

# Кинематический анализ собственных движений звезд с помощью векторных сферических функций

В.В.Витязев\*, А.С.Цветков\*\*

3 марта 2008 г.

*Санкт-Петербургский Государственный университет*

Статья посвящена применению векторных сферических функций (далее ВСФ) к задачам звездной кинематики. Использование ВСФ позволяет выявить все систематические составляющие в поле скоростей звезд, не привязываясь к конкретной физической модели. Сопоставление коэффициентов теоретического разложения уравнений определенной кинематической модели с наблюдательными данными может дать заключение об адекватности модели наблюдениям и выявить наличие систематических компонент, не описываемых данной моделью. Особенно хорошо аппарат векторных сферических функций подходит для анализа нынешних и будущих каталогов, содержащих все три компоненты вектора скорости - собственные движения по обеим координатам и лучевую скорость. В данной работе показано, что в собственных движениях звезд каталога Hipparcos имеются систематические компоненты, которые не могут быть интерпретированы в рамках линейной модели Огородникова-Милна. Этот же результат подтверждается и анализом лучевых скоростей этих звезд.

**Ключевые слова:** фундаментальная астрономия, астрометрия, звездная кинематика, структура Галактики, Hipparcos

**PACS codes:** 95.10.Jk, 95.75.Pq, 95.80.+p, 98.10.+z, 98.35.-a

---

\* e-mail <vityazev@bk.ru> \*\* e-mail <tsvetkov@AC1072.spb.edu>

## Содержание

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение                                                                                                                          | 3  |
| Скалярные сферические функции                                                                                                     | 4  |
| Векторные сферические функции                                                                                                     | 4  |
| Представление поля скоростей звезд по системе ВСФ                                                                                 | 6  |
| Разложение уравнений Огородникова-Милна по системе ВСФ                                                                            | 7  |
| Использование метода ВСФ                                                                                                          | 10 |
| Численные эксперименты                                                                                                            | 13 |
| Получение коэффициентов $t_{nkp}$ и $s_{nkp}$ по собственным движениям звезд каталога Hipparcos                                   | 22 |
| Получение коэффициентов $t_{nkp}$ и $s_{nkp}$ по собственным движениям звезд каталога Hipparcos на регулярной сетке (каталог Н-4) | 24 |
| Получение коэффициентов $v_{nkp}$ по лучевым скоростям звезд                                                                      | 24 |
| Получение коэффициентов $v_{nkp}$ по лучевым скоростям звезд на регулярной сетке (каталог OSACA-2)                                | 25 |
| Интерпретация $t_{211}$ , $s_{310}$ и $v_{310}$ в рамках обобщенной модели Оорта                                                  | 25 |
| Заключение                                                                                                                        | 26 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1                                                                                                                      | 28 |
| Приложение 2                                                                                                                      | 30 |

## Введение

Появление массовых звездных каталогов собственных движений Hipparcos, Tycho-2, USAC-2, USNO дает качественно новый материал для исследования кинематики звезд Галактики. Перспективы измерения высокоточных параллаксов, собственных движения и лучевых скоростей для многих сотен миллионов звезд, запланированные в проекте GAIA [1], являются побудительным мотивом для разработки новых методов кинематического анализа звезд.

Обычно изучение кинематики звезд основывается на получении методом наименьших квадратов оценок параметров моделей, описывающих главные компоненты поля скоростей звезд. Такой подход методически безупречен при условии полноты используемых моделей. В реальности мы никогда не можем включить в модель все явления, связанные с кинематикой звезд, то есть сделать модель полной с физической точки зрения. Существует достаточно большое число альтернативных более или менее сложных моделей поля скоростей звезд, однако сделать выбор между ними – непростая задача. Для ее решения можно предложить другой подход к построению моделей, основанный на представлении изучаемых данных с помощью полных ортогональных систем функций [2]–[7]. Такие модели являются полными (с математической точки зрения), то есть вся имеющаяся в наблюдательных данных информация может быть описана с помощью коэффициентов их разложения по функциям выбранного базиса.

Таким образом, формальные модели поля скоростей звезд позволяют сперва определить наличие систематических составляющих в собственных движениях и лучевых скоростях, и лишь затем приступить к выбору конкретной физической модели. Кроме того, сравнение теоретического разложения уравнений физической модели по ВСФ с коэффициентами, полученными по какой-либо выборке звезд, позволяет сделать вывод об адекватности принятой модели наблюдениям. В тех случаях, когда удаётся получить соответствия между параметрами физических и математических моделей, метод ортогональных представлений способен дать оценку физических параметров моделей, защищённых от искажений (смещений) со стороны явлений, не включённых в модель. По-видимому, впервые такой подход, был проведен в работе авторов [4], [5], но с использованием обычных сферических функций, а не ВСФ.

В связи с этим нам представляется целесообразным применить для изучения кинематики звезд метод разложения их поля скоростей по системе трехмерных векторных сферических функций. Отметим, что в астрометрических задачах, связанных со сравнением каталогов, двумерные векторные функции впервые применили Миньяр и Морандо [8] для представления систематических разностей каталогов HIPPARCOS и FK5. В работах Витязева и Шуксто [9] этот подход был распространен на кинематический анализ только собственных движений звезд без учета их лучевых скоростей. Целью настоящей статьи является использование трехмерных векторных сферических функций для изучения полного поля скоростей звезд, компо-

менты которого определяются измерениями как собственных движений, так и лучевых скоростей звезд.

## Скалярные сферические функции

Сферические функции широко используются в различных областях математики и физики, их определение можно найти во многих источниках, например в [10]. В нашей работе для них мы будем использовать следующее представление:

$$K_{nkp}(l, b) = R_{nk} \begin{cases} P_{n,0}(b), & k = 0, \quad p = 1; \\ P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, \quad p = 0; \\ P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, \quad p = 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$R_{nk} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k > 0; \\ 1, & k = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В формуле (1) через  $l$  и  $b$  обозначены соответственно долгота и широта точки на сфере, ( $0 \leq l \leq 2\pi$ ;  $-\pi/2 \leq b \leq \pi/2$ ); через  $P_{nk}(b)$  — полиномы Лежандра (при  $k = 0$ ) и присоединенные функции Лежандра (при  $k > 0$ ), которые можно вычислить с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} P_{nk}(b) &= \sin b \frac{2n-1}{n-k} P_{n-1,k}(b) - \frac{n+k-1}{n-k} P_{n-2,k}(b), & k=0, 1, \dots \\ & & n=k+1, k+2, \dots \\ P_{kk}(b) &= \frac{(2k)!}{2^k k!} \cos^k b \\ P_{k+1,k}(b) &= \frac{(2k+2)!}{2^{k+1} (k+1)!} \cos^k b \sin b. \end{aligned} \quad (3)$$

## Векторные сферические функции

Рассмотрим в касательной плоскости к сфере систему взаимно ортогональных ортов  $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$  соответственно в направлениях изменения долготы, широты и луча зрения. Используя определения векторных сферических функций, данные в [10] или [11], введем радиальные  $\mathbf{V}_{nkp}$ , тороидальные  $\mathbf{T}_{nkp}$  и сфероидальные  $\mathbf{S}_{nkp}$  векторные сферические функции посредством следующих соотношений:

$$\mathbf{V}_{nkp}(l, b) = K_{nkp}(l, b) \mathbf{e}_r. \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_{nkp} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left( \frac{\partial K_{nkp}(l, b)}{\partial b} \mathbf{e}_l - \frac{1}{\cos b} \frac{\partial K_{nkp}(l, b)}{\partial l} \mathbf{e}_b \right), \quad (5)$$

$$\mathbf{S}_{nkp} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left( \frac{1}{\cos b} \frac{\partial K_{nkp}(l, b)}{\partial l} \mathbf{e}_l + \frac{\partial K_{nkp}(l, b)}{\partial b} \mathbf{e}_b \right). \quad (6)$$

Для краткости обозначим компоненты при единичном векторе  $\mathbf{e}_l$  как  $T_{nkp}^l$  и  $S_{nkp}^l$ , а при единичном векторе  $\mathbf{e}_l$  – соответственно  $T_{nkp}^b$  и  $S_{nkp}^b$ :

$$\mathbf{T}_{nkp} = T_{nkp}^l \mathbf{e}_l + T_{nkp}^b \mathbf{e}_b, \quad (7)$$

$$\mathbf{S}_{nkp} = S_{nkp}^l \mathbf{e}_l + S_{nkp}^b \mathbf{e}_b. \quad (8)$$

Сами компоненты при этом записываются следующим образом:

$$T_{nkp}^l = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} P_{n,1}(b), & k=0, p=1, \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \sin kl, & k \neq 0, p=0, \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \cos kl, & k \neq 0, p=1; \end{cases} \quad (9)$$

$$T_{nkp}^b = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} 0, & k \neq 0, p=1, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, p=0, \\ +\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, p=1; \end{cases} \quad (11)$$

$$S_{nkp}^l = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} 0, & k=0, p=1, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, p=0, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, p=1; \end{cases} \quad (13)$$

$$S_{nkp}^b = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} P_{n,1}(b), & k=0, p=1; \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \sin kl, & k \neq 0, p=0, \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \cos kl, & k \neq 0, p=1. \end{cases} \quad (15)$$

Для удобства часто вводят линейную нумерацию функций  $\mathbf{V}_{nkp}$ ,  $\mathbf{T}_{nkp}$  и  $\mathbf{S}_{nkp}$  одним индексом  $j$ , где

$$j = n^2 + 2k + p - 1. \quad (16)$$

Введенные функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\iint_{\Omega} (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j) d\omega = \iint_{\Omega} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = \iint_{\Omega} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \quad (17)$$

$$\iint_{\Omega} (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = \iint_{\Omega} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{S}_j) d\omega = \iint_{\Omega} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (18)$$

Другими словами, набор функций  $\mathbf{V}_{nkp}$ ,  $\mathbf{T}_{nkp}$ ,  $\mathbf{S}_{nkp}$  образуют на сфере ортонормированную систему функций.

Для наглядности мы привели вид функций  $T_5$  и  $S_5$  на рис. 1 и ??S5).

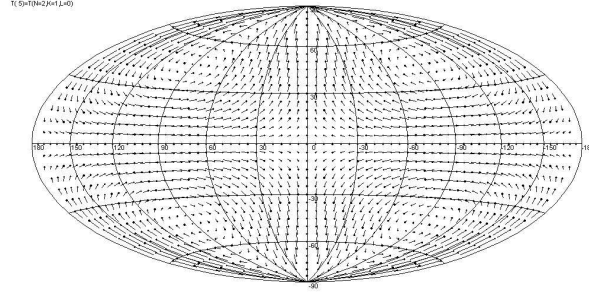


Рис. 1: Графическое представление векторной сферической функции  $T_{210}$

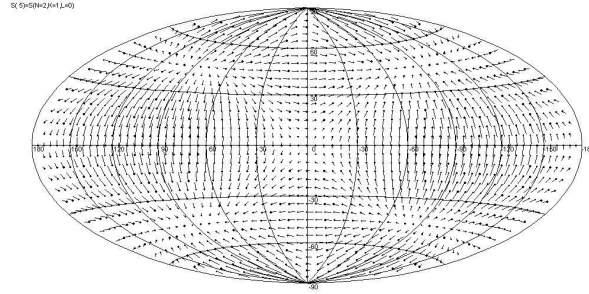


Рис. 2: Графическое представление векторной сферической функции  $S_{210}$

## Представление поля скоростей звезд по системе ВСФ

Рассмотрим реальное поле скоростей звезд на небесной сфере:

$$\mathbf{U}(l, b) = V_r/r \mathbf{e}_r + \mathcal{K}\mu_l \cos b \mathbf{e}_l + \mathcal{K}\mu_b \mathbf{e}_b, \quad (19)$$

в котором  $V_r$  – лучевая скорость,  $\mu_l, \mu_b$  – компоненты собственного движения звезд по галактическим долготам и широтам,  $r$  – расстояние до звезды,  $\mathcal{K} = 4.738$  – множитель перевода размерности собственных движений звезд мсд/год в км/с · кпс<sup>-1</sup>.

Используя систему определенных выше векторных сферических функций, мы можем разложить поле скоростей следующим образом:

$$\mathbf{U}(l, b) = \sum_{nkp} v_{nkp} \mathbf{V}_{nkp} + \sum_{nkp} t_{nkp} \mathbf{T}_{nkp} + \sum_{nkp} s_{nkp} \mathbf{S}_{nkp}, \quad (20)$$

где в силу ортонормированности базиса коэффициенты разложения  $v_{nkp}$ ,  $t_{nkp}$  и  $s_{nkp}$  вычисляются по формулам:

$$v_{nkp} = \iint_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}_{nkp}) d\omega = \int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} V_r(l, b)/r V_{nkp} \cos b db, \quad (21)$$

$$t_{nkp} = \iint_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{T}_{nkp}) d\omega = \int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\mathcal{K}\mu_l \cos b T_{nkp}^l + \mathcal{K}\mu_b T_{nkp}^b) \cos b db, \quad (22)$$

$$s_{nkp} = \iint_{\Omega} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}_{nkp}) d\omega = \int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\mathcal{K}\mu_l \cos b S_{nkp}^l + \mathcal{K}\mu_b S_{nkp}^b) \cos b db. \quad (23)$$

## Разложение уравнений Огородникова-Милна по системе ВСФ

При анализе собственных движений звезд часто используют уравнения модели Огородникова-Милна [13]. В этой модели поле скоростей звезд представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \Omega \times \mathbf{r} + \mathbf{M}^+ \times \mathbf{r}, \quad (24)$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость звезды,  $\mathbf{V}_0$  – влияние поступательного движения Солнца,  $\Omega$  – угловая скорость твердотельного вращения звездной системы,  $\mathbf{M}^+$  – симметричный тензор деформации поля скоростей.

