О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА Т-МАТРИЦ И ЕГО МОДИФИКАЦИЙ

© 2000 г. **В. Г. Фарафонов***

**Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 05.06.2001 г.

Аналитически и численно исследована область применимости метода Т-матриц и его модификаций для решения задачи рассеяния электромагнитного излучения несферическими осесимметричными частицами. Показано, что вычисление характеристик рассеянного излучения в дальней зоне (сечения ослабления и рассеяния, индикатриссы рассеянного излучения и т.д.) в рамках этого подхода оправдано для "слабо релеевских частиц". Это условие выполняется, если пересечение аналитических продолжений рассеянного и внутреннего полей содержит кольцо с центром в начале координат. Для достоверного расчета рассеянного поля в ближней зоне требуется, чтобы частица была "релеевской" (т.е. для нее справедлива гипотеза Релея). В этом случае особенности рассеянного поля должны находиться внутри сферы, полностью расположенной внутри рассеивателя. Сфероидальные частицы являются "слабо релеевскими", если отношение полуосей $a/b < (\sqrt{2}+1)$, а "релеевскими" – при $a/b < \sqrt{2}$. Численные расчеты для сфероидов и чебышевских частиц подтверждают эти выводы. Однако, указанные границы "размыты" (в сторону расширения), поскольку при вычислениях используются редуцированные (т.е. конечные) системы для определения коэффициентов разложений полей. Предельные размеры частиц, для которых метод Т-матриц дают приемлемые результаты определяются, главным образом, их геометрией (формой) и только затем химическим составом (показателем преломления).

ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние света несферическими частицами играет важную роль при рассмотрении большого числа различных явлений в оптике атмосферы и океана, биофизике, астрофизике [1-3] и т.д.. В настоящее время для решения этой задачи наиболее часто используется метод Т-матриц [4-6]. Основным достоинством данного подхода является его универсальность, т.е. возможность применения для тел произвольной формы. Однако, обычно рассматриваются осесимметричные частицы, поскольку в противном случае требуются слишком большие компьютерные ресурсы. Для частиц с аксиальной симметрией недавно предложена модификация метода Т-матриц [7-9], в которой специальным образом выбираются скалярные потенциалы. Дело в том, что в классической схеме, по существу, используются потенциалы Дебая, которые наиболее эффективны для шаров. В новой схеме используются потенциалы, которые наиболее эффективны для сфероидов в рамках метода разделения переменных [10-11], особенно при значительном отклонении их формы от сферической. Характерная черта метода Т-матриц заключается в применении волновых сферических функций в качестве базисных. Относительная простота их вычисления в широком диапазоне изменения параметров обеспечивает высокую эффективность данного подхода.

Идея использования сфероидальных функций в качестве базисных в общем случае, по нашему мнению, довольно сомнительна из-за трудностей, возникающих при ее численной реализации. Эти функции являются решениями дифференциальных уравнений класса Гойна, имеющих четыре регулярные особые точки, которые могут сливаться. Аналитические свойства этих функций принципиально отличаются от свойств функций Бесселя и Ганкеля, а также полиномов Лежандра, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям, имеющим три регулярные особые точки. Подобный подход [12-14] оправдан для однородных и многослойных сфероидальных частиц при условии, что классический метод Т-матриц не дает достоверных результатов. Такая ситуация возможна при значительном отклонении формы частиц от сферической. В этом случае также можно применять метод разделения переменных (наиболее эффективная схема подробно изложена в работах [10,15]). Впрочем, для сфероидальных частиц при использовании сфероидальных функций и одних и тех же скалярных потенциалов различия между этими двумя методами весьма условны (см. [14-15]) из-за невозможности одновременного разделения переменных в уравнениях Максвелла и граничных условиях.

В настоящей работе исследуется область применимости метода Т-матриц и его модификаций в задаче рассеяния плоской электромагнитной волны однородными осесимметрическими частицами. В отличии от традиционного подхода исходные интегральные уравнения выводятся относительно потенциалов, описывающих рассеянное излучение. Затем они сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно коэффициентов разложения этих потенциалов в ряды по волновым сферическим функциям. На основе аналитического исследования полученных БСЛАУ мы находим условия, при которых данный подход теоретически обоснован. Результаты оказываются различными для метода Т-матриц, в рамках которого можно рассчитывать электромагнитные поля всюду, и для метода диаграммных уравнений (МДУ), когда рассматривается только рассеянное излучение в дальней зоне. МДУ был предложен для скалярного случая (граничные условия Дирихле) и для абсолютно проводящих тел (см, например, статьи [16-18]). Ниже мы реализуем данный подход для диэлектрических частиц. Хотя связь МДУ с методом Т-матриц достаточно очевидна, она до сих пор непосредственно не комментировалась. По сути дела, МДУ является разновидностью метода Т-матриц в случае, когда задача формулируется исключительно для рассеянного поля в дальней зоне. Отметим, что БСЛАУ для этих методов совпадают.

С теоретической точки зрения, возможность применения метода Т-матриц и его модификаций напрямую связана с расположением особенностей полей вне и внутри рассеивателя (т.е. особенностей рассеянного и внутреннего полей) и использованием разложений этих полей по волновым сферическим функциям. В целом метод Т-матриц можно обоснованно применять только при выполнении гипотезы Релея (сходимость разложений вплоть до границы частицы). Для внешней задачи она справедлива тогда и только тогда, когда шар, содержащий особенности рассеянного излучения, полностью лежит внутри рассеивателя [20]. Для внутренней задачи (определение только внутреннего поля в задаче рассеяния) требуется, чтобы особенности внутреннего излучения находились вне шара, содержащего частицу [20]. МДУ правомерно использовать, если существует кольцо, в котором одновременно сходятся разложения рассеянного и внутреннего полей. Отметим, что центры шаров совпадают и находятся в начале координат сферической системы. В последнем случае можно вычислять характеристики рассеянного поля в дальней зоне - сечения ослабления и рассеяния, индикатрисы рассеянного излучения и другие элементы матрицы рассеяния. Если падающее излучение является плоской волной, то особенности как рассеянного, так и внутреннего поля определяются только геометрией рассеивающего тела. В случае точечных источников появляются дополнительные особенности рассеянного излучения в точках их "изображений" (см. [17,19-20]).

К сожалению, в работах Кюркчана по МДУ имеется неверное утверждение – метод справедлив для класса "слабо невыпуклых" рассеивателей, в частности, для любых выпуклых частиц с гладкими границами. В действительности, им не были учтены некоторые особенности внутреннего поля (а именно, удовлетворяющие в комплексной плоскости параметра θ уравнению $\exp is\theta_s = 0$). Это тем более обидно, что в его более ранних работах (см. [19,20]) они подробно изучались. Мы, вслед за ним, также указывали на "слабую невыпуклость" как на достаточное условие для применения метода Т-матриц в дальней зоне рассеянного излучения [8]. Необходимость учета дополнительных особенностей внутреннего поля существенно влияет на окончательный результат для сфероидов (в отличии от чебышевских частиц [8]). Для них решение в дальней зоне строго обосновано при следующих отношениях большой полуоси к малой: $a/b < (\sqrt{2}+1)$. Ранее невозможность использования метода Т-матриц для сильно вытянутых или сплюснутых сфероидов объяснялась плохой обусловленностью алгебраических систем, получающихся из БСЛАУ редукцией. Поскольку метод Т-матрицы и его модификации можно применять не для всех выпуклых рассеивателей мы предлагаем заменить термин "слабо невыпуклые" на "слабо релеевские" частицы. На наш взгляд такая терминология значительно лучше передает общий смысл полученных окончательных результатов.

