РАССЕЯНИЕ СВЕТА МНОГОСЛОЙНЫМИ ЧАСТИЦАМИ С АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

© **2000 г. В. Г. Фарафонов***

*Государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 31.08.2000 г.

В работе построен новый рекурсивный алгоритм решения задачи рассеяния произвольно поляризованной плоской электромагнитной волны многослойными диэлектрическими частицами с аксиальной симметрией. При этом был использован подход, предложенный и реализованный ранее для однородных осесимметричных частиц. Его основными моментами являются: 1) представление полей в виде суммы двух слагаемых, первое из которых не зависит от азимутального угла, а усреднение второго по этому углу дает нуль; 2) решение осесимметричной задачи с использованием скалярных потенциалов, связанных с азимутальными компонентами электромагнитных полей; 3) решение неосесимметричной задачи с использованием суперпозиции потенциалов Дебая и вертикальных компонентов магнитного и электрического векторов Герца. Принципиальным для предложенного решения является формулировка задач рассеяния в виде поверхностных интегральных уравнений относительно этих скалярных потенциалов, которые представляются в виде разложений по волновым сферическим функциям. Для неизвестных коэффициентов разложений получены весьма простые по своей структуре бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Размерность редуцированных систем для многослойных частиц совпадает с размерностью систем для аналогичных однородных частиц. В случае многослойных сферических частиц данный алгоритм дает решение рассматриваемой задачи в явном виде, при этом зависимость от радиальных сферических функций для слоев задается через производную логарифма (т.е. отношение производной к самой функции).

ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние света неоднородными, в том числе двух- и многослойными частицами является актуальной проблемой, с которой встречаются в оптике атмосферы и океана, биофизике, астрофизике [1-3] и т.д.. В настоящее время наиболее активно используется модель многослойных концентрических шаров, поскольку в этом случае имеются сравнительно простые и эффективные алгоритмы расчета характеристик рассеянного излучения [4]. Для неоднородных несферических частиц обычно используется модель двухслойных конфокальных (софокусных) сфероидов [5](см. также статьи [6-9]). В этих работах задача решалась методом разделения переменных в сфероидальных координатах. Попытка обобщения этого решения на случай $n-$слойных сфероидов сделана в статье [10]. Кроме того, следует отметить работы [11-12], где задача решалась методом Т-матриц. Рассеяние света многослойными конфокальными эллипсоидальными частицами в рэлеевском и квазистатическом приближениях рассматривалось в работах [13-15].

В настоящей статье предлагается новое решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны многослойными осесимметричными частицами. Данный алгоритм представляет собой обобщение решения задачи рассеяния света однородными частицами с аксиальной симметрией [16]. Используемый подход базируется на описании задачи рассеяния поверхностными интегральными уравнениями относительно специальным образом выбранных скалярных потенциалов, которые представляются в виде разложений по волновым сферическим функциям. Неизвестные коэффициенты этих разложений определяются из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, структура которых допускает достаточно простую алгоритмизацию. Построенное решение является рекурсивным, при этом окончательные системы уравнений содержит только неизвестные коэффициенты разложения потенциала рассеянного излучения. Подобные системы решаются методом редукции (усечения), при этом размерность редуцированных систем будет такой же, как и для однородных частиц.

Для многослойных сферических частиц решение задачи можно записать, по существу, в явном виде. Важно отметить, что в этом случае финальная система для неизвестных коэффициентов легко сводится к системе, матричные элементы которой зависят только от производных логарифмов радиальных сферических функций для слоев частицы. Таким образом, область применимости предлагаемого алгоритма для многослойных шаров практически такая же, как и для однородных сферических частиц.

1. ДВУХСЛОЙНАЯ ЧАСТИЦА

Рассмотрим рассеяние электромагнитного излучения отдельной двухслойной частицей, ядро и оболочка которой имеют общую ось вращения. Введем декартовую систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы ось z совпадала с осью вращения частицы. Тогда уравнения поверхности S_1 всей частицы и поверхности S_2 ее ядра можно записать следующим образом:

$$r_1 = r_1(\theta), \qquad r_2 = r_2(\theta), \tag{1}$$

где (r, θ, φ) – сферическая система координат.

Произвольно поляризованная плоская электромагнитная волна, падающая под углом α к оси вращения частицы, может быть представлена в виде суперпозиции волн двух типов:

а) волна TE типа

$$\vec{E}^{(0)} = -\vec{i_y}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right],$$
$$\vec{H}^{(0)} = \sqrt{\tfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\ \left(\vec{i_x}\cos\alpha - \vec{i_z}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right]; \qquad (2)$$

б) волна TM типа

$$\vec{E}^{(0)} = \left(\vec{i_x}\cos\alpha - \vec{i_z}\sin\alpha\right)\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right],$$
$$\vec{H}^{(0)} = \sqrt{\tfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\ \vec{i_y}\ \exp\left[ik_1\left(x\sin\alpha + z\cos\alpha\right)\right], \qquad (3)$$

где $(\vec{i_x}, \vec{i_y}, \vec{i_z})$ - орты декартовой системы координат. ε_1 и μ_1 - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды вне частицы, $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \cdot \mu_1} \cdot k_0$ - волновое число в среде, k_0 ı ω/c - волновое число в свободном пространстве (ω – частота излучения, c – скорость света в вакууме). Предполагается, что зависимость электромагнитных полей от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$.

Введем следующие обозначения: $\vec{E}^{(j)}$, $\vec{H}^{(j)}$ - напряженности электрического и магнитного полей рассеянного излучения $(j = 1)$, а также излучений в оболочке $(j = 2)$ и в ядре $(j = 3)$ частицы; ε_j и μ_j - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в оболочке $(j = 2)$ и в ядре $(j = 3)$ частицы, $k_j = \sqrt{\varepsilon_j \cdot \mu_j} \cdot k_0$ - соответствующие волновые числа.

Ранее [16] было показано, что для осесимметричных частиц задача рассеяния решается независимо для каждого слагаемого ряда Фурье векторов $\vec{E}^{(j)}, \vec{H}^{(j)}$ по азимутальному углу φ. Представим все электромагнитные поля в виде

$$\vec{E}^{(j)} = \vec{E}_1^{(j)} + \vec{E}_2^{(j)}, \qquad \vec{H}^{(j)} = \vec{H}_1^{(j)} + \vec{H}_2^{(j)}, \quad j = 0, ..., 3, \qquad (4)$$

где $\vec{E}_1^{(j)}$, $\vec{H}_1^{(j)}$ не зависят от азимутального угла φ, а усреднение $\vec{E}_2^{(j)}$, $\vec{H}_2^{(j)}$ по этому углу равно нулю. Ниже осесимметричная задача для полей $\vec{E}_1^{(j)}, \vec{H}_1^{(j)}$ и неосесимметричная задача для полей $\vec{E}_2^{(j)}, \vec{H}_2^{(j)}$ решаются независимо друг от друга.