Модель Огородникова-Милна содержит 12 параметров:

$U, V, W$  – компоненты вектора скорости поступательного движения Солнца  $\mathbf{V}_0$  относительно звезд;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – компоненты вектора твердотельного вращения  $\Omega$ ;

$M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$  – параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие сжатие-растяжение поля скоростей вдоль главных галактических осей;

$M_{12}^+, M_{13}^+, M_{23}^+$  – параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

Спроектировав уравнение (24) на орты галактической системы координат мы получим:

$$\begin{aligned} V_r/r = & - U/r \cos l \cos b - V/r \sin l \cos b - W/r \sin b + \\ & + M_{13}^+ \sin 2b \cos l + M_{23}^+ \sin 2b \sin l + M_{12}^+ \cos^2 b \sin 2l + \\ & + M_{11}^+ \cos^2 b \cos^2 l + M_{22}^+ \cos^2 b \sin^2 l + M_{33}^+ \sin^2 b, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}\mu_l \cos b = & \quad U/r \sin l - V/r \cos l - \omega_1 \sin b \cos l - \omega_2 \sin b \sin l + \omega_3 \cos b - \\
& - M_{13}^+ \sin b \sin l + M_{23}^+ \sin b \cos l + M_{12}^+ \cos b \cos 2l - \quad (26) \\
& - \frac{1}{2} M_{11}^+ \cos b \sin 2l + \frac{1}{2} M_{22}^+ \cos b \sin 2l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}\mu_b = & \quad U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - W/r \cos b + \omega_1 \sin l - \omega_2 \cos l - \\
& - \frac{1}{2} M_{12}^+ \sin 2b \sin 2l + M_{13}^+ \cos 2b \cos l + M_{23}^+ \cos 2b \sin l - \quad (27) \\
& - \frac{1}{2} M_{11}^+ \sin 2b \cos^2 l - \frac{1}{2} M_{22}^+ \sin 2b \sin^2 l + \frac{1}{2} M_{33}^+ \sin 2b.
\end{aligned}$$

В формулах (26) и (27) имеется линейная зависимость между коэффициентами  $M_{11}^+$ ,  $M_{22}^+$ ,  $M_{33}^+$ , поэтому при анализе собственных движений звезд обычно вводят замены  $M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+$  и  $M_{33}^* = M_{33}^+ - M_{22}^+$ .

Произведем разложение уравнений (25-27) по ВСФ с целью выяснить, за какие гармоники в разложении собственных движений звезд отвечают отдельные параметры этой модели. При этом следует иметь в виду то, что компоненты движения Солнца входят в уравнения (25) и (27) с множителем  $1/r$ . Это означает, что при использовании ВСФ эффекты движения Солнца должны быть исключены. В противном случае решение имеет смысл лишь для звезд, находящихся на приблизительно одинаковом расстоянии от Солнца, при этом мы сможем определить параметры движения Солнца лишь с точностью до множителя  $1/\langle r \rangle$ . Результаты теоретического разложения правых частей уравнений (25-27) представлены в таблице 1.

В упрощенной форме модели Огородникова-Милна, которую обычно называют моделью Оорта-Линблада [14], полагается, что вращение звездной системы происходит строго в галактической плоскости, т.е.  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны нулю; не рассматривается сжатие-растяжение вдоль осей, а деформация существует только в плоскости Галактики и описывается параметром Оорта  $A = M_{12}$ . Соответственно с этим уменьшится число коэффициентов разложения.

Решение обратной задачи: определение значения параметров модели Огородникова-Милна через коэффициенты разложения лучевых скоростей и собственных движений звезд по векторным сферическим функциям даёт таблица 2.

На основании результатов, представленных в таблице 1, можно сформулировать следующие свойства разложения уравнений (25-27):

- модель Огородникова-Милна полностью описывается набором гармоник, порядок которых по индексу  $n$  не превышает двух;
- солнечные компоненты определяются (с точностью до множителя среднего расстояния до звезд) по радиальным и сфероидальным коэффициентам с индексами 101, 110, 111 независимым образом по лучевым скоростям и собственным движениям звезд;



Таблица 1: Теоретические значения коэффициентов векторного сферического разложения уравнений Огородникова-Милна

| Коэффициент | Значение                                         |
|-------------|--------------------------------------------------|
| $v_{001}$   | $1.18 M_{11}^+ + 1.18 M_{22}^+ + 1.18 M_{33}^+$  |
| $v_{101}$   | $-2.05 W/\langle r \rangle$                      |
| $v_{110}$   | $-2.05 V/\langle r \rangle$                      |
| $v_{111}$   | $-2.05 U/\langle r \rangle$                      |
| $v_{201}$   | $-0.53 M_{11}^+ - 0.53 M_{22}^+ + 1.06 M_{33}^+$ |
| $v_{210}$   | $1.83 M_{23}^+$                                  |
| $v_{211}$   | $1.83 M_{13}^+$                                  |
| $v_{220}$   | $1.83 M_{12}^+$                                  |
| $v_{221}$   | $0.92 M_{11}^+ - 0.92 M_{22}^+$                  |
| $t_{101}$   | $2.89 \omega_3$                                  |
| $t_{110}$   | $2.89 \omega_2$                                  |
| $t_{111}$   | $2.89 \omega_1$                                  |
| $s_{101}$   | $-2.89 W/\langle r \rangle$                      |
| $s_{110}$   | $-2.89 V/\langle r \rangle$                      |
| $s_{111}$   | $-2.89 U/\langle r \rangle$                      |
| $s_{201}$   | $-0.65 M_{11}^+ - 0.65 M_{22}^+ + 1.29 M_{33}^+$ |
| $s_{210}$   | $2.24 M_{23}^+$                                  |
| $s_{211}$   | $2.24 M_{13}^+$                                  |
| $s_{220}$   | $2.24 M_{12}^+$                                  |
| $s_{221}$   | $1.12 M_{11}^+ - 1.12 M_{22}^+$                  |

- параметры деформации поля скоростей  $M_{23}^+$ ,  $M_{13}^+$ ,  $M_{12}^+$  также определяются независимо по лучевым скоростям и собственным движениям звезд по радиальным и сфероидальным коэффициентам с индексами 210, 211, 220;
- параметры сжатия-растяжения  $M_{11}^+$ ,  $M_{22}^+$ ,  $M_{33}^+$  полностью определяются по лучевым скоростям звезд через радиальные коэффициенты с индексами 001, 201, 221;
- секториальные коэффициенты с индексами 201, 221 позволяют определить параметры сжатия-растяжения с точностью до постоянной (обычно полагают  $M_{22}^+ = 0$  ([17]));
- компоненты скорости твердотельного вращения анализируемой выборки звезд  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  определяются только по тороидальным коэффициентам с индексами 111, 110, 101;
- в методе ВСФ за исключением параметров жесткого вращения решение по радиальным функциям полностью решает задачу об определении параметров поля скоростей только по лучевым скоростям

Таблица 2: Связи параметров модели Огородникова-Милна с коэффициентами разложения лучевых скоростей и собственных движений звезд по векторным сферическим функциям

| Параметр              | Расчетная формула                               |
|-----------------------|-------------------------------------------------|
| $W/\langle r \rangle$ | $-0.488 v_{101}$                                |
| $V/\langle r \rangle$ | $-0.488 v_{110}$                                |
| $U/\langle r \rangle$ | $-0.488 v_{111}$                                |
| $M_{11}^+$            | $0.282 v_{001} - 0.314 v_{201} + 0.543 v_{221}$ |
| $M_{22}^+$            | $0.282 v_{001} - 0.314 v_{201} - 0.543 v_{221}$ |
| $M_{33}^+$            | $0.282 v_{001} + 0.629 v_{201}$                 |
| $M_{23}^+$            | $0.546 v_{210}$                                 |
| $M_{13}^+$            | $0.546 v_{211}$                                 |
| $M_{12}^+$            | $0.546 v_{220}$                                 |
| $\omega_3$            | $0.346 t_{101}$                                 |
| $\omega_2$            | $0.346 t_{110}$                                 |
| $\omega_1$            | $0.346 t_{111}$                                 |
| $W/\langle r \rangle$ | $-0.346 s_{101}$                                |
| $V/\langle r \rangle$ | $-0.346 s_{110}$                                |
| $U/\langle r \rangle$ | $-0.346 s_{111}$                                |
| $M_{11}^+ - M_{22}^+$ | $0.893 s_{221}$                                 |
| $M_{33}^+ - M_{22}^+$ | $0.769 s_{201} + 0.446 s_{221}$                 |
| $M_{23}^+$            | $0.446 s_{210}$                                 |
| $M_{13}^+$            | $0.446 s_{211}$                                 |
| $M_{12}^+$            | $0.446 s_{220}$                                 |

независимо от собственных движений звезд. Это свойство позволяет проверять совместность лучевых скоростей и собственных движений звезд относительно выбранной кинематической модели. Такая проверка весьма желательна, поскольку лучевые скорости и собственные движения звезд определяются принципиально разными методами и могут иметь свои систематические ошибки.

## Использование метода ВСФ

Будем считать, что в нашем распоряжении имеется каталог звезд, для которых известны координаты, лучевые скорости и компоненты собственного движения по галактической долготе и широте. Знание параллаксов звезд желательно для исключения эффектов движения Солнца и для формирования выборок звезд по расстоянию.

Практическая реализация метода ВСФ состоит из следующих шагов:

1. *Регуляризация координатной сетки*

Непосредственное использование формул (21)- (23) для определения

коэффициентов векторного сферического разложения является нецелесообразным, так как из-за неравномерного распределения звезд по небесной сфере нарушается ортогональность базисных функций. Использование метода предварительной ортогонализации [2] приводит по сути к замене одной системы базисных функций на другую, что приводит к затруднениям в анализе результатов.

Возможно провести определение искомых коэффициентов разложения обычным методом наименьших квадратов. При этом в соответствии со спецификой метода ВСФ нужно получить отдельное решение уравнения

$$V_r(l, b)/r = \sum_j v_j V_j, \quad (28)$$

и совместное решение уравнений

$$\mathcal{K}\mu_l \cos b = \sum_j t_j T_j^l + \sum_j s_j S_j^l, \quad (29)$$

$$\mathcal{K}\mu_b = \sum_j t_j T_j^b + \sum_j s_j S_j^b. \quad (30)$$

Однако и в этом случае мы натолкнулись на определенные сложности. Неравномерность распределения звезд приводит к возникновению взаимных корреляций, что в конечном итоге выражалось к появлению так называемых «духов» (или «призраков»), т.е. при тестировании метода появлялись фиктивные значения в некоторых гармониках, не имеющих какой-либо физической природы, а вызванные исключительно распределением звезд в выборке.

Детальный анализ этой ситуации и численные эксперименты, которые мы не описываем здесь для краткости изложения, показали, что видимо самым простым и достаточно эффективным будет способ, названный нами *регуляризацией координатной сетки*. Его суть крайне проста. Небесная сфера разбивается на сферические трапеции (площадки) с равным шагом по галактической долготе и широте  $M \times N$ . Для каждой площадки вычисляется усредненное значение собственных движений и лучевых скоростей звезд, попавших эту площадку. Индексы  $m$  и  $n$ , описывающие номер площадки по долготе и номер зоны по широте легко вычисляются по координате звезды следующими выражениями:

$$m = \left[ \frac{l}{360^\circ} M \right] + 1; \quad n = \left[ \frac{90^\circ - b}{180^\circ} N \right] + 1. \quad (31)$$

Координаты центра каждой площадки определяются как

$$l_m = \frac{180^\circ}{M} + \frac{360^\circ}{M}(m-1), \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad (32)$$

$$b_n = 90^\circ - \frac{90^\circ}{N} - \frac{180^\circ}{N}(n-1), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (33)$$

К усредненным таким образом данным применялся метод наименьших квадратов. Причем при решении площадкам назначался вес, равный  $\cos b_n$ . Вместе с коэффициентами разложения  $v_j, t_j, s_j$  определяются и их среднеквадратичные ошибки  $\sigma_{v_j}, \sigma_{t_j}, \sigma_{s_j}$ . Выбор числа членов разложения может быть определен из условия того, что остатки в компонентах поля скоростей после вычитания из них статистически значимых гармоник ведут себя как случайные числа [2].