Наряду с аналитическими исследованиями проблемы применимости метода Т-матриц и его модификаций мы подробно анализируем ее численные аспекты. Дело в том, что численные расчеты рассеяния света несферическими частицами, которые не являются "слабо релеевскими", тем не менее часто дают более или менее удовлетворительные по точности результаты [7,11,17,21]. Это показывает, что условия справедливости гипотезы Релея и условия для "слабо релеевских" частиц при численных расчетах в значительной степени "смазываются". Для того, чтобы свойства БСЛАУ, выявленные при изучении асимптотик их матричных элементов и свободных членов, отчетливо проявились у редуцированных систем, используемых в численных расчетах, необходимо учитывать достаточно большое количество слагаемых в разложениях полей. Но для относительно небольших по сравнению с длиной волны падающего излучения частиц сравнительно хорошие по точности результаты достигаются при меньшем числе слагаемых. Таким образом, сравнение численных расчетов по методу Т-матриц и по другому строго обоснованному методу (для сфероидов – по методу разделения переменных [11]) дает удовлетворительные результаты до тех пор, пока размер частицы не станет достаточно большим, когда нужно будет решать редуцированные системы большой размерности. Предельный размер частиц зависит в первую очередь от отношения полуосей сфероида, затем от относительного показателя преломления вещества частицы и, в значительно меньшей степени, от ее ориентации. То же самое можно утверждать и для частиц других форм (чебышевские частицы, "гантели" и т.д.) – наибольшее значение имеет геометрия рассеивателя, затем его химический состав и, в достаточно малой степени, ориентация частицы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим рассеяние электромагнитного излучения отдельной однородной диэлектрической частицей. Введем следующие обозначения: $\vec{E^{(j)}}$, $\vec{H^{(j)}}$ - напряженности электрического и магнитного полей падающего, рассеянного и излучения внутри частицы соответственно ($j = 0, 1$ и 2), ε_j и μ_j - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды вне и внутри рассеивателя ($j = 1, 2$), $k_j = \sqrt{\varepsilon_j \cdot \mu_j} \cdot k_0$ - волновое число в среде, $k_0 = \omega/c$ - волновое число в свободном пространстве (ω – частота излучения, c – скорость света в вакууме). Задача рассеяния может быть сформулирована следующим образом. Векторы $\vec{E^{(j)}}$, $\vec{H^{(j)}}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла вне и внутри частицы

$$\vec{E^{(j)}}(\vec{r}) = -\frac{1}{i\varepsilon_j k_0}\vec{\nabla} \times \vec{H^{(j)}}(\vec{r}), \qquad \vec{H^{(j)}}(\vec{r}) = \frac{1}{i\mu_j k_0}\vec{\nabla} \times \vec{E^{(j)}}(\vec{r}), \tag{1}$$

граничным условиям на его поверхности

$$\left.\begin{aligned} (\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) + \vec{E}^{(1)}(\vec{r})) \times \vec{n} = \vec{E}^{(2)}(\vec{r}) \times \vec{n}, \\ (\vec{H}^{(0)}(\vec{r}) + \vec{H}^{(1)}(\vec{r})) \times \vec{n} = \vec{H}^{(2)}(\vec{r}) \times \vec{n} \end{aligned}\right\}_{\vec{r}\in S} \tag{2}$$

и условиям излучения на бесконечности $(r \to \infty)$

$$\lim r(\frac{\partial E^{\vec{(1)}}(\vec{r})}{\partial r} - ik_1 E^{\vec{(1)}}(\vec{r})) = 0, \quad \lim r(\frac{\partial H^{\vec{(1)}}(\vec{r})}{\partial r} - ik_1 H^{\vec{(1)}}(\vec{r})) = 0. \tag{3}$$

Здесь $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S рассеивающего объекта, который занимает область D, $\vec{r}$ - радиус-вектор, $r = |\vec{r}|$. Предполагается, что зависимость электромагнитных полей от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$.

В дальнейшем будем считать, что рассеивающая частица имеет аксиальную симметрию. Если ввести декартовую систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы ось z совпадала с осью вращения частицы, то уравнение поверхности S в сферической системе координат (r, θ, φ) записывается в виде

$$r = r(\theta). \tag{4}$$

Произвольно поляризованная плоская электромагнитная волна, падающая под углом α к оси вращения частицы, может быть представлена в виде суперпозиции волн двух типов:

а) волна ТЕ типа

$$\vec{E}^{(0)} = -\vec{i_y}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \tag{5}$$

б) волна ТМ типа

$$\vec{E}^{(0)} = \left(\vec{i_x}\cos\alpha - \vec{i_z}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \tag{6}$$

где $(\vec{i_x}, \vec{i_y}, \vec{i_z})$ - орты декартовой системы координат.

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД Т-МАТРИЦ

Все электромагнитные поля представляются в виде суммы двух слагаемых

$$\vec{E}^{(j)} = \vec{E}_1^{(j)} + \vec{E}_2^{(j)}, \quad \vec{H}^{(j)} = \vec{H}_1^{(j)} + \vec{H}_2^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{7}$$

где $\vec{E}_1^{(j)}$, $\vec{H}_1^{(j)}$ не зависят от азимутального угла φ, а усреднение $\vec{E}_2^{(j)}$, $\vec{H}_2^{(j)}$ по этому углу равно нулю. Ниже осесимметричная задача для полей $\vec{E}_1^{(j)}, \vec{H}_1^{(j)}$ и неосесимметричная задача для полей $\vec{E}_2^{(j)}, \vec{H}_2^{(j)}$ решаются независимо друг от друга.

Возможность самостоятельного решения задач для первых и вторых слагаемых сумм (7) следует из коммутативности оператора T, соответствующего задаче рассеяния, и оператора $L_z = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ [7]. Таким образом, для осесимметричного тела задача рассеяния решается независимо для каждого слагаемого ряда Фурье векторов $\vec{E}, \vec{H}$ по азимутальному углу, т.е. в этом случае имеет место разделение относительно переменной φ.

2.1. Осесимметричная задача

Введем скалярные потенциалы

$$p^{(j)} = E_{1\varphi}^{(j)}\cos\varphi, \quad q^{(j)} = H_{1\varphi}^{(j)}\cos\varphi, \tag{8}$$

где $E_{1\varphi}^{(j)}, H_{1\varphi}^{(j)}$ - φ-компоненты векторов $\vec{E_1^{(j)}}, \vec{H_1^{(j)}}$. Другие составляющие электромагнитных полей выражаются через азимутальные компоненты из уравнений Максвелла (1). Кроме того, из них следует, что скалярные потенциалы удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta p^{(j)} + k_j^2 p^{(j)} = 0, \quad \Delta q^{(j)} + k_j^2 q^{(j)} = 0. \tag{9}$$

Граничные условия (2) можно записать в виде

$$\left.\begin{array}{l}
p^{(2)} = p^{(0)} + p^{(1)}, \\
\frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\partial (p^{(0)}+p^{(1)})}{\partial n} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left(1 - \frac{r_\theta'}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)\left(p^{(0)} + p^{(1)}\right), \\
q^{(2)} = q^{(0)} + q^{(1)}, \\
\frac{\partial q^{(2)}}{\partial n} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\frac{\partial (q^{(0)}+q^{(1)})}{\partial n} + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left(1 - \frac{r_\theta'}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)\left(q^{(0)} + q^{(1)}\right),
\end{array}\right\}_{\vec{r}\in S} \qquad (10)$$

где $p^{(j)}, q^{(j)}$ соответственно потенциалы падающего, рассеянного и излучения внутри частицы ($j = 0, 1$ и 2). Отметим,что осесимметричная задача решается независимо для потенциалов p и q (т.е. для волн TE и TM типов).

