РАССЕЯНИЕ СВЕТА МНОГОСЛОЙНЫМИ НЕКОНФОКАЛЬНЫМИ ЭЛЛИПСОИДАМИ В РЭЛЕЕВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2000 г. В. Г. Фарафонов*

**Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 10.07.2000 г.

Построено рэлеевское приближение рассеяния света многослойными неконфокальными соосными эллипсоидами. В этом случае все эллипсоиды, образующие многослойную частицу, имеют один и тот же центр, а направления их главных осей совпадают. Предполагается, что частица находится в постоянном электрическом поле, и рассматривается система уравнений Лапласа с сответствующими граничными условиями. Поскольку эллиптические поверхности границ разделов неконфокальны, то слои разбиваются на множество подслоев, в каждом из которых выражения для потенциалов записываются в своей эллипсоидальной системе координат. На границе раздела подслоев используются приближенные условия сшивания потенциалов (равенство самих потенциалов и их нормальных производных). Выражения для поляризуемости многослойной частицы представлены в матричной форме (размеры матриц 2×2) через параметры ядра и последующих слоев.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние электромагнитного излучения однородными и двухслойными эллипсоидами в рэлеевском приближении подробно рассматривалось в монографии [1]. При этом для двухслойных эллипсоидов предполагалось, что поверхности ядра и всей частицы конфокальны т.е. являются координатными поверхностями в одной эллипцоидальной системе координат. Недавно [2], это решение было обобщено для многослойных конфокальных эллипсоидов. Отметим, что эти результаты уже были использованы при рассмотрении конкретных задач [3].

В данной работе мы отказываемся от условия конфокальности и оставляем только предположение о том, что эллипсоиды являются соосными, т.е. существует единая декартовая система координат, в которой уравнения границ слоев частицы записываются в канонической форме. Предполагается, что частица находится в постоянном электрическом поле, и рассматривается система уравнений Лапласа с сответствующими граничными условиями. В каждой оболочке имеются два представления для потенциала поля в различных эллипсоидальных системах, соответствующих внутренней и внешней границам слоя. Каждое из эти представлений зависит от двух неизвестных коэффициентов, которые следует определять с помощью условий сшивания. Координатные поверхности в неконфокальных эллипсоидальных системах не совпадают, поэтому слои разбиваются на множество подслоев, в каждом из которых выражения для потенциалов записываются в своей эллипсоидальной системе координат. В качестве условий сшивания используются приближенные равенства потенциалов и их нормальных производных на границах подслоев. После громоздких преобразований выражение для поляризуемости частицы удается представить в явном виде в матричной форме (размер матриц 2×2) через параметры ядра и последующих слоев.

1. ДВУХСЛОЙНЫЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Введем эллипсоидальные координаты (ξ_1, η_1, ζ_1) и (ξ_2, η_2, ζ_2), которые связаны с декартовыми (x, y, z) следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{x^2}{a_1^2+\xi_1} + \frac{y^2}{b_1^2+\xi_1} + \frac{z^2}{c_1^2+\xi_1} = 1, \quad -c_1^2 < \xi_1 < \infty,\\ \frac{x^2}{a_1^2+\eta_1} + \frac{y^2}{b_1^2+\eta_1} + \frac{z^2}{c_1^2+\eta_1} = 1, \quad -b_1^2 < \eta_1 < -c_1^2,\\ \frac{x^2}{a_1^2+\zeta_1} + \frac{y^2}{b_1^2+\zeta_1} + \frac{z^2}{c_1^2+\zeta_1} = 1, \quad -a_1^2 < \zeta_1 < -b_1^2\end{gathered} \tag{1}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{x^2}{a_2^2+\xi_2} + \frac{y^2}{b_2^2+\xi_2} + \frac{z^2}{c_2^2+\xi_2} = 1, \quad -c_2^2 < \xi_2 < \infty,\\ \frac{x^2}{a_2^2+\eta_2} + \frac{y^2}{b_2^2+\eta_2} + \frac{z^2}{c_2^2+\eta_2} = 1, \quad -b_2^2 < \eta_2 < -c_2^2,\\ \frac{x^2}{a_2^2+\zeta_2} + \frac{y^2}{b_2^2+\zeta_2} + \frac{z^2}{c_2^2+\zeta_2} = 1, \quad -a_2^2 < \zeta_2 < -b_2^2,\end{gathered} \tag{2}$$

