

Основы Вейвлет-анализа

А.Ф.Холтыгин

1 Введение

Вейвлет-анализ [1] является одним из наиболее мощных методов исследования сигналов. Этот метод используется для анализа временных рядов [2], профилей линий в спектрах звезд ранних спектральных классов [10, 12, 7], для анализа изображений и в других областях.

В данном исследовании описывается процедура использования вейвлет преобразования для исследования быстрых изменений профилей линий в спектрах звезд.

2 Вейвлет преобразования

Вейвлет преобразование определено как для одномерных (скалярных) [5], так и многомерных [14] (векторных) сигналов. В данном исследовании под *сигналом* понимается совокупность каких-либо характеристик изучаемого процесса в зависимости от времени, частоты, положения или других параметров. При исследовании только временной зависимости будем говорить о временных рядах, при изучении зависимости сигнала от частоты - о спектре сигнала.

Идеология вейвлет преобразования заключается в поиске компактных структур определенного вида в исходном сигнале. В отличие от таких хорошо известных методов исследования сигналов как Фурье анализ или корреляционный анализ, вейвлет анализ позволят получить информацию как о спектральных характеристиках искомым структур, так и об их локализации в пространстве параметров.

В данном исследовании мы будем рассматривать только интегральную форму вейвлет преобразования, так как она более удобна для изучения временной эволюции профилей линий. Дискретное представление вейвлет преобразования описано, например, Добеши [1] и в работах [9, 15].

2.1 Одномерное вейвлет преобразование

Вейвлет преобразование действительной, квадратично интегрируемой одномерной функции $f(x)$ действительной переменной x

$$\mathcal{T}f(s, u) = \frac{1}{s^\beta} \int f(x)g\left(\frac{x-u}{s}\right) dx, \quad (1)$$

где $g(x)$ - действительная функция - вейвлет (*wavelet*), удовлетворяющая представленным ниже условиям. В стандартном представлении выбирается значение $\beta = 1/2$, однако для большей общности будем рассматривать эту величину как параметр, выбираемый в зависимости от вида исходного (материнского) вейвлета $g(x)$. Обозначим масштабированный вейвлет $g_s(x) = g(x/s)$.

Материнский вейвлет g должны удовлетворять следующим условиям:

$$C_g = 2\pi \cdot \int_0^\infty |\mathcal{F}g(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega} < \infty. \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{F}g(\omega)$ обозначает Фурье преобразование g . Таким образом:

$$\mathcal{F}g(0) = 0, \text{ or } \int_{-\infty}^\infty g(x) dx = 0. \quad (3)$$

Как можно видеть из уравнения (1) вейвлет преобразование является семейством сверток исходного сигнала с масштабированными и сдвинутыми фильтрами $g_s(x)$.

Одним из наиболее часто используемых видов материнского вейвлета является так называемая *Мексиканская шляпа* (Mexican Hat):

$$g(x) = (1 - |x|^2)e^{-|x|^2/2}, \quad (4)$$

Введем также обобщенный Mexican Hat вейвлет:

$$G(x) = (1 - |x|^m)e^{-|x|^m/m}, \quad (m > 0), \quad (5)$$

также удовлетворяющий условиям (3-4).

Определим также нормированное вейвлет преобразование:

$$\mathcal{W}f(s, x) = \frac{N}{s^\delta} \int \mathcal{T}(s, u) g_s(x - u) du. \quad (6)$$

Представленное выше определение $\mathcal{W}f(s, x)$ отличается от введенного в работе [10] множителем $s^{1-\delta} N$. Введение данного множителя обусловлено тем, что при использовании стандартной формы нормированного вейвлет преобразования обычно не сохраняется амплитуда локальных компонент исходного сигнала в его вейвлет образе. Использование введенного выше нормировочного множителя при подходящем выборе параметра δ позволяет устранить этот недостаток.

Для восстановления исходного сигнала по его вейвлет образу используется теорема восстановления (обратное вейвлет преобразование):

$$f(x) = \frac{1}{N C_g} \int_0^\infty \mathcal{W}f(s, x) \frac{ds}{s^{3-\beta-\delta}}. \quad (7)$$

Для некоторых типов материнских вейвлетов, в том числе и для Mexican Hats, в качестве базиса восстановления могут быть использованы δ -функции [11]. Использование данного базиса позволят упростить запись теоремы восстановления:

$$f(x) = \frac{1}{N C'_g} \int_0^\infty \mathcal{T}f(s, x) \frac{ds}{s^{2-\beta}}. \quad (8)$$

Здесь

$$C_g = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \mathcal{F}g(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (9)$$

В простейшем случае $\beta = 2$:

$$f(x) = \frac{1}{N C'_g} \int_0^\infty \tilde{f}^{[2]}(s, x) ds, \quad (10)$$

где через $\tilde{f}^{[2]}(s, x)$ обозначено вейвлет преобразование $\mathcal{T}f(s, x)$ при $\beta = 2$.

Особо следует отметить существенную *избыточность* вейвлет преобразования, в том смысле, что различные компоненты $\mathcal{T}f(s, x)$ не ортогональны в пространстве масштабов s . При этом полное вейвлет преобразование может быть восстановлена по его части. Избыточность вейвлет преобразования выражается через так называемое *ядро восстановления* [14].

Список литературы

- [1] Добеши 1992 *Ten Lectures on Wavelets* SIAM Philadelphia, русский перевод, (2001)
- [2] Витязев В.В. (2001)
- [3] Baryshev Yu.V., Sylos Labini F., Montuori M., Pietronero L. 1995 *Vistas in Astronomy* **38** 419
- [4] Catala C., Foing B.H., Baudrand J., Cao H., Char S., Chatzichristou H., Cuby J.G., Czarny J., Dreux M., Felenbok P., Floquet M., Guerin J., Huang L., Hubert-Delplace A.M., Hubert H., Huovelin J., Jankov S., Jiang S., Li Q., Neff J.E., Petrov P., Savanov I., Shcherbakov A., Simon T., Tuominen I., Zhai D. 1993 *A&A* **275** 245
- [5] Gill A.G., Henriksen R.N. 1990 *Ap.J* **365** L27
- [6] Henrichs & Caper 1994 *A&A* **365** L27 (1994)
- [7] Henriksen R.N. 1994 *ApSp.Sci* **221** 25
- [8] Kholtygin A.F. 1993 *Proceedings of the IAU Symp. No 162*
- [9] Langer W.D., Wilson R.W., Anderson C.H. 1993 *Ap.J* **408** L45
- [10] Lépine S. 1994 *ApSp.Sci* **221** 25
- [11] Lépine S. et al. *ApJ* (1996)
- [12] Moffat A.F.J., Lépine S., Henriksen R.N., Robert C. 1994 *ApSp.Sci* **216** 55
- [13] Pfenniger D., Combes F. 1994 *A&A* **285** 94
- [14] Rauzy et al. (1993)
- [15] Starck J-L., Murtagh F. 1994 *A&A* **288** 342