УДК 524.6-327, 524.6-34

Применение векторных сферических функций для кинематического анализа звезд зонных каталогов

В.В.Витязев*, **А.С.Цветков****

Санкт-Петербургский государственный университет

Решается задача о проведении кинематического анализа трехмерного поля скоростей звезд зонных каталогов, то есть каталогов, в которых звезды представлены по всем прямым восхождениям в некоторых зонах склонения. Построена система векторных сферических функций, обладающих свойством полноты и ортогональности для выбранной зоны склонений. Предложен метод, позволяющий на основе анализа собственных движений и лучевых скоростей звезд в экваториальной системе координат, проводить оценку параметров модели Огородникова-Милна в галактической системе координат. Показаны следующие преимущества векторных сферических функций перед стандартным подходом, основанном на непосредственном оценивании параметров конкретной модели методом наименьших квадратов. Во-первых, новый метод в отличие от стандартного подхода позволяет выявить все систематические компоненты поля скоростей независимо от какой либо модели. Во-вторых, он позволяет избавиться от коррелированности искомых параметров, что при обычном методе представляет серьезную проблему в случае зонных каталогов. В третьих, метод векторных сферических функций позволяет оценить кинематические параметры, как минимум, двумя способами. Сравнение этих двух решений дает возможность проверять соответствие стандартной кинематической модели наблюдательным данным. Разработанный метод был проверен на основе численных экспериментов и применен для кинематического анализа собственных движений звезд каталога Tycho-2 в южном полушарии, для которых возможно провести оценку параллаксов по данным каталога Tycho-2 Spectral Types.

Ключевые слова: собственные движения звезд, сферические функции, астрометрия, звездная кинематика

PACS codes: 95.10.Jk, 95.75.Pq, 95.80.+p, 98.10.+z, 98.35.-a

* e-mail <ai@astro.spbu.ru> ** e-mail <tsvetkov@AC1072.spb.edu>

Содержание

Введение

В настоящее время создание звездных астрометрических каталогов осуществляется тремя способами. Первый опирается на выполнение измерений в космосе, второй – на результаты оптических наземных измерений, третий способ – это комбинация измерений, выполненных на инструментах космического и наземного базирования. Результатом этой деятельности явилось создание массовых звездных каталогов HIPPARCOS, Tycho-2, USAC-2, USNO, что дает качественно новый материал, в частности, для исследования кинематики звезд Галактики. Запланированные в будущих космических проектах (GAIA) измерения высокоточных параллаксов, собственных движения и лучевых скоростей для многих сотен миллионов звезд, являются мотивацией для разработки новых методов кинематического анализа звезд. Этому требованию отвечают статьи (Витязев, Шуксто, 2005; Витязев, Цветков, 2009), посвященные применению векторных сферических функций (ВСФ) к задачам звездной кинематики. Особенно хорошо аппарат векторных сферических функций подходит для анализа нынешних и будущих каталогов, содержащих все три компоненты вектора скорости – собственные движения по обеим координатам и лучевую скорость. Использование ВСФ позволяет выявить все систематические составляющие в поле скоростей звезд, не привязываясь к конкретной физической модели. Сопоставление коэффициентов разложения определенной кинематической модели с наблюдательными данными может выявить наличие систематических компонент, не описываемых данной моделью. В работе (Витязев, Цветков, 2009) показано, что в собственных движениях и лучевых скоростях звезд каталога HIPPARCOS имеются систематические компоненты, которые не могут быть интерпретированы в рамках линейной модели Огородникова-Милна. К аналогичным результатам (на основе только анализа собственных движения звезд каталога HIPPARCOS) пришли и авторы статьи (Макаров, Мерфи, 2007).

Как известно, измерения, произведенные в космосе на борту аппарата HIPPARCOS, в сочетании с результатами наземных наблюдений позволили создать каталог Tycho-2 (Хёг и др., 2000), который содержит координаты и собственные движения 2.5 млн. звезд, но не содержит информацию о расстояниях до звезд. В работе (Попов, Витязев, Цветков, 2006) для 137 тысяч звезд каталога Tycho-2 были получены спектральные параллаксы звезд на основе астрофизических данных, взятых из каталога Spectral Type Catalogue (Райт и др. et al., 2003). Сравнение спектральных параллаксов с тригонометрическими параллаксами 53 тысяч звезд, измеренными на спутнике HIPPARCOS, показало,что точность полученных спектральных параллаксов составляет от 1 до 5 мсд в зависимости от спектрального класса звезды. Такая точность вполне приемлема для проведения кинематических исследований.

К сожалению, каталог Tycho-2 Spectral Types содержит информацию о двумерной спектральной классификации звезд преимущественно для звезд южной полусферы экваториальной системы координат. Это обстоятельство не позволяет произвести оценки расстояний до звезд каталога Tycho-2 на всей сфере. Каталог, содержащий информацию только для звезд одного полушария небесной сферы, является частным случаем так называемых зонных каталогов, то есть каталогов, в которых звезды представлены по всем прямым восхождениям в некоторых зонах склонения. Зонные каталоги появляются закономерно, если наземные наблюдения ведутся либо на одном инструменте, либо на группе инструментов, расположенных только в одном из полушарий Земли. Такая ситуация была типичной для классической астрометрии. Так как массовые астрометрические каталоги создаются путем объединения результатов наблюдений, выполненных на Земле и в космосе, то и современные каталоги могут быть зонными. С такой ситуацией мы и столкнулись на примере каталога Tycho-2 Spectral Types.

Настоящая работа посвящена адаптации метода ВСФ к данному конкретному случаю на основе решения новой задачи о проведении кинематического анализа трехмерного поля скоростей звезд зонных каталогов. В начале статьи показан способ построения системы векторных сферических функций, обладающих свойством полноты и ортогональности для произвольной зоны склонений. После этого описывается метод вычисления параметров модели Огородникова-Милна, относящихся к галактической системе координат, на основе разложения по системе зонных ВСФ собственных движений звезд и лучевых скоростей в южном полушарии экваториальной системы координат. Далее показывается, что зонные сферические функции предоставляют возможность получать оценки параметров, как минимум, основным и альтернативным способами. Сравнение основного и альтернативного решений позволяет проверять соответствие стандартной кинематической модели наблюдательным данным. Разработанный метод был проверен на основе численных экспериментов и применен для кинематического анализа тех собственных движений звезд каталога Tycho-2 в южном полушарии, для которых возможно провести оценку параллакса по данным каталога Tycho-2 Spectral Types.

Векторные сферические функции для зонного каталога

Векторные сферические функции обычно определяются для всех точек сферы, где они обладают свойствами ортогональности и полноты (Арфкен, 1970). Как было сказано выше, в астрометрии нередки случаи, когда измерения проводятся только в некоторой зоне склонений. В подобных случаях можно также ввести полную систему ортогональных функций. Пусть данные некоторого зонного каталога принадлежат следующей области небесной сферы:

$$Z = \begin{cases} 0 \le \alpha \le 2\pi, \\ \delta_{min} \le \delta \le \delta_{max}. \end{cases} \tag{1}$$

Введем преобразование

$$\hat{\delta} = arcsin\left(\frac{2\,\sin\delta}{s_2 - s_1} - \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1}\right), \tag{2}$$

которое при

$$s_1 = \sin\delta_{min}, \tag{3}$$

$$s_2 = \sin\delta_{max} \tag{4}$$

переводит всю сферу на область Z.