где a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 -полуоси ядра и всей частицы. Для определенности предполагается, что $a_1 > b_1 > c_1,\ a_2 > b_2 > c_2$, а также $a_1 < a_2, b_1 < b_2, c_1 < c_2$. В этом случае уравнения поверхности ядра

$$\xi_1 = 0 \tag{3}$$

и поверхности частицы

$$\xi_2 = 0 \tag{4}$$

записываются в различных системах эллипсоидальных координат (см. (1) - (2)). Декартовые координаты можно выразить через эллипсоидальные в виде [1]

$$\begin{aligned} x &= \left[\frac{(a^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2},\\ y &= \left[\frac{(b^2+\xi)(b^2+\eta)(b^2+\zeta)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2},\\ z &= \left[\frac{(c^2+\xi)(c^2+\eta)(c^2+\zeta)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{5}$$

Приведенные выше формулы справедливы для эллипсоидальных координат (1) - (2), а также для любых других эллипсоидальных координат, используемых ниже.

Размеры частицы малы по сравнению с длиной волны излучения, поэтому в приближении Рэлея можно считать, что она находится в однородном электрическом поле. Тогда скалярные потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0. \tag{6}$$

Явные выражения двух линейно независимых решений этого уравнения, которые нам потребуются ниже, приведены в работах [1,2].

Будем считать, что однородное электростатическое поле направлено вдоль оси z. Учитывая поведение полей - конечность в начале координат поля в ядре частицы и равенство нулю на бесконечности рассеянного поля, - потенциалы можно представить следующим образом [1,2]:

потенциал внешнего поля

$$\Phi_0 = -E_0 z = -E_0\left[\frac{(c_1^2+\xi_1)(c_1^2+\eta_1)(c_1^2+\zeta_1)}{(a_1^2-c_1^2)(b_1^2-c_1^2)}\right]^{1/2}, \tag{7}$$

потенциал внутри ядра

$$\Phi_1 = C_1\left\{(c_1^2+\xi_1)(c_1^2+\eta_1)(c_1^2+\zeta_1)\right\}^{1/2}, \quad -c_1^2 < \xi \le 0, \tag{8}$$

потенциал внутри оболочки частицы

$$\begin{aligned}\Phi_2^1 &= \left[C_2^1 + D_2^1 G(a_1,b_1,c_1,\xi_1)\right]\left\{(c_1^2+\xi_1)(c_1^2+\eta_1)(c_1^2+\zeta_1)\right\}^{1/2},\\ \Phi_2^2 &= \left[C_2^2 + D_2^2 G(a_2,b_2,c_2,\xi_2)\right]\left\{(c_2^2+\xi_2)(c_2^2+\eta_2)(c_2^2+\zeta_2)\right\}^{1/2},\end{aligned} \tag{9}$$

потенциал рассеянного поля (вне частицы)

$$\Phi_3 = D_3 G(a_2,b_2,c_2,\xi_2)\left\{(c_2^2+\xi_2)(c_2^2+\eta_2)(c_2^2+\zeta_2)\right\}^{1/2}, \quad 0 \le \xi < \infty, \tag{10}$$

где $C_i^k,\ D_i^k$ - неизвестные постоянные,

$$G(a_k,b_k,c_k,\xi) = \int_\xi^\infty \frac{dq}{(c_k^2+q)f(a_k,b_k,c_k,q)}, \tag{11}$$

при этом $f(a_k,b_k,c_k,q) = \{(a_k^2+q)(b_k^2+q)(c_k^2+q)\}^{1/2}$. Отметим, что $(c^2+\xi)G(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$, т.е. выполняется условие излучения на бесконечности для потенциала рассеянного излучения.

