НОВОЕ РЕКУРСИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫМИ СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

© 2000 г. **В. Г. Фарафонов***

*Государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 31.08.2000 г.

В работе построен новый рекурсивный алгоритм решения задачи рассеяния произвольно поляризованной плоской электромагнитной волны многослойными конфокальными сфероидальными частицами. Данный подход сохраняет преимущества двух методов, предложенных ранее автором для однородных и двухслойных сфероидов (специальный выбор скалярных потенциалов, использование в качестве базисных волновых сфероидальных функций), а также для однородных осесимметричных частиц (формулировка задачи в виде поверхностных интегральных уравнений, определение потенциалов излучения внутри частицы по потенциалом падающего излучения, а затем определение потенциалов рассеянного излучения по потенциалам излучения внутри частицы). В случае многослойных частиц в каждой оболочке соответствующие потенциалы представляюся в виде суммы двух слагаемых. Первое из них обладает свойствами падающего излучения (отсутствуют особенности внутри области, ограниченной внешней границей оболочки), второе – рассеянного излучения (выполняются условия излучения на бесконечности). В результате при переходе от одного слоя частицы к следующему (в направлении от ядра к внешней оболочке) не происходит увеличения размерности редуцированных линейных матричных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений потенциалов рассеянного излучения по сравнению со случаем однородного сфероида. Отметим ясность и простоту (насколько это возможно при рассмотрении такой сложной задачи) предложенного алгоритма. В случае сферических многослойных частиц решение представляется в явном виде.

ВВЕДЕНИЕ

Из всех конечных несферических частиц вытянутые и сплюснутые сфероиды (эллипсоиды вращения) представляют наибольший интерес. С одной стороны, они имеют каноническую форму, и скалярное волновое уравнение допускает разделение переменных в сфероидальных координатах. С другой стороны, ими можно достаточно хорошо аппроксимировать реальные частицы [1-3]. В настоящее время задача рассеяния света двухслойными сфероидами решается либо методом разделения переменных (т.е. используя в качестве базисных волновые сфероидальные функции) [4-7], либо методом Т-матриц [8-9] (см также монографию [10]). При первом подходе важную роль играет выбор скалярных потенциалов или, что эквивалентно, векторных волновых сфероидальных функций. В действительности, именно этим отличаются друг от друга различные схемы метода разделения переменных. Наиболее полно аналитически исследованным [11] и наиболее эффективным с вычислительной точки зрения [7,12] является решение, предложенное нами [7]. Недавно [13] была предпринята попытка, на наш взгляд неудачная, построить рекурсивное решение рассматриваемой задачи, базирующееся на этом решении. При этом использовалась методика построения рекурсивного решения для многослойных шаров [14]. В результате авторами этой статьи было получено весьма сложное нелинейное матричное уравнение для неизвестных коэффициентов разложений потенциалов рассеянного излучения.

В данной работе рассматривается рассеяние произвольно поляризованной плоской волны многослойными сфероидальными частицами. Общая задача рассеяния решается последовательно: сначала осесимметричная задача для первых частей электромагнитных полей, не зависящих от азимутального угла (нулевых слагаемых рядов Фурье), затем – неосесимметричная задача для вторых частей, усреднение которых по этому углу равно нулю (сумм остальных слагаемых рядов Фурье). Как в первом, так и во втором случае задачи формулируются в виде поверхностных интегральных уравнений относительно специально выбранных скалярных потенциалов [15,16]. В осесимметричной задаче такими потенциалами служат, по существу, азимутальные компоненты электромагнитных полей. В неосесимметричной задаче в качестве скалярных потенциалов выбираются суперпозиции вертикального (вдоль оси вращения частицы) компонента магнитного или электрического вектора Герца и соответствующего потенциала Дебая (r-компонента вектора Герца, умноженного на модуль радиус-вектора). При такой постановке задач рассеяния потенциалы последующего слоя выражаются через потенциалы предыдущего, начиная с ядра частицы. Выбранные потенциалы представляются в виде разложений по скалярным волновым сфероидальным функциям. В результате алгебраизации интегральных уравнений получаем линейные матричные уравнения относительно неизвестных коэффициентов разложений потенциалов рассеянного излучения. Важно, что размерность этих усеченных систем для многослойных сфероидов не увеличивается по сравнению с усеченными системами уравнений для однородных частиц. При переходе к многослойным концентрическим шарам матричные уравнения решаются в явном виде.

Таким образом, предлагаемый рекурсивный алгоритм решения задачи рассеяния электромагнитного излучения многослойными сфероидами базируется на методе разделения переменных [11, 6,7] и недавно предложенном интегральном методе для аксиально симметричных частиц [15,16]. Использование волновых сфероидальных функций в качестве базисных обусловлено тем, что в этом случае наиболее полно учитывается геометрия рассматриваемой задачи. Исходя из обширной практики расчетов оптических свойств однородных и двухслойных сфероидальных частиц [7,12,17-20], можно предположить, что область применимости данного рекурсивного решения достаточно широка. Это касается как показателей преломления и поглощения веществ ядра и оболочек, так и геометрических параметров, определяющих размер и форму частиц. Отметим, что в данной работе рассматривается только конфокальные (софокусные) многослойные сфероидальные частицы.

1. ИСХОДНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем декартовую систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы ось z совпадала с осью вращения частицы. Наряду с декартовой введем сфероидальную систему (ξ, η, φ), координаты которой связаны с декартовыми следующим образом [21]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2}(\xi^2 \mp f)^{1/2}(1-\eta^2)^{1/2}\cos\varphi, \\ y &= \frac{d}{2}(\xi^2 \mp f)^{1/2}(1-\eta^2)^{1/2}\sin\varphi, \\ z &= \frac{d}{2}\xi\eta, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f = 1$, $\xi \in [1, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ для вытянутых и $f = -1$, $\xi \in [0, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ для сплюснутых координат; d – фокусное расстояние. Предполагается, что частица является конфокальной (софокусной), т.е. поверхности слоев являются координатными, а их уравнения можно записать в виде

$$\xi = \xi_j, \tag{2}$$

где $j = 1, 2, ..., J$, при этом значение индекса $j = 1$ соответствует внешней границе частицы, а $j = J$ – границе ее ядра. Для таких частиц большие a_j и меньшие b_j полуоси сфероидов, образующих оболочки, удовлетворяют следующим условиям:

$$a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2 = \ \dots \ = a_J^2 - b_J^2 \ = \ \left(\frac{d}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Обозначим через $\vec{E}^{(j)}$, $\vec{H}^{(j)}$ напряженности электрического и магнитного полей в j-м слое с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_j и μ_j, $k_j = \sqrt{\varepsilon_j \cdot \mu_j} \cdot k_0$ – волновое число в j-слое ($k_0 = \omega/c$ – волновое число в свободном пространстве, ω – частота излучения, c – скорость света в вакууме). Значение индекса $j = 1$ соответствует среде вне частицы (отметим, что $\vec{E}^{(0)}$, $\vec{H}^{(0)}$ и $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$ – электромагнитные поля падающего и рассеянного излучений), $j = 2$ – внешней оболочке и т.д., $j = (J+1)$ – ядру J-слойной частицы.