Рассмотрим в касательной плоскости к сфере систему взаимно ортогональных ортов $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\delta, \mathbf{e}_r$ соответственно в направлениях изменения прямых восхождений, склонений и луча зрения. Используя определения векторных сферических функций, данные в (Арфкен, 1970), введем радиальные $\mathbf{V}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})$, тороидальные $\mathbf{T}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})$ и сфероидальные $\mathbf{S}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})$ векторные сферические функции посредством следующих соотношений:

$$\mathbf{V}_{nkp} = K_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})\,\mathbf{e}_r, \tag{5}$$

$$\mathbf{T}_{nkp} = T^{\alpha}_{nkp}\mathbf{e}_\alpha + T^{b}_{nkp}\mathbf{e}_\delta = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\frac{\partial K_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})}{\partial\hat{\delta}}\mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{\cos\hat{\delta}}\frac{\partial K_{nkp'}(\alpha,\hat{\delta})}{\partial\alpha}\,\mathbf{e}_\delta\right), \tag{6}$$

$$\mathbf{S}_{nkp} = S^{\alpha}_{nkp}\mathbf{e}_\alpha + S^{b}_{nkp}\mathbf{e}_\delta = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left(\frac{1}{\cos\hat{\delta}}\frac{\partial K_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})}{\partial\alpha}\mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial K_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})}{\partial\hat{\delta}}\,\mathbf{e}_\delta\right). \tag{7}$$

Здесь через K_{nkp} обозначены сферические функции, для которых мы будем использовать следующее представление:

$$K_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}) = R_{nk}\begin{cases} P_{n,0}(\hat{\delta}), & k=0, \quad p=1; \\ P_{nk}(\hat{\delta})\sin k\alpha, & k\ne 0, \quad p=0; \\ P_{nk}(\hat{\delta})\cos k\alpha, & k\ne 0, \quad p=1, \end{cases} \tag{8}$$

$$R_{nk} = \sqrt{a\frac{2n+1}{4\pi}} \left\{ \begin{array}{cc} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k>0; \\ 1, & k=0. \end{array} \right. \tag{9}$$

В этих формулах через $P_{nk}(\hat{\delta})$ обозначены соответственно полиномы Лежандра (при $k=0$) и присоединенные функции Лежандра при $k>0$. Явный вид формул для вычисления $P_{nk}(\hat{\delta})$ и компонентов $\mathbf{T}_{nkp}$ и $\mathbf{S}_{nkp}$ приведены в статье (Витязев, Цветков, 2009).

Легко показать, что наши функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\iint\limits_Z (\mathbf{V}_i\cdot\mathbf{V}_j)\,d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{T}_i\cdot\mathbf{T}_j)\,d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j)\,d\omega = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & i\neq j; \\ 1, & i=j; \end{array} \right. \tag{10}$$

$$\iint\limits_Z (\mathbf{V}_i\cdot\mathbf{T}_j)\,d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{V}_i\cdot\mathbf{S}_j)\,d\omega = \iint\limits_Z (\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{T}_j)\,d\omega = \;\; 0, \quad \forall\, i,j, \tag{11}$$

где, например,

$$\iint\limits_Z (\mathbf{T}_i\cdot\mathbf{T}_j)\,d\omega = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \Big(T_i^{\alpha}(\alpha,\hat{\delta})\,T_j^{\alpha}(\alpha,\hat{\delta}) + T_i^{\delta}(\alpha,\hat{\delta})\,T_j^{\delta}(\alpha,\hat{\delta})\Big)\cos\delta\,d\delta. \tag{12}$$

В этих формулах через i и j обозначены различные наборы индексов (n,p,k). Другими словами, функции $\mathbf{V}_{nkp}(\alpha\,,\hat{\delta})$, $\mathbf{T}_{nkp}(\alpha\,,\hat{\delta})$, $\mathbf{S}_{nkp}(\alpha\,,\hat{\delta})$ образуют на множестве Z ортонормированную систему функций.

Рассмотрим теперь реальное поле скоростей звезд, заданное в области Z на небесной сфере:

$$\mathbf{U}(\alpha,\delta) = V_r/r\;\mathbf{e}_r + \mathcal{K}\mu_\alpha\cos\delta\,\mathbf{e}_\alpha + \mathcal{K}\mu_b\,\mathbf{e}_\delta, \tag{13}$$

в котором V_r – лучевая скорость, μ_α,μ_δ – компоненты собственного движения звезд по прямому восхождению и склонению, r – расстояние до звезды, $\mathcal{K}=4.738$ – множитель перевода размерности собственных движений звезд мсд/год в км/с $\cdot$ кпк$^{-1}$.

Используя систему определенных выше векторных сферических функций, мы можем разложить поле скоростей следующим образом:

$$\mathbf{U}(\alpha,\delta) = \sum_{nkp} v_{nkp}\mathbf{V}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}) + \sum_{nkp} t_{nkp}\mathbf{T}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}) + \sum_{nkp} s_{nkp}\mathbf{S}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}), \tag{14}$$

где в силу ортонормированности базиса коэффициенты разложения v_{nkp}, t_{nkp} и s_{nkp} вычисляются по формулам:

$$v_{nkp} = \iint\limits_Z (\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}_{nkp})\,d\omega = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} V_r(\alpha,\delta)/r\;V_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})\cos\delta\,d\delta, \tag{15}$$

$$t_{nkp} = \iint\limits_Z (\mathbf{U}\cdot\mathbf{T}_{nkp})\,d\omega = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \Big(\mathcal{K}\mu_\alpha\cos\delta\,T^{\alpha}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}) + \mathcal{K}\mu_\delta\,T^{\delta}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})\Big)\cos\delta\,d\delta, \tag{16}$$

$$s_{nkp} = \iint\limits_\Omega (\mathbf{U}\cdot\mathbf{S}_{nkp})\,d\omega = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \Big(\mathcal{K}\mu_\alpha\cos\delta\,S^{\alpha}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta}) + \mathcal{K}\mu_\delta\,S^{\delta}_{nkp}(\alpha,\hat{\delta})\Big)\cos\delta\,d\delta. \tag{17}$$

Уравнения Огородникова-Милна в галактической и экваториальной системах координат

При исследовании кинематики звезд часто используют уравнения модели Огородникова-Милна (Огородников, 1965). В этой модели поле скоростей звезд относительно прямоугольной галактической системы координат с ортами $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$ представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + M\mathbf{r}, \tag{18}$$

где $\mathbf{V}$ – общая скорость звезды, $\mathbf{V}_0$ – скорость центроида наблюдателя, M – матрица смещения, $\mathbf{r}$ – гелиоцентрический радиус-вектор звезды.

Обычно вектор $\mathbf{V}_0$ интерпретируют как эффект движения Солнца относительно выбранного центроида звезд с компонентами U, V, W:

$$\mathbf{V}_0 = -U\,\mathbf{e}_X - V\,\mathbf{e}_Y - W\,\mathbf{e}_Z. \tag{19}$$

Кроме того, матрица смещения представляется в следующем виде:

$$M = M^+ + M^-, \tag{20}$$

где M^+ – симметричная матрица локальной деформации поля скоростей

$$M^+ = \begin{bmatrix} M^+_{11} & M^+_{12} & M^+_{13} \\ M^+_{21} & M^+_{22} & M^+_{23} \\ M^+_{31} & M^+_{32} & M^+_{33} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

а M^- – антисимметричная матрица локального вращения

$$M^- = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Таким образом, модель Огородникова-Милна содержит 12 параметров:

U, V, W – компоненты вектора скорости движения Солнца относительно центроида звезд $\mathbf{V}_0$;

Ω_1, Ω_2, Ω_3 – компоненты вектора твердотельного вращения центрида звезд $\mathbf{\Omega}$;

M^+_{11}, M^+_{22}, M^+_{33} – параметры тензора $\mathbf{M}^+$, описывающие сжатие-растяжение поля скоростей вдоль главных осей системы координат;

$M^+_{12} = M^+_{21}$, $M^+_{13} = M^+_{31}$, $M^+_{23} = M^+_{32}$ – параметры тензора M^+, описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