Метод регуляризации не безупречен. Во-первых, как и любое усреднение он действует как фильтр высоких частот, что лишает нас возможности исследовать высокие гармоники. Однако при выбранных нами значениях  $m = 24, n = 18$  это было не очень существенно, так как основной материал исследования заключен в низкочастотной области. Второй недостаток заключался в том, что при недостаточном числе звезд в часть площадок может вообще не попасть звезд, что приведет к появлению корреляций и нарушению ортогональности. В большинстве наших экспериментов лишь иногда в выборке выпадало от одной до 9 площадок (да и то в околополярных областях, где площадки имеют малый вес), что практически никак не сказывалось на решении: коэффициенты корреляции не превышали 1%.

2. *Исключение из лучевых скоростей и собственных движений эффектов движения Солнца среди звезд.* Поскольку в коэффициенты векторного сферического разложения, ответственные за движение Солнца, входит параллакс звезд, было бы разумно определить и исключить движение Солнца из собственных движений и лучевых скоростей звезд до определения значения других коэффициентов. Если параллаксы звезд известны, то эта задача решается с помощью решения уравнений Эри-Ковальского методом наименьших квадратов. Если эффекты движения Солнца определены и исключены, то дальнейшая задача сводится только к анализу компонентов скоростей твердотельного вращения и элементов тензора деформации поля скоростей. В противном случае метод ВСФ определит компоненты вектора движения Солнца с точностью до постоянного множителя, равного среднему значению параллаксов из взятой выбоки звезд;
3. *Вычисление коэффициентов разложения  $v_j, t_j, s_j$  остаточного поля скоростей по векторным сферическим функциям* проводится методом наименьших квадратов, как уже было описано выше.
4. *Определение параметров конкретной кинематической модели.* После того, как выполнено определение коэффициентов разложения

$v_j \pm \sigma_{v_j}, t_j \pm \sigma_{t_j}, s_j \pm \sigma_{s_j}$ , можно связать их с параметрами конкретной физической модели. Для моделей Огородникова-Милна такие связи приведены в Таблице 2.

5. *Анализ внemodelных коэффициентов разложения.* Как следует из Таблицы 1 модель Огородникова-Милна (и Оорта-Линдблада) полностью описываются коэффициентами разложения  $v_j, s_j$  до  $n \leq 2$  и коэффициентами  $t_j$  до  $n \leq 1$ . Все остальные члены разложения со значимыми коэффициентами определяют систематические компоненты поля скоростей звезд, не входящие в стандартные модели. Установление физического смысла этих гармоник представляет собой отдельную задачу, сводящуюся, по существу, к построению новой кинематической модели.

## Численные эксперименты

Для тестирования отмеченных выше возможностей метода ВСФ и для его сравнения со стандартным методом мы провели численные эксперименты.

В этих экспериментах использовались четыре тестовых каталога. Первые два каталога строились на основе каталога OSACA [16], в котором для 35 847 звезд содержится информация не только об астрометрических параметрах (заимствованных из каталога HIPPARCOS), но и о лучевых скоростях. Первый тестовый каталог (OSACA-1) представляет собой выборку звезд в диапазоне расстояний от 200 до 300 парсек с искусственными собственными движениями и лучевыми скоростями. Второй каталог (OSACA-2) получен из каталога OSACA-1 путем осреднения его собственных движений и лучевых скоростей по сферическим трапециям, образующихся после равномерного разделения экватора и меридиана соответственно на  $N=48$  и  $M=36$  частей. Третий тестовый каталог (Н-3) представляет собой выборку звезд из каталога HIPPARCOS в диапазоне расстояний от 200 до 300 парсек только с искусственными собственными движениями. Четвертый тестовый каталог (Н-4) получен из каталога Н-3 путем осреднения его собственных движений по сферическим трапециям, образующихся после равномерного разделения экватора и меридиана соответственно на  $M=24$  и  $N=18$  частей.

Надо сказать, что метод осреднения по трапециям имеет свои недостатки. *Во-первых*, всем звездам, попавшим в трапецию приписываются координаты центра трапеции, что ухудшает точность получаемых результатов в случайном отношении. *Во-вторых*, осреднение по трапециям выступает в роли фильтра высоких частот, и мы лишаемся возможности исследовать поведение высоких гармоник в собственных движениях и лучевых скоростях звезд. По известной теореме Найквиста-Котельникова, число разбиений по какому-либо измерению по крайней мере вдвое должно превышать период исследуемого изменения. Оба эти недостатка могут быть сильно уменьшены путем увеличения числа трапеций, но это приводит к *третьей проблеме*: в некоторых (особенно околополярных) трапециях может не оказаться звезд

вообще, что приведет к пропускам в данных. В силу этого, приходится искать определенных компромисс в выборе числа ячеек. Естественно, чем больше звезд в каталоге и чем равномернее они распределены, тем большее число разбиений можно выбрать. В вычислительной процедуре определения коэффициентов векторного сферического разложения площадкам приписывался вес  $\cos \delta$ .

Следует уже заранее сказать, что распределения звезд по небесной сфере в тестовых каталогах OSACA-1 и H-3 не являются достаточно равномерными и существенно различаются между собой, что, как мы покажем дальше, приведет к особенностям в интерпретации результатов. Представление данных по сферическим трапециям снимает эти трудности, несмотря даже на то, что при нашем разбиении ( $24 \times 18$ ) в каталоге H-4 мы имеем одну пустую трапецию (из 432), а в каталоге O-2 даже девять (но они все околополярные, и, следовательно, имеют очень малый вес). Тем не менее, выигрыш получаемый регуляризацией координатной сетки, как мы увидим весьма существенен и снимает проблемы, вызванные неравномерностью распределения звезд каталогов H-3 и особенно OSACA-1.

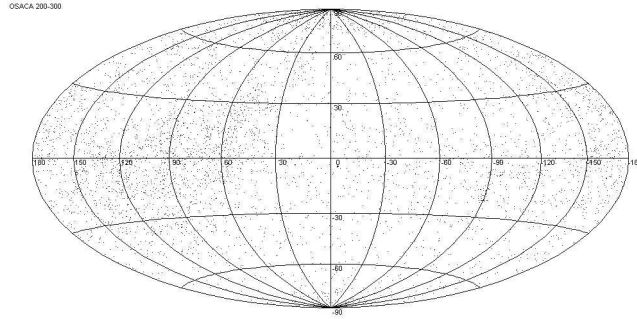


Рис. 3: Распределение звезд каталога OSACA по небесной сфере для диапазона расстояний 200-300 пк

В качестве модели идеального поля скоростей звезд использовались уравнения (25), (26) и (27) с ненулевыми значениями параметров, приведенными в таблице 3. Значения остальных параметров были взяты равными нулю.

Таблица 3: Значения параметров модели Огородникова-Милна, принятые для генерации тестовых каталогов

| $U$  | $V$  | $W$ | $\omega_3$               | $M_{12}^+$ | $M_{11}^+$ |
|------|------|-----|--------------------------|------------|------------|
| 10.0 | 20.0 | 8.0 | -15.0                    | 12.0       | 5.0        |
| км/с |      |     | км/с · Кпк <sup>-1</sup> |            |            |

Для проведения экспериментов применялись стандартный метод определения параметров модели Огородникова-Милна и метод ВСФ.

*Стандартный метод (СМ).* Этот метод представляет собой совместное решение уравнений (25), (26), (27) методом наименьших квадратов относительно параметров модели с определением корреляционных связей и среднеквадратичных ошибок искомых коэффициентов.

*Метод ВСФ.* Он осуществляется в три этапа. На первом этапе производится калибровка метода. Для модели Огородникова-Милна она сводится к перевычислению таблицы (1). Для этого по каждой выборке звезд выполняется решение методом наименьших квадратов уравнения (28) и совместное решение уравнений (29) (30) относительно значений коэффициентов векторного сферического разложения уравнений модели Огородникова-Милна при единичных значениях всех параметров модели. Из-за неравномерного распределения звезд по небесной сфере в каждом конкретном случае значения коэффициентов  $t_j$ ,  $s_j$  и  $v_j$  будут отличаться от значений, приведенных в таблице 1.

На втором этапе вычисляются коэффициенты разложения  $t_j$ ,  $s_j$ ,  $v_j$  идеального поля скоростей (с параметрами, приведенными в таблице(3)). На третьем шаге с помощью аналога таблицы (2) выполняется восстановление параметров идеального поля скоростей звезд и вычисление их среднеквадратичных ошибок.

Для сравнения обоих методов мы провели четыре численных эксперимента.

Эксперимент 1. Целью этого эксперимента является изучение влияния неравномерности распределения звезд по небесной сфере на эффективность обоих методов. По этой причине мы определили параметры идеального поля скоростей, не загрязненного никакими помехами.

Вычисления показали, что отличие значений теоретических коэффициентов от коэффициентов, определенных по нашим тестовым каталогам, невелико, особенно при использовании каталога Н-3 (Таблица 4). Однако было замечено, что бóльшая неравномерность в распределении звезд по небесной сфере (что имеет место при использовании каталога OSA CA-1) (Таблица 5) приводит к появлению так называемых «духов» – ложных гар-

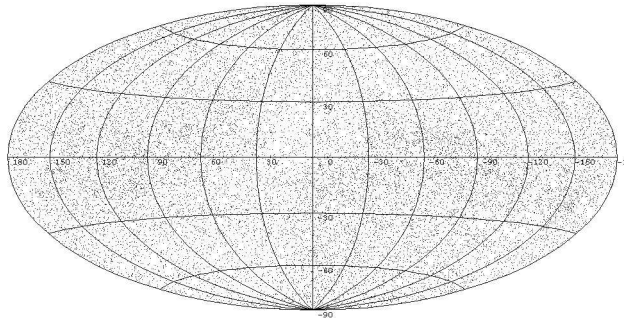


Рис. 4: Распределение звезд каталога *Hipparcos* по небесной сфере для диапазона расстояний 200-300 пк

Таблица 4: Эксперимент 1. Векторные сферические гармоники для звезд каталога Hipparcos, расположенных на расстояниях 200-300 пк.

|       | $\omega_1$  | $\omega_2$  | $\omega_3$  | $M_{12}^+$  | $M_{13}^+$  | $M_{23}^+$  | $M_{11}^+$   | $M_{22}^+$   | $M_{33}^+$  |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|-------------|
| $t_1$ |             |             | <b>2.89</b> |             |             |             |              |              |             |
| $t_2$ |             | <b>2.89</b> |             |             |             |             |              |              |             |
| $t_3$ | <b>2.89</b> |             |             |             |             |             |              |              |             |
| $s_1$ | 0.03        | -0.01       |             | 0.01        | 0.01        | 0.02        | -0.01        | -0.01        | 0.03        |
| $s_2$ | -0.03       |             | 0.01        | 0.02        | 0.01        |             | -0.03        | 0.03         | -0.01       |
| $s_3$ |             | -0.03       | -0.04       | -0.02       |             | 0.01        |              | 0.01         |             |
| $s_4$ |             |             |             |             |             |             | <b>-0.65</b> | <b>-0.65</b> | <b>1.29</b> |
| $s_5$ |             |             |             |             |             | <b>2.24</b> |              |              |             |
| $s_6$ |             |             |             |             | <b>2.24</b> |             |              |              |             |
| $s_7$ |             |             |             | <b>2.24</b> |             |             |              |              |             |
| $s_8$ |             |             |             |             |             |             | <b>1.12</b>  | <b>-1.12</b> |             |

моник, не предсказываемых теоретически, а появляющихся исключительно благодаря неравномерному распределению звезд. Например, параметр модели Огородникова-Милна  $\omega_3$  порождает не один коэффициент ( $t_1$ ), а целую серию, хотя надо сказать, что основная «мощность» всё-таки проникает в теоретически предсказываемую гармонику. Несмотря на то, что в «духи» попадает незначительная часть информации, тем не менее следует отметить, что наибольшие ложные гармоники возникают в коэффициентах  $s_1, s_2, s_3$ , что может быть ошибочно принято за неучтенный кинематический эффект движения Солнца. Такое влияние неравномерного распределения звезд по небесной сфере некоторым образом осложняет интерпретацию результатов, но, к счастью, «духами» оказываются функции, которые не входят в нашу модель. Тем самым, уже на этапе калибровки можно определить те гармоники разложения, которые порождаются не физическими причинами, а являются следствием особенностей распределения звезд выборки по небесной сфере. В окончательном анализе эти ложные гармоники не следует принимать во внимание.

Аналогичные эксперименты, проведенные с каталогами OSACA-2 и H-4 показали, что использование осредненных по трапециям данных **полностью** снимает указанные трудности. Таблицы, аналогичные таблицам 4 и 5, построенные по этим данным, полностью совпадают со значениями, предсказанными таблицей 1.

Неравномерность распределения звезд сказывается также и на стандартном методе, а именно, она приводит к появлению дополнительных корреляционных связей между искомыми параметрами. Например, для звезд каталога OSACA, находящихся в интервале расстояний от 400 до 600 пк, наблюдались коэффициенты корреляции на уровне -0.5 между параметрами  $\omega_1$  и  $M_{23}^+$ .