1.1. РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Следуя работе [16], введем скалярные потенциалы

$$p^{(j)} = E_{1\varphi}^{(j)}\cos\varphi, \qquad q^{(j)} = H_{1\varphi}^{(j)}\cos\varphi, \qquad (5)$$

где $E_{1\varphi}^{(j)}, H_{1\varphi}^{(j)}$ - φ-компоненты векторов $\vec{E}_1^{(j)}, \vec{H}_1^{(j)}$ $(j = 0, ..., 3)$. Из уравнений Максвелла следует, что скалярные потенциалы удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta p^{(j)} + k_j^2 p^{(j)} = 0, \qquad \Delta q^{(j)} + k_j^2 q^{(j)} = 0, \qquad (6)$$

а остальные составляющие электромагнитных полей выражаются через их азимутальные компоненты следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&H_r^{(j)} = \tfrac{1}{i\mu_j k_0 r\sin\theta}\tfrac{\partial(\sin\theta E_\varphi^{(j)})}{\partial\theta}, \qquad H_\theta^{(j)} = \tfrac{-1}{i\mu_j k_0 r}\tfrac{\partial(rE_\varphi^{(j)})}{\partial r},\\
&E_r^{(j)} = \tfrac{-1}{i\varepsilon_j k_0 r\sin\theta}\tfrac{\partial(\sin\theta H_\varphi^{(j)})}{\partial\theta}, \qquad E_\theta^{(j)} = \tfrac{1}{i\varepsilon_j k_0 r}\tfrac{\partial(rH_\varphi^{(j)})}{\partial r}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Граничные условия (равенство тангенциальных компонентов электромагнитных полей на границах разделов сред) в данном случае имеют вид (см. выражения (7))

$$
\left.
\begin{array}{l}
p^{(0)} + p^{(1)} = p^{(2)},\\
\frac{\partial(p^{(0)}+p^{(1)})}{\partial n} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} + (\frac{\mu_1}{\mu_2}-1)\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left(1-\frac{r_\theta'}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)p^{(2)},\\
q^{(0)} + q^{(1)} = q^{(2)},\\
\frac{\partial(q^{(0)}+q^{(1)})}{\partial n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\partial q^{(2)}}{\partial n} + (\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-1)\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left(1-\frac{r_\theta'}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)q^{(2)},
\end{array}
\right\}_{\vec r\in S_1}
\tag{8}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
p^{(2)} = p^{(3)},\\
\frac{\partial p^{(2)}}{\partial n} = \frac{\mu_2}{\mu_3}\frac{\partial p^{(3)}}{\partial n} + (\frac{\mu_2}{\mu_3}-1)\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left(1-\frac{r_\theta'}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)p^{(3)},\\
q^{(2)} = q^{(3)},\\
\frac{\partial q^{(2)}}{\partial n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\frac{\partial q^{(3)}}{\partial n} + (\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}-1)\frac{1}{\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left(1-\frac{r_\theta'}{r}\mathrm{ctg}\theta\right)q^{(3)},
\end{array}
\right\}_{\vec r\in S_2}
\tag{9}
$$

где r_θ' - производная функции $r(\theta)$ по сферическому углу θ. Отметим,что осесимметричная задача решается независимо для потенциалов p и q (т.е. для волн TE и TM типов).

Далее сформулируем задачу в виде поверхностных интегральных уравнений. Скалярный потенциал $p^{(0)}$ для падающего излучения удовлетворяет волновому уравнению (7) внутри частицы, т.е. в области D_1, ограниченной поверхностью S_1, и не имеет там особенностей, поэтому для него справедливы следующие соотношения [17]:

$$
\int_{S_1}\left(p^{(0)}(\vec r\,')\frac{\partial G(k_1,\vec r,\vec r\,')}{\partial n} - \frac{\partial p^{(0)}(\vec r\,')}{\partial n}G(k_1,\vec r,\vec r\,')\right)\mathrm{d}S' = \begin{cases} -p^{(0)}(\vec r), & \vec r\in D_1,\\ 0, & \vec r\in R^3\setminus \bar D_1,\end{cases}
\tag{10}
$$

где

$$
G(k_1,\vec r,\vec r\,') = \frac{\exp ik_1|\vec r-\vec r\,'|}{4\pi|\vec r-\vec r\,'|}
\tag{11}
$$

- функция Грина волнового уравнения с волновым числом k_1.

Скалярный потенциал $p^{(1)}$ для рассеянного излучения удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне частицы, т.е. в области $(R^3 \setminus \bar{D}_1)$, и условию излучения на бесконечности $(r \to \infty)$

$$\lim r(\frac{\partial p^{(1)}(\vec{r})}{\partial r} - ik_1 p^{(1)}(\vec{r})) = 0, \tag{12}$$

поэтому для него справедливы соотношения [17]

$$\int_{S_1} \left(p^{(1)}(\vec{r}') \frac{\partial G(k_1, \vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - \frac{\partial p^{(1)}(\vec{r}')}{\partial n} G(k_1, \vec{r}, \vec{r}') \right) \mathrm{d}S' = \begin{cases} 0, & \vec{r} \in D_1, \\ p^{(1)}(\vec{r}), & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_1. \end{cases} \tag{13}$$

Скалярный потенциал $p^{(2)}$ для излучения в оболочке частицы можно представить в виде

$$p^{(2)} = p_1^{(2)} + p_2^{(2)}, \tag{14}$$

где $p_1^{(2)}$ - не имеет особенностей в области D_1 (следовательно, и в области D_2, ограниченной поверхностью S_2) и для него справедливо соотношение (10) при замене $S_1 \to S_2, \quad D_1 \to D_2, \quad G(k_1, \vec{r}, \vec{r}') \to G(k_2, \vec{r}, \vec{r}')$. Потенциал $p_2^{(2)}$ удовлетворяет условию излучения (12) (при замене $k_1 \to k_2$) и для него справедливо соотношение (13) при замене $S_1 \to S_2, \quad D_1 \to D_2, \quad G(k_1, \vec{r}, \vec{r}') \to G(k_2, \vec{r}, \vec{r}')$.