Таким образом, рассматриваемая задача сведена к скалярным уравнениям Гельмгольца (9) с граничными условиями (10) и условиями излучения на бесконечности.

Рассмотрим случай TE моды. Умножим второе уравнение граничных условий на функцию Грина

$$G(k_2, \vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{\exp\{ik_2|\vec{r} - \vec{r}\,'|\}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (11)$$

уравнения Гельмгольца (9) с волновым числом k_2, а первое уравнение – на производную функции Грина по нормали. Вычтем из первого уравнения второе. Тогда, учитывая соотношение [22]

$$\int_S \left(p^{(2)}(\vec{r}\,')\frac{\partial G(k_2,\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - \frac{\partial p^{(2)}(\vec{r}\,')}{\partial n'}G(k_2,\vec{r},\vec{r}\,')\right)\mathrm{d}S' = \begin{cases} -p^{(2)}(\vec{r}), & \vec{r} \in \mathcal{D}, \\ 0, & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{\mathcal{D}}, \end{cases} \qquad (12)$$

получим интегральное уравнение относительно потенциала рассеянного излучения

$$\int_S \left\{ \left(p^{(0)}(\vec{r}) + p^{(1)}(\vec{r})\right)\frac{\partial G(k_2,\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\partial\left(p^{(0)}(\vec{r}) + p^{(1)}(\vec{r})\right)}{\partial n}G(k_2,\vec{r},\vec{r}\,') + \right.$$
$$\left. \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{r^2 + (r_\theta')^2}}\left(1 - \frac{r_\theta'}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)\left(p^{(0)}(\vec{r}) + p^{(1)}(\vec{r})\right)G(k_2,\vec{r},\vec{r}\,')\right\} dS = 0, \qquad (13)$$

где $\vec{r} \in R^3 \setminus \bar{\mathcal{D}}$. Если точка наблюдения находится внутри области ($\vec{r} \in \mathcal{D}$), то соответствующий интеграл с точностью до знака будет равен потенциалу внутреннего излучения.

Скалярные потенциалы представляются в виде разложений по волновым сферическим функциям

$$p^{(0)} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} j_l(k_1 r)\, P_l^1(\cos\theta)\, \cos\varphi, \qquad (14)$$

$$p^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(1)} h_l^{(1)}(k_1 r)\, P_l^1(\cos\theta)\, \cos\varphi, \qquad (15)$$

где для волны TE типа (в случае TM моды меняется знак)

$$a_l^{(0)} = -i^l\, \frac{2l+1}{l(l+1)}\, P_l^1(\cos\alpha). \qquad (16)$$

Здесь $j_l(kr)$, $h_l^{(1)}(kr)$ - сферические функции Бесселя и Ганкеля 1-го рода, $P_l^m(\cos\theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра.

Подставим ряды (15) -(16) и разложение функции Грина по сферическим функциям [23] в интегральное уравнение (14). Учитывая свойства ортогональности сферических функций $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ на любой сфере с центром в начале координат, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения потенциалов рассеянного излучения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ln}^{(1)}\ a_n^{(1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ln}^{(0)}\ a_n^{(0)}, \quad l = 1, 2, ..., \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ln}^{(1)} \quad = \quad & \frac{i(2l+1)}{2l(l+1)} \int_0^{\pi} \left\{ k_2^2 r^2 \left[j_l'\left(k_2 r\right)\ h_n\left(k_1 r\right) - \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{k_1}{k_2}\ j_l^{(1)}\left(k_2 r\right)\ h_l^{(1)'}\left(k_1 r\right) \right]\ P_l^1\left(\cos\theta\right)\ \cdot \right. \\ & \cdot P_n^1\left(\cos\theta\right)\ \sin\theta + k_2 r_\theta' \sin^2\theta \left[P_l^{1'}\left(\cos\theta\right) P_n^1\left(\cos\theta\right) - \frac{\mu_2}{\mu_1}\ P_l^1\left(\cos\theta\right) P_n^{1'}\left(\cos\theta\right) \right]\ \cdot \\ & \cdot h_n^{(1)}\left(k_1 r\right)\ j_l\left(k_2 r\right) - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right) \left(k_2 r \sin\theta - k_2 r_\theta' \cos\theta \right)\ h_n^{(1)}\left(k_1 r\right)\ j_l\left(k_2 r\right)\ \cdot \\ & \left. \cdot\ P_l^1\left(\cos\theta\right) P_n\left(\cos\theta\right) \right\}\ d\theta, \end{aligned} \tag{18}$$

где $r = r(\theta)$ – уравнение поверхности рассеивающей частицы, штрих означает дифференцирование по аргументу. Матричные элементы $\alpha_{ln}^{(0)}$ получаются из элементов α_{ln} после замены $h_n^{(1)}(k_1 r) \to j_n(k_1 r)$.

В случае TM моды отличны от нуля потенциалы $q^{(j)}$. Соответствующие уравнения получаются из выше приведенных после замены $\mu_j \to \varepsilon_j$ и $a_n^{(j)} \to b_n^{(j)}$.

2.2. Неосесимметричная задача

Для определения неосесимметричной части электромагнитного поля будем использовать скалярные потенциалы U и V. Первый из них является z-компонентом магнитного или электрического вектора Герца, а второй - соответствующим потенциалом Дебая:

а) волна TE типа

$$\vec{E}_2^{(j)} = \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)}\ \vec{i}_z + V^{(j)}\ \vec{r} \right), \tag{19}$$

б) волна TM типа

$$\vec{H}_2^{(j)} = \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)}\ \vec{i}_z + V^{(j)}\ \vec{r} \right). \tag{20}$$

где потенциалы $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (9) и представляются в виде разложений по волновым сферическим функциям

$$\begin{matrix} U^{(0)} \\ V^{(0)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{(0)} \\ b_{ml}^{(0)} \end{matrix}\ j_l(k_1 r)\ P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{21}$$

$$\begin{matrix} U^{(1)} \\ V^{(1)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{(1)} \\ b_{ml}^{(1)} \end{matrix}\ h_l^{(1)}(k_1 r)\ P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{22}$$

где для TM моды

$$\begin{aligned} & a_{ml}^{(0)} = \sqrt{\tfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}})\tfrac{i^{l-1}2(2l+1)}{k_0\mu_1\sin\alpha}\ \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\ P_l^m(\cos\alpha), \\ & b_{ml}^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

В случае TE моды в формуле (23) следует исключить множитель $(-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}})$.

