АСТРОНОМИЯ

УДК 524.4

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД ЗОННЫХ КАТАЛОГОВ*

В. В. Витязев[1], *А. С. Цветков*[2]

1. С.-Петербургский государственный университет, д-р физ.-мат. наук, профессор, vityazev@list.ru

2. С.-Петербургский государственный университет, канд. физ.-мат. наук, доцент, A.S.Tsvetkov@inbox.ru

1. Введение. Как известно, измерения, произведенные в космосе в ходе выполнения проекта HIPPARCOS, в сочетании с результатами наземных наблюдений позволили создать каталог Tycho-2 [1], который содержит координаты и собственные движения 2.5 млн. звезд, но не содержит информацию о расстояниях до звезд. В работе [2] для 137 тысяч звезд каталога Tycho-2 были получены спектральные параллаксы звезд на основе астрофизических данных, взятых из каталога Spectral Type Catalogue [3].

Появление массовых звездных каталогов Hipparcos, Tycho-2, USAC-2, USNO и др. являются побудительным мотивом для разработки новых методов кинематического анализа звезд. Этому требованию отвечают статьи [4, 5], посвященные применению векторных сферических функций (ВСФ) к задачам звездной кинематики. Использование ВСФ позволяет выявить все систематические составляющие в поле скоростей звезд, не привязываясь к конкретной физической модели. Сопоставление коэффициентов разложения определенной кинематической модели с наблюдательными данными может выявить наличие систематических компонентов, не описываемых данной моделью. К аналогичным результатам на основе анализа собственных движений звезд каталога HIPPARCOS пришли и авторы статьи [6].

Отметим, что метод ВСФ был разработан для астрометрических каталогов, в которых звезды расположены равномерно по всей небесной сфере. К сожалению, каталог Tycho-2 Spectral Types содержит информацию о двумерной спектральной классификации звезд преимущественно южной полусферы экваториальной системы координат. Это обстоятельство не позволяет произвести оценки расстояний до звезд каталога Tycho-2 на всей сфере. Настоящая статья посвящена адаптации метода ВСФ к данному конкретному случаю на основе решения новой задачи о проведении кинематического анализа трехмерного поля скоростей звезд зонных каталогов, то есть

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант № НШ-3290.2010.2).

каталогов, в которых звезды расположены достаточно равномерно по прямому восхождению, но в некоторых зонах склонения. Нами проведено построение системы векторных сферических функций, обладающих свойством полноты и ортогональности для выбранной зоны склонений. После этого был разработан прием, позволяющий на основе разложения по системе зонных ВСФ собственных движений звезд в экваториальной системе координат проводить оценку параметров модели Огородникова—Милна, относящихся к галактической системе координат. Было показано, что зонные каталоги позволяют получить оценки параметров, как минимум, основным и альтернативным способами. Сравнение основного и альтернативного решений позволяет проводить тестирование соответствия стандартной кинематической модели наблюдательным данным. Разработанный метод был проверен численными экспериментами.

2. Векторные сферические функции для зонного каталога. Векторные сферические функции обычно определяются для всех точек сферы, где они обладают свойствами ортогональности и полноты. Как было сказано, в астрометрии нередки случаи, когда измерения проводятся только в некоторой зоне склонений. В подобных случаях можно также ввести полную систему ортогональных функций.

Пусть данные некоторого зонного каталога принадлежат следующей области небесной сферы:

$$Z = \begin{cases} 0 \le \alpha \le 2\pi, \\ \delta_{\min} \le \delta \le \delta_{\max}. \end{cases} \tag{1}$$

Введем преобразование

$$\hat{\delta} = \arcsin\left(P \sin\delta + Q\right), \tag{2}$$

которое при

$$P = \frac{2}{s_2 - s_1}, \quad Q = \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1}, \tag{3}$$

$$s_1 = \sin\delta_{\min}, \quad s_2 = \sin\delta_{\max} \tag{4}$$

переводит всю сферу на область Z.

