А.Ф.Холтыгин

Введение в Фурье-анализ

1 Основные соотношения и обозначения

Для стандартного одномерного преобразования Фурье в одномерном случае будем использовать следующую запись:

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}_{[f(x)]}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{E}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx\,. \tag{1}$$

Множитель E введен для унификации записи числового множителя перед знаком интеграла, который различен в разных работах, посвященных Фурье-анализу. Стандартное значение множителя $A = E/2\pi = 1/\sqrt{2\pi}$ (см. например, [2]) может быть получено при выборе $E = \sqrt{2\pi}$. В работах [3, **?**] используется значение $A = 1$, соответствующее значению $E = 2\pi$. Отметим, что иногда в выражении (1) экспоненциальный множитель используется со знаком плюс: $e^{i\omega x}$ (см, например, [1]). Все формулы Фурье-анализа для этого случая могут быть легко получены заменой $x \to -x$ и $f(x) \to f(-x)$.

Обратное преобразование Фурье представляется следующей формулой:

$$f(x) = \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega\,. \tag{2}$$

Кроме комплексного преобразования Фурье (1) часто бывают удобны действительные косинус:

$$\mathcal{F}_c(\omega) = \hat{f}_c(\omega) = \frac{E}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos(\omega x) dx \tag{3}$$

и синус преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}_s(\omega) = \hat{f}_s(\omega) = \frac{E}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin(\omega x) dx\,. \tag{4}$$

Для четной функции $g(x)$ Фурье-преобразование $\hat{g}(\omega) = \hat{g}_c(\omega)$. Косинус Фурье-преобразование нечетной функции $h(x)$ равно нулю. Также равно нулю синус Фурье-преобразование нечетной функции $h(x)$. Синус Фурье-преобразование нечетной функции $\hat{h}(\omega) = \hat{h}_s(\omega)$.

В общем случае произвольная функция $f(x)$ может быть представлена как сумма четной $g(x)$ и нечетной $h(x)$ функций: $f(x) = g(x) + h(x)$, где

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \qquad \text{и} \qquad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]\,. \tag{5}$$

Используя соотношения (3) и (4), найдем:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}_c(\omega) + \hat{f}_c(-\omega)\right] + i\frac{1}{2}\left[-\hat{f}_s(\omega) + \hat{f}_s(-\omega)\right]\,. \tag{6}$$

Напомним основные свойства преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}_{[f(ax)]}(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}_{[f(x)]}\left(\frac{\omega}{|a|}\right), \tag{7}$$

$$\mathcal{F}_{[f(x+b)]}(\omega) = e^{i\omega b}\mathcal{F}_{[f(x)]}(\omega) \tag{8}$$

и

$$\mathcal{F}_{\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]}(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}_{[f(x)]}(\omega)\,. \tag{9}$$

Таблицы преобразований Фурье элементарных функций могут быть найдены, например, в [1].

В дальнейшем мы будем, также как в [**?**], использовать стандартное начение $E = 2\pi$. В этом случае преобразование Фурье свертким двух функций $f * g(x)$:

$$\mathcal{F}_{[f(x)*g(x)]}(\omega) = \mathcal{F}_{[f(x)]}(\omega) * \mathcal{F}_{[g(x)]}(\omega)\,. \tag{10}$$

Список литературы

[1] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., Справочник по математике, М„ Наука (1980)

[2] Добеши И., Десять лекций по вейвлетам, М„ *RXD* (2001)

[3] Витязев В.В., Спектрально-корреляционный анализ равномерных временных рядов, СПб, Изд. СПбГУ (2001)

[4] Витязев В.В., Анализ неравномерных временных рядов, СПб, Изд. СПбГУ (2001)