Эксперимент 2. Здесь оба метода применялись к идеальным полям скоростей, зашумленным случайными помехами с разной дисперсией. Стан-



дартный метод в этом случае возвратил исходные значения в пределах среднеквадратичных ошибок, что показано в таблице 6, где мы приводим значения для выборки звезд из каталога OSACA в диапазоне расстояний 200-300 пк и значения дисперсии случайной компоненты ( $10 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1}$ ). Для других диапазонов расстояний и дисперсий шума получаются аналогичные результаты.

Метод ВСФ ( Таблицы 8, 9) также прекрасно восстановил исходные значения, однако, как и прежде при использовании тестовых каталогов, базирующихся на координатной сетке OSACA наблюдаются «духи» в гармониках  $s_1$ ,  $s_2$  и особенно сильно в  $s_3$ . В случае выборки звезд из каталога Hipparcos можно сказать, что даже при столь значительной шумовой составляющей коэффициенты векторного сферического разложения оказываются близкими к теоретическим, а восстановленные по ним параметры поля скоростей совпадают в пределах ошибок с заданными значениями.

Таким образом, в случае идеального поля скоростей с наложенной на него чисто шумовой компонентой, оба метода идентичны, если они реализуются на выборках звезд с достаточно равномерным распределением по небесной сфере. Неравномерность распределения проявляется в обоих методах. В стандартном методе она приводит к появлению корреляций между определяемыми параметрами, что снижает надежность искомых значений параметров. В методе ВСФ неравномерность распределения приводит к по-

Таблица 5: Эксперимент 1. Векторные сферические гармоники для звезд каталога OSACA, расположенных на расстояниях 200-300 пк.

|       | $\omega_1$  | $\omega_2$  | $\omega_3$  | $M_{12}^+$  | $M_{13}^+$  | $M_{23}^+$  | $M_{11}^+$   | $M_{22}^+$   | $M_{33}^+$  |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|-------------|
| $v_0$ |             |             |             |             |             |             | <b>1.13</b>  | <b>1.13</b>  | <b>1.11</b> |
| $v_1$ |             |             |             | -0.17       | 0.28        | -0.37       | -0.12        | 0.04         | -0.46       |
| $v_2$ |             |             |             | 0.17        | -0.11       |             | -0.15        | -0.70        | -0.09       |
| $v_3$ |             |             |             | -0.38       | -0.24       | -0.14       | 0.54         | 0.10         | 0.10        |
| $v_4$ |             |             |             |             |             |             | <b>-0.55</b> | <b>-0.55</b> | <b>1.09</b> |
| $v_5$ |             |             |             |             |             | <b>1.83</b> |              |              |             |
| $v_6$ |             |             |             |             | <b>1.83</b> |             |              |              |             |
| $v_7$ |             |             |             | <b>1.85</b> |             |             | <b>0.96</b>  | <b>-0.96</b> |             |
| $t_1$ |             |             | <b>2.90</b> |             |             |             |              |              |             |
| $t_2$ |             | <b>2.90</b> |             |             |             |             |              |              |             |
| $t_3$ | <b>2.90</b> |             |             |             |             |             |              |              |             |
| $s_1$ | -0.73       | -0.48       |             | 0.10        | 0.33        | -0.54       | 0.08         |              | -0.09       |
| $s_2$ | 0.39        |             | 0.57        | 0.42        | 0.10        | -0.40       | 0.14         | -0.26        | 0.12        |
| $s_3$ |             | -0.36       | 0.79        | -0.52       | -0.20       | 0.09        | 0.15         | -0.07        | -0.08       |
| $s_4$ |             |             |             |             |             |             | <b>-0.64</b> | <b>-0.64</b> | <b>1.29</b> |
| $s_5$ |             |             |             |             |             | <b>2.24</b> |              |              |             |
| $s_6$ |             |             |             |             | <b>2.24</b> |             |              |              |             |
| $s_7$ |             |             |             | <b>2.24</b> |             |             |              |              |             |
| $s_8$ |             |             |             |             |             |             | <b>1.12</b>  | <b>-1.12</b> |             |

Таблица 6: Эксперимент 2. Значения параметров модели Огородникова-Милна, полученные стандартным методом по тестовому каталогу OSACA для звезд в диапазоне расстояний 200-300 пк. К идеальному полю скоростей добавлен шум с дисперсией  $10 \text{ км/с} \cdot \text{кпк}^{-1}$ .

| $U$            | $V$            | $W$            | $\omega_1$     | $\omega_2$     | $\omega_3$      |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| $10.0 \pm 0.1$ | $20.0 \pm 0.1$ | $7.9 \pm 0.1$  | $-0.1 \pm 0.1$ | $-0.2 \pm 0.1$ | $-15.3 \pm 0.5$ |
| $M_{12}^+$     | $M_{13}^+$     | $M_{23}^+$     | $M_{11}^+$     | $M_{22}^+$     | $M_{33}^+$      |
| $12.3 \pm 0.5$ | $0.2 \pm 0.5$  | $-0.2 \pm 0.5$ | $4.8 \pm 0.6$  | $0.0 \pm 0.6$  | $-0.1 \pm 0.7$  |

явлению ложных (не физических) гармоник разложения, которые, однако легко идентифицируются на этапе калибровки метода.

Использование метода регуляризации координатной сетки опять позволяет полностью снять проблему «духов» и получить достоверные результаты. Сравнение данных таблиц 7 и 10 и особенно таблиц 8 и 11 отчетливо это показывают. «Духи» в гармониках  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  отсутствуют.

Таблица 7: Эксперимент 2. Значения коэффициентов векторного сферического разложения, полученные по тестовому каталогу звезд с шумовой составляющей  $10 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1}$  диапазона расстояний 200-300 пк на координатной сетки Hipparcos, а также кинематические параметры, вычисленные на их основе.

|       |                 |       |                |            |                 |
|-------|-----------------|-------|----------------|------------|-----------------|
| $t_1$ | $-41.5 \pm 1.1$ | $s_1$ | $0.8 \pm 1.1$  | $\omega_1$ | $0.1 \pm 0.4$   |
| $t_2$ | $-0.1 \pm 1.2$  | $s_2$ | $0.0 \pm 1.2$  | $\omega_2$ | $0.0 \pm 0.4$   |
| $t_3$ | $0.2 \pm 1.2$   | $s_3$ | $0.3 \pm 1.2$  | $\omega_3$ | $-14.4 \pm 0.4$ |
| $t_4$ | $-0.2 \pm 1.2$  | $s_4$ | $-1.6 \pm 1.2$ | $M_{12}^+$ | $11.8 \pm 0.5$  |
| $t_5$ | $1.8 \pm 1.1$   | $s_5$ | $0.0 \pm 1.1$  | $M_{13}^+$ | $0.1 \pm 0.5$   |
| $t_6$ | $1.0 \pm 1.2$   | $s_6$ | $0.2 \pm 1.2$  | $M_{23}^+$ | $0.0 \pm 0.5$   |
| $t_7$ | $-1.0 \pm 1.2$  | $s_7$ | $26.3 \pm 1.2$ | $M_{11}^*$ | $5.0 \pm 1.0$   |
| $t_8$ | $1.2 \pm 1.1$   | $s_8$ | $5.6 \pm 1.1$  | $M_{33}^*$ | $1.1 \pm 1.2$   |
| $t_9$ | $1.3 \pm 1.2$   | $s_9$ | $2.5 \pm 1.2$  |            |                 |

Эксперимент 3. В этом случае проводилось тестирование обоих методов при их применении к идеальным полям скоростей звезд, зашумленных сильной систематической компонентой. В нашем случае к модельным собственным движениям были добавлены помехи вида

$$\sum_{j=9}^{15} (\mathbf{T}_j(l, b) + \mathbf{S}_j(l, b)) \quad (34)$$

с амплитудой  $50 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1}$ . Здесь мы приводим в качестве примера только выборки звезд в диапазоне расстояний 200-300 пк из каталога HIPPARCOS.

Систематическая составляющая, не описываемая стандартной моделью, при использовании стандартного метода проникает в значения определяемых параметров (Таблица 14), что объясняется наличием взаимных корреля-

Таблица 8: Эксперимент 2. Значения коэффициентов векторного сферического разложения, полученные по тестовому каталогу OSACA для звезд в диапазоне расстояний 200-300 пк с шумовой составляющей  $10 \text{ км/с} \cdot \text{кпк}^{-1}$ .

|       |                |       |                 |       |                 |
|-------|----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|
| $v_0$ | $10.1 \pm 2.5$ |       |                 |       |                 |
| $v_1$ | $-1.7 \pm 2.6$ | $t_1$ | $-45.7 \pm 2.7$ | $s_1$ | $0.2 \pm 2.7$   |
| $v_2$ | $-1.4 \pm 2.4$ | $t_2$ | $2.7 \pm 2.7$   | $s_2$ | $-1.1 \pm 2.7$  |
| $v_3$ | $-0.2 \pm 2.5$ | $t_3$ | $3.2 \pm 2.7$   | $s_3$ | $-17.4 \pm 2.7$ |
| $v_4$ | $-4.4 \pm 2.2$ | $t_4$ | $4.5 \pm 3.0$   | $s_4$ | $-1.9 \pm 3.0$  |
| $v_5$ | $-0.7 \pm 2.7$ | $t_5$ | $2.6 \pm 2.5$   | $s_5$ | $-3.7 \pm 2.5$  |
| $v_6$ | $1.6 \pm 2.8$  | $t_6$ | $-4.6 \pm 2.6$  | $s_6$ | $-0.7 \pm 2.6$  |
| $v_7$ | $18.2 \pm 2.3$ | $t_7$ | $5.3 \pm 2.7$   | $s_7$ | $25.9 \pm 2.7$  |
| $v_8$ | $3.1 \pm 2.3$  | $t_8$ | $4.9 \pm 2.7$   | $s_8$ | $7.2 \pm 2.7$   |
| $v_9$ | $0.0 \pm 2.2$  | $t_9$ | $5.2 \pm 2.8$   | $s_9$ | $-1.7 \pm 2.8$  |

Таблица 9: Эксперимент 2. Значения кинематических параметров, вычисленные на основе коэффициентов Таблицы 8.

| По $t_j$ и $s_j$ |                 | По $v_j$   |                |
|------------------|-----------------|------------|----------------|
| $\omega_1$       | $1.1 \pm 0.9$   |            |                |
| $\omega_2$       | $0.9 \pm 0.9$   |            |                |
| $\omega_3$       | $-15.8 \pm 0.9$ |            |                |
| $M_{12}^+$       | $11.6 \pm 1.2$  | $M_{12}^+$ | $9.9 \pm 1.2$  |
| $M_{13}^+$       | $-0.3 \pm 1.2$  | $M_{13}^+$ | $0.9 \pm 1.5$  |
| $M_{23}^+$       | $-1.7 \pm 1.1$  | $M_{23}^+$ | $-0.4 \pm 1.5$ |
| $M_{11}^*$       | $6.4 \pm 2.4$   | $M_{33}^+$ | $5.9 \pm 1.6$  |
|                  |                 | $M_{22}^+$ | $2.6 \pm 1.6$  |
| $M_{33}^*$       | $1.7 \pm 2.6$   | $M_{33}^+$ | $0.1 \pm 1.5$  |

лений между параметрами, вызванными неравномерностью координатной сетки.

В частности, она приводит к вполне значимым значениям тех параметров, которые были заданы нулями. Кроме того, несмотря на отсутствие случайной составляющей, значения ошибок определяемых параметров становятся отличными от нуля, так как стандартный метод не отличает систематическую компоненту, не входящую в модель, от случайного шума.

Метод же векторных сферических функций полностью восстанавливает исходные параметры, а заданный систематический шум отождествляется им с гармониками  $\mathbf{T}_j$  и  $\mathbf{S}_j$ , для  $j = 9 \dots 15$ . Естественно, становятся нулевыми и ошибки коэффициентов. Однако, как и прежде, мы наблюдаем сильные «духи» а гармониках  $s_1, s_2, s_3$  (1-4 столбцы таблицы 13).