Рассмотрим в касательной к сфере плоскости систему взаимно ортогональных ортов $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\delta, \mathbf{e}_r$ соответственно в направлениях изменения прямых восхождений, склонений и луча зрения. Используя определения векторных сферических функций, данные в [7], введем радиальные $\mathbf{V}_{nkp}$, тороидальные $\mathbf{T}_{nkp}$ и сфероидадные $\mathbf{S}_{nkp}$ векторные сферические функции посредством следующих соотношений:

$$\mathbf{V}_{nkp}(\alpha,\delta) = K_{nkp}(\alpha,\delta)\,\mathbf{e}_r, \tag{5}$$

$$\mathbf{T}_{nkp} = T^{\alpha}_{nkp}\mathbf{e}_\alpha + T^{b}_{nkp}\mathbf{e}_\delta = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\frac{\partial K_{nkp}(\alpha,\delta)}{\partial\delta}\mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{\cos\delta}\frac{\partial K_{nkp'}(\alpha,\delta)}{\partial\alpha}\,\mathbf{e}_\delta\right), \tag{6}$$

$$\mathbf{S}_{nkp} = S^{\alpha}_{nkp}\mathbf{e}_\alpha + S^{b}_{nkp}\mathbf{e}_\delta = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\frac{1}{\cos\delta}\frac{\partial K_{nkp}(\alpha,\delta)}{\partial\alpha}\mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial K_{nkp}(\alpha,\delta)}{\partial\delta}\,\mathbf{e}_\delta\right). \tag{7}$$

Здесь через K_{nkp} обозначены сферические функции, для которых мы будем использовать следующее представление:

$$K_{nkp}(\alpha,\delta) = R_{nk}\begin{cases} P_{n,0}(\delta), & k = 0, \quad p = 1; \\ P_{nk}(\delta)\sin k\alpha, & k \ne 0, \quad p = 0; \\ P_{nk}(\delta)\cos k\alpha, & k \ne 0, \quad p = 1, \end{cases} \tag{8}$$

$$R_{nk} = \sqrt{P\frac{2n+1}{4\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k > 0; \\ 1, & k = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В этих формулах через $P_{nk}(\delta)$ обозначены соответственно полиномы Лежандра (при $k = 0$) и присоединенные функции Лежандра при $k > 0$. Явный вид формул для вычисления $P_{nk}(\delta)$ и компонентов $\mathbf{T}_{nkp}$ и $\mathbf{S}_{nkp}$ приведены в статье [5]. Обозначив для краткости через i и j различные наборы индексов (n, p, k), можно показать, что наши функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\iint\limits_Z (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j)\, d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j)\, d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)\, d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \tag{10}$$

$$\iint\limits_Z (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{T}_j)\, d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{S}_j)\, d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{T}_j)\, d\omega = \ 0, \quad \forall\, i, j, \tag{11}$$

где, например,

$$\iint\limits_Z (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j)\, d\omega = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \Big(T_i^{\alpha}(\alpha, \hat{\delta})\, T_j^{\alpha}(\alpha, \hat{\delta}) + T_i^{\delta}(\alpha, \hat{\delta})\, T_j^{\delta}(\alpha, \hat{\delta}) \Big) \cos\delta\, d\delta. \tag{12}$$

Другими словами, функции $\mathbf{V}_{nkp}(\alpha\,, \hat{\delta})$, $\mathbf{T}_{nkp}(\alpha\,, \hat{\delta})$, $\mathbf{S}_{nkp}(\alpha\,, \hat{\delta})$ образуют на множестве Z ортонормированную систему функций.