Произвольно поляризованная плоская электромагнитная волна, падающая под углом α к оси вращения частицы, может быть представлена в виде суперпозиции волн двух типов:

а) волна TE типа

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(0)} &= -\vec{i_y}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \\ \vec{H}^{(0)} &= \sqrt{\tfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\ \left(\vec{i_x}\cos\alpha - \vec{i_z}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right]; \end{aligned} \tag{4}$$

б) волна TM типа

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(0)} &= \left(\vec{i_x}\cos\alpha - \vec{i_z}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \\ \vec{H}^{(0)} &= \sqrt{\tfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\ \vec{i_y}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

где $(\vec{i_x}, \vec{i_y}, \vec{i_z})$ - орты декартовой системы координат. Предполагается, что зависимость электромагнитных полей от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$.

Ранее [15] было показано, что для осесимметричных частиц задача рассеяния решается независимо для каждого слагаемого ряда Фурье векторов $\vec{E}^{(j)}, \vec{H}^{(j)}$ по азимутальному углу φ. Представим все электромагнитные поля в виде

$$\vec{E}^{(j)} = \vec{E}_1^{(j)} + \vec{E}_2^{(j)}, \qquad \vec{H}^{(j)} = \vec{H}_1^{(j)} + \vec{H}_2^{(j)}, \quad j = 0, ..., J, \tag{6}$$

где $\vec{E}_1^{(j)}$, $\vec{H}_1^{(j)}$ не зависят от азимутального угла φ, а усреднение $\vec{E}_2^{(j)}$, $\vec{H}_2^{(j)}$ по этому углу равно нулю. Ниже осесимметричная задача для полей $\vec{E}_1^{(j)}, \vec{H}_1^{(j)}$ и неосесимметричная задача для полей $\vec{E}_2^{(j)}, \vec{H}_2^{(j)}$ решаются независимо друг от друга.

2. РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Введем скалярные потенциалы

$$p^{(j)} = E_{1\varphi}^{(j)} \cos\varphi, \qquad q^{(j)} = H_{1\varphi}^{(j)} \cos\varphi, \tag{7}$$

где $E_{1\varphi}^{(j)}, H_{1\varphi}^{(j)}$ - φ-компоненты векторов $\vec{E}_1^{(j)}, \vec{H}_1^{(j)}$ $(j = 0, ..., J)$. Если исключить множитель $\cos\varphi$, эти потенциалы с точностью до множителя $h_\varphi = \frac{d}{2}\sqrt{(\xi^2 - f)(1 - \eta^2)}$ совпадают с потенциалами Абрагама [6-7]. Из уравнений Максвелла следует, что скалярные потенциалы удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta p^{(j)} + k_j^2 p^{(j)} = 0, \qquad \Delta q^{(j)} + k_j^2 q^{(j)} = 0, \tag{8}$$

а остальные составляющие электромагнитных полей выражаются через их азимутальные компоненты следующим образом:

$$\begin{aligned} H_r^{(j)} &= \frac{1}{i\mu_j k_0 h_\eta h_\varphi} \frac{\partial (h_\varphi E_\varphi^{(j)})}{\partial \eta}, \qquad H_\theta^{(j)} = \frac{-1}{i\mu_j k_0 h_\xi h_\varphi} \frac{\partial (h_\varphi E_\varphi^{(j)})}{\partial \xi}, \\ E_r^{(j)} &= \frac{-1}{i\varepsilon_j k_0 h_\eta h_\varphi} \frac{\partial (h_\varphi H_\varphi^{(j)})}{\partial \eta}, \qquad E_\theta^{(j)} = \frac{1}{i\varepsilon_j k_0 h_\xi h_\varphi} \frac{\partial (h_\varphi H_\varphi^{(j)})}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$h_\xi = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{\xi^2 - f\eta^2}{\xi^2 - f}}, \quad h_\eta = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{\xi^2 - f\eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_\varphi = \frac{d}{2}\sqrt{(\xi^2 - f)(1 - \eta^2)} \tag{10}$$

– метрические коэффициенты в сфероидальной системе координат [21].

Граничные условия (равенство тангенциальных компонентов электромагнитных полей на границах разделов сред) в случае TE моды (4) имеют вид (см. выражения (7),(9))

$$\left.\begin{aligned} & p^{(j)} = p^{(j+1)}, \\ & \frac{\partial\left[\sqrt{\xi^2 - f}\; p^{(j)}\right]}{\partial \xi} = \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{\partial\left[\sqrt{\xi^2 - f}\; p^{(j+1)}\right]}{\partial \xi}, \\ & q^{(j)} = q^{(j+1)}, \\ & \frac{\partial\left[\sqrt{\xi^2 - f}\; q^{(j)}\right]}{\partial \xi} = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} \frac{\partial\left[\sqrt{\xi^2 - f}\; q^{(j+1)}\right]}{\partial \xi}, \end{aligned}\right\}_{\xi = \xi_j} \tag{11}$$

где $j = 1, 2, ..., J$. В первой паре уравнений под $p^{(1)}$ и $q^{(1)}$ следует понимать ($p^{(0)}$ Ђ $p^{(1)}$) и ($q^{(0)}$ Ђ $q^{(1)}$) – сумму потенциалов падающего и рассеянного излучений.