Складывая соотношения (10) и (13), а также соответствующие соотношения для потенциалов $p_1^{(2)}$ и $p_2^{(2)}$, и учитывая граничные условия (8) и (9), получим

$$\begin{gathered} \int_{S_1} \left\{ p^{(2)}(\vec{r}') \frac{\partial G(k_1, \vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial p^{(2)}(\vec{r}')}{\partial n} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + \left[(r')'_{\theta'} \right]^2}} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(1 - \frac{(r')'_{\theta'}}{r'} \mathrm{ctg}\theta' \right) p^{(2)}(\vec{r}') \right] G(k_1, \vec{r}, \vec{r}') \right\} dS' = -p^{(0)}(\vec{r}), \qquad \vec{r} \in D_1, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \int_{S_2} \left\{ p^{(3)}(\vec{r}') \frac{\partial G(k_2, \vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} - \left[\frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{\partial p^{(3)}(\vec{r}')}{\partial n} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_3} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{(r')^2 + \left[(r')'_{\theta'} \right]^2}} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(1 - \frac{(r')'_{\theta'}}{r'} \mathrm{ctg}\theta' \right) p^{(3)}(\vec{r}') \right] G(k_2, \vec{r}, \vec{r}') \right\} dS' = -p_1^{(2)}(\vec{r}), \qquad \vec{r} \in D_2, \end{gathered} \tag{16}$$

Итак, имеется четыре интегральных уравнения для определения четырех неизвестных потенциалов $p^{(1)}(\vec{r}), \quad p_1^{(2)}(\vec{r}), \quad p_2^{(2)}(\vec{r}), \quad p^{(3)}(\vec{r})$.

Для потенциалов $q^{(j)}$ аналогичные уравнения получаются после замены $\mu_j \to \varepsilon_j$.

Скалярные потенциалы представляются в виде разложений по волновым сферическим функциям

$$\begin{matrix} p^{(0)} \\ q^{(0)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_l^{(0)} \\ b_l^{(0)} \end{matrix} \; j_l(k_1 r) \; P_l^1(\cos\theta) \; \cos\varphi, \tag{17}$$

$$\begin{matrix} p^{(1)} \\ q^{(1)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_l^{(1)} \\ b_l^{(1)} \end{matrix} \; h_l^{(1)}(k_1 r) \; P_l^1(\cos\theta) \; \cos\varphi, \tag{18}$$

$$\begin{matrix} p_1^{(2)} \\ q_1^{(2)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_{l,1}^{(2)} \\ b_{l,1}^{(2)} \end{matrix} \; j_l(k_2 r) \; P_l^1(\cos\theta) \; \cos\varphi, \tag{19}$$

$$\begin{matrix} p_2^{(2)} \\ q_2^{(2)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_{l,2}^{(2)} \\ b_{l,2}^{(2)} \end{matrix} \; h_l^{(1)}(k_2 r) \; P_l^1(\cos\theta) \; \cos\varphi, \tag{20}$$

$$\begin{matrix} p^{(3)} \\ q^{(3)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_l^{(3)} \\ b_l^{(3)} \end{matrix} \; j_l(k_3 r) \; P_l^1(\cos\theta) \; \cos\varphi, \tag{21}$$

где для волны TE типа [16]

$$\begin{array}{l} a_l^{(0)} = -i^l \; \frac{2l+1}{l(l+1)} \; P_l^1(\cos\alpha), \\ b_l^{(0)} = 0, \end{array} \tag{22}$$

а для волны TM типа (см. выражения (2) и (3))

$$\begin{array}{l} a_l^{(0)} = 0, \\ b_l^{(0)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \; i^l \; \frac{2l+1}{l(l+1)} \; P_l^1(\cos\alpha). \end{array} \tag{23}$$

Здесь $j_l(kr)$, $h_l^{(1)}(kr)$ - сферические функции Бесселя и Ганкеля 1-го рода, $P_l^m(\cos\theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра.

Для функции Грина имеет место следующее разложение по волновым сферическим функциям [18]:

$$\begin{aligned} G(k_j, \vec{r}, \vec{r}') \; &= \; \frac{ik_j}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (2-\delta_{0m})\,(2l+1)\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\, j_l(k_j r_<)\, h_l^{(1)}(k_j r_>) \cdot \\ &\cdot P_l^m(\cos\theta)\, P_l^m(\cos\theta')\, \cos m(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \tag{25}$$

$r_< = \min(r, r')$, $r_> = \max(r, r')$.

Подставим разложения (17) -(21) и (24) в интегральные уравнения (15)-(16). Учитывая свойства ортогональности сферических функций $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ на любой сфере с центром в начале координат, получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов разложения искомых потенциалов. В матричной форме ($\vec{a}_i^{(j)} = \left\{a_{l,i}^{(j)}\right\}_{l=1}^{\infty}, i = 1,2, j = 0,...,3$) они могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{a}^{(0)} &= -(A_{hj}^{(1)} \ \ \vec{a}_1^{(2)} + A_{hh}^{(1)} \ \ \vec{a}_2^{(2)}),\\
\vec{a}^{(1)} &= A_{jj}^{(1)} \ \ \vec{a}_1^{(2)} + A_{jh}^{(1)} \ \ \vec{a}_2^{(2)},\\
\vec{a}_1^{(2)} &= -A_{hj}^{(2)} \ \ \vec{a}^{(3)},\\
\vec{a}_2^{(2)} &= A_{jj}^{(2)} \ \ \vec{a}^{(3)},
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
(A_{hj}^{(1)})_{ln} \ = \ & \frac{i(2l+1)}{2l(l+1)}\int_0^{\pi}\left\{k_1^2r_1^2\left[h_l^{(1)'}(k_1r_1)\ j_n(k_2r_1) - \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{k_2}{k_1}\ h_l^{(1)}(k_1r_1)\ j_n'(k_2r_1)\right]\cdot\right.\\
& \cdot P_l^1(\cos\theta)\,P_n^1(\cos\theta)\ \sin\theta + k_1(r_1)'_\theta\sin^2\theta\left[P_l^{1'}(\cos\theta)\,P_n^1(\cos\theta)\ -\right.\\
& \left.-\frac{\mu_1}{\mu_2}\ P_l^1(\cos\theta)\,P_n^{1'}(\cos\theta)\right]\ h_l^{(1)}(k_1r_1)\ j_n(k_2r_1) - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)\ \cdot\\
& \left.(k_1r_1\sin\theta - k_1(r_1)'_\theta\cos\theta)\,h_l^{(1)}(k_1r_1)\,j_n(k_2r_1)\,P_l^1(\cos\theta)\,P_n^1(\cos\theta)\right\}d\theta,
\end{aligned} \tag{27}$$