Рассмотрим реальное поле скоростей звезд, заданное в области Z на небесной сфере:

$$\mathbf{U}(\alpha, \delta) = V_r/r\ \mathbf{e}_r + \mathcal{K}\mu_\alpha \cos\delta\, \mathbf{e}_\alpha + \mathcal{K}\mu_b\, \mathbf{e}_\delta, \tag{13}$$

в котором V_r — лучевая скорость, μ_α, μ_δ — компоненты собственного движения звезд по прямому восхождению и склонению, r — расстояние до звезды, $\mathcal{K} = 4.738$ — множитель перевода размерности собственных движений звезд мсд/год в км/с $\cdot$ кпк$^{-1}$.

Используя систему определенных выше векторных сферических функций, мы можем разложить поле скоростей следующим образом:

$$\mathbf{U}(\alpha, \delta) = \sum_{nkp} v_{nkp} \mathbf{V}_{nkp}(\alpha, \hat{\delta}) + \sum_{nkp} t_{nkp} \mathbf{T}_{nkp}(\alpha, \hat{\delta}) + \sum_{nkp} s_{nkp} \mathbf{S}_{nkp}(\alpha, \hat{\delta}), \tag{14}$$

где в силу ортонормированности базиса коэффициенты разложения v_{nkp}, t_{nkp} и s_{nkp} вычисляются по формулам

$$v_{nkp} = \iint\limits_Z (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}_{nkp})\, d\omega, \quad t_{nkp} = \iint\limits_Z (\mathbf{U} \cdot \mathbf{T}_{nkp})\, d\omega, \quad s_{nkp} = \iint\limits_\Omega (\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}_{nkp})\, d\omega. \tag{15}$$

3. Уравнения Огородникова—Милна в галактической и экваториальной системах координат. При исследовании кинематики звезд часто используют уравнения модели Огородникова—Милна [8]. В этой модели поле скоростей звезд в прямоугольной галактической системе координат с ортами $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$ представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + M\mathbf{r}, \tag{16}$$

где $\mathbf{V}$ — общая скорость звезды, $\mathbf{V}_0$ — скорость центроида наблюдателя, M — матрица смещения, $\mathbf{r}$ — гелиоцентрический радиус-вектор звезды. Обычно вектор $\mathbf{V}_0$ интерпретируют как эффект движения Солнца относительно выбранного центроида звезд с компонентами U, V, W:

$$\mathbf{V}_0 = -U\,\mathbf{e}_X - V\,\mathbf{e}_Y - W\,\mathbf{e}_Z, \tag{17}$$

а матрица смещения представляется в следующем виде:

$$M = M^+ + M^-, \tag{18}$$

где M^+ — симметричная матрица локальной деформации поля скоростей, а M^- — антисимметричная матрица локального вращения:

$$M^+ = \begin{bmatrix} M^+_{11} & M^+_{12} & M^+_{13} \\ M^+_{21} & M^+_{22} & M^+_{23} \\ M^+_{31} & M^+_{32} & M^+_{33} \end{bmatrix}, \quad M^- = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Таким образом, модель Огородникова—Милна содержит 12 параметров:

- U, V, W — компоненты вектора $\mathbf{V}_0$ скорости движения Солнца относительно центроида звезд;
- Ω_1, Ω_2, Ω_3 — компоненты вектора $\boldsymbol{\Omega}$ твердотельного вращения центроида звезд;
- M^+_{11}, M^+_{22}, M^+_{33} — параметры тензора $\mathbf{M}^+$, описывающие сжатие-растяжение поля скоростей вдоль главных осей системы координат;
- $M^+_{12} = M^+_{21}$, $M^+_{13} = M^+_{31}$, $M^+_{23} = M^+_{32}$ — параметры тензора M^+, описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

Введем матрицу перевода ортов $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ прямоугольной галактической системы координат в орты $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$:

$$A(l,b) = \begin{bmatrix} \text{-sin l} & \cos l & 0 \\ \text{-cos l sin b} & \text{-sin l sin b} & \text{cos b} \\ \text{cos l cos b} & \text{sin l cos b} & \text{sin b} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Проектируя вектор $\mathbf{V}$ на орты $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$, получаем

