, b_N\, c_N)$ – отношение объема j-го эллипсоида к объему частицы ($j = 1, ..., N$).

При невыполнении условия (29) каждую неконфокальную оболочку разбиваем на совокупность $2n$ тонких подслоев [12]. Пусть вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси Z (т.е. $j = 3$). Введем дополнительные обозначения (ради простоты записи вплоть до формулы (39) считаем, что индексом 1 обозначается внутренняя, а индексом 2 внешняя оболочка слоя)

$$\begin{array}{ll} \tilde{a}^2_{1,i+1} = a^2_{1,i} + \Delta c^2/2n, & \tilde{a}^2_{2,i+1} = a^2_{2,i} - \Delta c^2/2n, \\ \tilde{b}^2_{1,i+1} = b^2_{1,i} + \Delta c^2/2n, & \tilde{b}^2_{2,i+1} = b^2_{2,i} - \Delta c^2/2n, \\ \tilde{c}^2_{1,i+1} = c^2_{1,i} + \Delta c^2/2n, & \tilde{c}^2_{2,i+1} = c^2_{2,i} - \Delta c^2/2n, \end{array} \tag{34}$$

при этом геометрические факторы вычисляются по формулам ($i = 1, 2, ..., n$)

$$\begin{array}{l} L_z^{(1,i)} = \frac{a_{1,i} b_{1,i} c_{1,i}}{2} G(a_{1,i}, b_{1,i}, c_{1,i}, 0), \\ \tilde{L}_z^{(1,i)} = \frac{\tilde{a}_{1,i} \tilde{b}_{1,i} \tilde{c}_{1,i}}{2} G(\tilde{a}_{1,i}, \tilde{b}_{1,i}, \tilde{c}_{1,i}, 0). \end{array} \tag{35}$$

Вспомогательные матрицы имеет вид

$$\Omega = \frac{\left[(a_1^2 - c_1^2)(b_1^2 - c_1^2)\right]^{1/2}}{\left[(a_2^2 - c_2^2)(b_2^2 - c_2^2)\right]^{1/2}} \cdot \Lambda^{2,n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\delta}^{-1}_{1,n+1}(\tilde{L}_z^{(1,n+1)} - \tilde{L}_z^{(2,n+1)}) \\ 0 & \tilde{\delta}^{-1}_{1,n+1}\tilde{\delta}_{2,n+1} \end{pmatrix} \cdot \Lambda^{1,n}, \tag{36}$$

$$\Lambda^{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=2}^{n} \left(\Pi_{j=2}^{i-1} \tilde{\delta}^{-1}_{1,j} \delta_{1,j}\right) \tilde{\delta}^{-1}_{1,i}(\tilde{L}_z^{(1,i)} - L_z^{(1,i)}) \\ 0 & \Pi_{i=2}^{n} \tilde{\delta}^{-1}_{1,i} \delta_{1,i} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\Lambda^{2,n} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=2}^{n} \left(\Pi_{j=i+1}^{n} \tilde{\delta}_{2,j} \delta^{-1}_{2,j}\right) \delta^{-1}_{2,i}(L_z^{(2,i)} - \tilde{L}_z^{(2,i)}) \\ 0 & \Pi_{i=2}^{n} \tilde{\delta}_{2,i} \delta^{-1}_{2,i} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

В приведенных выше формулах введены отношения объемов различных эллипсоидов

$$\begin{array}{ll} \tilde{\delta}_{1,j} = \frac{\tilde{a}_{1,j} \tilde{b}_{1,j} \tilde{c}_{1,j}}{a_2 b_2 c_2}, & \tilde{\delta}_{2,j} = \frac{\tilde{a}_{2,j} \tilde{b}_{2,j} \tilde{c}_{2,j}}{a_2 b_2 c_2}, \\ \delta_{1,j} = \frac{a_{1,j} b_{1,j} c_{1,j}}{a_2 b_2 c_2}, & \delta_{2,j} = \frac{a_{2,j} b_{2,j} c_{2,j}}{a_2 b_2 c_2}. \end{array} \tag{39}$$