Уравнения (11) нужно переписать таким образом, чтобы в левой части находились только сами потенциалы и их нормальные производные:

$$\left.\begin{array}{l} p^{(j)} = p^{(j+1)}, \\ \frac{\partial p^{(j)}}{\partial n} = \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{\partial p^{(j+1)}}{\partial n} + (\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1) \frac{\xi}{d/2 \sqrt{(\xi^2 - f)(\xi^2 - f\eta^2)}} p^{(j+1)}, \\ \\ q^{(j)} = q^{(j+1)}, \\ \frac{\partial q^{(j)}}{\partial n} = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_j + 1} \frac{\partial q^{(j+1)}}{\partial n} + (\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} - 1) \frac{\xi}{d/2 \sqrt{(\xi^2 - f)(\xi^2 - f\eta^2)}} p^{(j+1)}, \end{array}\right\}_{\xi = \xi_j} \tag{12}$$

где было учтено первое из соотношений

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\xi^2 - f}{\xi^2 - f\eta^2}} \, \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \mathrm{d}S = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sqrt{(\xi^2 - f)(\xi^2 - f\eta^2)} \, \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\varphi. \tag{13}$$

Отметим,что осесимметричная задача решается независимо для потенциалов p и q (т.е. для волн ТЕ и ТМ типов).

Далее сформулируем задачу в виде поверхностных интегральных уравнений. Скалярный потенциал $p^{(0)}$ для падающего излучения удовлетворяет волновому уравнению (8) внутри частицы, т.е. в области D_1, ограниченной поверхностью S_1, и не имеет там особенностей, поэтому для него справедливы следующие соотношения [22]:

$$\int_{S_1} \left(p^{(0)}(\vec{r}\,') \frac{\partial G_1}{\partial n'} - \frac{\partial p^{(0)}(\vec{r}\,')}{\partial n'} G_1 \right) \mathrm{d}S' = \left\{ \begin{array}{ll} -p^{(0)}(\vec{r}), & \vec{r} \in D_1, \\ \\ 0, & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_1, \end{array} \right. \tag{14}$$

где

$$G_j = G(k_j, \vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{\exp ik_j |\vec{r} - \vec{r}\,'|}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{15}$$

- функция Грина волнового уравнения с волновым числом k_j.

Скалярный потенциал $p^{(1)}$ для рассеянного излучения удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне частицы, т.е. в области $(R^3 \setminus \bar{D}_1)$, и условию излучения на бесконечности $(r \to \infty)$

$$\lim r \left(\frac{\partial p^{(1)}(\vec{r})}{\partial r} - ik_1 p^{(1)}(\vec{r}) \right) = 0, \tag{16}$$

поэтому для него справедливы соотношения [22]

$$\int_{S_1} \left(p^{(1)}(\vec{r}\,') \frac{\partial G_1}{\partial n'} - \frac{\partial p^{(1)}(\vec{r}\,')}{\partial n'} G_1 \right) \mathrm{d}S' = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \vec{r} \in D_1, \\ \\ p^{(1)}(\vec{r}), & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_1. \end{array} \right. \tag{17}$$

Скалярный потенциал $p^{(j)}$ излучения в $(j-1)$-й оболочке частицы можно представить в виде

$$p^{(j)} = p_1^{(j)} + p_2^{(j)}, \tag{18}$$

где $p_1^{(j)}$ - не имеет особенностей в области D_{j-1} (следовательно, и в области D_j, ограниченной поверхностью S_j) и для него справедливо соотношение (14) при замене $S_1 \to S_j$, $D_1 \to D_j$, $G(k_1, \vec{r}, \vec{r}') \to G(k_j, \vec{r}, \vec{r}')$. Потенциал $p_2^{(j)}$ удовлетворяет условию излучения (16) (при замене $k_1 \to k_j$) и для него справедливо соотношение (17) при замене $S_1 \to S_j$, $D_1 \to D_j$, $G(k_1, \vec{r}, \vec{r}') \to G(k_j, \vec{r}, \vec{r}')$. Отметим, что в ядре потенциал излучения $p^{(J+1)} = p^{(J+1)_1}$ т.е.$p_2^{(J+1)} = 0$.

Складывая соотношения (14) и (17), а также соответствующие соотношения для потенциалов $p_1^{(j)}$ и $p_2^{(j)}$, с учетом граничных условий (12) и соотношений (13) получим

$$\frac{d}{2}(\xi_j^2 - f) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ p^{(j+1)}(\vec{r}') \frac{\partial G_j}{\partial \xi'} - \left[\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{\partial p^{(j+1)}(\vec{r}')}{\partial \xi'} + \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1 \right) \right. \right.$$
$$\left. \left. \cdot \frac{\xi_j}{(\xi_j^2 - f)} p^{(j+1)}(\vec{r}') \right] G_j \right\} \mathrm{d}\eta' \mathrm{d}\varphi' = \begin{cases} -p_1^{(j)}(\vec{r}), & \vec{r} \in D_j, \\ p_2^{(j)}(\vec{r}), & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_j, \end{cases} \tag{19}$$

где $\xi' = \xi_j$, $j = 1, 2, ..., J$ и, ради простоты записи, введены новые обозначения для потенциалов падающего и рассеянного излучений: $p_1^{(1)} = p^{(0)}$ и $p_2^{(1)} = p^{(1)}$.

Итак, мы получили $2J$ интегральных уравнения для определения $2J$ неизвестных потенциалов $p^{(1)}$, $p_1^{(2)}$, $p_2^{(2)}, ...,$ $p_1^{(J)}$, $p_2^{(J)}$, $p^{(J+1)}$.

Для потенциалов $q^{(j)}$ аналогичные уравнения получаются после замены $\mu_j \to \varepsilon_j$.