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}\mu_l \cos b \\ \mathcal{K}\mu_b \\ V/r \end{bmatrix} = -A(l,b) \begin{bmatrix} U/r \\ V/r \\ W/r \end{bmatrix} + A(l,b)\,M \begin{bmatrix} \cos b \cos l \\ \cos b \sin l \\ \sin b \end{bmatrix}. \tag{21}$$

В экваториальной системе координат вместо уравнения (21) имеем

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}\mu_\alpha \cos\delta \\ \mathcal{K}\mu_\delta \\ V/r \end{bmatrix} = -A(\alpha,\delta) \begin{bmatrix} u/r \\ v/r \\ w/r \end{bmatrix} + A(\alpha,\delta)\,m \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix}, \tag{22}$$

где через $A(\alpha,\delta)$ обозначена матрица перехода от ортов $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{z}_r$ прямоугольной экваториальной системы координат к ортам $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\delta, \mathbf{e}_r$ в касательной плоскости к сфере соответственно в направлениях изменения прямого восхождения, склонения и луча зрения. Эта матрица определяется выражением (20) с формальной заменой (l,b) на

(α, δ). В формуле (22) параметры модели Огородникова—Милна в экваториальной системе координат обозначены соответствующими малыми буквами. При этом для компонентов движения Солнца и для компонентов вектора вращения имеем

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -0.0549 & 0.4941 & -0.8677 \\ -0.8734 & -0.4448 & -0.1981 \\ -0.4838 & 0.7470 & 0.4560 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где через G обозначена матрица перевода прямоугольных координат из галактической системы в экваториальную. Кроме того, между матрицами деформации в обеих системах координат существует соотношение

$$m^+ = G\, M^+\, G^{-1}. \tag{24}$$

Сравнивая выражения (21) и (22), мы приходим к важному выводу: в обеих системах координат зависимость собственных движений и лучевых скоростей звезд от координат описывается одними и теми же функциями с заменой долготы и широты на прямое восхождение и склонение. Различаются эти уравнения лишь коэффициентами при соответствующих функциональных членах. Связь этих коэффициентов задается уравнениями (23) и (24).

Обычно уравнения модели Огородникова—Милна записываются в галактической системе координат. В этом случае элементы матриц M^+ и M^- можно отождествить с параметрами Оорта: $A = M^+_{12}$, $B = M^-_{21} = \Omega_3$. Если записать уравнения в экваториальной системе координат, то кинематический смысл новых параметров остается прежним (поступательное движение, локальное вращение и деформация поля скоростей относительно экваториальной системы координат), но утрачивается непосредственная связь с параметрами вращения Галактики. Тем не менее, как следует из соотношений (23), (24), между «галактическими» и «экваториальными» параметрами существует взаимно однозначное соответствие.

4. Представление модельного поля скоростей звезд по системе ВСФ. Произведем разложение собственных движений звезд в уравнении (22) по ВСФ, определенным в южном полушарии небесной сферы. При этом следует иметь в виду то, что компоненты движения Солнца входят в наши уравнения с множителем $1/r$. Если эффекты движения Солнца не исключены, то при использовании ВСФ вместо компонентов скорости движения Солнца мы определим лишь величины $\hat{u} = u\langle\pi\rangle$, $\hat{v} = v\langle\pi\rangle$, $\hat{w} = w\langle\pi\rangle$, где $\langle\pi\rangle$ — средний параллакс звезд. Результаты теоретического разложения собственных движений представлены в таблице. Поскольку по собственным движениям можно определить диагональные элементы матрицы деформаций лишь с точностью до m^+_{22} [10], в таблице фигурируют величины $m^*_{11} = m^+_{11} - m^+_{22}$ и $x = m^+_{33} - \frac{1}{2}(m^+_{11} + m^+_{22})$.

