

В.В. Иванов

ЗАКОН $\sqrt{\epsilon}$:

взгляд в прошлое

Westborough
Massachusetts, USA

Оглавление

<i>Предисловие</i>	I
Резюме	II
1. Введение	1
2. Математический пролог	2
3. $\sqrt{\epsilon}$: древняя история	5
4. Спектральные линии и $\sqrt{\epsilon}$??
5. $\sqrt{\epsilon}$ и скейлинг.....	25
6. $\sqrt{\epsilon}$: способы вывода.....	31
7. Поляризация и $\sqrt{\epsilon}$	32
8. Блуждания Леви: $\sqrt{\epsilon}$ и приближенное решение	37
9. Заключение	41
Приложение	42
Литература	45

Предисловие

В 2006 году отмечалось шестидесятилетие Бюраканской обсерватории. На проходившей в Армении конференции, посвященной этому юбилею, мною был сделан доклад "*История жизни одной бюраканской формулы*". Презентация этого доклада сохранилась в моем стареньком ноутбуке и в 2018 году была неожиданно обнаружена мною в его замусоренной памяти. С интересом ознакомившись с нею — как бы впервые прослушав свой собственный доклад — я решил, что добру не стоит пропадать, и надо попробовать на основе этой презентации написать статью. Сперва получалось что-то похожее на сделанный когда-то доклад, но постепенно это перестало походило на что-либо, что я писал когда-либо прежде. Рукопись ожила и стала расти, не всегда подчиняясь моей воле, как подросток, не слушающийся родительских наставлений.

Тот документ, который сейчас перед вами, это, конечно, в первую очередь научная, или точнее историко-научная статья, страшно длинная, затянутая, перегруженная. Но это не только написанная в не совсем обычной манере история жизни и развития всего одной формулы аналитической теории переноса — так называемого закона $\sqrt{\epsilon}$. Формула эта и все вокруг нее — не более чем несколько узких просек в дремучем лесу теории переноса. В статье обсуждается несколько модельных задач, сводящихся к решению одного и того же уравнения — интегрального уравнения типа Винера–Хопфа с постоянным (в том числе и равным нулю) свободным членом. Этого оказалось достаточно, чтобы проиллюстрировать разнообразие задач астрофизической теории переноса излучения.

Статья может служить своеобразным учебным пособием по теории переноса (не предназначенным для первого ознакомления с предметом). Здесь отражен взгляд автора, который сложился у меня после десятилетий работы в этой области. Если угодно, этот документ можно рассматривать и как мой личный (вероятно, не совсем скромный) итоговый отчет по одному из направлений моей работы. В тексте есть несколько абзацев, стиль которых не похож на обычное бесстрастное научное повествование.

Читателей, которые, хочу надеяться, все же найдутся, прошу следовать моему девизу: *Ищи хорошее в телескоп, а не плохое в микроскоп!*

В. Иванов

Март 2020 г.

Резюме

Закон $\sqrt{\epsilon}$ в его обычной астрофизической формулировке — это утверждение, что степень возбуждения двухуровневых атомов на границе полубесконечной изотермической атмосферы меньше равновесной (больцмановской) в $1/\sqrt{\epsilon}$ раз. Здесь ϵ — вероятность гибели фотона резонансной линии в расчете на одно рассеяние в ходе его специфических случайных блужданий в атмосфере. Специфика блужданий фотонов резонансных линий в разреженных средах обусловлена тем, что из-за возможности небольших изменений частоты при рассеяниях средняя длина их свободного пробега, усредненная по частотам в пределах линии, бесконечна (так называемые блуждания Леви). Для сильных резонансных линий в условиях звездных атмосфер $\epsilon \ll 1$, так что вблизи границы атмосферы из-за возможности вылета фотонов из нее отклонения от термодинамического равновесия оказываются велики. Выяснение строения неравновесного пограничного слоя, как оказывается, толстого, — ключевой вопрос теории звездных атмосфер. Родственный (по математике задачи) вопрос — расчет теплового баланса атмосферы Солнца, которая нагревается излучением, идущим из его недр. Не только интенсивность, но и поляризация излучения, выходящего из рассеивающей атмосферы, несет богатую информацию о ее свойствах. При расчетах этой поляризации также используется закон $\sqrt{\epsilon}$, точнее, обобщенная его форма.

Статья посвящена изложению развития исследований ряда модельных задач этого круга на протяжении последних 100 лет. Обсуждение конкретных проявлений закона $\sqrt{\epsilon}$ в астрофизических задачах предваряется небольшим экскурсом в его математическую основу. Представление о структуре работы можно получить из ее Оглавления.

1. Введение

Когда и кем был введен термин "закон $\sqrt{\epsilon}$ ", сказать сегодня едва ли кто сможет. Но уже в 1975 г. в заголовке одной из статей был " $\sqrt{\epsilon}$ revisited" [1]. Значит, когда-то раньше этот $\sqrt{\epsilon}$ был уже кем-то visited. Ну а дальше пошло: "An alternative derivation for $\sqrt{\epsilon}$ " [2], "The $\sqrt{\epsilon}$ law" [3], "...A generalization of the $\sqrt{\epsilon}$ law" [4], "A generalized $\sqrt{\epsilon}$ " [5], "...и закон $\sqrt{\epsilon}$ в общем виде" [6]. Так что же это такое — закон $\sqrt{\epsilon}$, который к тому же столько раз обобщали?

В теории переноса излучения так обычно называют утверждения, *эквивалентные* следующему. Если мы имеем интегральное уравнение *Винера – Хопфа*

$$S(\tau) = (1 - \epsilon) \int_0^\infty K(\tau - \tau') S(\tau') d\tau' + \epsilon \quad (1)$$

с симметричной неотрицательной нормированной на 1 ядерной функцией $K(\tau)$, так что

$$K(-\tau) = K(\tau), \quad \int_{-\infty}^\infty K(\tau) d\tau = 1, \quad (2)$$

то

$$S(0) = \sqrt{\epsilon}, \quad S(\infty) = 1. \quad (3)$$

Наряду с уравнением (1) естественно рассматривать его предельную форму, соответствующую $\epsilon = 0$ — однородное уравнение

$$S_h(\tau) = \int_0^\infty K(\tau - \tau') S_h(\tau') d\tau', \quad (4)$$

решение которого мы будем нормировать так, чтобы

$$S_h(0) = 1. \quad (5)$$

Сопоставление (1) и (3) с (4) – (5) показывает, что

$$S_h(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S(\tau)}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (6)$$

Асимптотическое поведение решения однородного уравнения (4) при $\tau \rightarrow \infty$ можно рассматривать как аналог закона $\sqrt{\epsilon}$ для предельного случая $\epsilon = 0$.

Физический смысл уравнений (1) и (4), ядерной функции $K(\tau)$, решений $S(\tau)$ и $S_h(\tau)$, а также параметра ϵ , $0 \leq \epsilon \leq 1$, в различных астрофизических задачах (а тем более в задачах других разделов физики) различен. Однако в терминологии и в обозначениях, которые используются (τ , ϵ , $H(\mu)$ и т. д.), мы будем следовать традиции, принятой в астрофизике (скорее западной, чем российской). Общее представление о поведении решений $S(\tau)$ уравнения (1) с вероятностным ядром $K(\tau)$ и соответствующего ему однородного уравнения (4) дает рис. 1.

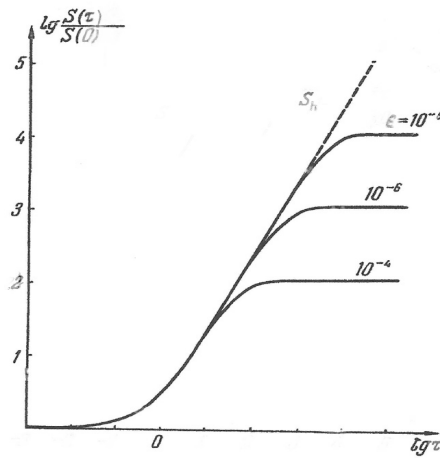


Рис. 1:

Содержание статьи следующее. Разд. 2 — элементарное введение в вопросы, связанные с решением вероятностных уравнений Винера — Хопфа. Дается вывод закона $\sqrt{\epsilon}$, один из самых простых из имеющихся. В разд. 3 — история появления $\sqrt{\epsilon}$ в астрофизике. Разд. 4 — резонансное излучение и $\sqrt{\epsilon}$. В разд. 5 на основе закона $\sqrt{\epsilon}$ обсуждается скейлинг полей излучения в атмосферах конечной толщины и крупномасштабное описание переноса линейчатого излучения. Различные способы вывода закона $\sqrt{\epsilon}$ перечисляются в разд. 6. В разд. 7 даются обобщения закона $\sqrt{\epsilon}$, необходимые для рассмотрения полей поляризованного излучения. Кратко обсуждаются проблемы многократного резонансного рассеяния как без магнитного поля, так и при наличии слабых полей. В разд. 8 закон $\sqrt{\epsilon}$ в комбинации с асимптотикой решения однородного уравнения (4) используется как отправной пункт для получения имеющего простой вероятностный смысл приближенного решения уравнения Винера — Хопфа (1), описывающего нестандартные случайные блуждания — так называемые полеты Леви (Levy flights) (ядра $K(\tau)$ с медленно убывающими "хвостами", так что уже первый момент $K(\tau)$ расходится). Наконец, в разд. 9 подводятся итоги.