Граничные условия для потенциалов (непрерывность на границе тангенциальных компонентов напряженностей электрических полей и нормальных компонентов векторов электрической индукции) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}&\Phi_1 = \Phi_2^1, \qquad \xi_1 = 0,\\ &\varepsilon_1\partial\Phi_1/\partial\xi_1 = \varepsilon_2\partial\Phi_2^1/\partial\xi_1, \quad \xi_1 = 0,\\ &\Phi_2^2 = \Phi_3 + \Phi_0, \qquad \xi_2 = 0,\\ &\varepsilon_2\partial\Phi_2^2/\partial\xi_2 = \varepsilon_3\left[\partial\Phi_3/\partial\xi_2 + \partial\Phi_0/\partial\xi_2\right], \quad \xi_2 = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - диэлектрическая проницаемость ядра и оболочки, ε_3 - диэлектрическая проницаемость среды вне частицы.

Принципиальным моментом в предлагаемом решении рассматриваемой задачи является использование двух представлений потенциала внутри оболочки частицы. Первое представление Φ_2^1 в эллиптической системе (1) необходимо для наиболее простого описания условий на границе "ядро - оболочка", второе представление Φ_2^2 в системе координат (2) - на границе "частица - внешняя среда". Однако, для определения всех неизвестных коэффициентов в выражениях (8) - (10) необходимо в дополнение к граничным условиям (12) указать условия сшивания для потенциалов Φ_2^1 и Φ_2^2. Непосредственно это сделать не удается, поэтому разобъем оболочку на $2n$ слоев и запишем приближенные условия сшивания на границах этих слоев. Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_{1,i}^2 &= a_1^2 + \tfrac{i-1}{2n}\Delta a^2, \qquad a_{2,i}^2 = a_2^2 - \tfrac{i-1}{2n}\Delta a^2,\\ b_{1,i}^2 &= b_1^2 + \tfrac{i-1}{2n}\Delta b^2, \qquad b_{2,i}^2 = b_2^2 - \tfrac{i-1}{2n}\Delta b^2,\\ c_{1,i}^2 &= c_1^2 + \tfrac{i-1}{2n}\Delta c^2, \qquad c_{2,i}^2 = c_2^2 + \tfrac{i-1}{2n}\Delta c^2, \end{aligned} \tag{13}$$

где $i = 1, 2, ..., (n+1), \Delta a^2 = a_2^2 - a_1^2, \quad \Delta b^2 = b_2^2 - b_1^2, \quad \Delta c^2 = c_2^2 - c_1^2$. Отметим, что $a_{1,1} = a_1,\ b_{1,1} = b_1,\ c_{1,1} = c_1$ и $a_{2,1} = a_2,\ b_{2,1} = b_2,\ c_{2,1} = c_2$, а также $a_{1,n+1} = a_{2,n+1},\ b_{1,n+1} = b_{2,n+1},\ c_{1,n+1} = c_{2,n+1}$.

Потенциалы в слоях оболочки представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2^{1,i} &= \left[C_2^{1,i} + D_2^{1,i} G(a_{1,i}, b_{1,i}, c_{1,i}, \xi_{1,i})\right] \left\{(c_{1,i}^2 + \xi_{1,i})(c_{1,i}^2 + \eta_{1,i})(c_{1,i}^2 + \zeta_{1,i})\right\}^{1/2},\\ \Phi_2^{2,i} &= \left[C_2^{2,i} + D_2^{2,i} G(a_{2,i}, b_{2,i}, c_{2,i}, \xi_{2,i})\right] \left\{(c_{2,i}^2 + \xi_{2,i})(c_{2,i}^2 + \eta_{2,i})(c_{2,i}^2 + \zeta_{2,i})\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $i = 1, 2, ..., n$. В каждом слое введена своя эллипсоидальная система координат $(\xi_{1,i}, \eta_{1,i}, \zeta_{1,i})$ или $(\xi_{2,i}, \eta_{2,i}, \zeta_{2,i})$, которая определяется полуосями $a_{1,i}, b_{1,i}, c_{1,i}$, в первых n слоях и полуосями $a_{2,i}, b_{2,i}, c_{2,i}$, - в последующих n слоях соответственно. Отметим, что справедливы соотношения $\Phi_2^{1,1} = \Phi_2^1, \quad \Phi_2^{2,1} = \Phi_2^2$, т.е. коэффициенты $S_2^{1,1} = C_2^1,\ D_2^{1,1} = D_2^1,\ S_2^{2,1} = C_2^2,\ D_2^{2,1} = D_2^2$, при этом в первом и последнем слоях эллипсоидальные системы $(\xi_{1,1}, \eta_{1,1}, \zeta_{1,1})$ и $(\xi_{2,1}, \eta_{2,1}, \zeta_{2,1})$ совпадают с системами (1) и (2). Условия сшивания - приближенные равенства потенциалов и их нормальных производных на границах слоев - записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Phi_2^{1,i+1} = \Phi_2^{1,i},\\ &\partial\Phi_2^{1,i+1}/\partial\xi_{1,i+1} = \partial\Phi_2^{1,i}/\partial\xi_{1,i}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\xi_{1,i} = \Delta c^2, \quad \xi_{1,i+1} = 0, \quad i = 1, ..., (n-1)$,