Введем матрицу перевода ортов $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z$ прямоугольной галактической системы координат в орты $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$, направленные вдоль направления изменения галактической долготы, широты и луча зрения:

$$A(l,b) = \begin{bmatrix} -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos l \sin b & -\sin l \sin b & \cos b \\ \cos l \cos b & \sin l \cos b & \sin b \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Проектируя вектор $\mathbf{V}$ на орты $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$, получим:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}\mu_l \cos b \\ \mathcal{K}\mu_b \\ V/r \end{bmatrix} = -A(l,b) \begin{bmatrix} U/r \\ V/r \\ W/r \end{bmatrix} + A(l,b)\, M \begin{bmatrix} \cos b \cos l \\ \cos b \sin l \\ \sin b \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Приведем явный вид уравнений модели Огородникова-Милна в галактической системе координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_l \cos b = & \quad U/r\ \sin l - V/r\ \cos l - \Omega_1 \sin b \cos l - \Omega_2 \sin b \sin l + \Omega_3 \cos b - \\ - & \quad M_{13}^{+} \sin b \sin l + M_{23}^{+} \sin b \cos l + M_{12}^{+} \cos b \cos 2l - \\ - & \quad \frac{1}{2} M_{11}^{+} \cos b \sin 2l + \frac{1}{2} M_{22}^{+} \cos b \sin 2l, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_b = & \quad U/r\ \cos l \sin b + V/r\ \sin l \sin b - W/r\ \cos b + \Omega_1 \sin l - \Omega_2 \cos l - \\ - & \quad \frac{1}{2} M_{12}^{+} \sin 2b \sin 2l + M_{13}^{+} \cos 2b \cos l + M_{23}^{+} \cos 2b \sin l - \\ - & \quad \frac{1}{2} M_{11}^{+} \sin 2b \cos^2 l - \frac{1}{2} M_{22}^{+} \sin 2b \sin^2 l + \frac{1}{2} M_{33}^{+} \sin 2b, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} V_r/r = & - \quad U/r\ \cos l \cos b - V/r\ \sin l \cos b - W/r\ \sin b + \\ & + \quad M_{13}^{+} \sin 2b \cos l + M_{23}^{+} \sin 2b \sin l + M_{12}^{+} \cos^2 b \sin 2l + \\ & + \quad M_{11}^{+} \cos^2 b \cos^2 l + M_{22}^{+} \cos^2 b \sin^2 l + M_{33}^{+} \sin^2 b. \end{aligned} \tag{27}$$

Теперь запишем уравнения Огродникова-Милна в экваториальной системе координат. Для этого введем матрицу перевода прямоугольных координат из галактической системы в экваториальную (ESA, 1997):

$$G = \begin{bmatrix} -0.0549 & 0.4941 & -0.8677 \\ -0.8734 & -0.4448 & -0.1981 \\ -0.4838 & 0.7470 & 0.4560 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Проектируя вектор $\mathbf{V}$ на орты $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\delta, \mathbf{e}_r$, находим:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}\mu_\alpha\, cos\delta \\ \mathcal{K}\mu_\delta \\ V/r \end{bmatrix} = -A(\alpha,\delta) \begin{bmatrix} u/r \\ v/r \\ w/r \end{bmatrix} + A(\alpha,\delta)\, m \begin{bmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где через $A(\alpha,\delta)$ обозначена матрица перехода от ортов $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{z}_r$ прямоугольной экваториальной системы координат к ортам $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\delta, \mathbf{e}_r$ в касательной плоскости к сфере соответственно в направлениях изменения прямого восхождения, склонения и луча зрения. Эта матрица определяется выражением (23) с формальной заменой (l,b) на (α,δ).

В формуле (29) параметры модели обозначены малыми буквами в полном соответствии с обозначениями, введенными для уравнений (25) – (27). При этом для компонентов движения Солнца имеем:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Кроме того, между матрицами смещения в обеих системах координат существует соотношение

$$m = G\,M\,G^{-1}, \tag{31}$$

из которого получаем связь между компонентами вращения

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

а также связи между компонентами тензора деформации:

$$\begin{bmatrix} m_{11}^+ \\ m_{12}^+ \\ m_{13}^+ \\ m_{22}^+ \\ m_{23}^+ \\ m_{33}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.003 & -0.054 & 0.095 & 0.244 & -0.858 & 0.753 \\ 0.048 & -0.407 & 0.768 & -0.220 & 0.288 & 0.172 \\ 0.027 & -0.280 & 0.395 & 0.369 & -0.423 & -0.395 \\ 0.763 & 0.777 & 0.346 & 0.198 & 0.176 & 0.039 \\ 0.423 & -0.437 & -0.302 & -0.332 & -0.351 & -0.090 \\ 0.234 & -0.723 & -0.441 & 0.558 & 0.681 & 0.208 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^+ \\ M_{12}^+ \\ M_{13}^+ \\ M_{22}^+ \\ M_{23}^+ \\ M_{33}^+ \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Сравнивая выражения (24) и (29), мы приходим к важному выводу: в обеих системах координат зависимость собственных движений и лучевых скоростей звезд от координат описывается одними и теми же функциями с заменой долготы и широты на прямое восхождение и склонение. Различаются эти уравнения лишь коэффициентами при соответствующих функциональных членах. Связь этих коэффициентов задается уравнениями (30), (32) и (33).

Обычно уравнения модели Огородникова-Милна записываются в галактической системе координат. В этом случае элементы матриц M^+ и M^- можно отождествить с параметрами Оорта: $A = M_{12}^+$, $B = M_{21}^- = \Omega_3$. Если записать уравнения в экваториальной системе координат, то кинематический смысл новых параметров остается прежним (поступательное движение, локальное вращение и деформация поля скоростей относительно экваториальной системы координат), но утрачивается непосредственная связь с параметрами вращения Галактики. Тем не менее, как следует из соотношений (30), (32), (33) между «галактическими» и «экваториальными», параметрами существует взаимно однозначное соответствие.

Представление модельного поля скоростей звезд по системе ВСФ

Воспользуемся инвариантностью представления уравнений Огородникова-Милна в галактической и экваториальной системе координат и запишем эти уравнения в экваториальной системе координат, используя для обозначения параметров модели малые буквы. Очень часто кинематический анализ выполняют только по собственным движениям. В этом случае можно определить диагональные элементы матрицы деформаций лишь с точностью до m_{22}^+ (Клубе, 1972). Учитывая это обстоятельство, введем обозначения

$$\begin{gathered} m_{11}^* = m_{11}^+ - m_{22}^+, \quad m_{33}^* = m_{33}^+ - m_{22}^+, \\ x = m_{33}^+ - \frac{1}{2}(m_{11}^+ + m_{22}^+), \;\; y = \frac{1}{3}(m_{11}^+ + m_{22}^+ + m_{33}^+). \end{gathered} \tag{34}$$

С учетом этих обозначений запишем уравнения Огородникова-Милна в экваториальной системе координат:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mu_\alpha \cos\delta = &\quad u/r\ \sin\alpha - v/r\ \cos\alpha - \omega_1 \sin\delta\cos\alpha - \omega_2 \sin\delta\sin\alpha + \omega_3 \cos b - \\ - &\quad m^+_{13}\sin\delta\sin\alpha + m^+_{23}\sin\delta\cos\alpha + m^+_{12}\cos\delta\cos 2\alpha - \\ - &\quad \frac{1}{2}m^*_{11}\cos\delta\sin 2\alpha,\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mu_\delta = &\quad u/r\ \cos\alpha\sin\delta + v/r\ \sin\alpha\sin\delta - w/r\ \cos\delta + \omega_1\sin\alpha - \omega_2\cos\alpha - \\ - &\quad \frac{1}{2}m^+_{12}\sin 2\delta\sin 2\alpha + m^+_{13}\cos 2\delta\cos\alpha + m^+_{23}\cos 2\delta\sin\alpha - \\ - &\quad \frac{1}{4}m^*_{11}\sin 2\delta\cos 2\alpha + \frac{1}{2}x\sin 2\delta,\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}V_r/r = &\ -\ u/r\ \cos\alpha\cos\delta - v/r\ \sin\alpha\cos\delta - w/r\ \sin\delta + \\ &\ +\ m^+_{13}\sin 2\delta\cos\alpha + m^+_{23}\sin 2\delta\sin\alpha + m^+_{12}\cos^2\delta\sin 2\alpha + \\ &\ +\ \frac{1}{2}m^*_{11}\cos^2\delta\cos 2\alpha + x\,(\sin^2\delta - 1/3) + y.\end{aligned} \tag{37}$$

В общем случае можно произвести разложение собственных движений и лучевых скоростей звезд в уравнениях (35) – (37) по ВСФ, определенным в любой зоне склонений. При этом следует иметь в виду то, что компоненты движения Солнца входят в наши уравнения с множителем $1/r$. Если эффекты движения Солнца не исключены, то при использовании ВСФ вместо компонентов скорости движения Солнца мы определим лишь величины $\hat{u} = u\langle\pi\rangle$, $\hat{v} = v\langle\pi\rangle$, $\hat{w} = w\langle\pi\rangle$, где $\langle\pi\rangle$ – средний параллакс звезд. Исходя из смысла нашей задачи, мы произвели разложение уравнений (35) – (37) по южному полушарию небесной сферы (таблицы 1, 2 и 3).