Окончательно, для неконфокальных соосных эллипсоидов матрица Ψ представляется в виде произведения матриц 2×2 (см. подробнее [12])

$$\Psi = \Pi_{l=2}^{N-1} \; (\Omega_l \Gamma_l) \; \cdot \; \Omega_1. \tag{40}$$

Очевидно, что для конфокальных эллипсоидов $\Omega_l = I$ формула (40) переходит в формулу (32).

Заметим, что приведенные выше соотношения можно записать в рекурсивной форме

$$\Psi^{(N+1)} = (\Omega_N \Gamma_N) \; \cdot \; \Psi^{(N)}, \tag{41}$$

$$\begin{pmatrix} A^{N+1}_{1,j} \\ A^{N+1}_{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_j^{(N+1)} \\ \tilde{\epsilon}_{N+1} & \tilde{\epsilon}_{N+1}(L_j^{(N+1)} - 1) \end{pmatrix} \cdot (\Omega_N \Gamma_N) \cdot \begin{pmatrix} 1 - L_j^{(N)} & \frac{L_j^{(N)}}{\tilde{\epsilon}_N} \\ 1 & \frac{1}{\tilde{\epsilon}_N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^N_{1,j} \\ A^N_{2,j} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

где $\tilde{\epsilon}_{N+1} = \varepsilon_{N+1}$, $\tilde{\epsilon}_N = \varepsilon_N$ (показатель преломления окружающей среды считался равным 1).

Подписи под рисунками к статье Фарафонова и др.
"Рассеяние света однородными и многослойными эллипсоидами ..."

Рис.1 Относительная ошибка элемента F_{11}, вычисляемого в рамках квазистатического приближения для вытянутых сфероидов с показателем преломления $m = 1.7 + 0.01i$ и различным отношением полуосей: 1 – $a/b = 2$; 2 – $a/b = 4$; 3 – $a/b = 10$; 4 – $a/b = 25$; 5 – $a/b = 100$. Дифракционный параметр $_{\rm V}$ =0.1, смысл остальных параметров пояснен в тексте.

Рис.2 То же, что на рис.1, но для показателя преломления $m = 3 + 4i$.

Рис.3 То же, что на рис.1, но для сплюснутых сфероидов.

Рис.4 То же, что на рис.3, но для показателя преломления $m = 3 + 4i$.

Рис.5 Значения параметра $x_{\rm V}$, при которых элементы F_{11} и поляризация $P = F_{21}/F_{11}$ для вытянутых сфероидов рассчитываются в квазистатическом приближении с погрешностью 1%. Значками обозначены найденные величины $x_{\rm V}$ при разной ориентации частицы: $\alpha = 0°$ (точки); $\alpha = 45°$ (кружки); $\alpha = 90°$ (звездочки).

Рис.6 Относительная ошибка сечений рассеяния $C_{\rm sca}$, вычисленных в рамках рэлеевского (RA) и квазистатического (QSA) приближений для однородного эллипсоида с отношением полуосей $a : b : c = 6 : 2 : 1$ и $m = 1.5$ и трехслойного эллипсоида (соответственно $\rm RA_3$ и $\rm QSA_3$) с $(a_i : b_i : c_i, m_i)$ = (4:2:1,1.33 / 6.5:3:1,1.7+0.03i / 19.6:7:1,1), где $i = 3$ соответствует ядру частицы.

Рис.7 То же, что и на рис.6, но для двухслойных сфероидов с $(a_i : b_i, m_i)$ = (4:1,1.3+0.01i / 6.7:1,1.7+0.03i). SVM показывает данные, полученные методом разделения переменных [17]; SVM (RA, QSA) – результаты применения правила Бруггемана; SVM+ (RA+, QSA+)– то же, но для правила (28).