Скалярные потенциалы представляются в виде разложений по волновым сфероидальным функциям [6-7]

$$\begin{matrix} p_1^{(j)} \\ q_1^{(j)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_{l,1}^{(j)} \\ b_{l,1}^{(j)} \end{matrix} R_{1l}^{(1)}(c_j, \xi)\ S_{1l}(c_j, \eta)\ \cos\varphi, \tag{20}$$

$$\begin{matrix} p_2^{(j)} \\ q_2^{(j)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_{l,2}^{(j)} \\ b_{l,2}^{(j)} \end{matrix} R_{1l}^{(3)}(c_j, \xi)\ S_{1l}(c_j, \eta)\ \cos\varphi, \tag{21}$$

где для волны TE типа коэффициенты разложений представляются в виде

$$\begin{aligned} a_{l,1}^{(1)} &= -2i^l\ N_{1l}^{-2}(c_1)\ S_{1l}(c_1, \cos\alpha)\ \cos\varphi, \\ b_{l,1}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

а для волны TM типа (см. выражения (4) и (5))

$$\begin{aligned} a_{l,1}^{(1)} &= 0, \\ b_{l,1}^{(1)} &= 2\sqrt{\tfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \subset^l\ N_{1l}^{-2}(c_1)\ S_{1l}(c_1, \cos\alpha)\ \cos\varphi. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $R_{ml}^{(1),(3)}(c, \xi)$ – вытянутые радиальные сфероидальные функции первого и третьего рода, $S_{ml}(c, \eta)$ – вытянутые угловые сфероидальные функции с нормировочным множителем $N_{ml}(c)$ [21], параметр $c = k\frac{d}{2}$.

Для функции Грина имеет место следующее разложение по волновым сфероидальным функциям [21]:

$$\begin{aligned} G(k_j,\vec r,\vec r\,') &= \frac{ik_j}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta_{0m})\,N_{ml}^{-2}(c_j)\,R_{ml}^{(1)}(c_j,\xi_<)\,R_{ml}^{(3)}(c_j,\xi_>)\,\cdot \\ &\cdot S_{ml}(c_j,\eta)\,S_{ml}(c_j,\eta)\,\cos m(\varphi-\varphi'), \end{aligned} \qquad (24)$$

где

$$\delta_{0m}=\left\{\begin{array}{ll} 1, & m=0,\\ 0, & m\neq 0, \end{array}\right. \qquad (25)$$

$\xi_<=\min(\xi,\xi')$, $\xi_>=\max(\xi,\xi')$.

Подставим разложения (20) -(21) и (24) в интегральные уравнения (19). Учитывая свойства ортогональности угловых сфероидальных функций $S_{ml}(c,\eta)\,\cos m\varphi$ на поверхности любого сфероида, получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов разложений искомых потенциалов. В матричной форме они могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \vec z_1^{(j)} &= -\left(A_{31}^{(j)}\ \ \vec z_1^{(j+1)}+A_{33}^{(j)}\ \ \vec z_2^{(j+1)}\right),\\ \vec z_2^{(j)} &= A_{11}^{(j)}\ \ \vec z_1^{(j+1)}+A_{13}^{(j)}\ \ \vec z_2^{(j+1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

где

$$A_{31}^{(j)}=W_j\left\{R_{3,j}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}-\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\Delta_{j,j+1}^{(1)}\ R_{1,j+1}-\left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\ \frac{\xi_j}{\xi_j^2-f}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}\right\}\ P_1^{(j)}, \qquad (27)$$

$$A_{33}^{(j)}=W_j\left\{R_{3,j}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}-\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\Delta_{j,j+1}^{(1)}\ R_{3,j+1}-\left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\ \frac{\xi_j}{\xi_j^2-f}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}\right\}\ P_3^{(j)}, \qquad (28)$$

$$A_{11}^{(j)}=W_j\left\{R_{1,j}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}-\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\Delta_{j,j+1}^{(1)}\ R_{1,j+1}-\left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\ \frac{\xi_j}{\xi_j^2-f}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}\right\}\ P_1^{(j)}, \qquad (29)$$

$$A_{13}^{(j)}=W_j\left\{R_{1,j}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}-\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\Delta_{j,j+1}^{(1)}\ R_{3,j+1}-\left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\ \frac{\xi_j}{\xi_j^2-f}\ \Delta_{j,j+1}^{(1)}\right\}\ P_3^{(j)}. \qquad (30)$$

Выше введены векторы $\vec z_1^{(j)}=\left\{z_{l,1}^{(j)}\right\}_1^{\infty}$, $\vec z_2^{(j)}=\left\{z_{l,2}^{(j)}\right\}_1^{\infty}$,

$$z_{l,1}^{(j)}=a_{l,1}^{(j)}R_{1l}^{(1)}(c_j,\xi_j)N_{1l}(c_j),\quad z_{l,2}^{(j)}=a_{l,2}^{(j)}R_{1l}^{(3)}(c_j,\xi_j)N_{1l}(c_j) \qquad (31)$$

и диагональные матрицы

$$\begin{aligned} R_{i,j} &= \left\{R_{ml}^{(i)\prime}(c_j,\xi_j)/R_{ml}^{(i)}(c_j,\xi_j)\delta_{nl}\right\}_m^{\infty},\\ R_{i,j+1} &= \left\{R_{ml}^{(i)\prime}(c_{j+1},\xi_j)/R_{ml}^{(i)}(c_{j+1},\xi_j)\delta_{nl}\right\}_m^{\infty},\\ W_j &= -\left[R_{3,j}-R_{1,j}\right]^{-1}=\left\{ic_j(\xi_j^2-f)\ R_{ml}^{(1)}(c_j,\xi_j)\,R_{ml}^{(3)}(c_j,\xi_j)\,\delta_{nl}\right\}_m^{\infty},\\ P_i^j &= \left\{R_{ml}^{(i)}(c_{j+1},\xi_j)/R_{ml}^{(i)}(c_{j+1},\xi_{j+1})\delta_{nl}\right\}_m^{\infty}. \end{aligned} \qquad (32)$$

Элементы матриц $\Delta_{i,j}^{(m)} = \left\{\delta_{nl}^{(m)}(c_i, c_j)\right\}_m^\infty$ представляют собой интегралы от произведения угловых сфероидальных функций, которые приведены в Приложении. При выводе третьей формулы (32) было учтено выражение для вронскиана радиальных сфероидальных функций [21]. Нижние индексы матриц показывают, какого рода радиальные функции входят в их выражения (см. (27)-(30)).