Граничные условия для скалярных потенциалов $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ для TM моды имеют вид (считаем, что $\mu_j = 1$)

$$\left.\begin{array}{rcl}
U^{(2)} &=& U^{(0)} + U^{(1)}, \\
V^{(2)} &=& V^{(0)} + V^{(1)}, \\
\frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} &=& \frac{\partial (U^{(0)}+U^{(1)})}{\partial n} + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \frac{r'_\theta}{r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2_\theta}} \Big[r\cos\theta \frac{\partial(U^{(0)}+U^{(1)})}{\partial r} \\
&& - \sin\theta \frac{\partial(U^{(0)}+U^{(1)})}{\partial\theta} + r^2 \frac{\partial(V^{(0)}+V^{(1)})}{\partial r} + r(V^{(0)}+V^{(1)}) \Big], \\
\frac{\partial V^{(2)}}{\partial n} &=& \frac{\partial (V^{(0)}+V^{(1)})}{\partial n} + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \frac{\left(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2_\theta}} \Big[r\cos\theta \frac{\partial(U^{(0)}+U^{(1)})}{\partial r} \\
&& - \sin\theta \frac{\partial(U^{(0)}+U^{(1)})}{\partial\theta} + r^2 \frac{\partial(V^{(0)}+V^{(1)})}{\partial r} + r(V^{(0)}+V^{(1)}) \Big],
\end{array}\right\}_{\vec{r}\in S} \qquad (24)$$

Точно также, как в предыдущем параграфе, можно вывести интегральные уравнения для скалярных потенциалов U и V

Учитывая граничные условия (24), получим бесконечные системы для неизвестных коэффициентов разложений (22)

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(1)}_{1,mln}\ k_1 a^{(1)}_{mn} + \beta^{(1)}_{1,mln}\ b^{(1)}_{mn}\right) = -\sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(0)}_{1,mln}\ k_1 a^{(0)}_{mn} + \beta^{(0)}_{1,mln}\ b^{(0)}_{mn}\right), \\
\sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(1)}_{2,mln}\ k_1 a^{(1)}_{mn} + \beta^{(1)}_{2,mln}\ b^{(1)}_{mn}\right) = -\sum_{n=m}^{\infty} \left(\alpha^{(0)}_{2,mln}\ k_1 a^{(0)}_{mn} + \beta^{(0)}_{2,mln}\ b^{(0)}_{mn}\right),
\end{array}\right\} \qquad (25)$$

где $m = 1, 2, ...,\ l = m, m+1, ...$, а матричные элементы вычисляются по формулам

$$\begin{array}{rcl}
\alpha^{(1)}_{1,mln} &=& \frac{i(2l+1)}{2}\ \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \Big\{ k_2^2 r^2 \Big[j_l'(k_2 r)\ h_n^{(1)}(k_1 r) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\ j_l(k_2 r)\ h_n^{(1)\prime}(k_1 r) \Big] \cdot \\
&& \cdot P_n^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta)\sin\theta + k_2 r'_\theta\ j_l(k_2 r)\ h_n^{(1)}(k_1 r) \Big[P_l^{m\prime}(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta)\ - \\
&& - P_n^{m\prime}(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \Big] \sin^2\theta - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \Big[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\ k_2^2 r r'_\theta \cos\theta h_n^{(1)\prime}(k_1 r)\ \cdot \\
&& \cdot P_n^m(\cos\theta) + k_2 r'_\theta \sin^2\theta\ h_n^{(1)}(k_1 r) P_n^{m\prime}(\cos\theta) \Big]\ j_l(k_2 r) P_l^m(\cos\theta) \Big\}\ d\theta, \qquad (26) \\
\beta^{(1)}_{1,mln} &=& -\frac{i(2l+1)}{2}\ \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \Big[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\ k_2^2\, k_1\, r^2 r'_\theta\ h_n^{(1)\prime}(k_1 r)\ P_n^m(\cos\theta)\ + \\
&& + k_2\, k_1\, r r'_\theta\, h_n^{(1)}(k_1 r)\ P_n^{m\prime}(\cos\theta) \Big]\ j_l^{(1)}(k_2 r) P_l^m(\cos\theta)\ d\theta, \qquad (27) \\
\alpha^{(1)}_{2,mln} &=& \frac{i(2l+1)}{2}\ \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right) \left(k_2 r'_\theta \cos\theta - k_2 r\sin\theta\right) \Big[\cos\theta\ h_n^{(1)\prime}(k_1 r)\ \cdot \\
&& \cdot P_n^m(\cos\theta) + \frac{\sin^2\theta}{k_1 r}\ h_n^{(1)}(k_1 r) P_n^{m\prime}(\cos\theta) \Big] j_l(k_2 r) P_l^m(\cos\theta)\ d\theta, \qquad (28) \\
\beta^{(1)}_{2,mln} &=& \frac{i(2l+1)}{2}\ \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^\pi \Big\{ k_2^2 r^2 \Big[j_l'(k_2 r)\ h_n^{(1)}(k_1 r) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\ j_l(k_2 r)\ h_n^{(1)\prime}(k_1 r) \Big] \cdot \\
&& \cdot P_n^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta)\sin\theta + k_2 r'_\theta\ j_l(k_2 r)\ h_n^{(1)}(k_1 r) \Big[P_l^{m\prime}(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta)\ -
\end{array}$$

$$-P_n^{m\,\prime}\left(\cos\theta\right)P_l^m\left(\cos\theta\right)\Big]\sin^2\theta+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\left(k_2 r'_\theta\cos\theta-k_2 r\sin\theta\right)\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\;k_2 r\;\cdot\right.$$
$$\left.\cdot h_n^{(1)\,\prime}\left(k_1 r\right)P_n^m\left(\cos\theta\right)+h_n^{(1)}\left(k_1 r\right)P_n^m\left(\cos\theta\right)\right]\;j_l\left(k_2 r\right)P_l^m\left(\cos\theta\right)\Big\}\;d\theta. \tag{29}$$

Матричные элементы $\alpha_{mln}^{(0)}, \beta_{mln}^{(0)}$ получаются из выше приведенных после замены $h_n^{(1)}(k_1 r)\to j_n(k_1 r)$.

Аналогично можно вывести бесконечные системы для неизвестных коэффициентов разложений скалярных потенциалов в случае ТЕ моды, хотя они имеют более сложный вид [8].

Отличие предложенной здесь схемы от ранее использованной [7-8] заключается в том, что задача решается непосредственно относительно рассеянного излучения. Выведенные выше БСЛАУ отличаются от ранее полученных [7-8] заменой $\epsilon_1\to\epsilon_2,\ \epsilon_2\to\epsilon_1,\ \mu_1\to\mu_2,\ \mu_2\to\mu_1,\ k_1\to k_2,\ k_2\to k_1,\ n\to l,\ l\to n.$

3. МЕТОД ДИАГРАММНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ниже мы используем идеи метода диаграммных уравнений, предложенного для скалярной задачи Дирихле [16,17] и для абсолютно проводящих тел [18], в случае сопряженных граничных условий (т.е. для диэлектрических рассеивателей).