На основании результатов, представленных в таблице, можно сформулировать следующие свойства разложения собственных движений звезд:

- модель Огородникова—Милна полностью описывается набором гармоник, порядок которых по индексу k не превышает двух;
- в отличие от случая задания поля скоростей на всей сфере [5], значения коэффициентов разложения определяются, как правило, линейными комбинациями параметров модели Огородникова—Милна;

Значения тороидальных и сфероидальных коэффициентов разложения собственных движений в уравнении (22)

Тороидальные коэффициенты	Сфероидальные коэффициенты
$t_{101} = 1.950\,\omega_3$	$s_{101} = -1.950\,\hat{w} - 0,873\,x$
$t_{110} = 1.791\,\omega_2 + 0.767\,\hat{u} - 0,256\,m^+_{13}$	$s_{110} = -1.791\,\hat{v} + 0.767\,\omega_1 - 1,279\,m^+_{23}$
$t_{111} = 1.791\,\omega_1 - 0.767\,\hat{v} + 0,256\,m^+_{23}$	$s_{111} = -1.791\,\hat{u} - 0.767\,\omega_2 - 1,279\,m^+_{13}$
$t_{201} = 0.457\,\omega_3$	$s_{201} = -0.457\,\hat{w} + 0.274\,x$
$t_{210} = 0.330\,\omega_2 + 0.330\,\hat{u} - 0,330\,m^+_{13}$	$s_{210} = -0.330\,\hat{v} + 0.330\,\omega_1 + 0,727\,m^+_{23}$
$t_{211} = 0.330\,\omega_1 - 0.330\,\hat{v} + 0,330\,m^+_{23}$	$s_{211} = -0.330\,\hat{u} - 0.330\,\omega_2 + 0.727\,m^+_{13}$
$t_{220} = -0.216\,m^*_{11}$	$s_{220} = 1.338\,m^+_{12}$
$t_{221} = 0.432\,m^+_{12}$	$s_{221} = 0.669\,m^*_{11}$
$t_{301} = 0.277\,\omega_3$	$s_{301} = -0.277\,\hat{w} + 0,017\,x$
$t_{310} = 0.195\,\omega_2 + 0.195\,\hat{u} - 0,195\,m^+_{13}$	$s_{310} = -0.195\,\hat{v} + 0.195\,\omega_1 + 0,195\,m^+_{23}$
$t_{311} = 0.195\,\omega_1 - 0.195\,\hat{v} + 0,195\,m^+_{23}$	$s_{311} = -0.195\,\hat{u} - 0.195\,\omega_2 + 0.195\,m^+_{13}$
$t_{320} = -0.108\,m^*_{11}$	$s_{320} = 0.464\,m^+_{12}$
$t_{321} = 0.216\,m^+_{12}$	$s_{321} = 0.232\,m^*_{11}$
$t_{401} = 0.189\,\omega_3$	$s_{401} = -0.189\,\hat{w} + 0,007\,x$
$t_{410} = 0.133\,\omega_2 + 0.133\,\hat{u} - 0,133\,m^+_{13}$	$s_{410} = -0.133\,\hat{v} + 0.133\,\omega_1 + 0,133\,m^+_{23}$
$t_{411} = 0.133\,\omega_1 - 0.133\,\hat{v} + 0,133\,m^+_{23}$	$s_{411} = -0.133\,\hat{u} - 0.133\,\omega_2 + 0.133\,m^+_{13}$
$t_{420} = -0.070\,m^*_{11}$	$s_{420} = 0.284\,m^+_{12}$
$t_{421} = 0.140\,m^+_{12}$	$s_{421} = 0.147\,m^*_{11}$
$t_{501} = 0.148\,\omega_3$	$s_{501} = -0.139\,\hat{w} - 0,0036\,x$
$t_{510} = 0.098\,\omega_2 + 0.098\,\hat{u} - 0,098\,m^+_{13}$	$s_{510} = -0.098\,\hat{v} + 0.098\,\omega_1 + 0,098\,m^+_{23}$
$t_{511} = 0.098\,\omega_1 - 0.098\,\hat{v} + 0,098\,m^+_{23}$	$s_{511} = -0.098\,\hat{u} - 0.098\,\omega_2 + 0.098\,m^+_{13}$
$t_{520} = -0.050\,m^*_{11}$	$s_{520} = 0.209\,m^+_{12}$
$t_{521} = 0.101\,m^+_{12}$	$s_{521} = 0.105\,m^*_{11}$
$\vdots$	$\vdots$