где $r_1 = r_1(\theta)$ - уравнение поверхности рассеивающей частицы, штрих означает дифференцирование по аргументу. Нижние индексы матриц показывают, какие именно радиальные функции (Бесселя или Ганкеля 1-го рода) входят в интегралы (27), через которые выражаются их элементы. Если верхний индекс матриц равен двум, то в интегралах (27) нужно сделать замену $k_1 \to k_2$, $k_2 \to k_3$, $\mu_1 \to \mu_2$, $\mu_2 \to \mu_3$, $r_1 = r_1(\theta) \to r_2 = r_2(\theta)$.

Система уравнений (26) легко решается относительно коэффициентов разложений потенциала рассеянного излучения

$$\vec{a}^{(1)} = A_2 \cdot A_1^{(-1)}\ \vec{a}^{(0)}, \tag{28}$$

где матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{hj}^{(1)} & -A_{hh}^{(1)} \\ A_{jj}^{(1)} & A_{jh}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -A_{hj}^{(2)} \\ A_{jj}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Отметим, что для непоглощающих частиц, находящихся в непоглощающей среде, справедливы равенства $A_{jj}^{(i)} = \mathrm{Im}A_{hj}^{(i)} = \mathrm{Im}A_{jh}^{(i)}$.

При выполнении условий $\mu_1 = \mu_2, \quad k_1 = k_2$ или $\mu_2 = \mu_3, \quad k_2 = k_3$ некоторые матрицы вычисляются в явном виде, а именно $A_{jj}^{(1)} = A_{hh}^{(1)} = 0, \quad A_{jh}^{(1)} = A_{hj}^{(1)} = I$ (единичная матрица) или $A_{jj}^{(2)} = 0, \quad A_{hj}^{(2)} = I$. В итоге приходим к задаче рассеяния однородной частицей, совпадающей либо с ядром частицы с параметрами μ_3 и k_3, либо с первоначальной частицей с параметрами μ_2 и k_2.

В случае ТМ моды отличны от нуля потенциалы $q^{(j)}$. Соответствующие уравнения получаются из выше приведенных после замены $\mu_j \to \varepsilon_j$ и $a_n^{(j)} \to b_n^{(j)}$.

1.2. РЕШЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Для определения неосесимметричной части электромагнитного поля будем использовать скалярные потенциалы U и V. Первый из них является z-компонентом магнитного или электрического вектора Герца, а второй - соответствующим потенциалом Дебая:

а) волна ТЕ типа

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^{(j)} &= \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)}\ \vec{i}_z + V^{(j)}\ \vec{r} \right), \\ \vec{H}_2^{(j)} &= \tfrac{1}{i\mu_j k_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)}\ \vec{i}_z + V^{(j)}\ \vec{r} \right); \end{aligned} \tag{30}$$

б) волна ТМ типа

$$\begin{aligned} \vec{E}_2^{(j)} &= -\tfrac{1}{i\varepsilon_j k_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)}\ \vec{i}_z + V^{(j)}\ \vec{r} \right), \\ \vec{H}_2^{(j)} &= \vec{\nabla} \times \left(U^{(j)}\ \vec{i}_z + V^{(j)}\ \vec{r} \right). \end{aligned} \tag{31}$$

где потенциалы $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца (6) и представляются в виде разложений по волновым сферическим функциям

$$\begin{matrix} U^{(0)} \\ V^{(0)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{(0)} \\ b_{ml}^{(0)} \end{matrix}\ j_l(k_1 r)\ P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{32}$$

$$\begin{matrix} U^{(1)} \\ V^{(1)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{(1)} \\ b_{ml}^{(1)} \end{matrix}\ h_l^{(1)}(k_1 r)\ P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{33}$$

$$\begin{matrix} U_1^{(2)} \\ V_1^{(2)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml,1}^{(2)} \\ b_{ml,1}^{(2)} \end{matrix}\ j_l(k_2 r)\ P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{34}$$

$$\begin{matrix} U_2^{(2)} \\ V_2^{(2)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml,2}^{(2)} \\ b_{ml,2}^{(2)} \end{matrix}\ h_l^{(1)}(k_2 r)\ P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{35}$$

$$\begin{matrix} U^{(3)} \\ V^{(3)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^{(3)} \\ b_{ml}^{(3)} \end{matrix}\ j_l(k_3 r)\ P_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi, \tag{36}$$

где для ТЕ моды [16]

$$
\left.\begin{aligned}
a_{ml}^{(0)} &= -\tfrac{i^{l-1}2(2l+1)}{k_0\mu_1 \sin\alpha}\ \tfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\ P_l^m(\cos\alpha),\\
b_{ml}^{(0)} &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{37}
$$

При падении волны вдоль оси вращения частицы ($\alpha = 0^o$) имеем

$$
a_{1l}^{(0)} = -\frac{i^{l-1}}{k_0\mu_1}\ (2l+1). \tag{38}
$$

В случае ТМ моды в формулах (37) и (38) появляется множитель $(-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}})$. Граничные условия для скалярных потенциалов $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$ для ТЕ моды имеют вид (считаем, что $\mu_j = 1$)