Система уравнений (26) легко решается относительно коэффициентов разложений потенциала рассеянного излучения

$$\vec{z}^{(1)} = A_2 \cdot (A_1)^{(-1)} \; \vec{z}^{(0)}, \tag{33}$$

где матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{31}^{(1)} & -A_{33}^{(1)} \\ A_{11}^{(1)} & A_{13}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} -A_{31}^{(J-1)} & -A_{33}^{(J-1)} \\ A_{11}^{(J-1)} & A_{13}^{(J-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -A_{31}^{(J)} \\ A_{11}^{(J)} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

При выполнении условий $\mu_k = \mu_{k+1}, \;\; c_k = c_{k+1}$ матрицы вычисляются в явном виде, а именно $A_{11}^{(k)} = A_{33}^{(k)} = 0, \quad -A_{13}^{(k)} = A_{31}^{(k)} = I$ (единичная матрица). Таким образом, в этом случае $\vec{z}_1^k = \vec{z}_1^{k+1}, \; \vec{z}_2^k = \vec{z}_2^{k+1}$ и k-й слой частицы не оказывает влияния на ее рассеивающие свойства. Если частица однородна ($J = 1$), то $A_1 = A_{31}^{(1)}, \quad A_2 = A_{11}^{(1)}$.

В случае ТМ моды отличны от нуля потенциалы $q^{(j)}$. Соответствующие уравнения получаются из выше приведенных после замены $\mu_j \to \varepsilon_j$ и $a_n^{(j)} \to b_n^{(j)}$.

3. РЕШЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Для определения неосесимметричной части электромагнитного поля будем использовать скалярные потенциалы U и V. Первый из них является z-компонентом магнитного или электрического вектора Герца, а второй - соответствующим потенциалом Дебая:

а) волна ТЕ типа

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^{(j)} &= \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)} \; \vec{i}_z + V^{(j)} \; \vec{r}\right), \\ \vec{H}_2^{(j)} &= \tfrac{1}{i\mu_j k_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)} \; \vec{i}_z + V^{(j)} \; \vec{r}\right); \end{aligned} \tag{35}$$

б) волна ТМ типа

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^{(j)} &= -\tfrac{1}{i\varepsilon_j k_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)} \; \vec{i}_z + V^{(j)} \; \vec{r}\right), \\ \vec{H}_2^{(j)} &= \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)} \; \vec{i}_z + V^{(j)} \; \vec{r}\right), \end{aligned} \tag{36}$$

при этом потенциалы $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (8).

Граничные условия для скалярных потенциалов в случае ТЕ моды (4) записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\eta U^{(j)} + \tfrac{d}{2}\xi V^{(j)} &= \eta U(j+1) + \tfrac{d}{2}\xi V^{(j+1)},\\
\tfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi U^{(j)} + f\tfrac{d}{2}\eta V^{(j)}\right) &= \tfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi U^{(j+1)} + f\tfrac{d}{2}\eta V^{(j+1)}\right),\\
\varepsilon_j\left(\xi U^{(j)} + f\tfrac{d}{2}\eta V^{(j)}\right) &= \varepsilon_{j+1}\left(\xi U^{(j+1)} + f\tfrac{d}{2}\eta V^{(j+1)}\right),\\
\tfrac{1}{\mu_1}\tfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\eta U^{(j)} + \tfrac{d}{2}\xi V^{(j)}\right) &= \tfrac{1}{\mu_{j+1}}\left[\tfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\eta U^{(j+1)} + \tfrac{d}{2}\xi V^{(j+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left(1-\tfrac{c_{j+1}^2}{c_j^2}\right)\tfrac{1-\eta^2}{\xi^2-f}\tfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi U^{(j+1)} + f\tfrac{d}{2}\eta V^{(j+1)}\right)\right].
\end{aligned}\right\}_{\xi=\xi_j} \tag{37}$$

Эти условия слудует переписать, выражая из первой пары уравнений потенциалы $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$, а из второй – их нормальные производные. Принимая во внимание соотношения (13), имеем

$$\left.\begin{aligned}
U^{(j)} &= U^{(j+1)} + \left(\tfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\left[\tfrac{\xi^2}{\xi^2-f\eta^2}U_{j+1} + \tfrac{f\xi\eta}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right],\\
V^{(j)} &= \tfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}V^{(j+1)} - \left(\tfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\left[\tfrac{\xi\eta}{\xi^2-f\eta^2}U_{j+1} + \tfrac{\xi^2}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right],\\
\tfrac{\partial}{\partial\xi}U^{(j)} &= \tfrac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\tfrac{\partial}{\partial\xi}U^{(j+1)} - \left(\tfrac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\left[\tfrac{\xi^2}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{\partial}{\partial\xi}U_{j+1} + \tfrac{f\xi\eta}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{\partial}{\partial\xi}\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right]-\\
&\left(\tfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\tfrac{\xi}{\xi^2-f\eta^2}\left[-U^{(j+1)} + \tfrac{2\xi^2}{\xi^2-f\eta^2}U_{j+1} + \tfrac{2f\xi\eta}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right]+\\
&\left(\tfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-\tfrac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right)\tfrac{f\eta}{\xi^2-f\eta^2}\left[\tfrac{1-\eta^2}{\xi^2-f}\tfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi U^{(j+1)} + f\eta\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right) + \tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right].\\
\tfrac{d}{2}\tfrac{\partial}{\partial\xi}V^{(j)} &= \tfrac{d}{2}\tfrac{\partial}{\partial\xi}V^{(j+1)} + \left(\tfrac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\left[\tfrac{\xi\eta}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{\partial}{\partial\xi}U_{j+1} + \tfrac{\xi^2}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{\partial}{\partial\xi}\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right]+\\
&\left(\tfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\tfrac{\xi}{\xi^2-f\eta^2}\left[-\tfrac{d}{2}V^{(j+1)} + \tfrac{2\xi\eta}{\xi^2-f\eta^2}U_{j+1} + \tfrac{2\xi^2}{\xi^2-f\eta^2}\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right]-\\
&\left(\tfrac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-\tfrac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right)\tfrac{\xi}{\xi^2-f\eta^2}\left[\tfrac{1-\eta^2}{\xi^2-f}\tfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi U^{(j+1)} + f\eta\tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right) + \tfrac{d}{2}V^{(j+1)}\right].
\end{aligned}\right\}_{\xi=\xi_j} \tag{38}$$