Основой для развития МДУ являются выведенные в предыдущем параграфе интегральные уравнения относительно потенциалов рассеянного излучения. Потенциалы рассеянного поля в дальней зоне ($r\to\infty$) записываются следующим образом:

$$p^{(1)}(\vec r)=\frac{\exp\left(ik_1 r\right)}{-ikr}g_1(\theta,\varphi), \tag{30}$$

$$U^{(1)}(\vec r)=\frac{\exp\left(ik_1 r\right)}{-ikr}g_u(\theta,\varphi),\qquad V^{(1)}(\vec r)=\frac{\exp\left(ik_1 r\right)}{-ikr}g_v(\theta,\varphi), \tag{31}$$

где диаграммы направленности представляются в виде разложений

$$g_1=\sum_{l=1}^{\infty}a_l^{(1)}i^{-l}\;P_l^1(\cos\theta)\;\cos\varphi, \tag{32}$$

$$\begin{matrix}g_u\\ g_v\end{matrix}\;=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\begin{matrix}a_{ml}^{(1)}\\ b_{ml}^{(1)}\end{matrix}\;i^{-l}\;P_l^m(\cos\theta)\;\cos m\varphi. \tag{33}$$

Рассмотрим осесимметричную задачу. В интегральном уравнении (13) будем считать, что точка наблюдения находится в дальней зоне. Тогда, учитывая соотношения

$$|\vec r-\vec r'|=\vec r-\vec r'\cos\Theta\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right], \tag{34}$$

$$G(\vec r,\vec r',k_2)=\frac{\exp\left(ik_2 r\right)}{4\pi r}\exp\left(-ik_2 r'\cos\Theta\right)\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right], \tag{35}$$

где $\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)$, получим

$$\int_S\left\{\left(p^{(0)}\left(\vec r\right)+p^{(1)}\left(\vec r\right)\right)\frac{\partial}{\partial n}\exp\left(-ik_2 r\cos\Theta\right)-\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\partial\left(p^{(0)}\left(\vec r\right)+p^{(1)}\left(\vec r\right)\right)}{\partial n}\exp\left(-ik_2 r\cos\Theta\right)+\right.$$
$$\left.\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(r'_\theta\right)^2}}\left(1-\frac{r'_\theta}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)\left(p^{(0)}\left(\vec r\right)+p^{(1)}\left(\vec r\right)\right)\exp\left(-ik_2 r\cos\Theta\right)\right\}dS=0. \tag{36}$$

Если к этому уравнению добавить уравнение, связывающее значения потенциала $p^{(1)}(\vec{r})$ на поверхности S со значением диаграммы направленности, то получим замкнутую систему уравнений относительно диаграммы направленности $g_1(\theta,\varphi)$.

Следуя работе [17], имеем

$$p^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi r}} \int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\frac{-\pi}{2}+i\infty} \exp(ik_1 r\cos\Psi)\tilde{g}_1(\theta,\varphi,\Psi)d\Psi, \tag{37}$$

где

$$\tilde{g}_1(\theta,\varphi,\Psi) = \exp[i\Psi(\hat{B}+\frac{1}{2})]\, g_1(\theta,\varphi), \tag{38}$$

$$\tilde{g}_1(\theta,\varphi,0) = g_1(\theta,\varphi), \tag{39}$$

$\hat{B}$ - оператор поворота, определяемый из соотношения

$$-\hat{B}(\hat{B}+1) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{40}$$

Заметим, что из равенств (38)-(40) следует

$$\exp(i\Psi\hat{B})\sum_{l=1}^{\infty}\left[a_l^{(1)} i^{-l}\; P_l^1(\cos\theta)\;\cos\varphi\right] = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(1)} i^{-l}\; P_l^1(\cos\theta)\;\exp(il\Psi)\cos\varphi. \tag{41}$$

Подставляя представление (37) в уравнение (36), получим

$$\begin{aligned}
&P^{(0)}(\theta') + e^{i\pi/4}\int_S\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\frac{-\pi}{2}+i\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\exp(ik_1 r\cos\Psi)\tilde{g}_1(\theta,\varphi,\Psi)\frac{\partial}{\partial n}\exp(-ik_2 r\cos\Theta) - \right.\\
&\frac{\mu_2}{\mu_1}\exp(-ik_2 r\cos\Theta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\exp(ik_1 r\cos\Psi)\tilde{g}_1(\theta,\varphi,\Psi)\right) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+(r'_\theta)^2}}\cdot\\
&\left.\cdot\left(1-\frac{r'_\theta}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\exp(ik_1 r\cos\Psi)\tilde{g}_1(\theta,\varphi,\Psi)\exp(-ik_2 r\cos\Theta)\right]d\Psi dS = 0,
\end{aligned} \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned}
P^{(0)}(\theta') = \quad & \int_S\left\{p^{(0)}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial n}\exp(-ik_2 r\cos\Theta) - \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\partial p^{(0)}(\vec{r})}{\partial n}\exp(-ik_2 r\cos\Theta) + \right.\\
&\left.\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)\frac{1}{\sqrt{r^2+(r'_\theta)^2}}\left(1-\frac{r'_\theta}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)p^{(0)}(\vec{r})\exp(-ik_2 r\cos\Theta)\right\}dS.
\end{aligned} \tag{43}$$

Уравнение (42) справедливо для всех частиц, для которых выпуклая оболочка особенностей рассеянного поля целиком расположена внутри рассеивателя [16-17,20].

После подстановки разложений диаграммы направленности (28) и плоской волны (см. [23]), учитывая соотношения (37)-(41) и интегралы Зоммерфельда [24]

$$h_n^{(1)}(k_1 r) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi k_1 r}}\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\frac{-\pi}{2}+i\infty}\exp(ik_1 r\cos\Psi)\exp[(n+1/2)\Psi]d\Psi \tag{44}$$

для сферических функций Ганкеля 1-го рода, получим БСЛАУ для неизвестных коэффициентов. Эти системы полностью совпадают с системами (17)-(18), которые были получены ранее в рамках модифицированного метода Т-матриц. Однако, в данном случае не требуется выполнение гипотезы Релея – сходимости рассеянных и внутренних полей вплоть до границы частицы. Условия разрешимости полученных БСЛАУ будут получены ниже, они накладывают более сильные ограничения на геометрию рассеивающей частицы, чем условия разрешимости интегральных уравнений.

Для неосесимметричных частей (31) диаграмм рассеянного излучения интегральные уравнения получаются аналогично, как и БСЛАУ для коэффициентов их разложений (33). Следует отметить, что эти системы также совпадают с БСЛАУ (25)–(29), получающимися в рамках модифицированного метода Т-матриц.

Таким образом, МДУ, по существу, представляет собой метод Т-матриц, но в дальней зоне рассеянного излучения.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ БСЛАУ

Для аналитического исследования полученных БСЛАУ нужно рассматривать поведение их матричных элементов и свободных членов при больших значениях индексов. Поскольку они являются интегралами от произведений волновых сферических функций, то следует использовать асимптотики сферических функций Бесселя и Ганкеля, а также присоединенных полиномов Лежандра при больших индексах [24]

$$j_n(k_2\, r) = \frac{2^n\, n!\, (k_2\, r)^n}{(2n+1)!}\ [1 + O(1/n)]\,, \tag{45}$$

$$h_n^{(1)}(k_1\, r) = \frac{i\,(2n)!}{2^n\, n!\, (k_1\, r)^{(n+1)}}\ [1 + O(1/n)]\,, \tag{46}$$

$$P_n^m(\cos\theta) = n^m \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}}\ \cos\left[(n+\frac{1}{2})\theta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] [1 + O(1/n)]\,. \tag{47}$$

Сначала рассмотрим БСЛАУ, возникающие в осесимметричном случае (ТЕ мода, $\mu_1 = \mu_2 = 1$). С учетом представлений (45) – (47) матричные элементы бесконечных систем имеют следующие представления:

а) при $l >> 1, n = O(1)$

$$\alpha_{ln}^{(1)} = \int_0^{\pi} f_1(\theta) \exp\, [l(\ln k_2\, r(\theta) + is\theta)] \mathrm{d}\theta, \tag{48}$$

б) при $n >> l$

$$\alpha_{ln}^{(1)} = \int_0^{\pi} f_2(\theta) \exp\, [n(-\ln k_1\, r(\theta) + is\theta)] \mathrm{d}\theta, \tag{49}$$

где $s = 1$ или $s = -1$, $f_1(\theta), f_2(\theta)$ – медленно меняющиеся функции.