$$
\left.\begin{aligned}
U^{(0)}+U^{(1)} &= U^{(2)} - \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\tfrac{r}{\sin\theta(r^2+r_\theta'^2)}\left[\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)U^{(2)} + rr_\theta' V^{(2)}\right],\\
V^{(0)}+V^{(1)} &= V^{(2)} + \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\tfrac{r_\theta'\sin\theta + r\cos\theta}{r\sin\theta(r^2+r_\theta'^2)}\left[\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)U^{(2)} + rr_\theta' V^{(2)}\right],\\
\tfrac{\partial(U^{(0)}+U^{(1)})}{\partial n} &= \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial n} - \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\tfrac{1}{\sin\theta\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left[\tfrac{r_\theta'\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial\theta}) + \right.\\
&\left.\tfrac{rr_\theta'^2}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial\theta}) - F_1(\theta)U^{(2)} - r_\theta' F_2(\theta)V^{(2)}\right],\\
\tfrac{\partial(V^{(0)}+V^{(1)})}{\partial n} &= \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial n} + \left(\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\tfrac{1}{r\sin\theta\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left[\tfrac{\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)^2}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial\theta}) + \right.\\
&\left.\tfrac{rr_\theta'\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + \tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial\theta}) - F_3(\theta)U^{(2)} - rF_4(\theta)V^{(2)}\right],
\end{aligned}\right\}_{\vec r\in S_1} \tag{39}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
U^{(2)} &= U^{(3)} - \left(\tfrac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}-1\right)\tfrac{r}{\sin\theta(r^2+r_\theta'^2)}\left[\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)U^{(3)} + rr_\theta' V^{(3)}\right],\\
V^{(2)} &= V^{(3)} + \left(\tfrac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}-1\right)\tfrac{r_\theta'\sin\theta + r\cos\theta}{r\sin\theta(r^2+r_\theta'^2)}\left[\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)U^{(3)} + rr_\theta' V^{(3)}\right],\\
\tfrac{\partial U^{(2)}}{\partial n} &= \tfrac{\partial U^{(3)}}{\partial n} - \left(\tfrac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}-1\right)\tfrac{1}{\sin\theta\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left[\tfrac{r_\theta'\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial U^{(3)}}{\partial r} + \tfrac{\partial U^{(3)}}{\partial\theta}) + \right.\\
&\left.\tfrac{rr_\theta'^2}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial V^{(3)}}{\partial r} + \tfrac{\partial V^{(3)}}{\partial\theta}) - F_1(\theta)U^{(3)} - r_\theta' F_2(\theta)V^{(3)}\right],\\
\tfrac{\partial V^{(2)}}{\partial n} &= \tfrac{\partial V^{(3)}}{\partial n} + \left(\tfrac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}-1\right)\tfrac{1}{r\sin\theta\sqrt{r^2+r_\theta'^2}}\left[\tfrac{\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)^2}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial U^{(3)}}{\partial r} + \tfrac{\partial U^{(3)}}{\partial\theta}) + \right.\\
&\left.\tfrac{rr_\theta'\left(r_\theta'\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2+r_\theta'^2}(r_\theta'\tfrac{\partial V^{(3)}}{\partial r} + \tfrac{\partial V^{(3)}}{\partial\theta}) - F_3(\theta)U^{(3)} - rF_4(\theta)V^{(3)}\right],
\end{aligned}\right\}_{\vec r\in S_2} \tag{40}
$$

где

$$F_1(\theta) \;=\; \frac{r^2 - r r''_\theta + 2r'^2_\theta}{(r^2 + r'^2_\theta)^2}\left[r\left(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta\right) + r'_\theta\left(r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta\right)\right], \tag{41}$$

$$F_2(\theta) \;=\; \frac{r^4 - 2r^3 r''_\theta + 2r^2 r'^2_\theta - r'^4_\theta}{(r^2 + r'^2_\theta)^2}, \tag{42}$$

$$F_3(\theta) \;=\; \frac{2(r^2 - r r''_\theta + 2r'^2_\theta)\,(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)\,(r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta)}{(r^2 + r'^2_\theta)^2}, \tag{43}$$

$$F_4(\theta) = \frac{\left(r^3 r''_\theta + r^2 r'^2_\theta - r r'^2_\theta r''_\theta + 3r'^4_\theta\right)\sin\theta + r'_\theta/r\left(r^4 - 2r^3 r''_\theta + 2r^2 r'^2_\theta - r'^4_\theta\right)\cos\theta}{(r^2 + r'^2_\theta)^2}, \tag{44}$$

Точно также, как в предыдущем параграфе, можно вывести интегральные уравнения для скалярных потенциалов $U^{(j)}$ и $V^{(j)}$. Учитывая граничные условия (39)-(40), после подстановки в интегральные уравнения разложений (32-(36) и (24) получим бесконечные системы для неизвестных коэффициентов разложений. В матричной форме эти системы можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{X}^{(0)} = -(A^{(1)}_{hj}\;\;\vec{X}^{(2)}_1 + A^{(1)}_{hh}\;\;\vec{X}^{(2)}_2),\\
&\vec{X}^{(1)} = A^{(1)}_{jj}\;\;\vec{X}^{(2)}_1 + A^{(1)}_{jh}\;\;\vec{X}^{(2)}_2,\\
&\vec{X}^{(2)}_1 = -A^{(2)}_{hj}\;\;\vec{X}^{(3)},\\
&\vec{X}^{(2)}_2 = A^{(2)}_{jj}\;\;\vec{X}^{(3)},
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где векторы и матрицы имеют блочную структуру: $\vec{X}^{(j)}_i = (\vec{a}^{(j)}_i, \vec{b}^{(j)}_i)^T$, где $\vec{a}^{(j)}_i = \{k_1 a^{(j)}_{ml,i}\}^{\infty}_{l=m}$, $\vec{b}^{(j)}_i = \{b^{(j)}_{ml,i}\}^{\infty}_{l=m}$,

$$A^{(j)}_{hj} = \begin{pmatrix} \alpha^{(j)}_{hj,1} & \beta^{(j)}_{hj,1} \\ \alpha^{(j)}_{hj,2} & \beta^{(j)}_{hj,2} \end{pmatrix}. \tag{46}$$