Точно также, как в предыдущем параграфе, можно вывести интегральные уравнения для скалярных потенциалов $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$. Учитывая граничные условия (38), получим

$$\frac{d}{2}(\xi_j^2-f)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{U^{(j+1)}\frac{\partial G_j}{\partial\xi'} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\frac{\partial U^{(j+1)}}{\partial\xi'}G_j + \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\left[\frac{\xi_j^2}{\xi_j^2-f\eta'^2}U^{(j+1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{f\xi_j\eta'}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right]\frac{\partial G_j}{\partial\xi'} + \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\left[\frac{\xi_j^2}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{\partial U^{(j+1)}}{\partial\xi'} + \frac{f\xi_j\eta'}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{d}{2}\frac{\partial V^{(j+1)}}{\partial\xi'}\right]G_j+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\frac{\xi_j}{\xi_j^2-f\eta'^2}\left[-U^{(j+1)}+\frac{2\xi_j^2}{\xi_j^2-f\eta'^2}U^{(j+1)}+\frac{2f\xi_j\eta'}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right]G_j-$$

$$-\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right)\frac{f\eta'}{\xi_j^2-f\eta'^2}\left[\frac{1-\eta'^2}{\xi_j^2-f}\frac{\partial}{\partial\eta'}\left(\xi_j U^{(j+1)}+f\eta'\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right)+\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right]G_j\Bigg\}\,\mathrm{d}\eta'\mathrm{d}\varphi'=$$

$$\begin{cases} -U_1^{(j)}(\vec{r}), & \vec{r}\in D_j, \\ U_2^{(j)}(\vec{r}), & \vec{r}\in R^3\setminus\bar{D}_j, \end{cases} \tag{39}$$

$$\frac{d}{2}(\xi_j^2-f)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}\frac{d}{2}V^{(j+1)}\frac{\partial G_j}{\partial\xi'}-\frac{d}{2}\frac{\partial V^{(j+1)}}{\partial\xi'}G_j-\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\left[\frac{\xi_j\eta'}{\xi_j^2-f\eta'^2}U^{(j+1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\xi_j^2}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right]\frac{\partial G_j}{\partial\xi'}-\left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}-1\right)\left[\frac{\xi_j\eta'}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{\partial U^{(j+1)}}{\partial\xi'}+\frac{\xi_j^2}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{d}{2}\frac{\partial V^{(j+1)}}{\partial\xi'}\right]G_j-$$

$$-\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-1\right)\frac{\xi_j}{\xi_j^2-f\eta'^2}\left[-\frac{d}{2}V^{(j+1)}+\frac{2\xi_j\eta'}{\xi_j^2-f\eta'^2}U^{(j+1)}+\frac{2\xi_j^2}{\xi_j^2-f\eta'^2}\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right]G_j+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}-\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right)\frac{\xi}{\xi_j^2-f\eta'^2}\left[\frac{1-\eta'^2}{\xi_j^2-f}\frac{\partial}{\partial\eta'}\left(\xi_j U^{(j+1)}+f\eta'\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right)+\frac{d}{2}V^{(j+1)}\right]G_j\Bigg\}\,\mathrm{d}\eta'\mathrm{d}\varphi'=$$

$$\begin{cases} -V_1^{(j)}(\vec{r}), & \vec{r}\in D_j, \\ V_2^{(j)}(\vec{r}), & \vec{r}\in R^3\setminus\bar{D}_j. \end{cases} \tag{40}$$

Скалярные потенциалы представляются в виде разложений по волновым сфероидальным функциям [6,7]

$$\begin{matrix} U_1^{(j)} \\ V_1^{(j)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml,1}^{(j)} \\ b_{ml,1}^{(j)} \end{matrix} \; R_{ml}^{(1)}(c_j,\xi)\; S_{m1l}(c_j,\eta)\;\cos m\varphi, \tag{41}$$

$$\begin{matrix} U_2^{(j)} \\ V_2^{(j)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml,2}^{(j)} \\ b_{ml,2}^{(j)} \end{matrix} \; R_{ml}^{(3)}(c_j,\xi)\; S_{ml}(c_j,\eta)\;\cos m\varphi, \tag{42}$$

где для волны TE типа коэффициенты разложений представляются в виде

$$\begin{aligned} a_{l,1}^{(1)} &= \tfrac{4i^l}{k_1}\; N_{ml}^{-2}(c_1)\; \tfrac{S_{ml}(c_1,\cos\alpha)}{\sin\alpha}\;\cos m\varphi, \\ b_{l,1}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Для TM моды (5) коэффициенты отличаются знаком и множителем $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}$ (см. выражения (35)-(36)).

После подстановки в интегральные уравнения (39)-(40) разложений (41)-(42) и (24) получим бесконечные системы для неизвестных коэффициентов разложений. В матричной форме эти системы можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \vec{Z}_1^{(j)} &= -\left(A_{31}^{(j)} \quad \vec{Z}_1^{(j+1)} + A_{33}^{(j)} \quad \vec{Z}_2^{(j+1)}\right), \\ \vec{Z}_2^{(j)} &= A_{11}^{(j)} \quad \vec{Z}_1^{(j+1)} + A_{13}^{(j)} \quad \vec{Z}_2^{(j+1)}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

где векторы и матрицы имеют блочную структуру: $\vec{Z}_1^{(j)} = (\vec{x}_1^{(j)}, \vec{y}_1^{(j)})^T$, $\vec{Z}_2^{(j)} = (\vec{x}_2^{(j)}, \vec{y}_2^{(j)})^T$,

$$\begin{aligned} &x_{l,1}^{(j)} = k_1 a_{ml,1}^{(j)} R_{ml}^{(1)}(c_j, \xi_j) N_{ml}(c_j), \;\; x_{l,2}^{(j)} = k_1 a_{ml,2}^{(j)} R_{ml}^{(3)}(c_j, \xi_j) N_{ml}(c_j), \\ &y_{l,1}^{(j)} = c_1 b_{ml,1}^{(j)} R_{ml}^{(1)}(c_j, \xi_j) N_{ml}(c_j), \;\; y_{l,2}^{(j)} = c_1 b_{ml,2}^{(j)} R_{ml}^{(3)}(c_j, \xi_j) N_{ml}(c_j), \end{aligned} \tag{45}$$