Интегралы (48) – (49) оцениваются по методу перевала, при этом параметр θ становится комплексным. Введем комплексную плоскость $z = r \exp(i\theta)$. Тогда отображение $\zeta^+ = r(\theta) \exp(+i\theta)$ переводит сечение C_0 поверхности S плоскостью $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ в контур C_+ на плоскости z, который совпадает с сечением C_0. Контур C_- (для отображения $\zeta^- = r(\theta) \exp(-i\theta)$) является отражением сечения C_0 относительно оси вращения z и в нашем случае также совпадает с сечением C_0. В результате получим

$$|\alpha_{ln}^{(1)}| \le \mathrm{Const} \frac{(k_2\, r_{1,\max})^l}{2^l\, l \cdot l!}\ [1 + O(1/l)]\,, \quad l >> 1,\ \ n = O(1), \tag{50}$$

$$|\alpha_{ln}^{(1)}| \leq \mathrm{Const} \frac{2^n\, n!}{(k_1\, r_{2,\min})^n} \; [1 + O(1/n)] \,, \quad n >> l, \tag{51}$$

где

$$r_{1,\max} = \max \left| r(\theta_0^s\,)\, e^{is\theta_0^s} \right| , \tag{52}$$

$$r_{2,\min} = \min \left| r(\theta_0^s\,)\, e^{is\theta_0^s} \right| , \tag{53}$$

а значения θ_0^s находится из уравнений

$$\tfrac{r'_\theta(\theta)}{r(\theta)} \quad \Big|_{\theta=\theta_0^s} = -is \tag{54}$$

или

$$\exp\,(is\,\theta_0^s\,) = 0. \tag{55}$$

Максимум (52) ищется среди тех корней θ_0^s уравнений (54)–(55), которым при отображении $z = r(\theta) \exp\,(i\theta)$ соответствуют точки, лежащие внутри контуров C_+ и C_-, а минимум (53) – среди корней, которым соответствуют точки вне этих контуров. Таким корням отвечают особенности продолжений рассеянного и внутреннего полей во внутренность и во внешность рассеивателя соответственно. Отметим, что, если поверхность частицы негладкая (т.е. функция $r = r(\theta)$ имеет неаналитические точки), то их также следует учитывать при вычислении $r_{1,\max}$ и $r_{2,\min}$.

В дальнейшем нам потребуются некоторые соотношения. Первое из них получается с помощью замены $\zeta^+ = r(\theta) \exp\,(+i\theta)$ и перехода к интегрированию в комплексной плоскости ζ:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r(\theta) \exp\,(+i\theta))^{l-n} \left(1 - i \frac{r'_\theta(\theta)}{r(\theta)} \right) \mathrm{d}\theta = \delta_{ln}. \tag{56}$$

В нашем случае интегрирование проводится от 0 до π, поэтому при применении выше приведенной формулы нужно учесть, что выполняются равенства $r(2\pi - \theta) = r(\theta)$ и $r\,'(2\pi - \theta) = -r\,'(\theta)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [r(\theta)]^{l-n} \left(\cos\,(l-n)\,\theta) + \frac{r'_\theta(\theta)}{r(\theta)} \sin\,(l-n)\,\theta \right) \mathrm{d}\theta = \delta_{ln}. \tag{57}$$

Другие оценки относятся относится к интегралам вида ($l, n >> 1, \;\; |n-l| = O(1)$)

$$\begin{aligned} \kappa(l+n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r(\theta))^{l-n} \exp\,(+i\,(l+n)\,\theta) \left(1 + i \frac{r'_\theta(\theta)}{r(\theta)} \right) \mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [r(\theta)]^{l-n} \left(\cos\,(l+n)\,\theta) - \frac{r'_\theta(\theta)}{r(\theta)} \sin\,(l+n)\,\theta \right) \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{58}$$

Величины $\kappa(l{+}n)$ оцениваются по теореме Римана-Лебега [25], при этом скорость их убывания зависит от гладкости функции $r(\theta)$. Если она бесконечно диффиренцируема, то $\kappa(l+n) = \mathrm{o}((l+n)^{-m})$, где m – любое целое положительное число.

Принимая во внимание соотношения (57)-(58), можно найти оценки других матричных элементов БСЛАУ, включая диагональные ($l, n >> 1, \;\; |n-l| = O(1)$),

$$\alpha_{ll}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^l [1 + O(1/l)] \,, \quad \alpha_{ln}^{(1)} = \alpha_{ll}^{(1)} \cdot O\left(\frac{1}{ln} \right). \tag{59}$$

Последняя формула получается при учете вторых слагаемых в асимптотиках (45)-(46).

Свободные члены БСЛАУ (17) оцениваются аналогично (см. также [17]). В результате получим ($l >> 1$)

$$|\tilde{a}_l^0| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ln}^{(0)}\ a_n^{(0)} \right| \leq \mathrm{Const} \frac{(k_2\, r_{0,\max})^l}{2^l\, l \cdot l!}\ [1 + O(1/l)]\,, \tag{60}$$

где $r_{0,\max}$ – расстояние до наиболее удаленной от начала координат особенности падающего поля при его продолжении в область комплексных углов ($r_{0,\max} \leq \max r(\theta)$, т.е. внутри рассеивателя). В случае точечного источника такими точками служат его "изображения" [20]. Для плоской волны особые точки отсутствуют и можно выбрать любое сколь угодно малое положительное число (т.е. $r_{0,\,max} = 0$).