2. Математический пролог

2.1. Функция Грина. Пусть $G(\tau, \tau_1)$ — функция Грина уравнения (1), то есть решение уравнения

$$G(\tau, \tau_1) = (1 - \epsilon) \int_0^\infty K(\tau - \tau') G(\tau', \tau_1) d\tau' + \delta(\tau - \tau_1), \quad (7)$$

где $\delta(\tau - \tau_1)$ — дельта-функция. Физически, функция Грина есть вероятность того, что частица (фотон, нейтрон,...), испущенная источником единичной мощности на глубине τ_1 в полубесконечной среде, достигнет приемника, находящегося на τ ,

прямо или после блужданий в среде. Число шагов при перемещении из τ_1 в τ — любое. Параметр ϵ есть вероятность "гибели" частицы при переходе от одного шага блуждания к следующему, а ядро $K(\tau)$ — плотность вероятности того, что длина одного смещения по глубине равна τ .

Пусть $G_0(\tau)$ — значение функции Грина при $\tau_1 = 0$ (поверхностная функция Грина, физически — источник на границе среды):

$$G_0(\tau) \equiv G(\tau, 0) = G(0, \tau). \quad (8)$$

Из простых вероятностных соображений легко убедиться, что

$$G(\tau, \tau_1) = \int_0^{\tau} G_0(\tau - t) G_0(\tau_1 - t) dt, \quad \tau = \min(\tau, \tau_1). \quad (9)$$

На первый взгляд неожиданно, что G_0 входит сюда нелинейно. Как мы вскоре увидим, именно эта нелинейность приводит к закону $\sqrt{\epsilon}$ и к нелинейности интегрального уравнения для H -функции (в различных его версиях). Формула (9) показывает, что поверхностная функция Грина $G_0(\tau)$ должна играть ключевую роль в задачах о переносе излучения в полупространстве (и в вероятностных задачах о блужданиях на полуоси).

На языке физики соотношение (9) почти очевидно. Перемещение частицы (например, фотона) происходит по некоторой траектории. Пусть t — наименьшее расстояние от границы среды (скажем, верхней), которой фотон достигает, перемещаясь по этой траектории. Граница атмосферы, из которой фотоны вылетают, выступает в роли поглощающего экрана. Очевидно, что $t \leq \min(\tau, \tau_1)$. В точке t происходит рассеяние, так как в противном случае фотон продолжал бы приближаться к границе. Это рассеяние делит траекторию, ведущую от τ_1 к τ , на две части. Вероятность перехода от τ_1 до t по первой части траектории есть, очевидно, $G(0, \tau_1 - t)$, так как присутствие слоев, расположенных над t , не "чувствуется", их как бы нет, а в остальной траектория произвольна. После рассеяния на глубине t блуждание продолжается, также без захода в область $\tau < t$. Поэтому можно считать, что на границе среды (полупространства, или в начальной точке числовой полуоси) испускается фотон, которому надлежит прибыть на глубину $\tau - t$. Вероятность этого есть, очевидно, $G(\tau - t, 0)$. Поскольку случайное блуждание не имеет памяти, полная вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau$ по всем траекториям с самой высокой точкой t равна произведению вероятностей перехода до рассеяния при t , то есть $G(0, \tau_1 - t)$, и после него, $G(\tau - t, 0)$. Учитывая симметрию G (формула (8)) и суммируя вклады от траекторий со всеми t , $t \leq \min(\tau, \tau_1)$, приходим к (9).

Получим теперь нелинейное соотношение, которому удовлетворяет поверхностная функция Грина G_0 . Это соотношение, наряду с формулой (9), служит основой нашего рассмотрения в этом и следующем за ним разделах статьи. По существу, формула, которую мы сейчас получим, является предельным случаем (9).

Прежде всего, введем в рассмотрение функцию Грина для бесконечной среды

$G_\infty(\tau)$ — решение уравнения

$$G_\infty(\tau) = (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau - \tau') G_\infty(\tau') d\tau' + \delta(\tau). \quad (10)$$

Понятно, что

$$G_\infty(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} G(\tau + T, T) \quad (11)$$

и

$$G_\infty(-\tau) = G_\infty(\tau). \quad (12)$$

Обратимся теперь к формуле (9). Заменяем в ней τ, τ_1 и t соответственно на $\tau + T, T$ и $T - t$ и переходим к пределу при $T \rightarrow \infty$. В результате находим, что

$$G_\infty(\tau) = \int_0^{\infty} G_0(t) G_0(\tau + t) dt, \quad \tau \geq 0. \quad (13)$$

Это очень важная для нас формула. Ее вероятностный смысл аналогичен вероятностному смыслу формулы (9). (Как это ни странно, это нелинейное уравнение для G_0 легко решается, почти что прямо, можно сказать — в лоб, если G_0 удовлетворяет некоторым простым условиям. Для модельных задач теории переноса излучения эти условия выполняются. Обсуждение этих вопросов см. в разд. 5 работы [7]).

2.1 Вывод закона $\sqrt{\epsilon}$. Формула (13) позволяет получить закон $\sqrt{\epsilon}$ буквально в одну строчку. Действительно, из (10) и (2) мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\infty(\tau) d\tau = \epsilon^{-1}. \quad (14)$$

Это, конечно, физически очевидно: среднее число рассеяний фотона в бесконечной среде равно величине, обратной вероятности его гибели при каждом акте взаимодействия со средой, по астрофизической терминологии — при однократном рассеянии.

Интегрируя теперь (13) по τ от 0 до ∞ , сразу же находим, что

$$\int_0^{\infty} G_0(\tau) d\tau = \epsilon^{-1/2}. \quad (15)$$

Это одна из форм закона $\sqrt{\epsilon}$, физически наиболее прозрачная. Словесная формулировка этого результата такова. **Среднее число рассеяний частицы, начинающей симметричное случайное блуждание на границе полупространства, равно корню квадратному из среднего числа ее рассеяний в полном пространстве.** Весьма существенно, что никаких ограничений на функцию распределения длин свободных пробегов блуждающей частицы здесь не накладываемся. Соответствующая плотность вероятности есть $K(\tau)$. Единственное требование к ней — симметричность, см. формулу (2). Понятно, что слова *фотон, полупространство, вылет через границу* можно заменить соответственно на *частицу, полюсь, достижение границы*, если речь идет о произвольном блуждании на полуоси.

Два обстоятельства, однако, принципиальны. Первое — это однородность среды. Удалив слой любой толщины, мы по-прежнему имеем такую же полубесконечную атмосферу (или, если угодно, числовая полуось остается той же полуосью, если от нее отрезать кусок). Второе обстоятельство — это потеря при каждом рассеянии информации о том, что происходило до этого (в каком направлении летел фотон и какова была его частота). Поэтому на задачи об анизотропном рассеянии и на проблемы переноса излучения спектральных линий при частичном перераспределении по частотам закон $\sqrt{\epsilon}$ непосредственно не переносится.