$$A_{ik}^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_{ik,1}^{(j)} & \beta_{ik,1}^{(j)} \\ \alpha_{ik,2}^{(j)} & \beta_{ik,2}^{(j)} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{31,1}^{(j)} \;\; = \;\; W_j \; \Bigg\{ & R_{3,j} \; \Delta_{j,j+1}^{(m)} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \Delta_{j,j+1}^{(m)} \; R_{1,j+1} + \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1\right) \xi_j \left[\xi_j R_{3,j} Q_{j,j+1}^{(m)} - \right. \\ & \left. - Q_{j,j+1}^{(m)} \left(I - 2\xi_j^2 Q_{j+1,j+1}^{(m)}\right)\right] + \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1\right) \; \xi_j^2 Q_{j,j+1}^{(m)} R_{1,j+1} - \\ & - \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right) \; \frac{f\xi_j}{\xi_j^2 - f} \; Q_{j,j+1}^{(m)} \Upsilon_{j+1,j+1}^{(m)} \Bigg\} \; P_1^{(j)}, \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \beta_{31,1}^{(j)} \;\; = \;\; W_j \; \Bigg\{ & \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1\right) f\xi_j \left[R_{3,j} Q_{j,j+1}^{(m)} + 2\xi_j Q_{j,j+1}^{(m)} Q_{j+1,j+1}^{(m)}\right] \Gamma_{j+1,j+1}^{(m)} + \\ & + \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1\right) \; f\xi_j Q_{j,j+1}^{(m)} \Gamma_{j+1,j+1}^{(m)} R_{1,j+1} - \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right) \\ & \frac{f}{\xi_j^2 - f} \; \left[(\xi_j^2 Q_{j,j+1}^{(m)} - I) K_{j+1,j+1}^{(m)} + \Gamma_{j+1,j+1}^{(m)}\right] \Bigg\} \; P_1^{(j)}, \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{31,2}^{(j)} \;\; = \;\; W_j \; \Bigg\{ & - \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1\right) \xi_j \left[R_{3,j} Q_{j,j+1}^{(m)} + 2\xi_j Q_{j,j+1}^{(m)} Q_{j+1,j+1}^{(m)}\right] \Gamma_{j+1,j+1}^{(m)} - \\ & - \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1\right) \; \xi_j Q_{j,j+1}^{(m)} \Gamma_{j+1,j+1}^{(m)} R_{1,j+1} + \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}}\right) \\ & \frac{\xi^2}{\xi_j^2 - f} \; Q_{j,j+1}^{(m)} K_{j+1,j+1} \Bigg\} \; P_1^{(j)}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\beta^{(j)}_{31,2} = W_j \left\{ \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} R_{3,j}\ \Delta^{(m)}_{j,j+1} - \Delta^{(m)}_{j,j+1}\ R_{1,j+1} - \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1 \right) \xi_j \left[\xi_j R_{3,j} Q^{(m)}_{j,j+1} - \right.\right.$$
$$\left. - Q^{(m)}_{j,j+1} (I - 2\xi_j^2 Q^{(m)}_{j+1,j+1}) \right] - \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1 \right)\ \xi_j^2 Q^{(m)}_{j,j+1} R_{1,j+1} +$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \right)\ \frac{\xi_j}{\xi_j^2 - f}\ \left[Q^{(m)}_{j,j+1} \Upsilon^{(m)}_{j+1,j+1} + \Delta^{(m)}_{j,j+1} \right] \right\}\ P^{(j)}_1. \tag{50}$$

Элементы матриц $\Gamma_{i,j} = \left\{ \gamma^{(m)}_{nl}(c_i, c_j) \right\}^{\infty}_{m}$, $K_{i,j} = \left\{ \kappa^{(m)}_{nl}(c_i, c_j) \right\}^{\infty}_{m}$, $\Upsilon_{i,j} = \left\{ \upsilon^{(m)}_{nl}(c_i, c_j) \right\}^{\infty}_{m}$, $Q_{i,j} = \left\{ q^{(m)}_{nl}(c_i, c_j) \right\}^{\infty}_{m}$ являются интегралами от произведений угловых сфероидальных функций и их производных (см. Приложение). Здесь индекс m является азимутальным индексом и принимает значения от единицы до бесконечности. Другие нижние и верхние индексы матриц имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе. Элементы остальных матриц получаются из соотношений (47)-(50) так же, как это было пояснено ранее (см. выражения (27)-(30)).

Система уравнений (44) легко решается относительно коэффициентов разложений потенциала рассеянного излучения (см. систему (26))

$$\vec{Z}^{(1)} = A_2 \cdot A_1^{(-1)}\ \vec{Z}^{(1)}_1, \tag{51}$$

где матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению (34), но имеют блочную структуру (см. выражение (46)).

Бесконечные системы для неизвестных коэффициентов разложений скалярных потенциалов в случае ТМ моды можно получить из приведенных выше соотношений после замены $\mu_j \to \varepsilon_j$, $\varepsilon_j \to \mu_j$. Отметим, что при условии $\mu_j = 1$ они значительно проще, чем при этом же условии в случае ТЕ моды [6,7].

Переход к однородным частицам осуществляется также, как в осесимметричной задаче (см. обсуждение в конце предыдущего параграфа).

При предельном переходе $d \to 0$, $\xi_j \to \infty$, $c\xi_j \to kr_j$, $\eta \to \cos\theta$ получаются многослойные концентрические шары с радиусами оболочек r_j. В этом случае имеем

$$S_{ml}(c_j, \eta) \to P^m_l(\cos\theta),\ R^{(1)}_{ml}(c_j, \xi) \to j_l(k_j r),\ R^{(3)}_{ml}(c_j, \xi) \to h^{(1)}_l(k_j r). \tag{52}$$

В осесимметричной задаче матрицы $A^{(j)}_{(ik)}$ становятся диагональными, а в неосесимметричной задаче матрицы $\alpha^{(j)}_{(ik,1)}$, $\beta^{(j)}_{(ik,2)}$ – диагональны, матрицы $\beta^{(j)}_{(ik,1)} = 0$, а элементы матриц $\alpha^{(j)}_{(ik,2)}$ отличны от нуля только на двух диагоналях выше и ниже главной. В итоге решение задачи может быть записано в явном виде, включая обращение матрицы A_1 (см. уравнение (51)).