На основании результатов, представленных в таблицах 1, 2 и 3, можно сформулировать следующие свойства разложения уравнений (35)-(37):

- модель Огородникова-Милна полностью описывается набором гармоник, порядок которых по индексу k не превышает двух;

- для зонных каталогов значения коэффициентов разложения определяются, как правило, линейными комбинациями параметров модели Огородникова-Милна в отличие от случая задания поля скоростей на всей сфере (Витязев, Цветков, 2009);

- линейные комбинации одних и тех же параметров формируют различные коэффициенты разложения. Это обстоятельство можно использовать для восстановления параметров модели по различным коэффициентам разложения;

- в свою очередь, возможность определения параметров модели Огородникова-Милна по разным коэффициентам позволяет построить тесты соответствия модели наблюдательным данным;

- в методе ВСФ за исключением параметров жесткого вращения решение по радиальным функциям полностью решает задачу об определении параметров поля скоростей только по лучевым скоростям независимо от собственных движений звезд. Это свойство позволяет проверять совместность лучевых скоростей и собственных движений звезд относительно выбранной кинематической модели. Такая проверка весьма желательна, поскольку лучевые скорости и собственные движения звезд определяются принципиально разными методами и могут иметь свои систематические ошибки.

Таблица 1: Значения тороидальных коэффициентов разложения уравнений (35) и (36)

Коэффициент	Значение
t_{101}	$1.950\,\omega_3$
t_{110}	$1.791\,\omega_2 + 0.767\,\hat{u} - 0.256\,m^+_{13}$
t_{111}	$1.791\,\omega_1 - 0.767\,\hat{v} + 0.256\,m^+_{23}$
t_{201}	$0.457\,\omega_3$
t_{210}	$0.330\,\omega_2 + 0.330\,\hat{u} - 0.330\,m^+_{13}$
t_{211}	$0.330\,\omega_1 - 0.330\,\hat{v} + 0.330\,m^+_{23}$
t_{220}	$-0.216\,m^*_{11}$
t_{221}	$0.432\,m^+_{12}$
t_{301}	$0.277\,\omega_3$
t_{310}	$0.195\,\omega_2 + 0.195\,\hat{u} - 0.195\,m^+_{13}$
t_{311}	$0.195\,\omega_1 - 0.195\,\hat{v} + 0.195\,m^+_{23}$
t_{320}	$-0.108\,m^*_{11}$
t_{321}	$0.216\,m^+_{12}$
t_{401}	$0.189\,\omega_3$
t_{410}	$0.133\,\omega_2 + 0.133\,\hat{u} - 0.133\,m^+_{13}$
t_{411}	$0.133\,\omega_1 - 0.133\,\hat{v} + 0.133\,m^+_{23}$
t_{420}	$-0.070\,m^*_{11}$
t_{421}	$0.140\,m^+_{12}$
t_{501}	$0.148\,\omega_3$
t_{510}	$0.098\,\omega_2 + 0.098\,\hat{u} - 0.098\,m^+_{13}$
t_{511}	$0.098\,\omega_1 - 0.098\,\hat{v} + 0.098\,m^+_{23}$
t_{520}	$-0.050\,m^*_{11}$
t_{521}	$0.101\,m^+_{12}$
...	...

Метод ВСФ на практике

Будем считать, что в нашем распоряжении имеется зонный каталог звезд, для которых известны параллаксы, лучевые скорости, экваториальные координаты и компоненты собственного движения по прямому восхождению и склонению. Опишем последовательность шагов кинематического анализа поля скоростей звезд с помощью векторных сферических функций.

1. *Вычисление коэффициентов разложения $v_{nkp}, t_{nkp}, s_{nkp}$ поля скоростей по векторным сферическим функциям.* В принципе, вычисление этих коэффициентов можно проводить с помощью дискретных аналогов формул (15 – 17), однако такой подход требует предварительного выполнения пикселизации данных на всей сфере или ее части. Выполнив сравнение различных методов пикселизации, мы пришли к выводу, что при использовании достаточно больших выборок, насчитывающих десятки тысяч звезд, равномерно распределенных по сфере, можно выполнить определение искомых коэффициентов разложения поля скоростей по векторным сферическим функциям просто с помощью решения уравнений

$$V_r/r \ = \sum_{nkp} v_{nkp}\mathbf{V}_{nkp}(\alpha, \hat{\delta}), \tag{38}$$

$$\mathcal{K}\mu_\alpha\cos\delta\ = \sum_{nkp} t_{nkp}\mathbf{T}^\alpha_{nkp}(\alpha,\hat\delta) + \sum_{nkp} s_{nkp}\mathbf{S}^\alpha_{nkp}(\alpha,\hat\delta), \quad (39)$$

$$\mathcal{K}\mu_\delta\ = \sum_{nkp} t_{nkp}\mathbf{T}^\delta_{nkp}(\alpha,\hat\delta) + \sum_{nkp} s_{nkp}\mathbf{S}^\delta_{nkp}(\alpha,\hat\delta) \quad (40)$$

обычной процедурой метода наименьших квадратов, которая позволяет получать не только оценки искомых коэффициентов, но и их среднеквадратичные ошибки. Выбор общего числа членов разложения может быть определен из условия того, что остатки в компонентах поля скоростей после вычитания из них статистически значимых гармоник ведут себя как случайные числа (Броше, 1966).

2. *Определение параметров конкретной кинематической модели.* После того, как выполнено определение коэффициентов разложения $v_{nkp}\pm\sigma_{v_{nkp}}, t_{nkp}\pm\sigma_{t_{nkp}}, s_{nkp}\pm\sigma_{s_{nkp}}$, на основании таблиц 1 – 3 можно написать уравнения, связывающие коэффициенты разложения с искомыми параметрами модели. Число таких уравнений берется равным числу определяемых параметров. Таким образом можно получить несколько (теоретически бесконечно много) оценок параметров моделей. На практике целесообразно строить решения для младших членов разложения, так как для них коэффициенты разложения имеют не очень малые значения, что приводит потом к разумным оценкам среднеквадратичных ошибок определяемых параметров. В нашем методе мы будем использовать две оценки

Таблица 2: Значения сфероидальных коэффициентов разложения уравнений (35) и (36)

Коэффициент	Значение
s_{101}	$-1.950\,\hat w - 0.873\,x$
s_{110}	$-1.791\,\hat v + 0.767\,\omega_1 - 1.279\,m^+_{23}$
s_{111}	$-1.791\,\hat u - 0.767\,\omega_2 - 1.279\,m^+_{13}$
s_{201}	$-0.457\,\hat w + 0.274\,x$
s_{210}	$-0.330\,\hat v + 0.330\,\omega_1 + 0.727\,m^+_{23}$
s_{211}	$-0.330\,\hat u - 0.330\,\omega_2 + 0.727\,m^+_{13}$
s_{220}	$1.338\,m^+_{12}$
s_{221}	$0.669\,m^*_{11}$
s_{301}	$-0.277\,\hat w + 0.017\,x$
s_{310}	$-0.195\,\hat v + 0.195\,\omega_1 + 0.195\,m^+_{23}$
s_{311}	$-0.195\,\hat u - 0.195\,\omega_2 + 0.195\,m^+_{13}$
s_{320}	$0.464\,m^+_{12}$
s_{321}	$0.232\,m^*_{11}$
s_{401}	$-0.189\,\hat w + 0.007\,x$
s_{410}	$-0.133\,\hat v + 0.133\,\omega_1 + 0.133\,m^+_{23}$
s_{411}	$-0.133\,\hat u - 0.133\,\omega_2 + 0.133\,m^+_{13}$
s_{420}	$0.284\,m^+_{12}$
s_{421}	$0.147\,m^*_{11}$
s_{501}	$-0.139\,\hat w - 0.0036\,x$
s_{510}	$-0.098\,\hat v + 0.098\,\omega_1 + 0.098\,m^+_{23}$
s_{511}	$-0.098\,\hat u - 0.098\,\omega_2 + 0.098\,m^+_{13}$
s_{520}	$0.209\,m^+_{12}$
s_{521}	$0.105\,m^*_{11}$
...	...