В астрофизической литературе под законом $\sqrt{\epsilon}$ обычно понимают результат, хотя и очень близкий к только что сформулированному, но все же иной. Он является простым следствием (15). Действительно, обозначим через $\bar{G}(\tau; s_1)$ преобразование Лапласа функции Грина $G(\tau, \tau_1)$ по переменной τ_1 ; параметр преобразования s_1 . Из (7) применением преобразования Лапласа получаем следующее уравнение для $\bar{G}(\tau; s_1)$:

$$\bar{G}(\tau; s_1) = (1 - \epsilon) \int_0^\infty K(\tau - \tau') \bar{G}(\tau'; s_1) d\tau' + e^{-s_1 \tau}. \quad (16)$$

По астрофизической терминологии, $\bar{G}(\tau; s_1)$ — это функция источников в среде с экспоненциально распределенными первичными источниками $e^{-s_1 \tau}$. Из сравнения (1) и (16) немедленно следует, что

$$S(\tau) = \epsilon \bar{G}(\tau; 0). \quad (17)$$

Применением преобразования Лапласа по переменной τ_1 к (9) получаем

$$\bar{G}(\tau; s_1) = \bar{G}_0(\tau; s_1) \int_0^\tau G_0(\tau - t) e^{-s_1 t} dt. \quad (18)$$

Наконец, полагаем $s_1 = 0$ в (18) и затем $\tau = 0$ в двух последних формулах. Учитывая вклад в интеграл в (18) от δ -функции у G_0 , находим, что

$$S(0) = \epsilon \bar{G}(0; 0) = \epsilon \bar{G}_0(0; 0) = \epsilon \int_0^\infty G_0(\tau) d\tau = \epsilon^{1/2}. \quad (19)$$

Такой способ получения этой так сказать "астрофизической версии" закона $\sqrt{\epsilon}$ кажется не самым простым из многих имеющихся способов его вывода (см. разд. 7). Он, однако, обладает тем существенным достоинством, что ясно показывает его замечательную своей простотой и прозрачностью основу — формулу (15).

В этом и в предыдущем разделе мы следовали в изложении работе [7].

3. $\sqrt{\epsilon}$: древняя история

3.1. Рассеивающие атмосферы. В астрофизике $\sqrt{\epsilon}$, по-видимому, впервые появился в 1942 г. в работе В.А. Амбарцумяна [8]. Им изучались поля излучения в

рассеивающих атмосферах планет. Результат, эквивалентный закону $\sqrt{\epsilon}$, выглядел у Амбарцумяна так:

$$A = 1 - \sqrt{\epsilon} H(\mu), \quad (20)$$

где $H(\mu)$ — решение нелинейного интегрального уравнения

$$H(\mu) = 1 + \frac{1 - \epsilon}{2} \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (21)$$

И никакого интегрального уравнения типа Винера – Хопфа! Здесь $1 - \epsilon$ — альbedo однократного рассеяния ($1 - \epsilon \equiv \lambda$ в российских обозначениях), A — плоское альbedo полубесконечной изотропно рассеивающей атмосферы, освещаемой параллельными лучами, падающими под углом $\arccos \mu$ к нормали.

Заметим, что несложные преобразования позволяют представить уравнение для H -функции в альтернативной форме, содержащей $\sqrt{\epsilon}$ явно:

$$H(\mu) \left(\sqrt{\epsilon} + \frac{1 - \epsilon}{2} \int_0^1 H(\mu') \frac{\mu' d\mu'}{\mu + \mu'} \right) = 1. \quad (22)$$

Вскоре $\sqrt{\epsilon}$ появился, так сказать, в чистом виде [9] как утверждение, что число рассеяний фотонов изотропно излучающего источника, находящегося на границе полубесконечной изотропно рассеивающей атмосферы, равно

$$N(0) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (23)$$

Это есть не что иное как формула (15) (в других обозначениях). Заметим, что получена она была в [9] с использованием нелинейного уравнения (21).

3.2. Модель Милна – Эддингтона. Вскоре $\sqrt{\epsilon}$ обнаружился и в тогдашней теории образования линий в звездных атмосферах. Согласно так называемой модели Милна – Эддингтона образования линий за счет монохроматического рассеяния [10] – [11], [12], Гл. XII, в случае изотермической атмосферы мы имеем здесь дело с уравнением (1) с ядерной функцией

$$K(\tau) = \frac{1}{2} E_1(|\tau|), \quad (24)$$

где $E_1(\tau)$ – интегральная показательная функция

$$E_1(\tau) = \int_0^1 e^{-\tau/\mu} d\mu/\mu, \quad \tau \geq 0. \quad (25)$$

Правда, интегральное уравнение (1) с милновским ядром (24) при обсуждении модели Милна – Эддингтона обычно не приводится. Вместо этого исследуется эквивалентная задача о решении уравнения переноса излучения

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = -I(\tau, \mu) + S(\tau), \quad I(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0, \quad (26)$$

в котором

$$S(\tau) = \frac{1-\epsilon}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + \epsilon. \quad (27)$$

В 1947 г. Чандрасекар показал [13] (полное изложение [13] см. в [14], § 84), что интенсивность излучения в спектральной линии, выходящего из такой атмосферы под углом $\arccos \mu$ с нормалью, выраженная в долях чернотельной интенсивности в соседнем континууме, равна

$$r_\nu(\mu) = \sqrt{\epsilon} H(\mu), \quad (28)$$

где $H(\mu)$, как и в (20), — это решение уравнения (21). Параметр ϵ (зависящий от частоты ν) здесь есть

$$\epsilon = \frac{\beta}{\beta + \phi(x)}, \quad (29)$$

где β — отношение коэффициента поглощения в соседнем с линией континууме к коэффициенту поглощения в линии и $\phi(x)$ — нормированный на 1 профиль коэффициента поглощения в линии, наконец, x — безразмерная частота, отсчитанная от центра линии в подходящих единицах (как правило, в доплеровских ширинах). Зависимость остаточной интенсивности $r_\nu(\mu)$ от частоты x и дает профиль линии. Упомянем, что функция $H(\mu)$ также зависит от значения параметра ϵ , но зависимость эта слабая (изменение не более чем в 3 раза при изменении ϵ в пределах сильной линии на несколько порядков, от $\beta \ll 1$, скажем, от 10^{-4} , до 1). Впрочем, этот результат у Чандрасекара буквально "засекречен". Почему-то обсуждение модели Милна – Эддингтона, занимавшей видное место в астрофизике того времени, отнесено едва ли не в конец книги, в предпоследнюю ее главу "XII. Другие астрофизические задачи". Чтобы обнаружить (28), в формуле (66) § 84 следует положить $B^{(1)} = 0$, то есть принять, что атмосфера изотермическая и — главное — понять, что суть дела в том, какова тут зависимость от частоты в пределах линии, а вовсе не от угловой переменной μ . "Для удобства читателя" индекс ν при выводе (28) везде опущен и зависимость r_ν от частоты не то что не обсуждается, а даже и не упоминается. Заметим, что образование линий в атмосфере, устроенной согласно модели Милна – Эддингтона, было вскоре изучено Соболевым изящным вероятностным методом [15], Гл. IV, §§ 3 – 5, позволившим, в частности, полностью воспроизвести результат Чандрасекара.

Главное для нас: несмотря на то, что атмосфера изотермическая, линия в спектре все же образуется. При обсуждении модели Милна – Эддингтона суть дела — тот факт, что линия возникает даже в изотермической атмосфере, если есть рассеяние в линии, — затемняется тем, что обычно рассматривается атмосфера с возрастающей с глубиной функцией Планка. Заметим, что согласно (28)+(29) остаточная интенсивность в центре сильной линии ($\beta \ll 1$) по порядку величины равна $\sqrt{\beta}$. При этом в центре диска звезды ($\mu = 1$) она должна быть примерно втрое больше, чем на краю ($\mu = 0$), так как при $\epsilon \ll 1$ функция $H(\mu)$ убывает от $H(1) = 2.91$ до $H(0) = 1$.

Причина того, что в модели Милна – Эддингтона (как и вообще при наличии рассеяний) линии образуются даже в изотермической атмосфере, очень проста. Фотон, излученный в пределах линии на какой-то глубине, до своего вылета из атмосферы движется из-за рассеяний по изломанной траектории, а потому длина его пути оказывается больше, чем у фотона в соседнем континууме, который до своего вылета движется по прямой. Увеличение длины пути ведет к увеличению вероятности погнубнуть из-за поглощения в полете или при рассеяниях (из-за гасящих электронных ударов и фотоионизаций с верхнего уровня; впрочем, возможностью гибели при рассеяниях мы в нашем изложении для упрощения формул пренебрегли). В итоге на частотах линии до границы атмосферы добирается меньше фотонов, чем в соседнем с линией континууме.

Пора, однако, разъяснить, как соотносятся между собой решения уравнений (1) и (21). Введем в рассмотрение уравнение

$$S(\tau, \mu) = \frac{1 - \epsilon}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau'|) S(\tau', \mu) d\tau' + e^{-\tau/\mu} \quad (30)$$

с милновской ядерной функцией и экспоненциально убывающим свободным членом $e^{-\tau/\mu}$. (Это есть частный случай уравнения (16)). Очевидно, что $S(\tau) = \epsilon S(\tau, \infty)$. Не очевидно, однако, что решения нелинейного интегрального уравнения (21) и линейного уравнения (30) чрезвычайно просто связаны между собой, именно,

$$H(\mu) = S(0, \mu). \quad (31)$$

Установление этой связи являлось, по сути дела, главным результатом, полученным в [8].