Решения проведенные на регулярной сетке для таких данных приводят к полному отсутствию «духов» в получаемых коэффициентах с сохранением заданной кинематической картины. (5-8 столбцы таблицы 13). Однако можно заметить, что помимо такого положительного влияние регулярной

Таблица 10: Эксперимент 2. Значения коэффициентов векторного сферического разложения, полученные для звезд каталога Н-4 расстояний 200-300 пк с шумовой составляющей  $10 \text{ км/с} \cdot \text{Кпк}^{-1}$  а также кинематические параметры, вычисленные на их основе.

|       |                 |       |                |            |                 |
|-------|-----------------|-------|----------------|------------|-----------------|
| $t_1$ | $-41.5 \pm 1.2$ | $s_1$ | $0.0 \pm 1.2$  | $\omega_1$ | $0.2 \pm 0.4$   |
| $t_2$ | $-0.4 \pm 1.2$  | $s_2$ | $0.0 \pm 1.2$  | $\omega_2$ | $0.2 \pm 0.4$   |
| $t_3$ | $0.5 \pm 1.2$   | $s_3$ | $-0.1 \pm 1.2$ | $\omega_3$ | $-14.4 \pm 0.4$ |
| $t_4$ | $0.3 \pm 1.2$   | $s_4$ | $-1.5 \pm 1.2$ | $M_{12}^+$ | $11.7 \pm 0.6$  |
| $t_5$ | $2.4 \pm 1.2$   | $s_5$ | $-0.3 \pm 1.2$ | $M_{13}^+$ | $0.0 \pm 0.5$   |
| $t_6$ | $0.6 \pm 1.2$   | $s_6$ | $-0.1 \pm 1.2$ | $M_{23}^+$ | $-0.1 \pm 0.5$  |
| $t_7$ | $-0.8 \pm 1.2$  | $s_7$ | $26.1 \pm 1.2$ | $M_{11}^*$ | $4.6 \pm 1.1$   |
| $t_8$ | $1.5 \pm 1.2$   | $s_8$ | $5.2 \pm 1.2$  | $M_{33}^*$ | $1.1 \pm 1.1$   |
| $t_9$ | $1.1 \pm 1.2$   | $s_9$ | $2.2 \pm 1.2$  |            |                 |

Таблица 11: Эксперимент 2. Значения коэффициентов векторного сферического разложения, полученные по тестовому каталогу OSACA-2 для звезд в диапазоне расстояний 200-300 пк с шумовой составляющей  $10 \text{ км/с} \cdot \text{кпк}^{-1}$ .

|       |                |       |                 |       |                |
|-------|----------------|-------|-----------------|-------|----------------|
| $v_0$ | $7.3 \pm 0.8$  |       |                 |       |                |
| $v_1$ | $0.0 \pm 0.8$  | $t_1$ | $-45.7 \pm 3.1$ | $s_1$ | $-0.1 \pm 3.1$ |
| $v_2$ | $-0.2 \pm 0.8$ | $t_2$ | $0.3 \pm 3.1$   | $s_2$ | $0.4 \pm 3.1$  |
| $v_3$ | $0.0 \pm 0.8$  | $t_3$ | $5.0 \pm 3.1$   | $s_3$ | $-0.3 \pm 3.1$ |
| $v_4$ | $-2.8 \pm 0.8$ | $t_4$ | $7.3 \pm 3.1$   | $s_4$ | $-0.7 \pm 3.1$ |
| $v_5$ | $0.2 \pm 0.8$  | $t_5$ | $3.0 \pm 3.1$   | $s_5$ | $-5.1 \pm 3.1$ |
| $v_6$ | $-0.5 \pm 0.8$ | $t_6$ | $-8.3 \pm 3.1$  | $s_6$ | $1.2 \pm 3.1$  |
| $v_7$ | $20.3 \pm 0.8$ | $t_7$ | $5.6 \pm 3.1$   | $s_7$ | $24.9 \pm 3.1$ |
| $v_8$ | $4.5 \pm 0.8$  | $t_8$ | $5.7 \pm 3.1$   | $s_8$ | $8.1 \pm 3.1$  |
| $v_9$ | $-0.3 \pm 0.8$ | $t_9$ | $5.8 \pm 3.1$   | $s_9$ | $-2.7 \pm 3.1$ |

сетки на качество решения, существует и отрицательное. Поскольку всем звездам, попавшим в определенную ячейку приписываются формально координаты центра площадки (для обеспечения равномерности сетки), это приводит к некоторому искажению результата в случайном отношении, что выражается ненулевыми значениями среднеквадратичных ошибок коэффициентов даже в модельном случае.

Таким образом, можно надеется, что метод ВСФ при использовании метода регуляризации сетки сможет найти в реальных собственных движениях и лучевых скоростях систематические составляющие, не описываемые стандартной моделью. Без использования регуляризации метод ВСФ может давать ложные гармоники, вызванные неравномерным распределением звезд по небесной сфере, которые могут быть ошибочно приняты за неизвестные систематические составляющие в собственных движениях или лучевых скоростях звезд.

Эксперимент 4. В этом случае параметры стандартной модели задава-

Таблица 12: Эксперимент 2. Значения кинематических параметров, вычисленные на основе коэффициентов Таблицы 11.

| По $t_j$ и $s_j$ |                 | По $v_j$   |                |
|------------------|-----------------|------------|----------------|
| $\omega_1$       | $1.7 \pm 1.1$   |            |                |
| $\omega_2$       | $0.1 \pm 1.1$   |            |                |
| $\omega_3$       | $-15.6 \pm 1.1$ |            |                |
| $M_{12}^+$       | $11.1 \pm 1.4$  | $M_{12}^+$ | $11.1 \pm 0.4$ |
| $M_{13}^+$       | $0.5 \pm 1.4$   | $M_{13}^+$ | $-0.3 \pm 0.4$ |
| $M_{23}^+$       | $-2.3 \pm 1.4$  | $M_{23}^+$ | $0.1 \pm 0.4$  |
| $M_{11}^*$       | $7.3 \pm 2.7$   | $M_{11}^+$ | $5.4 \pm 0.5$  |
|                  |                 | $M_{22}^+$ | $0.5 \pm 0.5$  |
| $M_{33}^*$       | $3.1 \pm 2.7$   | $M_{33}^+$ | $0.3 \pm 0.5$  |

лись *разными* для лучевых скоростей и собственных движений. Такая ситуация может сложиться на практике при наличии систематических ошибок в определении лучевых скоростей или собственных движений. В нашем примере мы оставили значения параметров модели Огородникова-Милна для собственных движений (Таблица 3), а параметры модели для лучевых скоростей были заданы нулями, за исключением  $M_{11}$ , которое было выбрано  $-5.0$  (обратный знак по сравнению с  $M_{11}$  у собственных движений).

Результаты такого тестирования для звезд каталога OSACA представлены в таблице 15 (в данном случае, по каталогу OSACA-2 мы получаем аналогичный результат). Мы видим, что стандартный метод дает усредненные значения заданных параметров, кроме того наблюдаются значимые величины у параметров, которые в модели были нулевыми. Метод же ВСФ автоматически обнаруживает несоответствие значений. Справедливости ради надо сказать, что это различие можно обнаружить и стандартным методом, если с его помощью определять параметры отдельно из собственных движений и из лучевых скоростей. Такой подход, однако, не является общепринятым, так как требует соответствующей модификации метода, а в методе ВСФ это делается автоматически.

Основные выводы, сделанные нами по результатам численных экспериментов, сводятся к следующим утверждениям:

- в тех случаях, когда мы уверены, что в исследуемых данных за исключением белого шума нет никакой другой систематической информации, кроме той, которая описывается принятой моделью, метод ВСФ не имеет особых преимуществ перед стандартным методом;
- в ситуациях, когда помимо случайного шума в наших данных присутствуют систематические компоненты, не описываемые моделью, метод ВСФ демонстрирует явные преимущества перед стандартным методом, поскольку метод ВСФ не только обнаруживает "внемоделльные" компоненты, но и защищает параметры модели от их воздействия.

Таблица 13: Эксперимент 3. Значения коэффициентов векторного сферического разложения, полученные для звезд расстояний 200-300 пк каталога Hipparcos и каталога H-4, зашумленных систематической компонентой.

| Hipparcos |                 |          |                | Regularized Hipparcos (H-4) |                 |          |                |
|-----------|-----------------|----------|----------------|-----------------------------|-----------------|----------|----------------|
| $t_1$     | $-43.4 \pm 0.0$ | $s_1$    | $9.3 \pm 0.0$  | $t_1$                       | $-43.6 \pm 0.2$ | $s_1$    | $-0.3 \pm 0.2$ |
| $t_2$     | $0.0 \pm 0.0$   | $s_2$    | $9.7 \pm 0.0$  | $t_2$                       | $-0.1 \pm 0.2$  | $s_2$    | $-0.7 \pm 0.2$ |
| $t_3$     | $0.0 \pm 0.0$   | $s_3$    | $2.2 \pm 0.0$  | $t_3$                       | $-0.3 \pm 0.2$  | $s_3$    | $-0.4 \pm 0.2$ |
| $t_4$     | $0.0 \pm 0.0$   | $s_4$    | $-3.2 \pm 0.0$ | $t_4$                       | $-0.1 \pm 0.2$  | $s_4$    | $-3.2 \pm 0.2$ |
| $t_5$     | $0.0 \pm 0.0$   | $s_5$    | $0.0 \pm 0.0$  | $t_5$                       | $0.0 \pm 0.2$   | $s_5$    | $-0.1 \pm 0.2$ |
| $t_6$     | $0.0 \pm 0.0$   | $s_6$    | $0.0 \pm 0.0$  | $t_6$                       | $-0.3 \pm 0.2$  | $s_6$    | $-0.7 \pm 0.2$ |
| $t_7$     | $0.0 \pm 0.0$   | $s_7$    | $26.9 \pm 0.0$ | $t_7$                       | $-0.2 \pm 0.2$  | $s_7$    | $27.0 \pm 0.2$ |
| $t_8$     | $0.0 \pm 0.0$   | $s_8$    | $5.6 \pm 0.0$  | $t_8$                       | $0.3 \pm 0.2$   | $s_8$    | $5.1 \pm 0.2$  |
| $t_9$     | $50.0 \pm 0.0$  | $s_9$    | $50.1 \pm 0.0$ | $t_9$                       | $49.2 \pm 0.2$  | $s_9$    | $49.3 \pm 0.2$ |
| $t_{10}$  | $50.0 \pm 0.0$  | $s_{10}$ | $50.0 \pm 0.0$ | $t_{10}$                    | $49.4 \pm 0.2$  | $s_{10}$ | $48.7 \pm 0.2$ |
| $t_{11}$  | $50.0 \pm 0.0$  | $s_{11}$ | $50.0 \pm 0.0$ | $t_{11}$                    | $49.1 \pm 0.2$  | $s_{11}$ | $48.8 \pm 0.2$ |
| $t_{12}$  | $50.0 \pm 0.0$  | $s_{12}$ | $50.0 \pm 0.0$ | $t_{12}$                    | $49.2 \pm 0.2$  | $s_{12}$ | $49.2 \pm 0.2$ |
| $t_{13}$  | $50.0 \pm 0.0$  | $s_{13}$ | $50.0 \pm 0.0$ | $t_{13}$                    | $48.8 \pm 0.2$  | $s_{13}$ | $48.9 \pm 0.2$ |
| $t_{14}$  | $50.0 \pm 0.0$  | $s_{14}$ | $50.0 \pm 0.0$ | $t_{14}$                    | $48.6 \pm 0.2$  | $s_{14}$ | $48.6 \pm 0.2$ |
| $t_{15}$  | $50.0 \pm 0.0$  | $s_{15}$ | $50.0 \pm 0.0$ | $t_{15}$                    | $48.9 \pm 0.2$  | $s_{15}$ | $48.5 \pm 0.2$ |

- В отличие от стандартного метода разложения по векторным сферическим функциям дает возможность провести тесты на совместность лучевых скоростей и собственных движений звезд. Это обстоятельство является важным, поскольку эти данные получаются астрофизическими и астрометрическими методами и могут иметь различные систематические ошибки.

## Получение коэффициентов $t_{nkp}$ и $s_{nkp}$ по собственным движениям звезд каталога Hipparcos

Мы получили значения коэффициентов векторного сферического разложения для собственных движений разноудаленных выборок звезд каталога Hipparcos. Перед вычислением искомым коэффициентов из собственных движений звезд исключались эффекты, связанные с движением Солнца, которое определялось из уравнений Эри-Ковальского с учетом индивидуальных параллаксов звезд.