- линейные комбинации одних и тех же параметров формируют различные коэффициенты разложения. Это обстоятельство можно использовать для восстановления параметров модели по различным коэффициентам разложения, что в свою очередь позволяет построить тесты соответствия модели наблюдательным данным.

5. Метод ВСФ на практике. Будем считать, что в нашем распоряжении имеется зонный каталог звезд, для которых известны параллаксы, лучевые скорости, экваториальные координаты и компоненты собственного движения по прямому восхождению и склонению. Опишем последовательность шагов кинематического анализа поля скоростей звезд с помощью векторных сферических функций.

1. *Вычисление коэффициентов разложения $v_{nkp}, t_{nkp}, s_{nkp}$ поля скоростей по векторным сферическим функциям.* В принципе, вычисление этих коэффициентов можно проводить с помощью дискретных аналогов формул (15), однако такой подход требует предварительного выполнения пикселизации данных на всей сфере или ее части. Выполнив сравнение различных методов пикселизации, мы пришли к выводу, что при использовании достаточно больших выборок, насчитывающих десятки тысяч звезд, равномерно распределенных по площадям сферы, можно выполнить определение искомых коэффициентов разложения поля скоростей по векторным сферическим функциям просто с помощью решения уравнений

$$\mathcal{K}\mu_\alpha \cos\delta \;= \sum_{nkp} t_{nkp}\mathbf{T}^{\alpha}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}) + \sum_{nkp} s_{nkp}\mathbf{S}^{\alpha}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}), \tag{25}$$

$$\mathcal{K}\mu_\delta \ = \sum_{nkp} t_{nkp} \mathbf{T}^{\delta}_{nkp}(\alpha, \hat{\delta}) + \sum_{nkp} s_{nkp} \mathbf{S}^{\delta}_{nkp}(\alpha, \hat{\delta}) \tag{26}$$

обычной процедурой метода наименьших квадратов, которая естественным образом позволяет получать не только оценки искомых коэффициентов, но и их среднеквадратичные ошибки. Выбор общего числа членов разложения может быть определен из условия того, что остатки в компонентах поля скоростей после вычитания из них статистически значимых гармоник ведут себя как случайные числа [9].

2. *Определение параметров конкретной кинематической модели.* После того, как выполнено определение коэффициентов разложения $t_{nkp} \pm \sigma_{t_{nkp}}, s_{nkp} \pm \sigma_{s_{nkp}}$, на основании табличных данных можно написать уравнения, связывающие коэффициенты разложения с искомыми параметрами модели. Число таких уравнений берется равным числу определяемых параметров. Таким образом можно получить несколько (теоретически бесконечно много) оценок параметров моделей. На практике целесообразно строить решения для младших членов разложения, так как для них коэффициенты разложения имеют не очень малые значения, что приводит потом к разумным оценкам среднеквадратичных ошибок определяемых параметров. В нашем методе мы будем использовать две оценки параметров, называя их основным и альтернативными решениями.