3.3. Уравнение Милна. Оставим на время в стороне проблемы монохроматического рассеяния и обратимся к задаче, в которой впервые появилось однородное уравнение (4) с милновской ядерной функцией, то есть

$$S_h(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - \tau'|) S_h(\tau') d\tau'. \quad (32)$$

Век назад это уравнение, известное как *уравнение Милна*, сыграло важную роль как в астрофизике, так и в математике. Э. Милн показал [16], что в рамках принимавшейся тогда серой ЛТР модели солнечной атмосферы решение уравнения (32) дает распределение температуры с глубиной в такой атмосфере (точнее, $S_h(\tau) \propto T^4(\tau)$, где τ — оптическая глубина; см., например, [17], Гл. 17). Вскоре Э. Хопф установил [18], что решение уравнения Милна имеет вид

$$S_h(\tau) = \sqrt{3} (\tau + q(\tau)), \quad (33)$$

где функция Хопфа $q(\tau)$ монотонно возрастает от $q(0) = 1/\sqrt{3} = 0.577\dots$ (так называемое *соотношение Хопфа – Бронштейна* [19], [20]) до $q(\infty) = 0.710\dots$ Это число

известно как *постоянная Хопфа* [18], стр. 85. Как выяснится у нас в дальнейшем, асимптотическое ($\tau \rightarrow \infty$) поведение решения уравнения Милна $S_h(\tau) \sim \sqrt{3}\tau$ в некотором смысле может рассматриваться как консервативный аналог ($\epsilon = 0$) закона $\sqrt{\epsilon}$.

Как уже говорилось, уравнение Милна сыграло важную роль не только в астрофизике, но и в математике. Рассматривая его, Н. Винер и Э. Хопф разработали в высшей степени нетривиальный метод решения уравнений вида (4); см. [18], Гл. IV. Метод основан на использовании аппарата теории функций комплексной переменной, точнее, теории аналитических функций (так называемая факторизация Винера – Хопфа). Он широко применяется в математической физике до сих пор. Ирония, однако, состоит в том, что при тех ядерных функциях $K(\tau)$, которые встречаются в астрофизике, решения уравнений (1) и (4) можно получить, пользуясь гораздо более скромными средствами. Выяснилось это, однако, лишь гораздо позже (см., в частности, разд. 5 в [7]).

Чтобы стало если не понятно, то во всяком случае видно, что решения линейного однородного уравнения Милна и нелинейного уравнения Амбарцумяна (при $\epsilon = 0$) тесно связаны между собой, приведем две неожиданные на первый взгляд формулы. Пусть α_i — момент порядка i консервативной ($\epsilon = 0$) функции $H(\mu)$:

$$\alpha_i = \int_0^1 H(\mu)\mu^i d\mu, \quad i = 0, 1, 2 \dots \quad (34)$$

Оказывается, что

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = q(\infty). \quad (35)$$

Завершая этим экскурс в раннюю молодость аналитической теории переноса излучения, упомянем о том, что уравнение Милна описывает не только ход температуры в атмосфере Солнца, но и то, как происходит рассеяние тепловых нейтронов в веществе; см., например, [21]. При разработке атомного оружия (Манхэттенский проект) значение постоянной Хопфа понадобилось иметь с высокой точностью, $q(\infty) = 0.710446$ [22]. (В качестве курьеза: недавно значение $q(\infty)$ было опубликовано с 58 знаками после запятой, причем опубликовано даже дважды [23], [24]). Уравнение (21), известное в астрофизике как уравнение Амбарцумяна, в действительности было впервые получено несколькими годами ранее в работе Гальперна, Люнебурга и Кларка [25], оставшейся неизвестной астрофизикам. С другой стороны, авторы [25], исследовавшие перенос нейтронов, ничего не знали о том, что к этому времени было сделано в астрофизике, и начинали буквально с нуля — с вывода уравнения переноса. Тем более поражают полученные в [25] результаты. В этой работе был фактически переоткрыт метод Винера – Хопфа, выведено нелинейное уравнение для H -функции, найдено явное выражение для $H(\mu)$ (формула (63), стр. 19, с $\tilde{K}(\omega)$ из (56), стр. 18), получено соотношение Хопфа – Бронштейна, вычислена постоянная Хопфа и т. д. Ссылок на эту работу не было не только у астрофизиков,

что вполне объяснимо, но и у физиков, в том числе занимавшихся бомбой, что не может не удивлять.

4. Резонансное излучение и блуждания Леви

4.1. Уравнение Бибермана – Холстейна. В трактовке процессов многократного рассеяния фотонов спектральных линий в 1940-е — 1950-е годы произошел, можно сказать, переворот. До этого времени использовалось (в частности, в модели Милна – Эддингтона, см. выше п. 3.2) предположение о неизменности частоты фотона при рассеянии, то есть о монохроматическом рассеянии. Оно оказалось нереалистичным и было заменено прямо противоположным приближением, согласно которому при каждом акте рассеяния фотон полностью "забывает" свою первоначальную частоту и переизлучается на любой частоте в пределах линии с вероятностью, пропорциональной коэффициенту поглощения (так называемое приближение полного перераспределения по частотам, или ППЧ). Основное интегральное уравнение, описывающее перенос резонансного излучения в газе малой плотности (например, в звездной атмосфере) при принятии ППЧ в простейшем случае изотермической полубесконечной атмосферы — это опять интегральное уравнение Винера – Хопфа (1), ядерная функция которого имеет вид

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) E_1(\phi(x)|\tau|) dx, \quad (36)$$

где E_1 — по-прежнему интегральная показательная функция, $\phi(x)$ — нормированный на 1 профиль коэффициента поглощения в линии, x — безразмерная частота, отсчитанная от центра линии в подходящих единицах, чаще всего — в доплеровских ширинах. Величина $K(\tau) d\tau$ есть плотность вероятности передачи возбуждения фотоном резонансной линии (за один свободный пролет) на расстояние по оси оптических глубин от τ до $\tau + d\tau$.

Интегральное уравнение (1) с ядерной функцией (36) известно (по крайней мере у физиков) как уравнение Бибермана – Холстейна, которые независимо ввели его еще в 1940-е годы [26], [27]. Очевидно, что для уравнения (1) с таким ядром закон $\sqrt{\epsilon}$ по-прежнему выполняется, как и для обсуждавшегося нами в предыдущем пункте милновского ядра. Широкое использование термина "закон $\sqrt{\epsilon}$ " началось в 1960-е — 1970-е годы в работах, посвященных исследованиям именно переноса излучения в частотах спектральных линий, в частности, после появления цитируемой до сих пор работы Эйвретта и Хаммера [28], где $\sqrt{\epsilon}$ уже подробно обсуждается, хотя самого термина "закон $\sqrt{\epsilon}$ " все еще нет.

Решение уравнения (1) с ядром (36) — это так называемая функция источников (в долях планковской). Она связана с населенностями уровней следующим образом:

$$S(\tau) = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1} / B_{\nu_0}(T). \quad (37)$$

Здесь n_i и g_i , $i = 1, 2$ — соответственно населенности уровней и их статистические веса, ν_0 — частота в непрерывном (планковском) спектре, на которой находится линия, $B_{\nu_0}(T)$ — функция Планка. Пренебрежению вынужденным излучением (которое обычно несущественно) соответствует отбрасывание -1 в круглой скобке и в знаменателе функции Планка. Тогда оказывается, что $S(\tau)$ — это просто отношение населенностей уровней в долях бoльцмановской. Параметр ϵ — отношение скорости переходов $2 \rightarrow 1$ под действием столкновений (гасящих соударений) $n_e C_{21}$ к полной скорости опустошения возбужденного уровня:

$$\epsilon = \frac{n_e C_{21}}{A_{21} + n_e C_{21}}. \quad (38)$$

Здесь n_e — электронная концентрация, A_{21} — эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода. Величина ϵ есть вероятность гибели фотона при рассеянии (photon destruction probability), тогда как $\lambda \equiv 1 - \epsilon$ в русскоязычной литературе известно как вероятность выживания фотона при рассеянии {(и остряки-студенты спрашивают, что же происходит — это фотон выживает, или это его куда-то выживают.)}