Сделаем замену неизвестных и свободных членов

$$x_n^{(1)} = \frac{2^n\, n!}{(k_1\, R)^n} a_n^{(1)}, \quad x_l^{(0)} = \frac{(k_2\, R)^l}{2^l\, l!}\ a_l^{(0)}. \tag{61}$$

Новая БСЛАУ будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{ln}^{(1)}\ x_n^{(1)} = x_l^{(0)}, \quad l = 1, 2, ..., \tag{62}$$

где

$$|\tilde{\alpha}_{ln}^{(1)}| \leq \mathrm{Const} \left(\frac{1}{l}\right) \left(\frac{r_{1,\max}}{R}\right)^l [1 + O(1/l)]\,, \qquad l >> 1, n = O(1), \tag{63}$$

$$|\tilde{\alpha}_{ln}| \leq \mathrm{Const} \left(\frac{R}{r_{2,\min}}\right)^n [1 + O(1/n)]\,, \quad n >> l, \tag{64}$$

$$\tilde{\alpha}_{ll}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) [1 + O(1/l)]\,, \quad \tilde{\alpha}_{ln}^{(1)} = O\left(\frac{1}{ln}\right). \quad l,\, n >> 1, \quad |n - l| = O(1). \tag{65}$$

$$|x_l^{(0)}| \leq \mathrm{Const}\ \frac{1}{l}\ \left(\frac{r_{0,\max}}{R}\right)^l [1 + O(1/l)]\,, \quad l >> 1, n = O(1), \tag{66}$$

Данная БСЛАУ является квазирегулярной [26-28] и для нее справедлива альтернатива Фредгольма при условии (для плоской волны $r_{0,\max} = 0$)

$$\max\ (r_{0,\max},\ r_{1,\max})\ \leq\ R\ \leq r_{2,\min}. \tag{67}$$

С учетом единственности исходной задачи рассеяния при выполнении этого условия существует едиственное решение БСЛАУ, которое можно найти методом редукции [26-28]. Последнее очень важно, так как при численных расчетах решаются именно редуцированные системы.

Следует отметить, что соотношение (67) накладывает ограничения только на геометрию частицы и не зависит от ее химического состава (диэлектрической постоянной).

Легко увидеть, что для матричных элементов БСЛАУ (25)–(29), к которым сводится задача рассеяния в неосесимметричном случае, справедливы оценки аналогичные соотношениям (50)-(55). Таким образом, условие (67) и в этом случае является необходимым для обоснованного применения метода Т-матриц в дальней зоне.

В работах Кюркчана предложено называть частицы, удовлетворяющие соотношению (67), "слабо невыпуклыми". Дело в том, что без учета особенностей внутреннего поля, которые находятся из соотношения (55), все выпуклые рассеиватели удовлетворяют неравенству (67). Однако, при рассмотрении всех особых точек выясняется, что существуют выпуклые частицы, для которых данный критерий не выполняется (например, сфероидальные частицы с отношениями полуосей $a/b > \sqrt{2}+1$, см. ниже). В связи с этим мы предлагаем другой термин – "слабо релеевские" частицы (в отличии от "релеевских" частиц, для которых справедлива гипотеза Релея).

Аналогичное исследование можно провести для БСЛАУ, возникающих в ранее предложенной схеме метода Т-матриц [7]. В результате снова получается соотношение (67).

Поскольку использование волновых сфероидальных функций в качестве базисных является краеугольным камнем во всех схемах метода Т-матриц, то сформулированные выше утверждения справедливы для любой из них, включая классическую [4-6].

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На основании изложенного подхода были проведены численные расчеты, некоторые результаты которых приведены ниже на рис. 1-5. Выражения для сечений ослабления $C_{\rm ext}$ и рассеяния $C_{\rm sca}$ можно найти в статье [7], а потенциалы $p^{(i)}$ и $U^{(i)}$, $V^{(i)}$ вычисляются по формулам (14)-(15) и (21)-(22) соответственно.

В дальней зоне в качестве теста на достоверность численных расчетов (и применимость метода Т-матриц) используется закон сохранения энергии $C_{\rm ext} = C_{\rm sca}$. На рисунках приводятся значения относительной ошибки

$$\Delta = 2\ \frac{C_{\rm ext} - C_{\rm sca}}{C_{\rm ext} + C_{\rm sca}} \tag{68}$$

в зависимости от количества N учитываемых слагаемых в разложениях полей. В осесимметричной задаче учитываются только первые слагаемые в выражениях для сечений, а в неосесимметричной – остальные слагаемые, начиная со вторых. Заметим, что другая возможная проверка, которая подходит и для поглощающих частиц, основывается на теореме взаимности [6,29].

В ближней зоне для тестирования используются граничные условия (ТМ мода). Их выполнение контролируется с помощью другой относительной ошибки

$$\delta_1 = 2\ \frac{p^{(0)} + p^{(1)} - p^{(2)}}{p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)}}, \qquad \delta_2 = 2\ \frac{U^{(0)} + U^{(1)} - U^{(2)}}{U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)}}, \tag{69}$$

где значения потенциалов вычисляются в определенной точке на поверхности рассеивателя. Кроме того, рассматривается сходимость соответствующих разложений для потенциалов рассеянного и внутреннего излучений в различных точках на поверхности частицы

$$\delta_1^{(i)} = \frac{p^{(i)}(N)}{p^{(i)}(N_{\max})} - 1, \quad \delta_2^{(i)} = \frac{U^{(i)}(N)}{U^{(i)}(N_{\max})} - 1, \tag{70}$$

где $N = 1, 2, ..., N_{\max}$, $N_{\max}$ – наибольшее количество учитываемых членов в разложениях.

В случае вытянутых сфероидов уравнение поверхности имеет вид

$$r(\theta) = \frac{b}{\sqrt{1 - \left[1 - (b/a)^2\right] \cos^2\theta}}, \tag{71}$$

Для сплюснутого сфероида нужно сделать замену $b \to a$, $a \to b$. Для вытянутых частиц особенности рассеянного поля находятся в фокусах сфероида [20] (половина фокусного расстояния $d = \sqrt{a^2 - b^2}$). Особенности внутреннего поля определяются уравнением (55) и расположены на горизонтальном кольце радиуса $2ab/d$ с центром начале координат. Для сплюснутых частиц особенности рассеянного поля образуют фокальное кольцо радиуса d, а особенности внутреннего поля находятся на оси вращения на расстоянии $2ab/d$ от центра сфероида (см. также [20]).

Вытянутые и сплюснутые сфероиды являются "слабо релеевскими" частицами при выполнении условия

$$d < 2ab/d \quad \text{или} \quad a/b < \sqrt{2} + 1. \tag{72}$$

Напомним, что гипотеза Релея для внешних задач выполняется при условии

$$d < b \quad \text{или} \quad a/b < \sqrt{2}, \tag{73}$$

а для внутренних задач – при

$$a < 2ab/d \quad \text{или} \quad a/b < \sqrt{5}. \tag{74}$$

Отметим, что задачу определения поля внутри частицы при падении на нее электромагнитного излучения целесообразно решать в рамках традиционного подхода (см. [7-8]). В этом случае внутреннее поле определяется на первом этапе, а затем по нему находится рассеянное поле. Принимая во внимание полученные выше результаты, можно утверждать – данная задача имеет единственное решение, которое можно найти методом редукции, при выполнении внутренней гипотезы Релея (74).

Вопрос о применимости метода T-матриц рассматривается отдельно для осесимметричной и неосесимметричной задач. Из рис. 1-2 видно, что характер сходимости разложений в осесимметричной и неосесимметричной задачах один и тот же (углы наклона прямых усредненных ошибок примерно одинаковы). Следует обратить внимание на то, что картина принципиально не меняется при переходе от сплюснутых сфероидов r вытянутым (рис. 3), а также при изменении показателя преломления вещества частицы (рис. 4) или ее размера по сравнению с длиной волны излучения (рис. 5). Данные иллюстрации показывают ухудшение результатов по методу T-матриц с увеличением отношения полуосей сфероида.

Сходимость разложений потенциалов рассеянного излучения в различных точках на поверхности частицы демонстрирует рис. 6. Из него следует, что в точке, находящиейся внутри сферы $r = r_{1,max}$, разложение (15) расходится в соответствии с изложенной выше теорией.