В случае TE моды матричные элементы представляются в виде интегралов

$$\begin{aligned}
(\alpha^{(1)}_{hj,1})_{mln} \;=\;& \frac{i(2l+1)}{2}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^\pi \left\{k_1^2 r^2\left[j_n\left(k_2 r\right)\; h^{(1)'}_l\left(k_1 r\right) - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\; j'_n\left(k_2 r\right)\; h^{(1)}_l\left(k_1 r\right)\right]\cdot\right.\\
&\cdot P^m_n\left(\cos\theta\right) P^m_l\left(\cos\theta\right)\sin\theta + k_1 r'_\theta\; j_n\left(k_2 r\right)\; h^{(1)}_l\left(k_1 r\right)\left[P^m_n\left(\cos\theta\right) P^{m'}_l\left(\cos\theta\right) -\right.\\
&\left.-P^m_l\left(\cos\theta\right) P^{m'}_l\left(\cos\theta\right)\right]\sin^2\theta - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\left\{\frac{k_1 r^2\left(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2 + r'^2_\theta}\cdot\right.\\
&\cdot\left[k_1 r h^{(1)'}_l\left(k_1 r\right) P^m_l\left(\cos\theta\right) + \sin\theta\frac{r'_\theta}{r} h_l\left(k_1 r\right) P^{m'}_l\left(\cos\theta\right)\right] j_n\left(k_2 r\right) P^m_n\left(\cos\theta\right) -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \left\{\frac{k_1 r r'_\theta \left(r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2 + r'^2_\theta}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\; k_1 r'_\theta j'_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) - \sin\theta\; j_n\left(k_2 r\right) P_n^{m'}\left(\cos\theta\right)\right]\right. \\
& \left.\left. -k_1 r F_1(\theta) j_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right)\right\} h_l^{(1)}\left(k_1 r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right)\right\}\; d\theta, \qquad (47)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\beta^{(1)}_{hj,1})_{mln} \;=\; & -\frac{i(2l+1)}{2}\;\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\;\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\int_0^\pi \left\{\frac{k_1^2 r^3 r'_\theta}{r^2 + r'^2_\theta}\left[k_1 r h_l^{(1)'}\left(k_1 r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right) + \right.\right. \\
& \left. + \sin\theta \frac{r'_\theta}{r} h_l\left(k_1 r\right) P_l^{m'}\left(\cos\theta\right)\right] j_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) - \left\{\frac{k_1^2 r^2 r'^2_\theta}{r^2 + r'^2_\theta}\cdot\right. \\
& \cdot\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\; k_1 r'_\theta j'_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) - \sin\theta\; j_n\left(k_2 r\right) P_n^{m'}\left(\cos\theta\right)\right] - \\
& \left.\left. -k_1^2 r r'_\theta F_2(\theta) j_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right)\right\} h_l^{(1)}\left(k_1 r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right)\right\}\; d\theta, \qquad (48)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha^{(1)}_{hj,2})_{mln} \;=\; & \frac{i(2l+1)}{2}\;\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\;\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\int_0^\pi \left\{\frac{\left(r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta\right)\left(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2 + r'^2_\theta}\cdot\right. \\
& \cdot\left[k_1 r h_l^{(1)'}\left(k_1 r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right) + \sin\theta\frac{r'_\theta}{r} h_l\left(k_1 r\right) P_l^{m'}\left(\cos\theta\right)\right] j_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) - \\
& -\left\{\frac{\left(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta\right)^2}{r^2 + r'^2_\theta}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\; k_1 r'_\theta j'_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) - \sin\theta\; j_n\left(k_2 r\right) P_n^{m'}\left(\cos\theta\right)\right] - \right. \\
& \left.\left. -F_3(\theta) j_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right)\right\} h_l^{(1)}\left(k_1 r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right)\right\}\; d\theta, \qquad (49)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\beta^{(1)}_{hj,2})_{mln} \;=\; & \frac{i(2l+1)}{2}\;\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\;\int_0^\pi \left\{k_1^2 r^2\left[j_n\left(k_2 r\right)\;\; h_l^{(1)'}\left(k_1 r\right) - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\; j'_n\left(k_2 r\right)\;\; h_l^{(1)}\left(k_1 r\right)\right]\;\cdot\right. \\
& \cdot P_n^m\left(\cos\theta\right) P_l^m\left(\cos\theta\right)\sin\theta + k_1 r'_\theta\; j_n\left(k_2 r\right)\;\; h_l^{(1)}\left(k_1 r\right)\left[P_n^m\left(\cos\theta\right) P_l^{m'}\left(\cos\theta\right)\; - \right. \\
& \left. -P_l^m\left(\cos\theta\right) P_n^{m'}\left(\cos\theta\right)\right]\sin^2\theta + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\left\{\frac{k_1 r r'_\theta\left(r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta\right)}{r^2 + r'^2_\theta}\cdot\right. \\
& \cdot\left[k_1 r h_l^{(1)'}\left(k_1 r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right) + \sin\theta\frac{r'_\theta}{r} h_l\left(k_1 r\right) P_l^{m'}\left(\cos\theta\right)\right] j_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) - \\
& \left\{\frac{k_1 r r'_\theta\left(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta\right)}{r^2 + r'^2_\theta}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\; k_1 r'_\theta j'_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right) - \sin\theta\; j_n\left(k_2 r\right) P_n^{m'}\left(\cos\theta\right)\right]\right. \\
& \left.\left.\left. -k_1 r F_4(\theta) j_n\left(k_2 r\right) P_n^m\left(\cos\theta\right)\right\} h_l^{(1)}\left(k_1 r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right)\right\}\right\}\; d\theta, \qquad (50)
\end{aligned}
$$

где функции $F_j(\theta)$ задается выражениями (41)-(44), при этом выше всюду нужно подставить $r = r_1(\theta)$. Здесь индекс m является азимутальным индексом и принимает значения от единицы до бесконечности. Другие нижние и верхние индексы матриц имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе. Элементы остальных матриц получаются из соотношений (47)-(50) так же, как это было пояснено ранее.

Система уравнений (45) легко решается относительно коэффициентов разложений потенциала рассеянного излучения (см. систему (26))

$$\vec{X}^{(1)} = A_2 \cdot A_1^{(-1)}\ \vec{X}^{(0)}, \tag{51}$$

где матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению (29).

Аналогично можно вывести бесконечные системы для неизвестных коэффициентов разложений скалярных потенциалов в случае ТМ моды. Выражения для матричных элементов в этом случае приведены в работе [16]. Отметим, что они значительно проще, чем в случае ТЕ моды.

Переход к однородным частицам осуществляется также, как в осесимметричной задаче (см. обсуждение в конце предыдущего параграфа).

2. МНОГОСЛОЙНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Введем следующие обозначения: $\vec{E}^{(j)}$, $\vec{H}^{(j)}$ - напряженности электрического и магнитного полей в j-м слое с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_j и μ_j, $k_j = \sqrt{\varepsilon_j \cdot \mu_j} \cdot k_0$ - волновое число в j-слое. Значение индекса $j = 1$ соответствует среде вне частицы, $j = 2$ – внешней оболочке и т.д., $j = (n + 1)$ – ядру n-слойной частицы. Уравнение j-й границы записывается в виде

$$r_j = r_j(\theta), \tag{52}$$

где $j = 1, ..., n$.