Для получения основного и альтернативного решений по собственным движениям звезд будем использовать следующие наборы коэффициентов:

$$c_{main} = (s_{101}, s_{110}, s_{111}, s_{201}, s_{210}, s_{211}, s_{220}, s_{221}, t_{101}, t_{110}, t_{111})^T, \tag{27}$$

$$c_{alt} = (s_{101}, s_{110}, s_{111}, s_{301}, t_{201}, t_{110}, t_{111}, t_{210}, t_{211}, t_{220}, t_{221})^T. \tag{28}$$

Введем в рассмотрение одностолбцовую матрицу искомых кинематических параметров, определяемых по собственным движениям звезд:

$$p = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, m^+_{13}, m^+_{23}, m^+_{12}, m^*_{11}, m^*_{33})^T. \tag{29}$$

Для их определения в основном и альтернативном приближениях можно записать следующие матричные соотношения:

$$p_{main} = a\, c_{main}; \quad p_{alt} = b\, c_{alt}. \tag{30}$$

Входящие сюда матрицы a и b легко определяются на основании табличных данных. Аналогичным способом можно построить основное и альтернативное решения по лучевым скоростям звезд.

Вычисленные указанным способом значения параметров кинематической модели Огородникова—Милна относятся к экваториальной системе координат. Они могут быть переведены в галактическую систему с помощью соотношений (23), (24).

3. *Анализ внемодельных коэффициентов разложения.* Как следует из таблицы, модель Огородникова—Милна полностью описывается коэффициентами разложения t_{npk}, s_{npk} до $k \leq 2$. Все остальные члены разложения со значимыми коэффициентами определяют систематические компоненты поля скоростей звезд, не входящие в стандартную модель. Установление физического смысла этих гармоник представляет собой отдельную задачу, сводящуюся, по существу, к построению новый кинематической модели.

6. Численные эксперименты. Для тестирования возможностей метода ВСФ мы провели численные эксперименты. В них использовались экваториальные координаты 27 557 звезд каталога Tycho-2 с отрицательными склонениями (звезды класса светимости III в диапазоне расстояний от 100 до 200 пк). Эта выборка обеспечила нам достаточно равномерное распределение звезд по площадкам южного полушария. Во всех экспериментах мы меняли собственные движения, лучевые скорости и параллаксы этих звезд, но не меняли их координаты.

Используя датчик случайных чисел (равномерное распределение), каждой звезде приписали искусственное расстояние в диапазоне от 500 до 2000 пк. С применением уравнений (22) для этих звезд были вычислены фиктивные собственные движения при некоторых заданных значениях параметром модели Огородникова—Милна.

Обычный путь выполнения кинематического анализа поля скоростей звезд — это прямое определение параметров модели Огородникова—Милна с помощью метода наименьших квадратов. В дальнейшем мы будем называть такой подход *методом модели.* Во всех наших экспериментах мы решали уравнения (25)–(26) относительно коэффициентов разложения поля скоростей по ВСФ, а также уравнения (22) относительно параметров модели Огородникова—Милна. Это делалось для сравнения нашего метода со стандартным методом модели.

Эксперимент 1. В этом эксперименте тестовый каталог TEST формировался путем добавления к модельным собственным движениям шумового компонента, соответствующего точности определения собственных движений на уровне 3 мсд/год. Результаты этого эксперимента показали, что в том случае, когда исходные данные отражают кинематические эффекты модели и содержат только шумовой компонент, метод модели и метод ВСФ восстанавливают заданные значения параметров модели практически одинаково.

Эксперимент 2. В модельные собственные движения тестового каталога, применявшегося в предыдущем эксперименте, вносились компоненты «систематического» шума вида $300\,\mathbf{T}_{551}$, $300\,\mathbf{S}_{551}$, не входящие в модель Огородникова—Милна. При использовании метода ВСФ сумма квадратов невязок вычисляется автоматически с учетом введенных внемодельных членов, а методе модели такой учет сделать нельзя. Это приводит к тому, что метод ВСФ не только обнаруживает внемодельные члены, но и позволяет устранить их влияние на среднеквадратичные ошибки определения параметров модели. В противоположность этому, метод модели смешивает систематические шумы со случайными компонентами, что приводит к завышению оценок среднеквадратичных ошибок определяемых оценок параметров модели. В нашем эксперименте мы получили, что среднеквадратичные ошибки возросли примерно в 10 раз.