При численных расчетах границы применимости метода T-матриц проявляются нечетко, так как решаются редуцированные системы. Если условия (67) нарушаются, то можно получить результаты близкие к истинным при небольшом количестве учитываемых слагаемых в разложениях полей. Данная ситуация возможна только для частиц, размеры которых невелики по сравнению с длиной волны излучения. С увеличением порядка редуцированных систем их свойства становятся близкими к свойствам БСЛАУ. Максимальные размеры сфероидов, не являющихся "релеевскими" или "слабо релеевскими", но для которых численные расчеты дают приемлемые результаты в ближней или дальней зонах, определяются, в первую очередь, их формой (отношением a/b) и только затем химическим составом (показателем преломления) и, в слабой степени, ориентацией относительно падающего излучения.

Для чебышевских частиц уравнение поверхности записывается в виде

$$r(\theta) = r_0[1 + \epsilon\cos(n\theta)], \tag{75}$$

где r_0 – радиус невозмущенного шара, ϵ – амплитуда возмущения, n – количество гармоник (максимумов). Численный анализ полей в дальней зоне проводился в работе [8], там же достаточно подробно обсуждались особенности рассеянного и внутреннего полей (уравнение (55) новых особенностей не дает), а также внешняя и внутренняя гипотезы Релея. Приведенные в ней результаты хорошо укладываются в рамки, установленные в параграфе 4. В этой статье использовался термин "слабо невыпуклые" частицы, который в этом случае выглядит достаточно естественно, но, с общей точки зрения, его следует заменить на "слабо релеевские" частицы.

Таким образом, численные расчеты полностью подтверждают результаты аналитических исследований. Отметим, что стандартная программа Барбера и Хилла [5], использующая классический метод Т-матриц, дает аналогичные результаты. В рамках модифицированного подхода для сфероидальных частиц с отношениями $a/b > 3$ (т.е. уже в области "рискованного" применения) разложения полей сходятся быстрее, чем в классической схеме. Это позволяет продвинуться несколько дальше, если использовать наше решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный аналитический и численный анализ метода Т-матриц и его модификаций показал, что теоретически они имеют одну и ту область применимости, при этом можно сделать следующие выводы.

1. В дальней зоне метод Т-матриц заведомо удовлетворительно работает для "слабо релеевских" частиц (для сфероидов при $a/b < (\sqrt{2} + 1)$), когда аналитические продолжения рассеянных и внутренних полей имеют общее кольцо с центром в центре частицы.

2. В ближней зоне и, следовательно, всюду метод Т-матриц можно обоснованно применять только в случае "релеевских" частиц (для сфероидов при $a/b < \sqrt{2}$), для которых справедлива гипотеза Релея.

3. Предельные размеры частиц, не являющихся "релеевскими" или "слабо релеевскими", но для которых численные расчеты дают приемлемые результаты в ближней или дальней зонах, определяются, в первую очередь, их геометрией (формой) и только затем химическим составом (показателем преломления). Для сфероидов эти значения достаточно быстро уменьшаются с ростом отношения a/b.

Итак, область обоснованного применения метода Т-матриц для сфероидальных частиц сравнительно невелика, поэтому значительно возрастает роль метода разделения переменных [10-11,14-15], который можно использовать при любых значениях параметров [27-28].

Автор глубоко признателен В.Б.Ильину за плодотворные дискуссии и выполненные численные расчеты. Данная работа выполнена при финансовой поддержке по программе INTAS (грант 99/652).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борен К., Хафмен Д. Рассеяние и поглощение света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
2. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
3. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. Новосибирск: Наука, 1988.
4. Varadan V.K., Varadan V.V. (eds) Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering – Focus on the T-matrix Approach, Pergamon Press, New York 1980.
5. Barber P.W., Hill S.C. Light Scattering by Particles: Computational Methods, World Scientific, Singapore, 1990.
6. Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D. Light Scattering by Nonspherical particles. San Diego: Academic Press, 2000.
7. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. N 1. С. 70.
8. Фарафонов В.Г. Ильин В.Б. // Опт. и спектр. 2001. Т. 91. N 4.
9. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2001. Т. 91. N 1. С. 86.
10. Voshchinnikov N.V., Farafonov V.G. // Astrophys. Space Sci. 1993. V. 204. N 1. P. 19.
11. Voshchinnikov N.V., Il'in V.B., Henning Th., Michel B., Farafonov V.G. // JQSRT. 2000. V. 65. N 5. P. 877.
12. Schulz F.M., Stamnes K., Stamnes J.J. // Appl. Opt. 1998. V. 37. P. 7875.
13. Schulz F.M., Stamnes K., Stamnes J.J. // JOSA. 1999. V. 16. N 4. P. 853.
14. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2001. Т. 90. N 5. С. 516.
15. Farafonov V.G., Voshchinnikov N.V., Somsikov V.V. // Appl. Opt. 1996. V.35. N27. P.5412.
16 Кюркчан А.Г. // Докл. АН. 1992. Т .325. N 2. С. 273.
17 Кюркчан А.Г., Клеев А.И. // Радиотехн. и электрон. 1995. Т.40. N 6. С. 897.
18 Кюркчан А.Г. // Радиотехн. и электрон. 2000. Т.45. N 9. С. 1078.
19. Кюркчан А.Г. // Радиотехн. и электрон. 1986. Т.31. С.1294.
20. Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г. Аналитические свойства волновых полей. М.: Изд-во МГУ, 1990.
21. Zakharova N.T., Mishchenko M.I. // Appl. Opt. 2000. V. 39. N 27. P. 5052.
22. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
23. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.Т.2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
24. Зоммерфельд А. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
25. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
26. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962.
27. Фарафонов В.Г. // Дифференц. уравн. 1982. Т. 18. N 9. С. 1599.
28. Фарафонов В.Г. // Дифференц. уравн. 1983. Т. 19. N 10. С. 1765.
29. Farafonov V.G., Il'in V.B., Voshchinnikov N.V. // 6th International Congress on Optical Particle Characterisation. 2–5 April 2001. Brighton, UK. Abstract Book. P. 79-80.

Подписи под рисунками
к статье В.Г.Фарафонова
"О применимости метода Т-матриц и его модификаций"

Рис. 1. Относительные ошибки (осесимметричная задача) Δ и δ (в точке с координатами $\theta = 45°, \varphi = 0°$) в зависимости от числа учитываемых слагаемых N для сплюснутых сфероидов с разными отношениями a/b , показанными числами около кривых. Показатель преломления $\sqrt{\epsilon} = m = 2.0$, параметр размера $x_v = k_1 r_v = 2\pi r_v/\lambda = 1, r_v = a^2 b$, излучение падает под углом $\alpha = 45°$ к оси симметрии частиц.

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для неосесимметричной задачи.

Рис. 3. То же, что и на рис. 1, но для вытянутых сфероидов.

Рис. 4. То же, что и на рис. 1, но для $m = 1.3$.

Рис. 5. То же, что и на рис. 1, но для $x_v = 3$.

Рис. 6. Относительные ошибки $\delta_1^{(1)}$ в точках на поверхности сплюснутого сфероида при $a/b = 1.42,\ m = 2.0,\ x_v = 1.0,\ \alpha = 45°$. Около кривых указаны значения угла θ ($\varphi = 0°$).