$$\begin{aligned} &\Phi_2^{2,n} = \Phi_2^{1,n},\\ &\partial\Phi_2^{2,n}/\partial\xi_{2,n} = \partial\Phi_2^{1,n}/\partial\xi_{1,n}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\xi_{1,n} = \Delta c^2, \quad \xi_{2,n} = -\Delta c^2$,

$$\begin{aligned} &\Phi_2^{2,i} = \Phi_2^{2,i+1},\\ &\partial\Phi_2^{2,i}/\partial\xi_{2,i} = \partial\Phi_2^{2,i+1}/\partial\xi_{2,i+1}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\xi_{2,i} = -\Delta c^2, \quad \xi_{2,i+1} = 0, \quad i = 1, ..., (n-1)$.

Подставим выражения (7) - (10),(14) в граничные условия (12) и условия сшивания (15) - (17). Учитывая выражение (5) для координаты z и соотношения (11), получим (см. также [1,2])

$$
\begin{aligned}
&C_1 = C_2^1 + D_2^1 \left(\tfrac{2}{a_1 b_1 c_1}\right) L_z^{(1)},\\
&\varepsilon_1 C_1 = \varepsilon_2 \left[C_2^1 + D_2^1 \left(\tfrac{2}{a_1 b_1 c_1}\right) (L_z^{(1)} - 1)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[C_2^{1,i+1} + D_2^{1,i+1} \left(\tfrac{2}{a_{1,i+1} b_{1,i+1} c_{1,i+1}}\right) L_z^{(1,i+1)}\right] \left[(a_{1,i+1}^2 - c_{1,i+1}^2)(b_{1,i+1}^2 - c_{1,i+1}^2)\right]^{1/2} =\\
&\left[C_2^{1,i} + D_2^{1,i} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{1,i+1} \tilde b_{1,i+1} \tilde c_{1,i+1}}\right) \tilde L_z^{(1,i+1)}\right] \left[(a_{1,i}^2 - c_{1,i}^2)(b_{1,i}^2 - c_{1,i}^2)\right]^{1/2},\\
&\left[C_2^{1,i+1} + D_2^{1,i+1} \left(\tfrac{2}{a_{1,i+1} b_{1,i+1} c_{1,i+1}}\right) (L_z^{(1,i+1)} - 1)\right] \left[(a_{1,i+1}^2 - c_{1,i+1}^2)(b_{1,i+1}^2 - c_{1,i+1}^2)\right]^{1/2} =\\
&\left[C_2^{1,i} + D_2^{1,i} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{1,i+1} \tilde b_{1,i+1} \tilde c_{1,i+1}}\right) (\tilde L_z^{(1,i+1)} - 1)\right] \left[(a_{1,i}^2 - c_{1,i}^2)(b_{1,i}^2 - c_{1,i}^2)\right]^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[C_2^{2,n} + D_2^{2,n} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{2,n+1} \tilde b_{2,n+1} \tilde c_{2,n+1}}\right) \tilde L_z^{(2,n+1)}\right] \left[(a_{2,n}^2 - c_{2,n}^2)(b_{2,n}^2 - c_{2,n}^2)\right]^{1/2} =\\
&\left[C_2^{1,n} + D_2^{1,n} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{1,n+1} \tilde b_{1,n+1} \tilde c_{1,n+1}}\right) \tilde L_z^{(1,n+1)}\right] \left[(a_{1,n}^2 - c_{1,n}^2)(b_{1,n}^2 - c_{1,n}^2)\right]^{1/2},\\