Результаты приведены в таблице 16. Сопоставляя значения в этой таблице с таблицей 1 можно сделать несколько выводов. Для близких звезд с расстояниями 50–100 пк коэффициенты определяются со значительными ошибками (для звезд, ближе 50 пк, ошибки еще больше). Этот факт говорит о том, что на малых расстояниях в собственных движениях звезд преобладают пекулярные составляющие, а систематическая компонента прослеживается незначительно. Тем не менее, можно отметить большие значения и

Таблица 14: Эксперимент 3. Значения кинематических параметров, полученные стандартным методом и методом векторных сферических функций по идеальному полю скоростей, зашумленному систематической компонентой. Выборка звезд в диапазоне расстояний 200-300 пк из каталога HIPPARCOS.

|            | СМ              | ВСФ             |
|------------|-----------------|-----------------|
| $\omega_1$ | $0.5 \pm 0.1$   | $0.0 \pm 0.0$   |
| $\omega_2$ | $0.3 \pm 0.1$   | $0.0 \pm 0.0$   |
| $\omega_3$ | $-17.6 \pm 0.1$ | $-15.0 \pm 0.0$ |
| $M_{12}^+$ | $14.4 \pm 0.3$  | $12.0 \pm 0.0$  |
| $M_{13}^+$ | $-0.4 \pm 0.4$  | $0.0 \pm 0.0$   |
| $M_{23}^+$ | $-3.7 \pm 0.4$  | $0.0 \pm 0.0$   |
| $M_{11}^*$ | $-4.5 \pm 0.8$  | $-5.0 \pm 0.0$  |
| $M_{33}^*$ | $-2.6 \pm 0.8$  | $0.0 \pm 0.0$   |

Таблица 15: Эксперимент 4. Значения кинематических параметров, вычисленные двумя методами по каталогу с различными значениями коэффициентов модели Огородникова-Милна для лучевых скоростей и собственных движений.

|                           | СМ              | По $t_j$ и $s_j$ | По $v_j$       |
|---------------------------|-----------------|------------------|----------------|
| $\omega_1$                | $0.0 \pm 0.0$   | $0.0 \pm 0.0$    |                |
| $\omega_2$                | $0.0 \pm 0.0$   | $0.0 \pm 0.0$    |                |
| $\omega_3$                | $-15.4 \pm 0.1$ | $-15.0 \pm 0.0$  |                |
| $M_{12}^+$                | $6.9 \pm 0.1$   | $12.0 \pm 0.0$   | $0.0 \pm 0.0$  |
| $M_{13}^+$                | $0.1 \pm 0.1$   | $0.0 \pm 0.0$    | $0.0 \pm 0.0$  |
| $M_{23}^+$                | $-0.3 \pm 0.1$  | $0.0 \pm 0.0$    | $0.0 \pm 0.0$  |
| $M_{11}^+$ или $M_{11}^*$ | $-1.0 \pm 0.1$  | $+5.0 \pm 0.0$   | $-5.0 \pm 0.0$ |
| $M_{22}^+$                | $-2.0 \pm 0.1$  |                  | $0.0 \pm 0.0$  |
| $M_{33}^+$ или $M_{33}^*$ | $-1.9 \pm 0.1$  | $0.0 \pm 0.0$    | $0.0 \pm 0.0$  |

значимость коэффициентов  $t_{101}$ ,  $t_{110}$ ,  $t_{111}$ , что говорит о том, что ось вращения системы близких звезд наклонена к плоскости Галактики [15]. Также велики коэффициенты  $s_{211}$ ,  $s_{220}$ ,  $s_{221}$ , показывающие наличие деформаций в других плоскостях и существования расширения системы близких звезд.

С увеличением расстояния точность определения коэффициентов значительно улучшается (уменьшается влияние пекулярных скоростей звезд). Из названных коэффициентов остаются значимыми лишь  $t_{101}$  и  $s_{220}$ , описывающих «классическое» плоское вращение Галактики. Однако же с увеличением расстояния становятся значимыми коэффициенты  $t_{211}$  и  $s_{310}$ , физический смысл которых не может быть интерпретирован в рамках линейных моделей. Значения этих коэффициентов имеют тенденцию к росту с увеличением расстояния. Например, для диапазона расстояний 600–800 пк <sup>1</sup>

<sup>1</sup>в таблицу 16 в силу экономии места мы включили результаты только для звезд,

значения этих коэффициентов:  $t_{211} = 25.1 \pm 2.7$  и  $s_{310} = 17.1 \pm 2.8$ . Этот факт нуждается в объяснении.

## Получение коэффициентов $t_{nkp}$ и $s_{nkp}$ по собственным движениям звезд каталога Hipparcos на регулярной сетке (каталог Н-4)

Как мы уже видели, нерегулярность координатной сетки звезд может привести к появлению «духов», поэтому возникло подозрение: не являются ли большие значения коэффициентов  $t_{211}$  и  $s_{310}$  следствием неравномерности распределения звезд по небесной сфере. Для проверки этого мы использовали метод регуляризации координатной сетки, используя усреднение данных по равномерным трапециям ( $24 \times 18$ ). Результат, приведенный в Таблице 17, нас обнадежил и полностью подтвердил реальность гармоник  $T_{211}$  и  $S_{310}$  в собственных движениях звезд. Мы видим, что коэффициенты  $t_{211}$  и  $s_{310}$  имеют те же значения, что и в предыдущем случае, но с несколько большими среднеквадратичными ошибками, как это и должно быть в случае усреднения исходных данных. Значения этих коэффициентов также растут с увеличением расстояния.

## Получение коэффициентов $v_{nkp}$ по лучевым скоростям звезд

В дополнении к анализу собственных движений звезд, авторами произведено разложение по ВСФ известных лучевых скоростей звезд каталога Hipparcos. В качестве численного материала были использованы 35 847 лучевых скоростей звезд каталога OSACA [16]. Как и для собственных движений, перед анализом из индивидуальных лучевых скоростей вычиталось действие движения Солнца. Согласно формуле (19) для разложения использовалась величина  $V_r/r$ , а не просто  $V_r$ . Результаты представлены в таблице 18. Анализ этой таблицы приводит к аналогичным выводам: во всех выборках значимым является коэффициент  $v_{220}$ , который порождается параметром  $M_{12}$ . Значимым является также коэффициент  $v_{310}$ , который не предсказывается моделью Огородникова-Милна.

---

находящихся ближе 600 пк, однако вычисления производились и для больших значений расстояний



## Получение коэффициентов $v_{nkr}$ по лучевым скоростям звезд на регулярной сетке (каталог OSACA-2)

Особо мы опасались за появление «духов» при использовании каталога OSACA, так как распределение звезд в этом каталоге значительно более неравномерное, чем в каталоге Hipparcos. Но исследование на равномерной сетке подтвердило реальность коэффициента  $v_{310}$  (Таблица 19). Однако, следует сказать, что при больших расстояниях неравномерность распределения звезд каталога OSACA сильно растет, что приводит к появлению большого числа пустых площадок, и как следствие, к потере в значительной мере равномерности сетки. Для расстояний 400–600 пк уже свыше 13% площадок оказались пустыми, что привело опять к появлению отличных от нуля коэффициентов корреляций между параметрами, однако все-таки они еще были не очень высоки – самые большие – 0.1, в то время, как для этой же группы звезд без применения регуляризации сетки коэффициенты корреляции достигают значения 0.57!

## Интерпретация $t_{211}$ , $s_{310}$ и $v_{310}$ в рамках обобщенной модели Оорта

Перед авторами встала задача объяснения существования замодельных членов разложения. Были рассмотрены несколько моделей, в том числе полная модель второго порядка поля скоростей звезд. Однако эта модель предсказывает существование большого числа ненаблюдающихся в реальных разложениях гармоник. Потому была для анализа была выбрана более простая модель, известная как обобщенные уравнения Оорта [14]. Это тоже модель второго порядка, но в ней рассматриваются изменения угловой скорости вращения звездной системы только вдоль направления на центр Галактики. Приведем уравнения этой модели:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_l \cos b &= U/r \sin l - V/r \cos l + \\ &+ A \cos b \cos 2l + B \cos b - \\ &- r F \cos^2 b \cos^3 l - r G(3 \cos^2 b \cos l - \cos^2 b \cos^3 l), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_b &= U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - W/r \cos b - \\ &- A \cos b \sin b \sin 2l + r F \cos^2 b \sin b \sin l \cos^2 l + \\ &+ r G \cos^2 b \sin b \sin^3 l - K \cos b \sin b, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
V_r/r &= -U/r \cos b \cos l - V/r \cos b \sin l - W/r \sin b + \\
&- A \cos^2 b \sin 2l - r F \cos^3 b \sin l \cos^2 l - \\
&- r G \cos^3 b \sin^3 l + K \cos^2 b.
\end{aligned} \tag{37}$$

Здесь  $A = 0.5R_0\omega'_0$ ,  $B = 0.5R_0\omega'_0 + \omega_0$  – параметры Оорта ( $R_0$  – расстояние до центра Галактики,  $\omega_0$  – угловая скорость вращения Галактики в окрестности Солнца),  $K$  – параметр, описывающий сжатие-расширение звездной системы в плоскости Галактики,  $F = 0.5R_0\omega''_0$  – коэффициент второго порядка,  $G = A/R_0$  – коэффициент, возникающий в модели второго порядка. Интересно, что, зная  $A$  и  $G$ , можно оценить величину  $R_0$ . Назовем  $F$  и  $G$  параметрами Оорта второго порядка.

Мы произвели разложение уравнений (35)-(37) по системе ВСФ. Результаты представлены в таблице 20. Анализ строк этой таблицы показывает, что при наличии весомых эффектов второго порядка и одинаковых знаков параметров  $F$ ,  $G$  можно ожидать появления значимых коэффициентов  $t_{211}$ ,  $s_{310}$ ,  $v_{310}$ . Знаки  $s_{310}$ ,  $v_{310}$  должны совпадать и быть противоположны знаку  $t_{211}$ . Модуль  $t_{211}$  должен превосходить модули  $s_{310}$ ,  $v_{310}$ . При одинаковых по порядку величины параметров Оорта второго порядка коэффициенты  $s_{330}$ ,  $v_{330}$  вероятно будут незначимы.

Сопоставляя эти утверждения со значениями коэффициентов  $t_{211}$ ,  $s_{310}$ ,  $v_{310}$ , а также  $s_{330}$ ,  $v_{330}$ , взятыми из таблиц 16 и 18: можно констатировать, что обобщенная модель Оорта на качественном уровне удовлетворительно описывает кинематику звезд, удаленных от Солнца на расстояние выше 300-400 пк. Но количественно имеются и несоответствия: из таблицы 20 следует, что коэффициент  $t_{211}$  по модулю должен превосходить  $s_{310}$  в 5.8 раз, однако в действительности он превосходит всего в 1.5 раза. Таким образом, необходим поиск более точных звездно-кинематических моделей окосолнечного пространства.

## Заключение

Приведенный пример показывает возможности применения ВСФ при анализе различных моделей. Действительно, при решении уравнений (35)-(37) традиционным МНК на большом числе звезд мы получили бы вполне «надежные» значения параметров модели с малыми ошибками, при этом вся сложность истинной кинематики окосолнечного пространства осталась бы неучтенной. Предлагаемый авторами метод позволяет подойти к оценке адекватности моделей наблюдениям на совершенно другом уровне.

## Список литературы

- [1] (<http://www.rssd.esa.int/Gaia>)

- [2] *Brosche P.*, 1966, Representation of systematic differences in positions and proper motions of stars by spherical harmonics, Veroff, des Astron. Rechen-Inst. Heidelberg, N 17, pp. 1–27.
- [3] *Schwan H.*, 2001, An analytical representation of the systematic differences HIPPARCOS-FK5. A&A, 367, pp. 1078–1086.
- [4] *В.В.Витязев, А.С.Цветков*, Представление кинематических компонент в собственных движениях звезд с помощью сферических функций, Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2 (N8), стр. 73-79 (1989).
- [5] *В.В.Витязев (V.V. Vityazev)* The rotor: A new method to derive rotation between two reference frames. Astron. and Astroph. Transactions, vol. 4, Issue 3, pp. 195-218 (1993)
- [6] *А.С.Цветков, (A.S.Tsvetkov)*, Jornees 1997, Systemes de reference spatio-temporels, Prague, Czech Republic (1997).
- [7] *А.С.Цветков, А.В.Попов* Звездный состав каталога Tycho-2 Вестн. С.-Петербургского ун-та. Сер. 1, N1, 2006 г.
- [8] *Mignard F., Morando B.*, 1990, Analyse de catalogues stellaires au moyen des harmoniques vectorielles, Journees 90. Systemes de reference spatio-temporels. Paris, pp. 151–158.
- [9] *Витязев В.В., Шужсто А.К.* Применение векторных функций для анализа собственных движений звезд Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 1. С. 116-124.
- [10] *Г.Арфкен* Математические методы в физике, стр. 493-498 (М.: Атомиздат, 1970)
- [11] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л. 1975, 439 с.
- [12] *Фрикке и др., (W. Fricke, H. Schwan, T. Lederle et al)*, *Fifth fundamental catalogue (FK5). Part 1: The basic fundamental stars* (Veröff. Astron. Rechen-Institut, Heidelberg, Verlag G. Braun, Karlsruhe, No. 32, 1988).
- [13] *С.П.Рыбка*, Кинемат. и физ. небесн. тел **20**, 437 (2004).
- [14] *К.Ф.Огородников*, Динамика звездных систем (М.: Физматгиз, 1965).
- [15] *А.С.Цветков, (A.Tsvetkov)*, Astron. & Astrophys. Trans., Vol. 25, Number 2-3, p. 165-169 (2006).
- [16] *В.В.Бобылев, Г.А.Гончаров, А.Т.Байкова*, База данных OSACA и кинематический анализ звезд околосолнечной окрестности, АЖ, **83**, 821-836, (2006).
- [17] *Clube S. V. M.6* Galactic rotation and the precession constant, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 159, N 3, pp. 289–314, 1972.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Представим кинематические уравнения (25-27) в виде:

$$\mathcal{K}\mu_l \cos b = \sum_{i=1}^K p_k \varphi_i(l, b), \quad (38)$$

$$\mathcal{K}\mu_b = \sum_{i=1}^K p_k \psi_k(l, b), \quad (39)$$

$$V_r/r = \sum_{k=1}^K p_k \chi_k(l, b). \quad (40)$$

Здесь  $p_k$  - параметры модели, упорядоченные следующим образом:

$$p_1 = \omega_1; \quad p_4 = M_{13}^+; \quad p_7 = M_{11}^+ - M_{22}^+; \quad (41)$$

$$p_2 = \omega_2; \quad p_5 = M_{23}^+; \quad p_6 = M_{33}^+ - 1/2(M_{11}^+ + M_{11}^+); \quad (42)$$

$$p_3 = \omega_1; \quad p_6 = M_{13}^+; \quad p_9 = 1/3[M_{11}^+ + M_{22}^+ + M_{33}^+]. \quad (43)$$

Явный вид функций, входящих в уравнения (38-40), легко усматривается из формул (25-27). Заметим, что для выполнения соответствия (41-43) некоторые функции в формулах (38-40) могут быть тождественными нулями или повторяться.