Принципиальное отличие всего класса проблем переноса излучения в частотах спектральных линий от классических задач о монохроматическом рассеянии, как изотропном, так и анизотропном, состоит в том, что при принятии приближения ППЧ не только дисперсия длин пробега фотонов, но и средняя длина их свободного пробега бесконечны. Поэтому даже вдали от границ среды диффузионное приближение неприменимо. Причина этого в том, что удаленные объемы эффективно взаимодействуют, обмениваясь фотонами в крыльях линии. Поведение решений уравнения (1) при малых ϵ и однородного уравнения (4) при больших τ зависит от того, насколько быстро коэффициент поглощения $\phi(x)$ убывает в крыльях линии, при $x \rightarrow \infty$. В итоге ядерная функция $K(\tau)$ убывает при $\tau \rightarrow \infty$ медленно, степенным образом, а не экспоненциально, как для ядра Милна. В частности, при доплеровском коэффициенте поглощения (здесь и далее — верхний индекс D)

$$\phi^D(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (39)$$

мы имеем

$$K^D(\tau) \sim \frac{1}{4|\tau|^2 \sqrt{\ln(|\tau|/\sqrt{\pi})}}, \quad |\tau| \rightarrow \infty. \quad (40)$$

При фойгтовском коэффициенте поглощения (индекс V)

$$\phi^V(x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(x-y)^2 + a^2} \quad (41)$$

с $10^{-4} \leq a \leq 10^{-1}$ оказывается, что

$$K^V(\tau) \sim \frac{\sqrt{a}}{6|\tau|^{3/2}}, \quad a|\tau| \gg 1. \quad (42)$$

Наконец, для лоренцевского (индекс L) профиля

$$\phi^L(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad (43)$$

имеем

$$K^L(\tau) \sim \frac{1}{6|\tau|^{3/2}}, \quad |\tau| \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Вывод асимптотик ядерных функций $K(\tau)$ и ряда связанных с ними величин см. в [29], §§ 2.6 и 2.7, [28].

На языке теории вероятностей случайная переменная — длина свободного пробега фотона резонансной линии — не описывается "универсальным" нормальным законом. Раздел теории вероятностей, к которому относятся проблемы переноса резонансного излучения, — это так называемые устойчивые законы (см., например, [30], [31], [32], а также [33]). Мало кто из астрофизиков о них слышал. Кратко опишем ситуацию, с которой здесь приходится иметь дело.

4.2. Перенос возбуждения в рассеивающих средах. Определяющую роль при изучении переноса резонансного излучения, или, что то же самое, переноса возбуждения фотонами резонансных линий, при принятии ППЧ играют свойства преобразования Фурье ядерной функции $K(\tau)$ уравнения (1):

$$\tilde{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (45)$$

Предположим, что

$$1 - \tilde{K}(\omega) \sim \varphi(\omega) \omega^\alpha, \quad \omega \rightarrow 0, \quad (46)$$

где $\varphi(\omega)$ — функция, медленно меняющаяся в нуле, то есть такая, что при любом $a > 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\varphi(a\omega)}{\varphi(\omega)} = 1. \quad (47)$$

Примером медленно меняющейся функции служит $\ln \omega$ или любая степень логарифма; $\varphi(\omega)$ может быть и просто некоторой постоянной (как это часто и бывает).

Условие (46) является весьма общим. Оно выполнено как для милновского ядра, так и для ядра Бибермана – Холстейна при произвольном симметричном монотонно убывающем профиле коэффициента поглощения в линии $\phi(x)$. На языке теории вероятностей выполнение этого условия означает, что ядерная функция $K(\tau)$, являющаяся плотностью вероятности, принадлежит области притяжения (симметричного) устойчивого закона.

Параметр α , $0 < \alpha \leq 2$, в формуле (46) известен как *характеристический показатель* ядерной функции $K(\tau)$. Значению $\alpha = 2$ отвечают классические случайные блуждания. Дисперсия длин пробега блуждающих частиц в этом случае конечна. Если $\alpha < 2$, то по-английски физики обычно говорят, что мы имеем дело с *Levy flights* — термин, введенный Мандельбротом [34]. На русский это иногда переводят

как *полеты* Леви, хотя правильнее было бы говорить о *пролетах* Леви (почему — см. чуть ниже). Впрочем, общепринятого термина для описания таких процессов у нас нет. Часто говорят об аномальной диффузии [32], иногда о супердиффузии [35]. В астрофизике специального термина для описания Levý flights нет. Мы будем называть такие процессы *блужданиями Леви*.

{В 1960-х годах автор и Д.И. Нагирнер плотно занялись теорией переноса резонансного излучения. Довольно быстро мы обнаружили важнейшую роль того, как ведет себя "хвост" ядра $K(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$, а потом и еще более фундаментальную роль формулы (46) (Д.И.Н.), ввели параметр $\gamma \equiv \alpha/2$ и даже назвали его характеристическим показателем, ничего не ведая до поры до времени об устойчивых законах. Термин Levý flights мы никогда не употребляли, так как до недавнего времени его не слышали (что не делает нам чести). Образно говоря, в исследованиях переноса резонансного излучения Санкт-Петербургская школа, подобно цивилизациям ацтеков и майя, долгое время развивалась обособленно, не ведая о европейской цивилизации. }

В чем качественное отличие траекторий частиц (в нашем случае — фотонов), совершающих блуждания Леви, от траекторий при обычных случайных блужданиях? Рис. 2 наглядно это иллюстрирует. В верхней его части показана траектория частицы, совершающей классические случайные блуждания (изотропное монохроматическое рассеяние), в нижней — блуждание Леви (многократные рассеяния с ППЧ при доплеровском коэффициенте поглощения). На этих рисунках показаны проекции на плоскость (τ_x, τ_y) соответствующих трехмерных блужданий. Методом Монте-Карло были смоделированы траектории, описываемые фотоном, совершившим 10^4 рассеяний в бесконечной консервативной среде ($\epsilon = 0$). Различие характера траекторий в двух случаях разительное. На верхнем рисунке мы имеем обычное случайное блуждание броуновского типа, когда смещение частицы (в нашем случае — фотона) пропорционально корню из длины пройденного пути. Смещение происходит в результате кумулятивного эффекта многих хаотических перемещений с не сильно отличающимися друг от друга длинами отдельных звеньев траектории.

Совсем иной вид имеет траектория фотона спектральной линии, рассеивающегося с ППЧ (низ рисунка). Прежде всего обратим внимание на различие масштабов. Если в классическом случайном блуждании за 10^4 рассеяний смещение составило ~ 100 , то есть порядка $\sqrt{10^4}$, как это и должно быть, то при доплеровском блуждании (так для краткости будем называть блуждание Леви фотона спектральной линии с ППЧ при доплеровском коэффициенте поглощения) оно гораздо больше, $\sim 10^4$. Главное же, сам вид траектории совсем другой. Фактически все перемещение фотона из начального положения в конечное обусловлено всего несколькими *пролетами* на огромные расстояния, которые происходят после того, как при очередном рассеянии фотон оказался излученным на большом расстоянии от центра линии. Подавляющая же часть звеньев случайной траектории столь мала, что в масштабе рисунка не видна вовсе. Фотон долго "топчется на месте", пока наконец не окажется излученным вдали от центра линии. Пролетев огромное расстояние, он в конце концов поглощается, вызывая возбуждение атома. После этого фотон опять много-

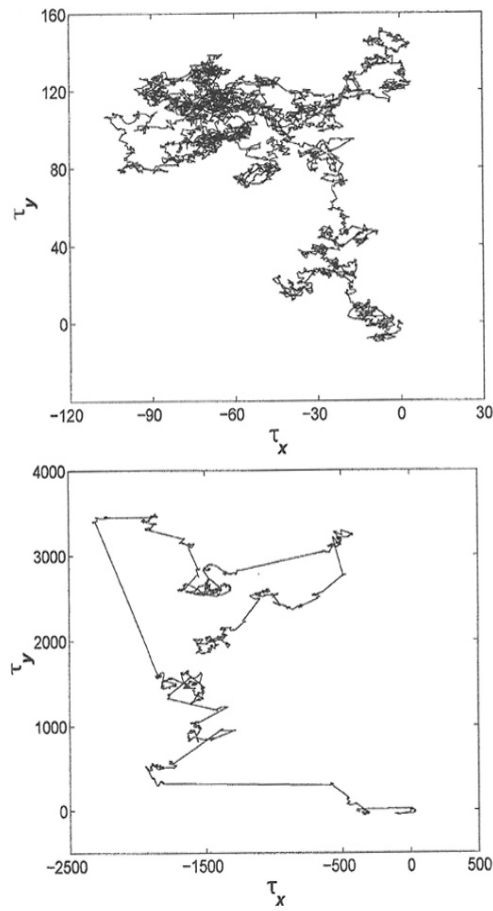


Рис. 2:

кратно переизлучается близ центра линии — и потому снова "топчется", но уже в другом месте. Говорят, что имеет место *перемежаемость*. Понятно, что все перемещение обусловлено всего несколькими большими пролетами. Картина становится еще более драматической, если продолжить следить за доплеровским блужданием, дав фотону совершить 10^5 рассеяний (рис. 3). Все смещение за 100 000 шагов здесь фактически полностью определил *один* прямой пролет фотона, излученного в крыле линии. В этом состоит *радикальное* отличие процесса переноса излучения в линии (и вообще любого блуждания Леви) от обычного диффузионного случайного блуждания. В астрофизике нарисованная сейчас качественная картина блужданий Леви впервые была ясно сформулирована Райбики и Хаммером [36].