&\left[C_2^{2,n} + D_2^{2,n} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{2,n+1} \tilde b_{2,n+1} \tilde c_{2,n+1}}\right) (\tilde L_z^{(2,n+1)} - 1)\right] \left[(a_{2,n}^2 - c_{2,n}^2)(b_{2,n}^2 - c_{2,n}^2)\right]^{1/2} =\\
&\left[C_2^{1,n} + D_2^{1,n} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{1,n+1} \tilde b_{1,n+1} \tilde c_{1,n+1}}\right) (\tilde L_z^{(1,n+1)} - 1)\right] \left[(a_{1,n}^2 - c_{1,n}^2)(b_{1,n}^2 - c_{1,n}^2)\right]^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[C_2^{2,i} + D_2^{2,i} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{2,i+1} \tilde b_{2,i+1} \tilde c_{2,i+1}}\right) \tilde L_z^{(2,i+1)}\right] \left[(a_{2,i}^2 - c_{2,i}^2)(b_{2,i}^2 - c_{2,i}^2)\right]^{1/2} =\\
&\left[C_2^{2,i+1} + D_2^{2,i+1} \left(\tfrac{2}{a_{2,i+1} b_{2,i+1} c_{2,i+1}}\right) L_z^{(2,i+1)}\right] \left[(a_{2,i+1}^2 - c_{2,i+1}^2)(b_{2,i+1}^2 - c_{2,i+1}^2)\right]^{1/2},\\
&\left[C_2^{2,i} + D_2^{2,i} \left(\tfrac{2}{\tilde a_{2,i+1} \tilde b_{2,i+1} \tilde c_{2,i+1}}\right) (\tilde L_z^{(2,i+1)} - 1)\right] \left[(a_{2,i}^2 - c_{2,i}^2)(b_{2,i}^2 - c_{2,i}^2)\right]^{1/2} =\\
&\left[C_2^{2,i+1} + D_2^{2,i+1} \left(\tfrac{2}{a_{2,i+1} b_{2,i+1} c_{2,i+1}}\right) (L_z^{(2,i+1)} - 1)\right] \left[(a_{2,i+1}^2 - c_{2,i+1}^2)(b_{2,i+1}^2 - c_{2,i+1}^2)\right]^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_2^2 + D_2^2 \left(\tfrac{2}{a_2 b_2 c_2}\right) L_z^{(2)} = \tfrac{-E_0}{[(a_2^2 - c_2^2)(b_2^2 - c_2^2)]^{1/2}} + D_3 \left(\tfrac{2}{a_2 b_2 c_2}\right) L_z^{(2)},\\
&\varepsilon_2 \left[C_2^2 + D_2^2 \left(\tfrac{2}{a_2 b_2 c_2}\right) (L_z^{(2)} - 1)\right] =\\
&\varepsilon_3 \left[\tfrac{-E_0}{[(a_2^2 - c_2^2)(b_2^2 - c_2^2)]^{1/2}} + D_3 \left(\tfrac{2}{a_2 b_2 c_2}\right) (L_z^{(2)} - 1)\right],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $i = 1, ..., (n-1)$ и введены дополнительные обозначения

$$
\begin{aligned}
\tilde a_{1,i+1}^2 &= a_{1,i}^2 + \Delta c^2, & \tilde a_{2,i+1}^2 &= a_{2,i}^2 - \Delta c^2,\\
\tilde b_{1,i+1}^2 &= b_{1,i}^2 + \Delta c^2, & \tilde b_{2,i+1}^2 &= b_{2,i}^2 - \Delta c^2,\\
\tilde c_{1,i+1}^2 &= c_{1,i}^2 + \Delta c^2, & \tilde c_{2,i+1}^2 &= c_{2,i}^2 - \Delta c^2,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