Рассмотрим сначала осесимметричную задачу. По аналогии со случаем двухслойных частиц вводятся потенциалы $p_1^{(j)}$, $p_2^{(j)}$ и $q_1^{(j)}$, $q_2^{(j)}$ для j-го слоя, которые представляются в виде разложений

$$\begin{matrix} p_1^{(j)} \\ q_1^{(j)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_{l,1}^{(j)} \\ b_{l,1}^{(j)} \end{matrix}\ j_l(k_j r)\ P_l^1(\cos\theta)\ \cos\varphi, \tag{53}$$

$$\begin{matrix} p_2^{(j)} \\ q_2^{(j)} \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \begin{matrix} a_{l,2}^{(j)} \\ b_{l,2}^{(j)} \end{matrix}\ h_l^{(1)}(k_j r)\ P_l^1(\cos\theta)\ \cos\varphi, \tag{54}$$

где $j = 1, 2, ..., (n + 1)$. При этом считаем, что $p_1^{(1)} = p^{(0)}$, $p_2^{(1)} = p^{(1)}$, $q_1^{(1)} = q^{(0)}$, $q_2^{(1)} = q^{(1)}$, $p_1^{(n+1)} = p^{(n+1)}$, $p_2^{(n+1)} = 0$, $q_1^{(n+1)} = q^{(n+1)}$, $q_2^{(1)} = 0$.

Далее нужно действовать по схеме, подробно изложенной в параграфе 1.1. для двухслойных частиц. В итоге получим систему (28) для неизвестных коэффициентов разложения потенциала рассеянного излучения, однако матрицы A_1 и A_2 будут удовлетворять соотношению

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{hj}^{(1)} & -A_{hh}^{(1)} \\ A_{jj}^{(1)} & A_{jh}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} -A_{hj}^{(n-1)} & -A_{hh}^{(n-1)} \\ A_{jj}^{(n-1)} & A_{jh}^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -A_{hj}^{(n)} \\ A_{jj}^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{55}$$

которое при $n = 2$ совпадает с соотношением (29). Если верхний индекс матриц равен j, то в интегралах (27) и аналогичных им нужно сделать замену $k_1 \to k_j, \quad k_2 \to k_{j+1}, \quad \mu_1 \to \mu_j, \quad \mu_2 \to \mu_{j+1}, \quad r_1 = r_1(\theta) \to r_j = r_j(\theta)$.

При решении неосесимметричной задачи вводятся потенциалы

$$\begin{matrix} U_1^{(j)} \\ V_1^{(j)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml,1}^{(j)} \\ b_{ml,1}^{(j)} \end{matrix} \, j_l(k_j r) \; P_l^m(\cos\theta) \; \cos m\varphi, \tag{56}$$

$$\begin{matrix} U_2^{(j)} \\ V_2^{(j)} \end{matrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml,2}^{(j)} \\ b_{ml,2}^{(j)} \end{matrix} \, h_l^{(1)}(k_j r) \; P_l^m(\cos\theta) \; \cos m\varphi, \tag{57}$$

где $j = 1, 2, ..., (n+1)$. При этом считаем, что $U_1^{(1)} = U^{(0)}, \quad U_2^{(1)} = U^{(1)}, \quad V_1^{(1)} = V^{(0)}, \quad V_2^{(1)} = V^{(1)}, \quad U_1^{(n+1)} = U^{(n+1)}, \quad U_2^{(n+1)} = 0, \quad V_1^{(n+1)} = V^{(n+1)}, \quad V_2^{(1)} = 0$. Действуя по схеме, подробно изложенной в параграфе 1.2. для двухслойных частиц, получим систему (51) для неизвестных коэффициентов разложений потенциалов рассеянного излучения, однако матрицы A_1 и A_2 будут удовлетворять соотношению (55). Отметим, что матрицы $A^{(j)}$ в этом случае будут иметь блочную структуру (см. выражение (46)).

3. МНОГОСЛОЙНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ЧАСТИЦЫ

В случае многослойных концентрических шаров уравнения поверхностей имеют вид

$$r_j(\theta) = a_j, \tag{58}$$

где a_j - радиусы оболочек частицы.

Введем новые неизвестные следующим образом:

$$\tilde{a}_{l,1}^{(j)} = a_{l,1}^{(j)} \cdot j_l(k_j a_j), \qquad \tilde{a}_{l,2}^{(j)} = a_{l,2}^{(j)} \cdot h_l^{(1)}(k_j a_j). \tag{59}$$

Матрицы нормированной системы будут диагональными, а именно

$$\tilde{A}_{hj}^{(j)} = W_j \left\{ R_{3,j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j} \; R_{1,j+1} - \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1 \right) \; \frac{1}{k_j a_j} \right\} P_j^{(j)}, \tag{60}$$

$$\tilde{A}_{hh}^{(j)} = W_j \left\{ R_{3,j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j} \; R_{3,j+1} - \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1 \right) \; \frac{1}{k_j a_j} \right\} P_h^{(j)}, \tag{61}$$

$$\tilde{A}_{jj}^{(j)} = W_j \left\{ R_{1,j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j} \; R_{1,j+1} - \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1 \right) \; \frac{1}{k_j a_j} \right\} P_j^{(j)}, \tag{62}$$

$$\tilde{A}_{jh}^{(j)} = W_j \left\{ R_{1,j} - \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \frac{k_{j+1}}{k_j} \; R_{3,j+1} - \left(\frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} - 1 \right) \; \frac{1}{k_j a_j} \right\} P_h^{(j)}, \tag{63}$$

где введены диагональные матрицы

$$R_{1,j} = \{j_l'(k_j a_j)/j_l(k_j a_j)\delta_{ln}\}_{ln=1}^{\infty}, \quad R_{3,j} = \left\{h_l^{(1)'}(k_j a_j)/h_l^{(1)}(k_j a_j)\delta_{ln}\right\}_{ln=1}^{\infty},$$

$$P_j^{(j)} = \{j_l(k_{j+1} a_j)/j_l(k_j a_j)\delta_{ln}\}_{ln=1}^{\infty}, \quad P_h^{(j)} = \left\{h_l^{(1)}(k_{j+1} a_j)/h_l^{(1)}(k_j a_j)\delta_{ln}\right\}_{ln=1}^{\infty}, \tag{64}$$

$$W_j = -[R_{3,j} - R_{1,j}].$$

При выводе формул (60)-(63) было учтено выражение для вронскиана сферических функций

$$j_n(k_j a_j)\ h_l^{(1)'}(k_j a_j) - j_n'(k_j a_j)\ h_l^{(1)}(k_j a_j) = \frac{i}{k_j^2 a_j^2}. \tag{65}$$