Будем искать отдельные решения уравнений (38-40) из условий:

$$I_a = \iint_{\Omega} \left[ \mathcal{K}\mu_l \cos b - \sum_{k=1}^K p_k \varphi_i(l, b) \right]^2 d\omega = \min \quad (44)$$

$$I_b = \iint_{\Omega} \left[ \mathcal{K}\mu_b - \sum_{k=1}^K p_k \psi_i(l, b) \right]^2 d\omega = \min \quad (45)$$

$$I_c = \iint_{\Omega} \left[ V_r/r - \sum_{k=1}^K p_k \chi_i(l, b) \right]^2 d\omega = \min \quad (46)$$

Образует нормальные системы

$$N_a \bar{p}_a = \bar{a}; \quad N_b \bar{p}_b = \bar{b}; \quad N_c \bar{p}_c = \bar{c}, \quad (47)$$

где

$$N_a = [\widehat{\varphi_i \varphi_j}]; \quad N_b = [\widehat{\psi_i \psi_j}]; \quad N_c = [\widehat{\chi_i \chi_j}], \quad (48)$$

$$i, j = 1, \dots, K \quad (49)$$

$$\bar{a} = [\mathcal{K}\mu_l \widehat{\cos b\varphi_j}]; \quad \bar{b} = [\mathcal{K}\mu_b \widehat{\psi_j}]; \quad \bar{c} = [(V_r/r)\widehat{\chi_j}], \quad (50)$$

$$j = 1, \dots, K \quad (51)$$

В этих формулах используется оператор:

$$\widehat{uv} = \iint_{\Omega} u(l, b) v(l, b) d\omega == \int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u(l, b) v(l, b) \cos b db. \quad (52)$$

Очевидно, что совместное решение уравнений (38-40) получается из условия

$$I = I_a + I_b + I_c = \min. \quad (53)$$

Нетрудно показать, что нормальная система совместного решения уравнений (38-40) выглядит следующим образом:

$$N\bar{p} = \bar{r}, \quad (54)$$

где

$$N = N_a + N_b + N_c; \quad \bar{r} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \quad (55)$$

Отсюда получаем формулу

$$p = w_V p_V + w_l p_l + w_b p_b, \quad (56)$$

в которой искомые веса определяются следующими выражениями:

$$w_V = (N^{-1}N_c); \quad w_l = (N^{-1}N_a); \quad w_b = (N^{-1}N_b). \quad (57)$$

## Приложение 2

Для того, чтобы оценить долю вклада каждой компоненты собственных движений звезд в значения определяемых кинематических параметров, определяемых методом ВСФ, предположим (не умаляя общности решения в силу линейности модели), что поле скоростей определяется только одним параметром  $p$ :

$$\mathbf{U}(l, b) = p \phi_l(l, b) \mathbf{e}_l + p \phi_b(l, b) \mathbf{e}_b \quad (58)$$

Теперь примем, что существует другое поле скоростей, в котором параметр  $p$  принимает различные значения  $p_l$  и  $p_b$  в собственных движениях по долготе и широте:

$$\mathbf{U}'(l, b) = p_l \phi_l(l, b) \mathbf{e}_l + p_b \phi_b(l, b) \mathbf{e}_b. \quad (59)$$

В этом случае на основании, например (22), для обоих полей получаем:

$$t_{nkp} = p \int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\phi_l(l, b) T_{nkp}^l(l, b) + \phi_b(l, b) T_{nkp}^b(l, b)) \cos b db, \quad (60)$$

$$t'_{nkp} = \int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (p_l \phi_l(l, b) T_{nkp}^l(l, b) + p_b \phi_b(l, b) T_{nkp}^b(l, b)) \cos b db. \quad (61)$$

Теперь, интерпретируя (61) с помощью (60), находим

$$p = w_l p_l + w_b p_b, \quad (62)$$

где

$$w_l = \frac{\int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \phi_l(l, b) T_{nkp}^l(l, b) \cos b db}{\int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\phi_l(l, b) T_{nkp}^l(l, b) + \phi_b(l, b) T_{nkp}^b(l, b)) \cos b db}, \quad (63)$$

$$w_b = \frac{\int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \phi_b(l, b) T_{nkp}^b(l, b) \cos b db}{\int_0^{2\pi} dl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\phi_l(l, b) T_{nkp}^l(l, b) + \phi_b(l, b) T_{nkp}^b(l, b)) \cos b db}. \quad (64)$$

Таблица 16: Значения коэффициентов векторного сферического разложения собственных движений звезд каталога Hipparcos, находящихся на разных расстояниях. Единицы измерения – км/с · кпс<sup>-1</sup>

|           | 50–100 пк        | 100–200 пк      | 200–300 пк      | 300–400 пк      | 400–600 пк      |
|-----------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $t_{101}$ | $-42.1 \pm 12.6$ | $-30.1 \pm 3.9$ | $-41.0 \pm 2.7$ | $-40.4 \pm 2.7$ | $-43.5 \pm 2.6$ |
| $t_{110}$ | $-31.1 \pm 12.1$ | $-18.8 \pm 3.9$ | $-5.5 \pm 2.8$  | $-3.0 \pm 3.0$  | $-4.3 \pm 2.9$  |
| $t_{111}$ | $-14.6 \pm 12.2$ | $1.0 \pm 4.0$   | $-0.7 \pm 2.7$  | $2.9 \pm 2.8$   | $-3.7 \pm 2.8$  |
| $t_{201}$ | $-9.2 \pm 11.9$  | $7.6 \pm 4.0$   | $8.0 \pm 2.8$   | $4.8 \pm 3.0$   | $7.0 \pm 3.0$   |
| $t_{210}$ | $16.8 \pm 12.2$  | $12.3 \pm 3.9$  | $0.7 \pm 2.6$   | $-8.5 \pm 2.7$  | $-7.4 \pm 2.6$  |
| $t_{211}$ | $-26.2 \pm 12.2$ | $7.3 \pm 3.9$   | $16.0 \pm 2.8$  | $23.1 \pm 2.9$  | $25.2 \pm 2.8$  |
| $t_{220}$ | $-4.3 \pm 12.3$  | $6.4 \pm 3.9$   | $0.8 \pm 2.7$   | $3.0 \pm 2.7$   | $-2.6 \pm 2.7$  |
| $t_{221}$ | $14.0 \pm 12.6$  | $4.7 \pm 4.0$   | $0.5 \pm 2.7$   | $-3.0 \pm 2.7$  | $0.9 \pm 2.6$   |
| $t_{301}$ | $8.5 \pm 12.0$   | $-7.2 \pm 3.9$  | $-5.7 \pm 2.8$  | $7.4 \pm 2.9$   | $1.0 \pm 2.8$   |
| $t_{310}$ | $20.5 \pm 12.0$  | $4.1 \pm 3.9$   | $5.2 \pm 2.7$   | $-0.5 \pm 2.8$  | $2.3 \pm 2.8$   |
| $t_{311}$ | $-12.2 \pm 11.8$ | $-1.2 \pm 3.8$  | $1.8 \pm 2.8$   | $-1.9 \pm 3.0$  | $-6.2 \pm 2.9$  |
| $t_{320}$ | $-5.2 \pm 12.2$  | $-4.1 \pm 3.9$  | $0.7 \pm 2.7$   | $-3.5 \pm 2.8$  | $-4.6 \pm 2.7$  |
| $t_{321}$ | $23.6 \pm 12.2$  | $-4.1 \pm 3.9$  | $4.5 \pm 2.7$   | $2.1 \pm 2.8$   | $-0.4 \pm 2.7$  |
| $t_{330}$ | $17.3 \pm 12.3$  | $1.9 \pm 3.9$   | $1.8 \pm 2.6$   | $0.5 \pm 2.6$   | $-1.0 \pm 2.5$  |
| $t_{331}$ | $5.8 \pm 12.7$   | $-2.4 \pm 4.0$  | $-3.4 \pm 2.6$  | $2.3 \pm 2.6$   | $-1.5 \pm 2.4$  |
| $s_{101}$ | $-1.3 \pm 12.6$  | $-0.1 \pm 3.9$  | $-0.3 \pm 2.7$  | $-2.0 \pm 2.7$  | $-3.9 \pm 2.6$  |
| $s_{110}$ | $4.3 \pm 12.1$   | $4.0 \pm 3.9$   | $-1.3 \pm 2.8$  | $-3.7 \pm 3.0$  | $-9.2 \pm 2.9$  |
| $s_{111}$ | $13.2 \pm 12.2$  | $2.5 \pm 4.0$   | $0.8 \pm 2.7$   | $-1.8 \pm 2.8$  | $0.1 \pm 2.8$   |
| $s_{201}$ | $-5.6 \pm 11.9$  | $-4.5 \pm 4.0$  | $3.0 \pm 2.8$   | $3.7 \pm 3.0$   | $6.0 \pm 3.0$   |
| $s_{210}$ | $-17.5 \pm 12.2$ | $-6.9 \pm 3.9$  | $3.1 \pm 2.6$   | $-0.9 \pm 2.7$  | $-1.4 \pm 2.6$  |
| $s_{211}$ | $-26.7 \pm 12.2$ | $-7.2 \pm 3.9$  | $2.7 \pm 2.8$   | $-3.8 \pm 2.9$  | $-0.7 \pm 2.8$  |
| $s_{220}$ | $35.4 \pm 12.3$  | $20.0 \pm 3.9$  | $31.7 \pm 2.7$  | $27.9 \pm 2.7$  | $27.2 \pm 2.7$  |
| $s_{221}$ | $23.9 \pm 12.6$  | $-5.6 \pm 4.0$  | $-8.4 \pm 2.7$  | $-10.6 \pm 2.7$ | $-7.7 \pm 2.6$  |
| $s_{301}$ | $-7.9 \pm 12.0$  | $3.3 \pm 3.9$   | $-1.4 \pm 2.8$  | $-8.1 \pm 2.9$  | $-9.8 \pm 2.8$  |
| $s_{310}$ | $11.4 \pm 12.0$  | $-4.6 \pm 3.9$  | $-17.7 \pm 2.7$ | $-16.0 \pm 2.8$ | $-17.1 \pm 2.8$ |
| $s_{311}$ | $20.0 \pm 11.8$  | $-2.7 \pm 3.8$  | $0.6 \pm 2.8$   | $-4.6 \pm 3.0$  | $4.6 \pm 2.9$   |
| $s_{320}$ | $-25.6 \pm 12.2$ | $2.3 \pm 3.9$   | $-0.8 \pm 2.7$  | $5.0 \pm 2.8$   | $-4.4 \pm 2.7$  |
| $s_{321}$ | $15.1 \pm 12.2$  | $0.5 \pm 3.9$   | $-0.2 \pm 2.7$  | $-0.9 \pm 2.8$  | $-3.5 \pm 2.7$  |
| $s_{330}$ | $46.1 \pm 12.3$  | $17.4 \pm 3.9$  | $-0.7 \pm 2.6$  | $0.8 \pm 2.6$   | $-3.2 \pm 2.5$  |
| $s_{331}$ | $35.0 \pm 12.7$  | $-1.3 \pm 4.0$  | $-3.0 \pm 2.6$  | $0.8 \pm 2.6$   | $-1.1 \pm 2.4$  |