Следует отметить, что некоторые МНК-оценки в методе модели оказались сильно коррелированными. Так, абсолютные значения коэффициента корреляции между величинами $\hat{u}$ и ω_2, а также между $\hat{v}$ и ω_1 достигают 0.87, а между $\hat{u}$ и m_{13} — 0.75. По этой причине значения многих параметров, возвращаемых по методу модели сильно отличаются от заданных (в нашем случае оказалось $\omega_1 = 3,22 \pm 1,89$ вместо 13.025). В то же самое время, как это показали наши вычисления, метод ВСФ дает некоррелированные оценки в силу ортогональности использованных нами векторных сферических функций и надежно защищает искомые параметры от влияния сильных помех систематического характера.

Эксперимент 3. В собственных движениях каталога TEST эффект деформации поля скоростей, описываемый параметром $m_{12}^{+} = -6.1$, был заменен на $-6.1\,\mathbf{T}_{221}$. Оба наших метода — и метод модели, и метод ВСФ настроены на поиск параметра m^+_{12}, но в этой ситуации они ведут себя различно. Метод модели дает для заведомо нулевой величины статистически надежное значение $m^+_{12} = -0,95 \pm 0,15$, которому приходится просто верить. В то же самое время, в методе ВСФ основное решение оказалось 0.23 ± 0.18, а в альтернативном решении — -13.67 ± 0.55. Здесь мы видим, что для параметра m^+_{12} основной и альтернативный варианты решений дают различные оценки. Этот пример показывает полезное свойство альтернативного решения — в данном случае несовпадение основного и альтернативного решений говорит о том, что в исследуемых данных нет эффекта деформации поля скоростей в основной плоскости. Таким образом, метод ВСФ позволяет не только определять параметры кинематической модели, но и производить проверку соответствия модели наблюдательным данным.

7. Заключение. Подводя итог проделанным экспериментам, можно сказать, что для кинематического анализа собственных движений звезд, заданных на полусфере, метод векторных сферических функций обладает более широкими возможностями, чем непосредственное определение параметров кинематической модели обычным методом наименьших квадратов. Эти возможности позволяют не только определять значения параметров заданной модели, но и тестировать реальные данные на их соответствие стандартным моделям. В противоположность традиционному методу очень важным свойством метода ВСФ является возможность обнаружения тех статистически значимых гармоник разложения поля скоростей, которые не входят в стандартные модели. В дальнейшем метод векторных сферических функций будет применен для анализа собственных движений звезд каталога Tycho-2, расположенных в южном экваториальном полушарии небесной сферы.

Литература

1. *Hog E. et al.* Tycho-2 // Astron. Astrophys. 2000. Vol. 355, L27 UCAC2 Zacharias, N. et.

2. *Попов А. В., Витязев В. В., Цветков А. С.* Спектральные параллаксы звезд каталога Tycho-2 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 4. С. 116–123.

3. *Wright* et al. The Tycho-2 Spectral Type Catalogue // Astron. J. 2003. Vol. 125. P. 359.

4. *Витязев В. В., Шукcто А. К.* Применение векторных функций для анализа собственных движений звезд // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 1. С. 116–124.

5. *Vityazev V., Tsvetkov A.* Analysis of the three-dimensional stellar velocity field using vector spherical functions // ASTRONOMY LETTERS. 2009. Vol. 35-2. P. 100–113.

6. *Makarov V. V., Murphy D. W.* The local stellar velocity field via vector spherical hsrmonics // The Astronomical Journal. 2007. Vol. 134. P. 367–375.

7. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. С. 493–498

8. *Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем. М.: Физматгиз, 1965.

9. *Brosche P.* Representation of systematic differences in positions and proper motions of stars by spherical harmonics // Veroff, des Astron. Rechen-Inst. Heidelberg. 1966. N 17. P. 1–27.

10. *Clube S. V. M.*, Galactic rotation and the precession constant // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1972. Vol. 159. N 3. P. 289–314.

Статья поступила в редакцию 26 октября 2011 г.