В неосесимметричной задаче после замены неизвестных

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ml,1}^{(j)} &= a_{ml,1}^{(j)} \cdot j_l(k_j a_j), \qquad \tilde{a}_{ml,2}^{(j)} = a_{ml,2}^{(j)} \cdot h_l^{(1)}(k_j a_j), \\ \tilde{b}_{ml,1}^{(j)} &= b_{ml,1}^{(j)} \cdot j_l(k_j a_j), \qquad \tilde{b}_{ml,2}^{(j)} = b_{ml,2}^{(j)} \cdot h_l^{(1)}(k_j a_j) \end{aligned} \tag{66}$$

для аналогов матриц (46) получим

$$\tilde{\alpha}_{hj,1}^{(j)} = W_j \left\{ R_{3,j} - \sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}}\ R_{1,j+1} - \left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1\right)(R_{3,j} + \frac{1}{k_j a_j}) \right\} P_j^{(j)}, \tag{67}$$

$$\tilde{\beta}_{hj,1}^{(j)} = 0, \tag{68}$$

$$\tilde{\alpha}_{hj,2}^{(j)} = (\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1) W_j \left\{ \frac{1}{k_j a_j} R_{3,j}\ \Gamma + \frac{1}{k_j^2 a_j^2} K \right\} P_j^{(j)}, \tag{69}$$

$$\tilde{\beta}_{hj,2}^{(j)} = W_j \left\{ R_{3,j} - \sqrt{\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}}\ R_{1,j+1} \right\} P_j^{(j)}, \tag{70}$$

где введены матрицы $K = \{\kappa_{mln}\}_{ln=m}^{\infty}$ и $\Gamma = \{\gamma_{mln}\}_{ln=m}^{\infty}$, элементы которых отличны от нуля только на двух диагоналях выше и ниже главной

$$\kappa_{mln} = \left[\frac{(l+1)(l-m)}{2l-1}\ \delta_{l(n-1)} - \frac{l(l+m+1)}{2l+3}\ \delta_{l(n+1)} \right], \tag{71}$$

$$\gamma_{mln} = \left[\frac{l+m+1}{2l+3}\ \delta_{l(n-1)} - \frac{l-m}{2l-1}\ \delta_{l(n+1)} \right]. \tag{72}$$

Матрицы (67)-(70) при других значениях нижних индексов получаются из приведенных выражений точно также, как матрицы (61)-(63) получаются из матрицы (60).

Из соотношений (46), (55) и (67)-(70) следует, что матрицы A_1, A_2 имеют треугольный вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_{\alpha 1} & 0 \\ \Gamma_1 & \Lambda_{\beta 1} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_{\alpha 2} & 0 \\ \Gamma_2 & \Lambda_{\beta 2} \end{pmatrix}, \tag{73}$$

при этом матрицы $\Lambda_{\alpha 1,\beta 1}$, $\Lambda_{\alpha 2,\beta 2}$ являются диагональными, а у матриц $\Gamma_{1,2}$ отличны от нуля только две диагонали выше и ниже главной (см. выражения (71)-(72)). Подобная треугольная матрица легко обращается

$$(A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda_{\alpha 1})^{-1} & 0 \\ -(\Lambda_{\beta 1})^{-1}\Gamma_1(\Lambda_{\alpha 1})^{-1} & (\Lambda_{\beta 1})^{-1} \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Совершенно аналогичные результаты получаются для плоской волны TM типа.

Таким образом, в рассматриваемом случае осесимметричная задача решается очень просто, а неосесимметричная задача решается, по существу, в явном виде. Отличие данного решения от общепринятого с использованием потенциалов Дебая состоит в том, что выбираются другие скалярные потенциалы и "неудобная" система координат (направление оси z не совпадает с направлением распространения плоской волны) . Однако, можно положить угол падения $\alpha = 0$, при этом осесимметричная часть электромагнитных полей равна нулю, а неосесимметричная отлична от нуля только при азимутальном индексе $m = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложено новое рекурсивное решение задачи рассеяния электромагнитного излучения многослойными частицами с аксиальной симметрией. Оно является обобщением показавшего свою эффективность решения, предложенного ранее для однородных частиц [16] (там же можно найти выражения для сечений ослабления и рассеяния в рамках данного подхода). Укажем следующие достоинства предложенного решения: 1) относительная простота данного алгоритма для многослойных частиц; 2) размерность редуцированных финальных систем относительно неизвестных коэффициентов разложений потенциалов рассеянного излучения совпадает с размерностью аналогичных систем для однородных частиц; 3) для многослойных концентрических шаров решение представляется в явном виде; оно зависит только от отношения производных к самим сферическим функциям Бесселя и Ганкеля 1-го рода для всех оболочек частицы (данное обстоятельство существенно увеличивает область эффективного применения данного алгоритма).

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза России (грант N 97-0-13.3-30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борен К., Хафмен Д. Рассеяние и поглощение света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
2. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
3. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвесей клеток. Новосибирск: Наука, 1988.
4. Wu Z.S., Wang Y.P. // Radio sci. 1991. V.26. N6. P.1393.
5. Farafonov V.G., Voshchinnikov N.V., Somsikov V.V. // Appl. Opt. 1996. V.35. N27. P.5412.
6. Voshchinnikov N.V. // JQSRT. 1996. V.55. N5. P.627.
7. Ciric I.R., Cooray F.R. // JQSRT. 1999. V.63. N2-6. P.131.
8. Фарафонов В.Г., Вощинников Н.В. // Опт. и спектр. 1996. Т.81. Н4. С.660.
9. Фарафонов В.Г., Вощинников Н.В. // Опт. и спектр. 1997. Т.83. Н6. С.973.
10. Gurwich I., Kleiman M., Shiloah N., Cohen A. // Appl. Opt. 1996. V.39. N3. P.470.
11. Peterson B., Strom S. // Phis. Rev. 1974. V.D 10. P.2670.
12. Wang D.-S., Barber P.W. // Appl. Opt. 1979. V.18. N8. P.1190.
13. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2000. Т.88. Н3. С.492.
14. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 1994. Т.77. Н3. С.455.
15. Farafonov V.G., Prokopjeva M.S., Il'in V.B., Henning Th. // IRS 2000: Current Problems in Atmospheric Radiation (Smith W.L., Timofeyev Yu.M.(eds)). A.Deepak Publ. 2000.
16. Фарафонов В.Г. // Опт. и спектр. 2000. Т.88. Њ. С.70.
17. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
18. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.Т.2. М.: ИЛ, 1960.