параметров, называя их основным и альтернативными решениями.

Для получения основного и альтернативного решений по собственным движениям звезд будем использовать следующие наборы коэффициентов:

$$c_{main} = (s_{101}, s_{110}, s_{111}, s_{201}, s_{210}, s_{211}, s_{220}, s_{221}, t_{101}, t_{110}, t_{111})^T, \tag{41}$$

$$c_{alt} = (s_{101}, s_{110}, s_{111}, s_{301}, t_{201}, t_{110}, t_{111}, t_{210}, t_{211}, t_{220}, t_{221})^T. \tag{42}$$

Введем в рассмотрение одностолбцовую матрицу искомых кинематических параметров, определяемых по собственным движениям звезд:

$$p = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, m^+_{13}, m^+_{23}, m^+_{12}, m^*_{11}, m^*_{33})^T. \tag{43}$$

Для их определения в основном и альтернативном приближениях можно записать следующие матричные соотношения:

$$p_{main} = a\, c_{main}; \quad p_{alt} = b\, c_{alt}. \tag{44}$$

Входящие сюда матрицы a и b легко определяются на основании таблиц 1, 2.

Таблица 3: Значения коэффициентов разложения уравнения (37)

Коэффициент	Значение
v_{001}	$1.253\,\hat{w} + 2.507\,y$
v_{101}	$-0.724\,\hat{w} - 0.724\,x$
v_{110}	$-1.379\,\hat{v} - 1.235\,m^+_{23}$
v_{111}	$-1.379\,\hat{u} - 1.235\,m^+_{13}$
v_{201}	$0.187\,x$
v_{210}	$-0.323\,\hat{v} + 0.388\,m^+_{23}$
v_{211}	$-0.323\,\hat{u} + 0.388\,m^+_{13}$
v_{220}	$1.133\,m^+_{12}$
v_{221}	$0.566\,m^*_{11}$
v_{310}	$-0.196\,\hat{v} + 0.024\,m^+_{23}$
v_{311}	$-0.196\,\hat{u} + 0.024\,m^+_{13}$
v_{320}	$0.428\,m^+_{12}$
v_{321}	$0.214\,m^*_{11}$
v_{410}	$-0.134\,\hat{v} + 0.010\,m^+_{23}$
v_{411}	$-0.134\,\hat{u} + 0.010\,m^+_{13}$
v_{420}	$0.280\,m^+_{12}$
v_{421}	$0.140\,m^*_{11}$
v_{510}	$-0.099\,\hat{v} + 0.005\,m^+_{23}$
v_{511}	$-0.099\,\hat{u} + 0.005\,m^+_{13}$
v_{520}	$0.203\,m^+_{12}$
v_{521}	$0.101\,m^*_{11}$
...	...

Аналогично, для получения основного и альтернативного решений по лучевым скоростям звезд будем использовать следующие наборы коэффициентов:

$$v_{main} = (v_{001}, v_{101}, v_{110}, v_{111}, v_{201}, v_{210}, v_{211}, v_{220}, v_{221})^T, \tag{45}$$

$$v_{alt} = (v_{001}, v_{101}, v_{201}, v_{210}, v_{211}, v_{310}, v_{311}, v_{320}, v_{321})^T. \tag{46}$$

Теперь введем в рассмотрение одностолбцовую матрицу искомых кинематических параметров, определяемых по лучевым скоростям звезд:

$$r = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, m^+_{13}, m^+_{23}, m^+_{12}, m^+_{11}, m^+_{33}, m^+_{22})^T. \tag{47}$$

Для их определения в основном и альтернативном приближениях можно записать следующие матричные соотношения:

$$r_{main} = c\, v_{main}; \quad r_{alt} = d\, v_{alt}. \tag{48}$$

Входящие сюда матрицы c и d определяются по данным таблицы 3.

Вычисленные указанным способом значения параметров кинематической модели Огородникова-Милна относятся к экваториальной системе координат. Они могут быть переведены в галактическую систему с помощью соотношений (30), (32) и (33).

3. *Анализ внемодельных коэффициентов разложения.* Как следует из таблиц 1, 2 и 3, модель Огородникова-Милна полностью описывается коэффициентами разложения t_{npk}, s_{npk} до $k \leq 2$. Все остальные члены разложения со значимыми коэффициентами определяют систематические компоненты поля скоростей звезд, не входящие в стандартную модель. Установление физического смысла этих гармоник представляет собой отдельную задачу, сводящуюся, по существу, к построению новый кинематической модели.

Численные эксперименты

Для тестирования возможностей метода ВСФ мы провели численные эксперименты. В них использовались экваториальные координаты 27 557 звезд каталога Tycho-2 с отрицательными склонениями (звезды класса светимости III в диапазоне расстояний от 100 до 200 пк). Эта выборка обеспечила нам достаточно равномерное распределение звезд. Во всех экспериментах мы меняли собственные движения, лучевые скорости и параллаксы этих звезд, но не меняли их координаты.

Используя датчик случайных чисел (равномерное распределение), каждой звезде было приписано искусственное расстояние в диапазоне от 500 до 2000 пк. С помощью уравнений (35) – (37) для этих звезд были вычислены фиктивные собственные движения и лучевые скорости при значениях параметров модели, показанных в таблице 4. В галактической системе координат этим значениям соответствуют параметры модели Огородникова-Милна, показанные в той же таблице большими буквами. Тестирование проводилось в предположении о том, что эффекты движения Солнца соответствуют стандартным значениям модуля скорости и координат апекса в экваториальной системе координат $v = 20$ км/с, $A = 270°, D = 30°$. Для этих значений имеем компоненты скорости $u = 0, v = -17.3, w = 10$ км/с. В галактической системе им соответствуют компоненты $U = 10.3, V = 15.2, W = 8.0$ км/с.

Отметим, что вычисление модельных собственных движений и лучевых скоростей звезд производилось с помощью задаваемых величин m^*_{11}, x, y. Решение уравнений получалось для параметров $m^*_{11} = -12.47$, $m^*_{33} = -22.5$ в случае собственных движений и для параметров $m^+_{11} = -0.81$, $m^+_{33} = -10.48$, $m^+_{22} = 11.66$ в случае лучевых скоростей.

Таблица 4: Значения параметров модели Огородникова-Милна в км/с $\cdot$ кпк$^{-1}$, принятые для генерации каталога TEST в экваториальной системе координат (малые буквы) и в галактической системе координат (большие буквы)

ω_1	ω_2	ω_3	m^+_{13}	m^+_{23}	m^+_{12}	m^*_{11}	x	y
13.02	2.97	−6.84	−4.20	−6.56	−6.11	−12.47	−16.26	0
Ω_1	Ω_2	Ω_3	M^+_{11}	M^+_{12}	M^+_{13}	M^+_{22}	M^+_{23}	M^+_{33}
0	0	−15	0	15	0	0	0	0

Обычный путь выполнения кинематического анализа поля скоростей звезд – это прямое определение параметров модели Огородникова-Милна с помощью метода наименьших квадратов. В дальнейшем мы будем называть такой подход «Методом модели». Во всех наших экспериментах мы решали уравнения (38) – (40) относительно коэффициентов разложения поля скоростей по ВСФ, а также уравнения (35) – (37) относительно параметров модели Огородникова-Милна. Это делалось для сравнения нашего метода со стандартным «Методом модели».

Эксперимент 1. В этом эксперименте тестовый каталог TEST формировался путем добавления к модельным собственным движениям шумовой компоненты, соответствующей точности определения собственных движений на уровне 3 мсд/год. Результаты этого эксперимента показали, что в том случае, когда исходные данные отражают кинематические эффекты модели и содержат только шумовую компоненту, «Метод модели» и метод ВСФ восстанавливают заданные значения параметров модели практически одинаково.