при этом геометрические факторы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} L_z^{(1,i)} &= \tfrac{a_{1,i}b_{1,i}c_{1,i}}{2}G(a_{1,i},b_{1,i},c_{1,i},0), \\ \tilde{L}_z^{(1,i)} &= \tfrac{\tilde{a}_{1,i}\tilde{b}_{1,i}\tilde{c}_{1,i}}{2}G(\tilde{a}_{1,i},\tilde{b}_{1,i},\tilde{c}_{1,i},0). \end{aligned} \tag{20}$$

Сначала из условий сшивания находим связь между коэффициентами потенциалов Φ_2^2 и Φ_2^1 (отметим, что $S_2^{1,1}=C_2^1,\ D_2^{1,1}=D_2^1,\ S_2^{2,1}=C_2^2,\ D_2^{2,1}=D_2^2$):

$$\begin{pmatrix} C_2^2 \\ D_2^2 \end{pmatrix} = \Omega \ \cdot\ \begin{pmatrix} C_2^1 \\ D_2^1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где

$$\Omega = \frac{[(a_1^2-c_1^2)(b_1^2-c_1^2)]^{1/2}}{[(a_2^2-c_2^2)(b_2^2-c_2^2)]^{1/2}} \ \cdot\ \Lambda^{2,n} \ \cdot\ \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\delta}_{1,n}^{-1}(\tilde{L}_z^{(1,n)}-\tilde{L}_z^{(2,n)}) \\ 0 & \tilde{\delta}_{1,n}^{-1}\tilde{\delta}_{2,n} \end{pmatrix} \ \cdot\ \Lambda^{1,n}, \tag{22}$$

$$\Lambda^{1,n} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=2}^{n}\left(\Pi_{j=3}^{i-1}\tilde{\delta}_{1,j}^{-1}\delta_{1,j}\right)\tilde{\delta}_{1,i}^{-1}(\tilde{L}_z^{(1,i)}-L_z^{(1,i)}) \\ 0 & \Pi_{i=2}^{n}\tilde{\delta}_{1,i}^{-1}\delta_{1,i} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\Lambda^{2,n} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=2}^{n}\left(\Pi_{j=i+1}^{n-1}\tilde{\delta}_{2,j}\delta_{2,j}^{-1}\right)\delta_{2,i}^{-1}(L_z^{(2,i)}-\tilde{L}_z^{(2,i)}) \\ 0 & \Pi_{i=2}^{n}\tilde{\delta}_{2,i}\delta_{2,i}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

В приведенных выше формулах введены отношения объмов различных эллипсоидов:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{1,j} &= \tfrac{\tilde{a}_{1,j}\tilde{b}_{1,j}\tilde{c}_{1,j}}{a_2b_2c_2}, \qquad \tilde{\delta}_{2,j} = \tfrac{\tilde{a}_{2,j}\tilde{b}_{2,j}\tilde{c}_{2,j}}{a_2b_2c_2}, \\ \delta_{1,j} &= \tfrac{a_{1,j}b_{1,j}c_{1,j}}{a_2b_2c_2}, \qquad \delta_{2,j} = \tfrac{a_{2,j}b_{2,j}c_{2,j}}{a_2b_2c_2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Теперь из двух первых и двух последних уравнений с учетом соотношения (21) определяем коэффициент для потенциала рассеянного излучения

$$D_3 = \frac{a_2b_2c_2}{2}\frac{E_0}{[(a_2^2-c_2^2)(b_2^2-c_2^2)]^{1/2}}\frac{A_2-A_1}{(A_2-A_1)L_z^{(2)}+A_1}, \tag{26}$$

где

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_z^{(2)} \\ \epsilon_2 & \epsilon_2(L_z^{(2)}-1) \end{pmatrix} \ \cdot\ \Omega \ \cdot\ \begin{pmatrix} (\epsilon_1-1)L_z^{(1)}+1 \\ -(\epsilon_1-1)\delta_1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $\epsilon_j=\varepsilon_j/\varepsilon_{j+1}$ – относительные диэлектрические проницаемости, $\delta_1=(a_1b_1c_1)/(a_2b_2c_2)$ – отношение объема ядра к объему частицы.