От описания качественной картины перейдем к краткому изложению основ количественного описания блужданий Леви. Характеристический показатель α опре-

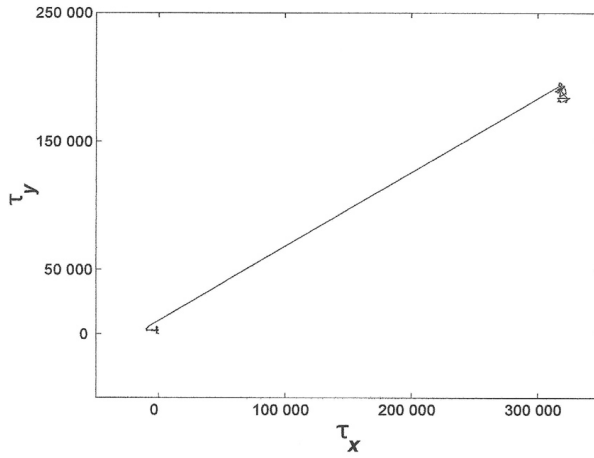


Рис. 3:

деляет асимптотику решения однородного уравнения $S_h(\tau)$ при больших τ , а одновременно, как понятно из рис. 1, и то, как при малых ϵ происходит рост $S(\tau)$.

Результат фундаментальной для нас важности формулируется следующим образом. Решение однородного уравнения Винера – Хопфа с симметричным вероятностным ядром $K(\tau)$, нормированное так, что $S_h(0) = 1$, при больших τ имеет вид (см. [29], стр. 231):

$$S_h(\tau) \sim \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha/2)} (\varphi(1/\tau))^{-1/2} \tau^{\alpha/2}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Здесь $\Gamma(\alpha/2)$ — гамма-функция. Эта формула дает лишь главный член асимптотики $S_h(\tau)$. Универсального выражения для старших членов асимптотического разложения $S_h(\tau)$, которое годилось бы при произвольном профиле поглощения в линии, не существует. О том, как формулу (48) можно получить элементарными средствами, будет сказано чуть позже (см. стр. 20).

Поскольку решение однородного уравнения Винера – Хопфа $S_h(\tau)$ с милновским ядром известно как проблема Милна, решение этого уравнения при произвольном вероятностном ядре $K(\tau)$ в астрофизике иногда называют обобщенной задачей Милна. Поле излучения создается в этом случае источником, расположенным в бесконечно глубоких слоях, на конечных глубинах источников нет. Обобщенная задача Милна была сформулирована в [37] и затем подробно исследована в [29] (см., в частности, §§ 5.6 и 6.1), [38], [39], [40]. Формулу (48) можно рассматривать как обобщение классического соотношения Хопфа – Бронштейна $S_h(\tau) \sim \sqrt{3} \tau$ на случай рассеяния фотонов спектральной линии с коэффициентом поглощения $\phi(x)$ произвольного вида.

Введем так называемую вторую ядерную функцию

$$K_2(\tau) = 2 \int_{\tau}^{\infty} K(\tau') d\tau', \quad \tau \geq 0, \quad (49)$$

представляющую собой вероятность того, что смещение фотона по оси оптических глубин за один пролет окажется больше τ . Для блужданий Леви, то есть при характеристическом показателе $\alpha < 2$, существует замечательная своей простотой связь между $K_2(\tau)$ и асимптотикой решения однородного уравнения $S_h(\tau)$. С точностью до главного члена

$$S_h(\tau) \sim \frac{C}{\sqrt{K_2(\tau)}}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (50)$$

где

$$C = \frac{2}{\alpha \Gamma(\alpha/2)} \left(\frac{2}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right)^{1/2}. \quad (51)$$

Фактически формула (50) — это просто иная форма записи асимптотики (48) (при $\alpha < 2$). Для блужданий Леви, описывающих перенос резонансного излучения, параметр α заключен в промежутке от 0 до 1 (линии с бесконечно протяженными крыльями). Коэффициент C оказывается при этом близок к 1, слегка убывая с ростом α . Отметим два важнейших частных случая. При доплеровском профиле $\alpha = 1$ и $C = 2\sqrt{2}/\pi = 0.900$, при лоренцевском $\alpha = 1/2$ и $C = 0.985$. В разд. 8 мы убедимся, что формула (50) в комбинации с законом $\sqrt{\epsilon}$ служит основой для построения приближенного решения уравнения для $S(\tau)$.

4.3. Пограничный слой. В звездных атмосферах для сильных резонансных линий $\epsilon \ll 1$. Согласно закону $\sqrt{\epsilon}$, мы имеем $S(0) = \sqrt{\epsilon}$, так что в наружных слоях атмосферы отклонения населенности возбужденного уровня от равновесной (большемановской) должны быть велики. Так, при $\epsilon \sim 10^{-4}$ концентрация возбужденных атомов ниже равновесной в ~ 100 раз.

Чем меньше ϵ , тем шире та область, где значения $S(\tau)/\sqrt{\epsilon}$ близки к $S_h(\tau)$ (см. рис. 1). Если бы реализовывались значения ϵ вплоть до, скажем, 10^{-8} , область применимости приведенных сейчас формул была бы очень широкой. К сожалению, в астрофизике столь малые значения ϵ едва ли встречаются, иначе остаточные интенсивности в центральных частях сильных линий поглощения в звездных спектрах составляли бы, как мы вскоре убедимся, $\sim 0.01\%$. На самом деле они не бывают меньше $\sim 1\%$. Тем не менее значение формул (48) и (50)+(51) для теории блужданий Леви в полупространстве трудно переоценить.

Общую картину поведения решения $S(\tau)$ неоднородного уравнения Винера – Хопфа (1) с вероятностным ядром $K(\tau)$ можно описать следующим образом. Закон $\sqrt{\epsilon}$ дает амплитуду изменения $S(\tau)$, а характеристический показатель α — наклон кривой (при $\epsilon \ll 1$ — фактически почти отрезка прямой) $\lg S_h(\tau)$ в функции $\lg \tau$ в области больших τ (см. рис. 1). На рисунке ось ординат оцифрована, чтобы проиллюстрировать закон $\sqrt{\epsilon}$. Масштаб же по оси абсцисс не нанесен специально, чтобы

сделать график универсальным, годящимся при любом значении характеристического показателя.

Характерная толщина поверхностного слоя, в котором происходит рост $S(\tau)$ от $S(0) = \sqrt{\epsilon}$ до $S(\tau) \sim 1$, получается приравниванием $S_h(\tau)$ к $1/\sqrt{\epsilon}$. Обозначим этот характерный размер τ_t , так что

$$S_h(\tau_t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (52)$$

Пользуясь (48), находим, что с точностью до множителя порядка единицы

$$\tau_t \sim \epsilon^{-1/\alpha}. \quad (53)$$

В частности, при $\alpha = 2$ имеем $\tau_t \sim 1/\sqrt{\epsilon}$. Эта величина (точнее, $1/\sqrt{3\epsilon}$) известна как *диффузионная длина*. В теории образования линий с бесконечно протяженными крыльями при принятии ППЧ характеристический показатель α заключен между 0 и 1. Величина τ_t в этом случае называется *длиной термализации* — термин, введенный в [28]. Это очень важный параметр. Он определяет толщину того слоя, в пределах которого выход излучения через границу вызывает значительные отклонения населенности возбужденного уровня от бoльцмановской. При малых ϵ — а именно этот случай и представляет интерес — оптическая толщина этого слоя велика. Приведем порядковые оценки для трех важнейших частных случаев, считая, что $\epsilon \ll 1$:

$$\tau_t^D \sim \epsilon^{-1}, \quad \tau_t^V \sim a\epsilon^{-2}, \quad \tau_t^L \sim \epsilon^{-2}. \quad (54)$$

Заметим еще, что когда коэффициент поглощения в линии убывает в крыльях $\propto |x|^{-\kappa}$, длина термализации $\tau_t \sim \epsilon^{-\kappa/(\kappa-1)}$.