Таблица 5: Эксперимент 1. Восстановление параметров модели Огородникова Милна по каталогу TEST «Методом модели» и методом векторных сферических функций – основное и альтернативное решения.

	Заданные значения	Метод модели	ВСФ – основное решение	альтернативное решение
$\hat{u}$	0	0.19 ± 0.27	0.18 ± 0.32	0.79 ± 0.53
$\hat{v}$	−17.3	-16.04 ± 0.27	-15.87 ± 0.32	-16.08 ± 0.53
$\hat{w}$	10	9.39 ± 0.22	9.36 ± 0.24	9.46 ± 0.82
ω_1	13.02	13.06 ± 0.24	13.19 ± 0.25	13.15 ± 0.36
ω_2	2.97	2.90 ± 0.24	2.84 ± 0.25	2.50 ± 0.36
ω_3	−6.84	-6.86 ± 0.12	-6.89 ± 0.12	-6.36 ± 0.55
m^+_{13}	−4.20	-4.32 ± 0.23	-4.28 ± 0.29	-4.94 ± 0.54
m^+_{23}	−6.56	-6.10 ± 0.23	-6.20 ± 0.29	-6.03 ± 0.54
m^+_{12}	−6.11	-5.82 ± 0.15	-5.89 ± 0.18	-5.57 ± 0.55
m^*_{11}	−12.47	-12.30 ± 0.30	-12.54 ± 0.35	-12.22 ± 1.11
m^*_{33}	−22.50	-22.81 ± 0.51	-22.87 ± 0.56	-22.95 ± 1.93

Остановимся теперь на некоторых свойствах метода ВСФ, которыми не обладает «Метод модели».

Эксперимент 2. В тестовый каталог, применявшийся в предыдущем эксперименте, в искусственные собственные движения вносились компоненты «систематического» шума вида $300\,\mathbf{T}_{551}$, $300\,\mathbf{S}_{551}$, не входящие в модель Огородникова-Милна. При использовании метода ВСФ сумма квадратов невязок вычисляется автоматически с учетом введенных внемодельных членов, а в «Методе модели» такой учет сделать нельзя. Это приводит к тому, что метод ВСФ не только обнаруживает внемодельные члены, но и позволяет устранить их влияние на среднеквадратичные ошибки определения параметров модели. В противоположность этому, «Метод модели» смешивает систематические шумы со случайными компонентами, что приводит к завышению оценок среднеквадратичных ошибок определяемых оценок параметров модели. В нашем эксперименте мы получили, что среднеквадратичные ошибки возросли примерно в 10 раз.

Следует отметить, что в «Методе модели» некоторые МНК-оценки сильно коррелированы. Так, абсолютные значения коэффициента корреляции между величинами $\hat{u}$ и ω_2, а также между $\hat{v}$ и ω_1 достигают 0.87, а между $\hat{u}$ и m_{13} и $\hat{v}$ и m_{23} – 0.75. По этой причине значения многих параметров, возвращаемых «Методом модели», сильно отличаются от заданных (в нашем случае оказалось $\omega_1 = 3.22 \pm 1.89$ вместо 13.02). В то же самое время, как это показали наши вычисления, метод ВСФ дает некоррелированные оценки в силу ортогональности использованных нами векторных сферических функций и надежно защищает искомые параметры от влияния сильных помех систематического характера.

Таблица 6: Эксперимент 2. Восстановление параметров модели Огородникова Милна по каталогу TEST «Методом модели» и методом векторных сферических функций – основное и альтернативное решения.

	Заданные значения	Метод модели	ВСФ – основное решение	альтернативное решение
$\hat{u}$	0	10.06 ± 2.12	0.18 ± 0.32	0.79 ± 0.53
$\hat{v}$	-17.3	-24.98 ± 2.16	-15.87 ± 0.32	-16.08 ± 0.53
$\hat{w}$	10	10.06 ± 1.77	9.36 ± 0.24	9.46 ± 0.82
ω_1	13.02	3.22 ± 1.89	13.19 ± 0.25	13.15 ± 0.36
ω_2	2.97	-3.45 ± 1.87	2.84 ± 0.25	2.50 ± 0.36
ω_3	-6.84	-6.44 ± 0.92	-6.89 ± 0.12	-6.36 ± 0.55
m^+_{13}	-4.20	-9.16 ± 1.83	-4.28 ± 0.29	-4.94 ± 0.54
m^+_{23}	-6.56	-2.33 ± 1.84	-6.20 ± 0.29	-6.03 ± 0.54
m^+_{12}	-6.11	5.81 ± 1.18	-5.89 ± 0.18	-5.57 ± 0.55
m^*_{11}	-12.47	-13.40 ± 2.34	-12.54 ± 0.35	-12.22 ± 1.11
m^*_{33}	-22.50	-26.24 ± 4.02	-22.87 ± 0.56	-22.95 ± 1.93

Таблица 7: Эксперимент 3. Восстановление параметров модели Огородникова Милна по каталогу TEST «Методом модели» и методом векторных сферических функций – основное и альтернативное решения.

	Заданные значения	Метод модели	ВСФ – основное решение	альтернативное решение
$\hat{u}$	0	0.11 ± 0.27	0.18 ± 0.32	0.79 ± 0.53
$\hat{v}$	-17.3	-16.03 ± 0.27	-15.79 ± 0.32	-16.12 ± 0.53
$\hat{w}$	10	9.21 ± 0.23	9.40 ± 0.24	9.65 ± 0.82
ω_1	13.02	13.14 ± 0.24	13.25 ± 0.25	13.14 ± 0.36
ω_2	2.97	2.66 ± 0.24	2.84 ± 0.25	2.50 ± 0.36
ω_3	-6.84	-6.89 ± 0.12	-6.89 ± 0.12	-6.40 ± 0.55
m^+_{13}	-4.20	-4.07 ± 0.23	-4.28 ± 0.29	-4.94 ± 0.54
m^+_{23}	-6.56	-6.14 ± 0.23	-6.26 ± 0.29	-5.96 ± 0.54
m^+_{12}	-6.11	-0.95 ± 0.15	0.23 ± 0.18	-13.67 ± 0.55
m^*_{11}	-12.47	-12.36 ± 0.30	-12.55 ± 0.35	-12.19 ± 1.11
m^*_{33}	-22.50	-22.71 ± 0.51	-22.97 ± 0.56	-23.37 ± 1.93

Эксперимент 3. В собственных движениях каталога TEST эффект деформации поля скоростей, описываемый параметром $m^+_{12} = -6.1$ был заменен на $-6.1\,\mathbf{T}_{221}$. Результаты этого эксперимента показаны в таблице 7. Оба наших метода – и «Метод модели», и метод ВСФ настроены на поиск параметра m^+_{12}, но в этой ситуации они ведут себя различно. «Метод модели» дает для заведомо нулевой величины статистически надежное значение $m^+_{12} = -0.95 \pm 0.15$, которому приходится просто верить. Очень интересным оказался результат восстановления параметров модели методом ВСФ. Здесь мы видим, что для параметра m^+_{12} основной и альтернативный варианты решений дают

различные оценки. Этот пример показывает полезное свойство альтернативного решения – в данном случае несовпадение основного и альтернативного решений говорит о том, что в исследуемых данных нет эффекта деформации поля скоростей в основной плоскости. Таким образом, метод ВСФ позволяет не только определять параметры кинематической модели, но и производить проверку соответствия модели наблюдательным данным.

Аналогичные численные эксперименты были проделаны и с каталогом искусственных лучевых скоростей. Результаты этих экспериментов оказались аналогичными. Подводя итог проделанным экспериментам, можно сказать, что для кинематического анализа собственных движений звезд, заданных на полусфере, метод векторных сферических функций обладает более широкими возможностями, чем «Метод модели». Эти возможности позволяют не только определять значения параметров заданной модели, но и тестировать реальные данные на их соответствие стандартным моделям. В противоположность «Методу модели», очень важным свойством метода ВСФ является возможность обнаружения тех статистически значимых гармоник разложения поля скоростей, которые не входят в стандартные модели.