Условие конфокальности имеет вид [1,2]

$$a_2^2=a_1^2+t, \quad b_2^2=b_1^2+t, \quad c_2^2=c_1^2+t. \tag{28}$$

В этом случае внутренние и внешние поверхности слоев оболочки являются координатными в одной эллипсоидальной системе, поэтому выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_{j,i}^2=a_{j,i}^2, \quad \tilde{b}_{j,i}^2=b_{j,i}^2, \quad \tilde{c}_{j,i}^2=c_{j,i}^2, \\ &\tilde{L}^{(j,i)}=L^{(j,i)}, \qquad \tilde{\delta}_{j,i}=\delta_{j,i}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $j = 1, ..., n$. Матрица, полученная из условий сшивания, становится единичной $\Omega = I$, т.е. полученные выше формулы для двухслойных конфокальных эллипсоидальных частиц совпадают с известными результатами [1,2].

По потенциалу рассеянного поля находим поляризуемость двухслойной эллипсоидальной частицы

$$\alpha_z = \frac{4\pi a_2 b_2 c_2}{3} \frac{A_2 - A_1}{(A_2 - A_1)L_z^2 + A_1}. \tag{30}$$

По другим осям поляризуемость находится аналогично.

2. МНОГОСЛОЙНЫЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Рассмотрим $m-$слойную неконфокальную соосную эллипсоидальную частицу. В общем случае потенциал в l-й оболочке такой частицы можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_l^1 &= [C_l^1 + D_l^1 G(a_{l-1}, b_{l-1}, c_{l-1}, \xi_{l-1})] \cdot \\ &\left\{(c_{l-1}^2 + \xi_{l-1})(c_{l-1}^2 + \eta_{l-1})(c_{l-1}^2 + \zeta_{l-1})\right\}^{1/2}, \\ \Phi_l^2 &= [C_l^2 + D_l^2 G(a_l, b_l, c_l, \xi_l)] \left\{(c_l^2 + \xi_l)(c_l^2 + \eta_l)(c_l^2 + \zeta_l)\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{31}$$

где $l = 2, ..., m$, $a_{l-1}, b_{l-1}, c_{l-1}$ и a_l, b_l, c_l - полуоси эллипсоидов, образующих l-й слой, $(\xi_{l-1}, \eta_{l-1}, \zeta_{l-1})$ и (ξ_l, η_l, ζ_l) - соответствующие эллипсоидальные координаты, C_l^1, D_l^1 и C_l^2, D_l^2 неизвестные коэффициенты. Выражения для потенциалов в ядре и в среде вне частицы даны в формулах (8) и (10).

Каждую неконфокальную оболочку разбиваем на совокупность тонких подслоев. Процедуру сшивания проводим таким образом, как это было сделано в предыдущем параграфе для двухслойной частицы.

На основании полученных в предыдущем параграфе и в статье [2] результатов граничные условия и условия сшивания можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} C_2^1 \\ D_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\epsilon_1 - 1)L_z^{(1)} + 1 \\ -(\epsilon_1 - 1)\delta_1 \end{pmatrix} \cdot C_1, \tag{32}$$

$$\begin{pmatrix} C_l^2 \\ D_l^2 \end{pmatrix} = \Omega_{l-1} \cdot \begin{pmatrix} C_l^1 \\ D_l^1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} C_{l+1}^1 \\ D_{l+1}^1 \end{pmatrix} = \Gamma_l \cdot \begin{pmatrix} C_l^2 \\ D_l^2 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & L_z^{(m)} \\ \epsilon_m & \epsilon_m(L_z^{(m)} - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_m^2 \\ D_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-E_0 a_m b_m c_m}{2[(a_m^2 - c_m^2)(b_m^2 - c_m^2)]^{1/2}} \\ \frac{-E_0 a_m b_m c_m}{2[(a_m^2 - c_m^2)(b_m^2 - c_m^2)]^{1/2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_z^{(m)} \\ L_z^{(m)} - 1 \end{pmatrix} \cdot D_{m+1}, \tag{35}$$