Таблица 17: Значения коэффициентов векторного сферического разложения собственных движений звезд каталога Hipparcos, полученных на регулярной сетке. Единицы измерения – км/с · кпс<sup>-1</sup>

|           | 100–200 пк      | 200–300 пк      | 300–400 пк      | 400–600 пк      |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $t_{101}$ | $-29.4 \pm 4.1$ | $-38.8 \pm 3.4$ | $-40.5 \pm 3.5$ | $-43.0 \pm 3.7$ |
| $t_{110}$ | $-18.6 \pm 4.1$ | $-5.5 \pm 3.4$  | $-2.4 \pm 3.5$  | $-3.2 \pm 3.7$  |
| $t_{111}$ | $0.3 \pm 4.1$   | $-0.4 \pm 3.4$  | $1.9 \pm 3.5$   | $-3.4 \pm 3.7$  |
| $t_{201}$ | $7.4 \pm 4.1$   | $6.7 \pm 3.4$   | $3.5 \pm 3.5$   | $7.5 \pm 3.7$   |
| $t_{210}$ | $11.8 \pm 4.1$  | $0.5 \pm 3.4$   | $-9.0 \pm 3.5$  | $-8.7 \pm 3.7$  |
| $t_{211}$ | $6.6 \pm 4.1$   | $14.4 \pm 3.4$  | $20.0 \pm 3.5$  | $21.6 \pm 3.7$  |
| $t_{220}$ | $6.6 \pm 4.1$   | $0.5 \pm 3.4$   | $3.1 \pm 3.5$   | $-3.7 \pm 3.7$  |
| $t_{221}$ | $5.7 \pm 4.1$   | $1.4 \pm 3.4$   | $-1.5 \pm 3.5$  | $1.1 \pm 3.7$   |
| $t_{301}$ | $-7.5 \pm 4.1$  | $-4.7 \pm 3.4$  | $9.0 \pm 3.5$   | $1.2 \pm 3.7$   |
| $t_{310}$ | $5.2 \pm 4.1$   | $5.4 \pm 3.4$   | $-0.1 \pm 3.5$  | $0.9 \pm 3.7$   |
| $t_{311}$ | $0.9 \pm 4.1$   | $3.9 \pm 3.4$   | $-2.9 \pm 3.5$  | $-6.1 \pm 3.7$  |
| $t_{320}$ | $-5.2 \pm 4.1$  | $2.7 \pm 3.4$   | $-2.6 \pm 3.5$  | $-2.9 \pm 3.7$  |
| $t_{321}$ | $-4.8 \pm 4.1$  | $2.5 \pm 3.4$   | $3.8 \pm 3.5$   | $0.0 \pm 3.7$   |
| $t_{330}$ | $1.5 \pm 4.1$   | $2.7 \pm 3.4$   | $-1.0 \pm 3.5$  | $-1.1 \pm 3.7$  |
| $t_{331}$ | $-2.9 \pm 4.1$  | $-3.5 \pm 3.4$  | $3.9 \pm 3.5$   | $-1.1 \pm 3.7$  |
| $s_{101}$ | $0.1 \pm 4.1$   | $0.0 \pm 3.4$   | $0.0 \pm 3.5$   | $-0.1 \pm 3.7$  |
| $s_{110}$ | $0.3 \pm 4.1$   | $0.1 \pm 3.4$   | $0.0 \pm 3.5$   | $0.0 \pm 3.7$   |
| $s_{111}$ | $-0.1 \pm 4.1$  | $-0.1 \pm 3.4$  | $-0.1 \pm 3.5$  | $0.0 \pm 3.7$   |
| $s_{201}$ | $-3.4 \pm 4.1$  | $2.9 \pm 3.4$   | $2.4 \pm 3.5$   | $5.3 \pm 3.7$   |
| $s_{210}$ | $-5.0 \pm 4.1$  | $2.3 \pm 3.4$   | $0.9 \pm 3.5$   | $-2.7 \pm 3.7$  |
| $s_{211}$ | $-6.0 \pm 4.1$  | $2.5 \pm 3.4$   | $-2.6 \pm 3.5$  | $-1.1 \pm 3.7$  |
| $s_{220}$ | $20.0 \pm 4.1$  | $31.8 \pm 3.4$  | $28.4 \pm 3.5$  | $25.8 \pm 3.7$  |
| $s_{221}$ | $-4.5 \pm 4.1$  | $-6.9 \pm 3.4$  | $-10.1 \pm 3.5$ | $-6.2 \pm 3.7$  |
| $s_{301}$ | $2.8 \pm 4.1$   | $-0.5 \pm 3.4$  | $-8.1 \pm 3.5$  | $-9.2 \pm 3.7$  |
| $s_{310}$ | $-4.6 \pm 4.1$  | $-18.0 \pm 3.4$ | $-12.7 \pm 3.5$ | $-15.7 \pm 3.7$ |
| $s_{311}$ | $-2.8 \pm 4.1$  | $-0.6 \pm 3.4$  | $-4.8 \pm 3.5$  | $4.7 \pm 3.7$   |
| $s_{320}$ | $2.6 \pm 4.1$   | $-2.5 \pm 3.4$  | $3.9 \pm 3.5$   | $-5.2 \pm 3.7$  |
| $s_{321}$ | $0.3 \pm 4.1$   | $-0.7 \pm 3.4$  | $1.2 \pm 3.5$   | $-5.1 \pm 3.7$  |
| $s_{330}$ | $15.9 \pm 4.1$  | $-0.8 \pm 3.4$  | $1.2 \pm 3.5$   | $-2.3 \pm 3.7$  |
| $s_{331}$ | $-2.3 \pm 4.1$  | $-4.1 \pm 3.4$  | $-0.5 \pm 3.5$  | $-2.5 \pm 3.7$  |



Таблица 18: Значения коэффициентов сферического разложения лучевых скоростей звезд каталога OSACA, находящихся на разных расстояниях. Единицы измерения – км/с · кпс<sup>-1</sup>

|           | 50–100 пк        | 100–200 пк      | 200–300 пк      | 300–400 пк      | 400–600 пк      |
|-----------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $v_{001}$ | $23.8 \pm 15.7$  | $8.2 \pm 7.3$   | $-20.5 \pm 6.6$ | $-2.3 \pm 7.7$  | $-9.5 \pm 7.0$  |
| $v_{101}$ | $-2.6 \pm 15.5$  | $1.2 \pm 7.5$   | $7.8 \pm 7.0$   | $0.9 \pm 8.6$   | $3.0 \pm 8.3$   |
| $v_{110}$ | $-8.4 \pm 15.8$  | $-4.1 \pm 7.2$  | $-3.4 \pm 6.3$  | $-16.2 \pm 7.3$ | $-25.2 \pm 6.8$ |
| $v_{111}$ | $-0.1 \pm 15.7$  | $-4.2 \pm 7.2$  | $-12.2 \pm 6.6$ | $-5.5 \pm 8.0$  | $-24. \pm 7.5$  |
| $v_{201}$ | $-2.6 \pm 15.4$  | $-8.1 \pm 7.0$  | $-7.2 \pm 6.0$  | $-5.7 \pm 6.9$  | $10.3 \pm 6.2$  |
| $v_{210}$ | $6.6 \pm 15.7$   | $6.0 \pm 7.7$   | $-9.5 \pm 7.3$  | $14.0 \pm 8.8$  | $-6.3 \pm 8.5$  |
| $v_{211}$ | $10.5 \pm 15.6$  | $2.1 \pm 7.6$   | $7.1 \pm 7.3$   | $8.0 \pm 9.4$   | $25.5 \pm 9.3$  |
| $v_{220}$ | $34.2 \pm 15.9$  | $15.4 \pm 7.1$  | $15.1 \pm 6.1$  | $11.5 \pm 6.8$  | $26.6 \pm 5.7$  |
| $v_{221}$ | $-6.0 \pm 15.6$  | $1.9 \pm 7.0$   | $-12.5 \pm 6.1$ | $-7.9 \pm 6.6$  | $-19.9 \pm 5.6$ |
| $v_{301}$ | $22.0 \pm 14.9$  | $-3.4 \pm 6.8$  | $-8.8 \pm 5.8$  | $10.6 \pm 6.9$  | $-0.4 \pm 6.5$  |
| $v_{310}$ | $-14.4 \pm 15.8$ | $-9.2 \pm 7.5$  | $-13.9 \pm 6.7$ | $-31.6 \pm 8.0$ | $-48.9 \pm 7.6$ |
| $v_{311}$ | $11.1 \pm 16.0$  | $5.8 \pm 7.5$   | $-14.0 \pm 6.7$ | $-1.5 \pm 8.6$  | $-18.8 \pm 8.2$ |
| $v_{320}$ | $-15.5 \pm 15.7$ | $-12.5 \pm 7.5$ | $2.9 \pm 6.7$   | $4.0 \pm 8.0$   | $-9.6 \pm 8.0$  |
| $v_{321}$ | $-30.5 \pm 15.5$ | $6.2 \pm 7.3$   | $-6.7 \pm 6.7$  | $-3.3 \pm 8.3$  | $-1.6 \pm 8.0$  |
| $v_{330}$ | $55.2 \pm 15.9$  | $-4.6 \pm 7.0$  | $-4.7 \pm 5.6$  | $-6.1 \pm 6.1$  | $3.5 \pm 5.2$   |
| $v_{331}$ | $-22.3 \pm 15.5$ | $13.6 \pm 6.9$  | $1.4 \pm 5.7$   | $-2.0 \pm 6.3$  | $-4.1 \pm 5.3$  |

Таблица 19: Значения коэффициентов сферического разложения лучевых скоростей звезд каталога OSACA, полученные на регулярной сетке. Единицы измерения – км/с · кпс<sup>-1</sup>

|           | 100–200 пк      | 200–300 пк      | 300–400 пк       | 400–600 пк       |
|-----------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| $v_{001}$ | $8.6 \pm 7.3$   | $-14.8 \pm 9.2$ | $6.3 \pm 13.1$   | $-5.1 \pm 13.8$  |
| $v_{101}$ | $-0.4 \pm 7.3$  | $0.0 \pm 9.3$   | $2.3 \pm 13.6$   | $1.8 \pm 14.5$   |
| $v_{110}$ | $0.0 \pm 7.3$   | $0.1 \pm 9.2$   | $-3.0 \pm 12.8$  | $-1.8 \pm 13.4$  |
| $v_{111}$ | $0.1 \pm 7.3$   | $0.1 \pm 9.2$   | $2.0 \pm 12.8$   | $-5.6 \pm 13.4$  |
| $v_{201}$ | $-1.4 \pm 7.3$  | $-13.8 \pm 9.3$ | $-10.1 \pm 13.5$ | $11.6 \pm 14.2$  |
| $v_{210}$ | $4.0 \pm 7.3$   | $-2.4 \pm 9.3$  | $5.7 \pm 13.3$   | $-6.4 \pm 14.0$  |
| $v_{211}$ | $2.8 \pm 7.3$   | $6.5 \pm 9.2$   | $20.8 \pm 13.3$  | $35.0 \pm 14.1$  |
| $v_{220}$ | $20.0 \pm 7.3$  | $21.3 \pm 9.2$  | $6.5 \pm 12.7$   | $13.7 \pm 13.3$  |
| $v_{221}$ | $-0.1 \pm 7.3$  | $-11.5 \pm 9.2$ | $-5.8 \pm 12.7$  | $-30.2 \pm 13.2$ |
| $v_{301}$ | $-0.6 \pm 7.3$  | $-3.1 \pm 9.3$  | $11.9 \pm 13.2$  | $3.1 \pm 13.9$   |
| $v_{310}$ | $-8.8 \pm 7.4$  | $-23.0 \pm 9.2$ | $-41.4 \pm 13.5$ | $-51.1 \pm 14.1$ |
| $v_{311}$ | $5.5 \pm 7.4$   | $-9.7 \pm 9.3$  | $-1.4 \pm 13.5$  | $-25.8 \pm 14.2$ |
| $v_{320}$ | $-17.4 \pm 7.3$ | $2.0 \pm 9.2$   | $2.5 \pm 13.0$   | $-6.0 \pm 13.9$  |
| $v_{321}$ | $3.3 \pm 7.3$   | $-13.6 \pm 9.2$ | $-1.3 \pm 13.0$  | $-9.0 \pm 13.6$  |
| $v_{330}$ | $-7.5 \pm 7.3$  | $5.8 \pm 9.2$   | $-11.7 \pm 12.7$ | $1.5 \pm 13.2$   |
| $v_{331}$ | $9.4 \pm 7.3$   | $0.2 \pm 9.2$   | $-7.5 \pm 12.6$  | $-21.5 \pm 13.1$ |

Таблица 20: Вклад обобщенной модели Оорта в коэффициенты векторного сферического разложения

| Коэффициент | Значение                          |
|-------------|-----------------------------------|
| $v_{001}$   | $2.36 K$                          |
| $v_{101}$   | $-2.05 W/r$                       |
| $v_{110}$   | $-2.05 V/r - 0.41 F r - 1.23 G r$ |
| $v_{111}$   | $-2.05 U/r$                       |
| $v_{201}$   | $-1.06 K$                         |
| $v_{220}$   | $1.83 A$                          |
| $v_{310}$   | $0.11 F r + 0.33 G r$             |
| $v_{330}$   | $-0.42 F r + 0.42 G r$            |
| $t_{101}$   | $2.89 B$                          |
| $t_{211}$   | $-0.75 F r - 2.24 G r$            |
| $s_{101}$   | $-2.89 W/r$                       |
| $s_{110}$   | $-2.89 V/r - 1.15 F r - 3.47 G r$ |
| $s_{111}$   | $-2.89 U/r$                       |
| $s_{201}$   | $-1.29 K$                         |
| $s_{220}$   | $2.24 A$                          |
| $s_{310}$   | $0.12 F r + 0.38 G r$             |
| $s_{330}$   | $-0.49 F r + 0.49 G r$            |

Здесь

$U, V, W$  – компоненты движения Солнца;

$A, B, K$  – параметры Оорта первого порядка;

$F, G$  – параметры Оорта второго порядка.