Результаты по собственным движениям каталога TYCHO-2/Spectral Type

Мы провели определение коэффициентов сферического разложения по собственным движениям звезд южной полусферы каталога Tycho-2 Spectral Types, находящихся на различных расстояниях.

Для оценки спектрального параллакса звезды необходимо знать ее абсолютную и видимую звездные величины. Видимая звездная величина приведена в каталоге Tycho-2 с высокой степенью точности. Абсолютная звездная величина может быть найдена по спектру и классу светимости. Пользуясь этой методикой (подробно описанной в нашей работе (Попов, Витязев, Цветков, 2006)), мы вычислили спектральные параллаксы звезд, для которых в каталоге Tycho-2 Spectral Type приведены классы светимости. Всего таких звезд оказалось 137 406.

Таблица 8: Значения коэффициентов сферического разложения собственных движений для южной полусферы Tycho-2 Spectral Types

	100-200 пк	300-400 пк		100-200 пк	300-400 пк
t_{101}	-19.53 ± 2.24	-8.33 ± 1.56	s_{101}	2.78 ± 2.24	-5.12 ± 1.56
t_{110}	15.05 ± 2.35	9.58 ± 1.64	s_{110}	-0.35 ± 2.35	-2.19 ± 1.64
t_{111}	11.23 ± 2.34	4.44 ± 1.52	s_{111}	10.56 ± 2.34	4.54 ± 1.52
t_{201}	-1.94 ± 2.35	-6.54 ± 1.58	s_{201}	-6.40 ± 2.35	-9.69 ± 1.58
t_{210}	-1.05 ± 2.34	3.59 ± 1.54	s_{210}	-8.87 ± 2.34	-9.10 ± 1.54
t_{211}	-4.18 ± 2.35	-0.47 ± 1.59	s_{211}	-5.83 ± 2.35	-7.10 ± 1.59
t_{220}	6.12 ± 2.27	8.60 ± 1.57	s_{220}	-12.11 ± 2.27	-5.95 ± 1.57
t_{221}	-5.30 ± 2.25	-1.38 ± 1.55	s_{221}	-6.25 ± 2.25	-5.52 ± 1.55
t_{301}	-6.20 ± 2.40	-1.73 ± 1.59	s_{301}	-2.57 ± 2.40	-4.28 ± 1.59
t_{310}	2.65 ± 2.33	2.44 ± 1.51	s_{310}	0.37 ± 2.33	-0.03 ± 1.51
t_{311}	-1.89 ± 2.36	-2.51 ± 1.60	s_{311}	1.78 ± 2.36	0.67 ± 1.60
t_{320}	0.18 ± 2.31	5.65 ± 1.58	s_{320}	-3.08 ± 2.31	-3.52 ± 1.58
t_{321}	-1.57 ± 2.31	-1.56 ± 1.56	s_{321}	-6.41 ± 2.31	-4.35 ± 1.56
t_{330}	4.05 ± 2.22	2.56 ± 1.56	s_{330}	1.51 ± 2.22	3.34 ± 1.56
t_{331}	4.94 ± 2.22	2.11 ± 1.54	s_{331}	-2.07 ± 2.22	-6.42 ± 1.54

Мы использовали около десятка разных выборок, но здесь приводим результаты лишь двух выборок: 100-200 и 300-400 пк. Коэффициенты сферического разложения для южной полусферы Tycho-2 Spectral Types представлены в таблице 8. Значения параметров модели Огородникова-Милна, полученные методом векторных сферических функций, приведены в табл. 9.

Помимо этих выборок мы провели кинематический анализ собственных движений звезд глав-

Таблица 9: Значения параметров модели Огородникова-Милна в галактической системе координат

	100-200 пк		300-400 пк	
	Основное	Альтернативное	Основное	Альтернативное
$\hat{U}$	-15.18 ± 2.90	-16.22 ± 5.84	-16.69 ± 1.93	-10.68 ± 3.92
$\hat{V}$	-5.64 ± 2.66	-7.98 ± 6.73	2.63 ± 1.79	8.76 ± 4.48
$\hat{W}$	4.48 ± 2.92	13.76 ± 5.75	1.16 ± 1.97	5.52 ± 3.81
Ω_1	-4.70 ± 2.17	-12.13 ± 3.89	-1.74 ± 1.49	2.84 ± 2.62
Ω_2	-4.85 ± 1.81	-2.85 ± 4.46	-0.08 ± 1.22	-10.38 ± 3.01
Ω_3	-19.02 ± 2.19	-17.48 ± 3.84	-11.09 ± 1.44	-11.37 ± 2.58
M_{13}^{+}	-1.93 ± 2.21	2.12 ± 6.16	1.35 ± 1.50	3.75 ± 4.17
M_{23}^{+}	1.56 ± 2.50	-0.75 ± 7.30	1.81 ± 1.69	3.79 ± 4.89
M_{12}^{+}	17.89 ± 2.52	22.90 ± 7.52	16.82 ± 1.70	21.45 ± 5.04
M_{11}^{*}	-10.19 ± 5.13	-8.90 ± 11.46	-4.68 ± 3.43	24.61 ± 7.74
M_{33}^{*}	-1.51 ± 5.10	-22.84 ± 11.60	6.16 ± 3.46	2.21 ± 7.76

ной последовательности (класс светимости III) и красных гигантов (класс светимости V). В обоих случаях были выбраны звезды с удалением от Солнца более 100 пк. Коэффициенты разложения остаточных собственных движений по векторным сферическим функциям приводятся в табл. 10, а значения параметров модели Огородникова-Милна, вычисленные через указанные коэффициенты, – в табл. 11.

Перед проведением кинематического анализа собственных движений звезд с применением векторных сферических функций мы исключили эффекты солнечного движения, параметры которого предварительно определялись по используемым выборкам с учетом индивидуальных фотометрических расстояний. Значения этих параметров приведены в таблице 12. Полученные нами оценки компонентов скорости движения Солнца позволяют определить полную скорость Солнца, а также координаты апекса его движения. Эти значения хорошо согласуются по всем четырем выборкам. Несмотря на то, что перед выполнением кинематическим анализа эффекты движения Солнца относительно конкретных центроидов звезд были исключены, полученные численные значения коэффициентов t_{nkp} и s_{nkp} в некоторых случаях дали статистически надежные ненулевые значения для для величин $\hat{U}$,$\hat{V}$,$\hat{W}$ (см. таблицы 9 и 11). Тем не менее, нужно отметить, что это обстоятельство проявляется не для всех выборок. По всей видимости, оно является следствием низкой точности определения фотометрических параллаксов отдельных звезд, и не может считаться свидетельством реальных кинематических свойств рассмотренных выборок звезд.

Что касается кинематических параметров модели Огородникова-Милна, то для всех выборок звезд мы получили значимые значения параметров Оорта $A = M_{12}^{+}$, $B = M_{21}^{-} = \Omega_3$ и незначимые значения всех остальных параметров. Таким образом, мы можем сформулировать основной вывод: метод векторных сферических функций, примененный для кинематического анализа собственных движений звезд, расположенных только в южном полушарии экваториальной системы координат, показал, что основными эффектами в собственных движениях указанных звезд являются движение Солнца относительно звезд и плоское вращение Галактики. Значения этих параметров хорошо согласуются с многочисленными результатами анализа, полученными по всей сфере (Огородников, 1965), (Михалас, Бинни, 1981).