Замечательный результат состоит в том, что при $\epsilon \ll 1$ (см. рис. 1)

$$S(\tau) \sim \sqrt{\epsilon} S_h(\tau), \quad \tau \ll \tau_t. \quad (55)$$

Это означает, что при $\epsilon \ll 1$ у атмосферы имеется *оптически толстый пограничный слой*, строение которого, то есть зависимость функции источников от τ , определяется только видом коэффициента поглощения в линии $\phi(x)$. Значение ϵ определяет толщину этого пограничного слоя, но не его структуру.

За общими формулами их физический смысл иной раз теряется. Имея это в виду, небольшое пояснение может оказаться не лишним. Согласно (38), при $\epsilon \ll 1$ мы имеем $\epsilon \propto n_e$. Поэтому тот факт, что $S(\tau) = \sqrt{\epsilon} S_h(\tau)$ при $\tau \ll \tau_t$, означает, что населенность возбужденного уровня во всем этом поверхностном слое $\propto \sqrt{n_e}$. Это кажется неожиданным, но вот она, работа корня из эpsilon! Скорость первичных возбуждений за счет электронных столкновений здесь, разумеется, $\propto n_e$, но гораздо бoльшую роль в создании населенности верхнего уровня играют фотовозбуждения излучением, приходящим с больших глубин.

4.4. Уточнения. Рассмотрим теперь важнейшие частные случаи немного подробнее, остановившись кратко на том, как выглядят уточненные версии асимптотики (48). При прямоугольном профиле

$$\begin{cases} \phi(x) = 1, & |x| \leq 1/2; \\ \phi(x) = 0, & |x| > 1/2 \end{cases}$$

рассеяние с ППЧ вырождается в монохроматическое рассеяние. Действительно, изменение частоты в пределах такого профиля не ведет к изменению длины свободного пробега фотона и, значит, можно считать, что частота не меняется. Поэтому мы имеем здесь дело с милновским ядром $K^M(\tau) = E_1(|\tau|)/2$. Для него

$$\tilde{K}^M(\omega) = \frac{\operatorname{arctg} \omega}{\omega}, \quad (56)$$

так что

$$1 - \tilde{K}^M(\omega) \sim \frac{\omega^2}{3}. \quad (57)$$

В этом случае $\alpha = 2$, $\varphi = 1/3$, и (48) дает $S_h(\tau) \sim \sqrt{3} \tau$, что уже не раз упоминалось (см. формулу (33)).

У милновской ядерной функции моменты всех порядков конечны. Уточненная асимптотика $S_h(\tau)$ имеет здесь вид

$$S_h(\tau) \sim \sqrt{3} (\tau + q(\infty)) + o(e^{-\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (58)$$

При ППЧ с доплеровским коэффициентом поглощения (доплеровское блуждание Леви) мы имеем $\alpha = 1$. Согласно (40), уже первый момент $K^D(\tau)$ в этом случае расходится. Можно показать [41] (см. также [29], стр. 234), что уточненная асимптотика $S_h(\tau)$ в этом случае такова:

$$S_h(\tau) \sim \frac{4}{\pi} \tau^{1/2} T^{1/4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j}{T^j}, \quad (59)$$

где $T = \ln(\tau/\sqrt{\pi})$. Коэффициенты s_j этого асимптотического разложения определяются некоторыми рекуррентными соотношениями ($s_0 = 1$).

Заметим, что для блуждания Леви, у которого асимптотика ядерной функции отличается от (40) лишь степенью логарифма и имеет, например, вид $K(\tau) \propto \tau^{-2} T^{-3/2}$, первый момент $K(\tau)$ конечен. При этом характеристический показатель $\alpha = 1$, как и для доплеровского блуждания. При $\alpha < 1$ первый момент ядра всегда расходится, при $\alpha > 1$ — сходится. Случай $\alpha = 1$ является пограничным, здесь, как видим, возможны оба варианта.

При лоренцевском ядре (44) уточненная версия асимптотики (48) имеет вид

$$S_h(\tau) \sim \left(\frac{2^7}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\sqrt{3}}{\Gamma(1/4)} \tau^{1/4} \left(1 - \frac{3}{40} \frac{\ln(\tau/\pi)}{\tau} + o(1/\tau)\right). \quad (60)$$

Таким образом, то, что по-английски называется *subleading terms*, в асимптотиках при доплеровском и при лоренцевском блужданиях совершенно не похожи друг на друга. Не исключено, впрочем, что для всех блужданий Леви с $\alpha < 1$ поправочный член в асимптотике $S_h(\tau)$, как и для лоренцевского случая, меньше главного в $\ln \tau/\tau$ раз.

5. Резонансные линии и $\sqrt{\epsilon}$

5.1. Выходящее излучение. H -функция. От рассмотрения решений уравнения для функции источников $S(\tau)$ перейдем теперь к обсуждению того, что можно непосредственно наблюдать, по крайней мере теоретически, — профилями образующихся линий. Интенсивность излучения, выходящего из полубесконечной изотермической атмосферы под углом $\arccos \mu$ с внешней нормалью на частоте x в линии, выраженная в долях планковской интенсивности в месте расположения линии в спектре, дается известной формулой

$$I(0, \mu, x) = \int_0^\infty S(\tau) \exp(-\tau/z) d\tau/z \equiv \sqrt{\epsilon} H(z), \quad z = \frac{\mu}{\phi(x)}. \quad (61)$$

Из нее следует, что $I(0, \mu, x)$ зависит не от μ и x по отдельности, а лишь от их комбинации $z \equiv \mu/\phi(x)$ и по сути дела представляет собой преобразование Лапласа от $S(\tau)$. В пределе при $\epsilon \rightarrow 0$, воспользовавшись (6), из (61) находим

$$H(z) = \int_0^\infty S_h(\tau) \exp(-\tau/z) d\tau/z, \quad \epsilon = 0. \quad (62)$$

Интеграл, фигурирующий в (61) и (62), известен в астрофизике как H -функция. Его можно получить в явном виде, через фурье-преобразование $\tilde{K}(\omega)$ ядерной функции $K(\tau)$. Для произвольного симметричного $K(\tau)$, являющегося плотностью вероятности, мы имеем

$$H(z) = \exp \left(-\frac{z}{\pi} \int_0^\infty \ln \left(1 - (1 - \epsilon) \tilde{K}(\omega) \right) \frac{d\omega}{1 + z^2 \omega^2} \right). \quad (63)$$

Может показаться почти невероятным, но факт: это выражение было получено в [7] элементарными средствами, правда, цепочка преобразований довольно длинная (она полностью воспроизведена недавно в [42]; см. также Приложение). К тому времени, когда это было сделано, сама формула (63) была уже давно известна. Для ядер, которые экспоненциально убывают при $\tau \rightarrow \infty$ (и $\epsilon = 0$), она есть еще у Хопфа [18], стр. 105. Однако ее вывод, как у Хопфа, так и потом (например, у Чандрасекара в [14], § 40) неизменно основывался на использовании неэлементарных методов комплексного анализа.

При $\epsilon \neq 0$ формула (63) легко позволяет получить закон $\sqrt{\epsilon}$, на этот раз представляющий в форме $H(\infty) = 1/\sqrt{\epsilon}$. Достаточно заметить, что при $z \rightarrow \infty$ главный вклад

в интеграл дает область малых ω , а в ней $1 - (1 - \epsilon)\tilde{K}(\omega)$ согласно (46) можно заменить просто на ϵ . Дальнейшее очевидно. Аналогичным образом, при $\epsilon = 0$ в области малых ω аргумент логарифма в (63) можно заменить на $\varphi(\omega)\omega^\alpha$. Вычисляем полученный интеграл, используя при этом медленность изменения $\varphi(\omega)$ (формула (47)). В итоге находим, что

$$H(z) \propto (\varphi(1/z))^{-1/2} z^{\alpha/2}, \quad \epsilon = 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (64)$$

Согласно (62), эта формула определяет поведение "хвоста" преобразования Лапласа функции $S_h(\tau)$. По нему тут же устанавливается, что $S_h(\tau) \propto (\varphi(1/\tau))^{-1/2} \tau^{\alpha/2}$ при $\tau \rightarrow \infty$. Строго говоря, это нетривиально, математик обязательно сказал бы, что здесь должна быть использована тауберова теорема о возможности восстановления асимптотического поведения функции по асимптотическому поведению ее преобразования Лапласа, но астрофизики об этом не ведают и все делают по-простому. Подсчет коэффициентов пропорциональности в этих формулах — техническая деталь, на которой мы не останавливаемся.