Для однородных сильно вытянутых и сильно сплюснутых сфероидальных частиц (отношение большей полуоси к меньшей $a/b >> 1$, дифракционный параметр порядка единицы $c = O(1)$) главный член асимптотики выражается в явном виде. Он совпадает с квазистатическим приближением (обобщением приближений Рэлея и Релея-Ганса) [23,24], исследование области применимости которого проведено в работе [25]. В случае многослойных конфокальных сфероидальных частиц эти результаты остаются справедливыми, нужно лишь воспользоваться релеевским приближением для многослойных конфокальных эллипсоидальных частиц [26].

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза России (грант N 97-0-13.3-30).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Угловые сфероидальные функции можно представить в виде разложений по присоединенным полиномам Лежандра

$$S_{ml}(c,\eta) = {\sum_{r=0,1}^{\infty}}' d_r^{ml}(c) P_{m+r}^m(\eta), \tag{53}$$

где штрих означает, что суммирование идет по целым r той же четности, что и число $l-m$. Интегралы от произведений нормированных угловых сфероидальных функций $\bar{S}_{ml}(c,\eta) = N_{ml}^{-1}(c) S_{ml}(c,\eta)$ записываются в виде рядов

$$\delta_{nl}^{(m)}(c_i,c_j) = \int_{-1}^{1} \bar{S}_{ml}(c_i,\eta)\bar{S}_{ml}(c_j,\eta)\mathrm{d}\eta = N_{mn}^{-1}(c_i)N_{ml}^{-1}(c_j)\cdot$$

$$ {\sum_{r=0,1}^{\infty}}' d_r^{mn}(c_i) d_r^{ml}(c_j) \frac{2}{2r+2m+1}\frac{(r+2m)!}{r!}, \tag{54}$$

$$\gamma_{nl}^{(m)}(c_i,c_j) = \int_{-1}^{1} \bar{S}_{ml}(c_i,\eta)\bar{S}_{ml}(c_j,\eta)\eta\mathrm{d}\eta = N_{mn}^{-1}(c_i)N_{ml}^{-1}(c_j) {\sum_{r=0,1}^{\infty}}' d_r^{mn}(c_i)$$

$$\left[d_{r-1}^{ml}(c_j)\frac{r}{2r+2m-1} + d_{r+1}^{ml}(c_j)\frac{r+2m+1}{2r+2m+3}\right]\frac{2}{2r+2m+1}\frac{(r+2m)!}{r!}, \tag{55}$$

$$\kappa_{nl}^{(m)}(c_i,c_j) = \int_{-1}^{1} \bar{S}'_{ml}(c_i,\eta)\bar{S}_{ml}(c_j,\eta)(1-\eta^2)\mathrm{d}\eta = N_{mn}^{-1}(c_i)N_{ml}^{-1}(c_j) {\sum_{r=0,1}^{\infty}}' d_r^{mn}(c_i)$$

$$\left[-d_{r-1}^{ml}(c_j)\frac{r(r+m-1)}{2r+2m-1} + d_{r+1}^{ml}(c_j)\frac{(r+m+2)(r+2m+1)}{2r+2m+3}\right] \tag{56}$$

$$\frac{2}{2r+2m+1}\frac{(r+2m)!}{r!}, \tag{57}$$

$$\upsilon_{nl}^{(m)}(c_i,c_j) = \int_{-1}^{1} \bar{S}'_{ml}(c_i,\eta)\bar{S}_{ml}(c_j,\eta)(1-\eta^2)\eta\mathrm{d}\eta = N_{mn}^{-1}(c_i)N_{ml}^{-1}(c_j) {\sum_{r=0,1}^{\infty}}' d_r^{mn}(c_i)$$

$$\left[d_{r-2}^{ml}(c_j)\frac{(r-1)r(r+m-2)}{(2r+2m-1)(2r+2m-3)} + d_r^{ml}(c_j)\frac{(r+m)(r+m+1)-3m^2}{(2r+2m-1)(2r+2m+3)}\right.$$

$$+d^{ml}_{r+2}(c_j)\frac{(r+m+3)(r+2m+1)(r+2m+2)}{(2r+2m+3)(2r+2m+5)}\Bigg]\frac{2}{2r+2m+1}\frac{(r+2m)!}{r!}, \qquad (58)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борен К., Хафмен Д. Рассеяние и поглощение света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
2. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеоиздат. 1984.
3. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. Новосибирск: Наука, 1988.
4. Onaka T. // Ann. Tokyo Astron. Obs. 1980. V.18. P.1.
5. Cooray M.F.R., Ciric I.R. // J. Electr. Waves Appl. 1992. V.6. P.1491.
6. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 1994. Т.76. Њ. С.87.
7. Farafonov V.G., Voshchinnikov N.V., Somsikov V.V. // Appl. Opt. 1996. V.35. N27. P.5412.
8. Peterson B., Strom S. // Phis. Rev. 1974. V.D 10. P.2670.
9. Wang D.-S., Barber P.W. // Appl. Opt. 1979. V.18. N8. P.1190.
10. Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D. (eds.) 2000: Light Scattering by Noncpherical Particles. Academic Press, 690pp.
11. Фарафонов В.Г. // Диф. уравн. 1983. Т.19. Њ0. Ц.1765.
12. Voshchinnikov N.V. // JQSRT. 1996. V.55. N5. P.627.
13. Gurwich I., Kleiman M., Shiloah N., Cohen A. // Appl. Opt. 1996. V.39. N3. P.470.
14. Wu Z.S., Wang Y.P. // Radio sci. 1991. V.26. N6. P.1393.
15. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2000. Т.88. Њ. С.70.
16. Farafonov V.G., Il'in V.B., Henning T. // JQSRT. 1999. V.63. N2-6. P.205.
16. Voshchinnikov N.V., Farafonov V.G. // Astrophys. Space Sci. 1993. V.204. P.19.
18. Фарафонов В.Г., Вощинников Н.В. // Опт. и спектр. 1996. Т.81. Н4. С.660.
19. Фарафонов В.Г., Вощинников Н.В. // Опт. и спектр. 1997. Т.83. Н6. С.973.
20. Voshchinnikov N.V., Il'in V.B., Henning T., Michel B., Farafonov V.G. // JQSRT. 2000. V.65. N7. P.877.
21. Комаров В.И., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
22. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
23. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 1990. Т.69. В4. С.866.
24. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 1994. Т.77. Н3. С.455.
25. Вощинников Н.В., Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2000. Т.88. Њ. С.78.
26. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2000. Т.88. Н3. С.492.