при этом матрицы Ω_l, связанные с условиями сшивания, определяются по формулам (22)-(24), а матрицы Γ_l имеют вид

$$\Gamma_l = \begin{pmatrix} (\epsilon_l - 1)L_z^{(l)} + 1 & \frac{\epsilon_l - 1}{\delta_l} L_z^{(l)}(L_z^{(l)} - 1) \\ -(\epsilon_l - 1)\delta_l & -(\epsilon_l - 1)(L_z^{(l)} - 1) + 1 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $l = 2, ..., m-1$, $\epsilon_j = \varepsilon_j/\varepsilon_{j+1}$ - относительные диэлектрические проницаемости, $\delta_j = (a_j b_j c_j)/(a_m b_m c_m)$ – отношение объема j-го эллипсоида к объему частицы $(j = 1, ..., m)$.

Окончательно, если ввести коэффициенты A_1 и A_2 в соответствии с формулой

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_z^{(m)} \\ \epsilon_m & \epsilon_m(L_z^{(m)} - 1) \end{pmatrix} \cdot \Psi \cdot \begin{pmatrix} (\epsilon_1 - 1)L_z^{(1)} + 1 \\ -(\epsilon_1 - 1)\delta_1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

где матрица Ψ представляется в виде произведения двумерных квадратных матриц

$$\Psi = \Pi_{l=2}^{m-1}(\Omega_l \Gamma_l) \cdot \Omega_1, \tag{38}$$

то коэффициент для потенциала рассеянного излучения вычисляется по формуле, аналогичной выражению (26):

$$D_{m+1} = \frac{a_m b_m c_m}{2} \frac{E_0}{[(a_m^2 - c_m^2)(b_m^2 - c_m^2)]^{1/2}} \frac{A_2 - A_1}{(A_2 - A_1)L_z^{(m)} + A_1}. \tag{39}$$

По потенциалу рассеянного поля находим поляризуемость многослойной неконфокальной соосной эллипсоидальной частицы в поле, параллельном оси z:

$$\alpha_z = \frac{4\pi a_m b_m c_m}{3} \frac{A_2 - A_1}{(A_2 - A_1)L_z^{(m)} + A_1}. \tag{40}$$

По другим осям поляризуемость находится аналогично, нужно лишь заменить геометрические факторы $L_z^{(l)}$ на $L_x^{(l)}$ и $L_y^{(l)}$ соответственно.

Выражения для сечений рассеяния $C_{\rm sca}$ и поглощения $C_{\rm abs}$, а также другие характеристики рассеянного излучения легко определяются в приближении Рэлея по поляризуемости частицы [1].

Для малых элипсоидов можно построить квазистатическое приближение, когда поле внутри однородной частицы заменяется падающим полем с учетом ее поляризуемости (обобщение приближений Рэлея и Рэлея-Ганса). Подробно эта аппроксимация рассматривалась для сфероидов (эллипсоидов вращения)[4]. Для сильно вытянутых и сильно сплюснутых частиц она дает главный член асимптотики относительно параметра, равного отношению малого размера рассеивателя к большему [5]. Недавно [6] были опубликованы результаты достаточно обширных исследований области применимости квазистатического приближения для однородных сфероидов в зависимости от геометрических параметров (размера, степени асферичности) и показателя преломления частицы. В случае многослойных частиц аналог подобной аппроксимации получается, если в выражениях для амплитудной матрицы рассеяния в приближении Рэлея формально ввести множитель равный форм-фактору в приближении Ганса-Рэлея. По мнению автора, анализ пригодности такого приближенного решения задачи рассеяния света малыми неоднородными эллипсоидальными частицами представляет большой интерес.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза России (грант N 97-0-13.3-30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 . Boren K., Khafmen D. Rasseyanie i pogloshchenie sveta malymi chastitsami. M., Mir, 1986.

2 . Farafonov V.G. // Opt. i spektr. 2000. T.88. N3. S.492.

3 . Voshchinnikov N.V., Mathis J.S. // Astrophys. J. 1999. V.526. P.257.

4 . Farafonov V.G. // Opt. i spektr. 1994. T.77. N3. S.455.

5 . Farafonov V.G. // Opt. i spektr. 1990. T.69. V.4. S.866.

6 . Voshchinnikov N.V., Farafonov V.G. // Opt. i spektr. 2000. T.88. N1. C.78.