Таблица 10: Значения коэффициентов сферического разложения собственных движений звезд III и V классов светимости для южной полусферы каталога Tycho-2 Spectral Types

	III, r>100 пк	V, r>100 пк		III, r>100 пк	V, r>100 пк
t_{101}	-6.53 ± 1.11	-23.89 ± 1.40	s_{101}	-10.07 ± 1.11	2.08 ± 1.40
t_{110}	15.52 ± 1.17	12.59 ± 1.49	s_{110}	16.10 ± 1.17	-1.55 ± 1.49
t_{111}	12.22 ± 1.12	13.95 ± 1.43	s_{111}	3.37 ± 1.12	10.10 ± 1.43
t_{201}	-5.49 ± 1.14	-2.85 ± 1.46	s_{201}	-11.09 ± 1.13	-4.49 ± 1.46
t_{210}	1.84 ± 1.13	-1.06 ± 1.44	s_{210}	-7.88 ± 1.13	-6.84 ± 1.44
t_{211}	2.23 ± 1.16	-2.34 ± 1.46	s_{211}	-11.06 ± 1.16	-6.35 ± 1.46
t_{220}	11.74 ± 1.12	4.08 ± 1.42	s_{220}	-6.51 ± 1.12	-14.08 ± 11.42
t_{221}	-0.87 ± 1.11	-6.97 ± 1.40	s_{221}	-3.81 ± 1.11	-6.90 ± 1.40
t_{301}	0.17 ± 1.16	-6.26 ± 1.48	s_{301}	-4.43 ± 1.16	-0.59 ± 1.48
t_{310}	2.20 ± 1.11	0.41 ± 1.42	s_{310}	-0.93 ± 1.12	-0.67 ± 1.42
t_{311}	-1.17 ± 1.16	-1.97 ± 1.47	s_{311}	0.07 ± 1.16	1.93 ± 1.47
t_{320}	4.42 ± 1.13	0.63 ± 1.44	s_{320}	-4.54 ± 1.13	-2.59 ± 1.44
t_{321}	-3.86 ± 1.12	1.28 ± 1.43	s_{321}	-3.77 ± 1.12	-4.99 ± 1.43
t_{330}	0.57 ± 1.11	3.95 ± 1.39	s_{330}	3.25 ± 1.11	-1.47 ± 1.39
t_{331}	4.37 ± 1.10	1.36 ± 1.38	s_{331}	-3.45 ± 1.10	-1.34 ± 1.38

Таблица 11: Значения параметров модели Огородникова-Милна в галактической системе координат

	III, r>100 пк		V, r>100 пк	
	Основное	Альтернативное	Основное	Альтернативное
$\hat{U}$	-11.30 ± 1.41	-2.97 ± 2.86	-14.15 ± 1.79	-11.69 ± 3.63
$\hat{V}$	9.38 ± 1.30	10.11 ± 3.27	-5.70 ± 1.65	-11.20 ± 4.17
$\hat{W}$	1.87 ± 1.43	13.19 ± 2.79	2.21 ± 1.82	9.84 ± 3.55
Ω_1	-3.80 ± 1.08	-4.31 ± 1.89	-1.66 ± 1.37	-9.32 ± 2.42
Ω_2	0.49 ± 0.89	-11.35 ± 2.17	-4.98 ± 1.12	-3.27 ± 2.78
Ω_3	-12.20 ± 1.06	-12.34 ± 1.87	-20.47 ± 1.35	-18.21 ± 2.39
M_{13}^{+}	0.32 ± 1.08	7.45 ± 3.01	-4.96 ± 1.38	-6.06 ± 3.83
M_{23}^{+}	3.25 ± 1.22	7.29 ± 3.55	2.50 ± 1.55	-0.19 ± 4.52
M_{12}^{+}	18.73 ± 1.23	21.61 ± 3.66	16.44 ± 1.56	15.68 ± 4.66
M_{11}^{*}	-7.13 ± 2.50	23.74 ± 5.62	-8.13 ± 3.18	-13.93 ± 7.12
M_{33}^{*}	11.06 ± 2.51	-12.56 ± 5.65	-2.09 ± 3.18	-25.43 ± 7.18

Таблица 12: Значения компонентов V_x, V_y, V_z, и модуля скорости V движения Солнца (км/с), а также координат апекса движения Солнца (град.) в экваториальной системе координат, определенные для звезд различных расстояний и для звезд III и V классов светимости.

	100-200 пк	300-400 пк	III, r>100 пк	V, r>100 пк
V_x	1.21 ± 0.15	2.35 ± 0.23	0.98 ± 0.11	3.00 ± 0.16
V_y	-14.81 ± 0.15	-22.18 ± 0.24	-15.37 ± 0.11	-21.32 ± 0.17
V_z	7.82 ± 0.15	7.96 ± 0.25	7.24 ± 0.11	10.30 ± 0.17
V	16.79 ± 0.15	23.68 ± 0.23	17.02 ± 0.11	23.88 ± 0.17
A	274.67 ± 0.58	276.05 ± 0.59	273.65 ± 0.41	278.22 ± 0.45
D	27.76 ± 0.51	19.60 ± 0.56	25.17 ± 0.37	25.56 ± 0.41

Заключение

Основным результатом данной работы можно считать построение метода векторных сферических функций для проведения кинематических исследований собственных движений и лучевых скоростей звезд зонных каталогов. С этой целью нами была построена система ВСФ, обладающих свойствами полноты и ортогональности в заданной зоне склонений. Обычно кинематический анализ при наличии данных, заданных на всей сфере, проводят в галактической системе координат. Зонные каталоги, как правило, строятся в экваториальной системе координат. Учитывая это обстоятельство, нами был разработан прием, позволяющий по проведенному разложению собственных движения и лучевых скоростей звезд в сферической зоне экваториальной системы координат, получать параметры кинематической модели Огородникова-Милна в галактической системе координат.

Предложенный метод кинематического анализа поля скоростей, основанный на использовании векторных сферических функций, обладает следующими преимуществами перед непосредственным оцениванием параметров кинематической модели методом наименьших квадратов:

1. метод ВСФ выявляет любые систематические компоненты поля скоростей звезд независимо от кинематической модели;

2. метод ВСФ позволяет определить параметры любой кинематической модели;

3. в отличие от обычной процедуры оценивания параметров кинематической модели метод ВСФ позволяет получить, как минимум, две оценки искомых параметров (основную и альтернативную);

4. сравнение основного и альтернативного решений позволяет провести проверку соответствия модели наблюдательным данным;

5. для представления стандартной модели по системе векторных сферических функций, определенных на южном или северном полушарии небесной сферы, требуются лишь функции с индексами $k \leq 2$. Все остальные функции могут быть использованы для поиска систематических компонентов, не входящих в модель Огородникова-Милна.

Все эти свойства были подтверждены численными экспериментами, после чего мы применили метод векторных сферических функций для анализа собственных движений звезд каталога Tycho-2. Было показано, что при использовании наблюдательных данных, содержащихся только в южном полушарии небесной сферы, новый метод дает оценки кинематических параметров, находящиеся в хорошем согласии с классическими результатами кинематического анализа собственных движений звезд, выполненных по всей сфере (Огородников, 1965), (Михалас, Бинни, 1981). Все это говорит о том, что векторные сферические функции, определенные на различных зонах небесной сферы, могут с успехом применяться и в других задачах, например, для изучения локальных параметров вращения Галактики в узких зонах галактических широт, а также в северном и южном галактических полушариях.

Список литературы

European Space Agency, ESA, v.1. (1997)

GAIA, http://www.rssd.esa.int/Gaia

Г.Арфкен Математические методы в физике, стр. 493-498, М.: Атомиздат (1970)

Броше П. (Brosche P.), Veroff, des Astron. Rechen-Inst. Heidelberg, N 17, pp. 1–27 (1966)

Витязев В.В., Шуксто А.К. Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, Вып. 1. С. 116-124 (2005)

Витязев В.В., Цветков А.С.(Vityazev V. , Tsvetkov A.), Spherical Functions, Astron. Let., 35-2, p. 100-113 (2009).

Клубе С.В.М. (Clube S. V. M.), Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 159, N 3, pp. 289–314, (1972).

Макаров В.В., Мерфи Д.В. (Makarov V.V., Murphy D.W.), Astron. J., **134**, 367-375 (2007).

Михалас Д., Бинни Дж. (Michalas D., Binney J.). Galactic Astronomy, – W.H.Freeman and Co, San Francisco, 597 p. (1981)

К.Ф.Огородников, Динамика звездных систем, М.: Физматгиз, (1965).

Попов А.В., Витязев В. В., Цветков А.С. Вестн. С.-Петербургского ун-та. Сер.1, вып. 4, (2006).

Райт Е.Л. (Wright E.L. et al.), Astron. J., 125, 359, (2003).

Хег Е. и др., (Hog E. E. et al., Astronomy and Astrophysics, Vol. 355, pp. L27-L30. (2000).