Следует подчеркнуть, что никаких ограничений на вид ядерной функции $K(\tau)$, кроме (46), при этом выводе не накладывалось. Так, он годится и для ядра Коши $K(\tau) = (1/\pi)(1 + \tau^2)^{-1}$, с которым мы будем иметь дело в разд. 9. Ядерная функция $K(\tau)$ не обязательно должна быть непрерывной суперпозицией экспонент, как это предполагается, когда при выводе асимптотики (64) используется нелинейное уравнение для H -функции.

Ядерную функцию $K(\tau)$, даваемую (36), введением переменной интегрирования $z = \mu/\phi(x)$ и изменением порядка интегрирования можно представить в виде

$$K(\tau) = \int_0^\infty G(z) e^{-|\tau|/z} \frac{dz}{z}, \quad (65)$$

причем

$$2 \int_0^\infty G(z) dz = 1. \quad (66)$$

Выкладку, приводящую ядро (36) к виду (65), и явного выражения для $G(z)$ мы не приводим (см. [29], § 2.9, [38], § 4.3.7). Складывается впечатление, что выполнение этого несложного преобразования (впервые использованного Соболевым в пионерской работе [43]; о ней чуть подробнее см. ниже) для многих оказалось непреодолимым препятствием. Детальное объяснение того, как из (36) получается (65), даже с картинкой, см. в [44].

Представление ядра $K(\tau)$ в виде (65), то есть как непрерывной суперпозиции экспонент с разными z , открывает возможности для получения в явном виде решений интегральных уравнений (1), (4) и связанных с ними. К сожалению, эти решения оказываются весьма громоздкими. Этому кругу вопросов мы в настоящей статье не затрагиваем. Со всей мощью методов аналитической теории переноса можно познакомиться по монографии Д.И. Нагирнера [38].

Кое-что нам все же понадобится. В теории уравнений (1) важную роль играет уравнение

$$S(\tau, z) = (1 - \epsilon) \int_0^\infty K(\tau - \tau') S(\tau', z) d\tau' + e^{-\tau/z}. \quad (67)$$

С астрофизической точки зрения, $S(\tau, z)$ — это функция источников в среде с экспоненциально распределенными первичными источниками. Математически, $S(\tau, z)$ по существу есть преобразование Лапласа поверхностной функции Грина \bar{G}_0 уравнения (1), точнее, $S(\tau, z) = \bar{G}_0(\tau, 1/z)$ (см. формулу (16), стр. 5). При $\tau = 0$ имеем $S(0, z) = \bar{G}_0(0, 1/z) = H(z)$. Функция $H(z)$ есть решение нелинейного интегрального уравнения

$$H(z) = 1 + (1 - \epsilon) z H(z) \int_0^\infty G(z') H(z') \frac{dz'}{z + z'}. \quad (68)$$

Оно является очевидным аналогом или, точнее, обобщением амбарцумяновского уравнения (21) для H -функции, отвечающей милновскому ядру. Уравнение (68) есть следствие представимости ядерной функции в форме (65). Альтернативная форма уравнения для H -функции:

$$H(z) \left(\sqrt{\epsilon} + (1 - \epsilon) \int_0^\infty G(z') H(z') \frac{z' dz'}{z + z'} \right) = 1. \quad (69)$$

Функция $H(z)$ монотонно возрастает от $H(0) = 1$ до

$$H(\infty) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (70)$$

Уравнение (69) легко решается итерациями. Согласно (61), это позволяет получить интенсивность выходящего излучения без решения уравнения для функции источников и без нахождения поля излучения внутри атмосферы. Оказывается, это возможно не только при равномерно распределенных по глубине источниках, но и тогда, когда они представляют собой произведение полинома $R(\tau)$ на экспоненту $\exp(-m\tau)$, $m > 0$. Именно поэтому H -функции долгое время привлекали к себе столь пристальное внимание. Заметим еще между прочим, что нелинейное уравнение для H -функции позволило впервые получить и асимптотику $S_h(\tau)$ для доплеровского блуждания Леви [45].

При доплеровском [46], лоренцевском [47] и фойгтовском [48] коэффициентах поглощения H -функции детально изучены и табулированы (см. также [29], §§ 5.6 и 5.7). Только что опубликовано [49] детальнейшее исследование фойгтовских H -функций (с учетом поглощения в континууме) и связанных с ними величин, приведены результаты иллюстративных расчетов и дана ссылка на разработанную авторами статьи программу расчета этих H -функций, имеющуюся в свободном доступе.

5.2. Учет поглощения в континууме. В приведенном выше обсуждении не учитывалось, что на частотах линии происходит также поглощение в непрерывном

спектре. Пусть β — коэффициент поглощения в континууме в долях коэффициента поглощения в линии. Помимо вылета из атмосферы, при учете поглощения в континууме имеются еще две возможности для выбывания фотонов из процесса многократных рассеяний — гибель при самих рассеяниях, с вероятностью ϵ в расчете на одно рассеяние, и гибель в полете от места одного рассеяния до следующего. Это происходит с вероятностью $\beta\delta(\beta)$, где $\delta(\beta)$ — длина пути фотона между рассеяниями в среде без границ:

$$\delta(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{\phi(x) + \beta} dx. \quad (71)$$

Полная вероятность гибели фотона в расчете на рассеяние составляет поэтому

$$\bar{\epsilon} = \epsilon + (1 - \epsilon)\beta\delta(\beta). \quad (72)$$

Ядро основного интегрального уравнения (1) при учете поглощения в континууме принимает вид

$$K(\tau) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) E_1((\phi(x) + \beta)|\tau|) dx, \quad (73)$$

где A — множитель, обеспечивающий его нормировку на 1:

$$A = \left(1 - \beta\delta(\beta)\right)^{-1}. \quad (74)$$

Если в основном уравнении (1) с таким ядром произвести замену $\epsilon \implies \bar{\epsilon}$, то закон $\sqrt{\bar{\epsilon}}$, который выражается формулой (3), очевидным образом сохраняется, с заменой в нем ϵ на $\bar{\epsilon}$.

Функция источников $S(\tau)$ при учете поглощения в континууме оказывается зависящей от двух параметров, ϵ и β . При $\epsilon \gg \beta\delta(\beta)$ поглощение в континууме играет малую роль, фотоны выбывают из процесса многократных рассеяний либо за счет гибели при рассеяниях, либо за счет вылета из атмосферы. В противоположном предельном случае $\epsilon \ll \beta\delta(\beta)$ гибель фотонов происходит главным образом из-за их поглощения в континууме при полетах от места одного рассеяния до другого.

Для сильных линий $\beta \ll 1$, вплоть до $\sim 10^{-6}$, но значение $\delta(\beta)$ при малых β оказывается большим, что частично компенсирует малость β . Зависимость от β средней длины полета фотона между рассеяниями $\delta(\beta)$ не вполне тривиальна. Обсудим ее чуть подробнее. При $\beta \gtrsim 10^{-4}$ коэффициент поглощения можно считать доплеровским, фойгтовские крылья еще не дают заметного вклада в поглощение. Приняв поэтому в (71) $\phi(x) = \pi^{-1/2} \exp(-x^2)$, нетрудно получить, что

$$\delta(\beta) \sim 2 \left(\ln \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta} \right)^{1/2}. \quad (75)$$

Это главный член асимптотического разложения $\delta(\beta)$ при доплеровском коэффициенте поглощения и $\beta \ll 1$, которое идет по обратным степеням $\ln(1/(\sqrt{\pi}\beta))$.

Получение тех нескольких первых членов разложения, которые можно найти в литературе, неизменно основывается на так называемой лемме Зоммерфельда, приводимой Чандрасекаром в [50], Гл. X, § 6. На самом деле никакой нужды в лемме Зоммерфельда нет, *всё* асимптотическое разложение $\delta(\beta)$ по обратным степеням $\ln(1/(\sqrt{\pi}\beta))$, коэффициенты которого определяются рекуррентно, можно легко получить "в лоб" (см. [29], стр. 318).

С уменьшением β линия должна становиться глубже и у нее начинают "отрастать крылья", так как при фойгтовском коэффициенте поглощения зависимость $\phi(x)$ от частоты при $|x| \gtrsim (2.5 \div 3.0)$ постепенно от $\pi^{-1/2} \exp(-x^2)$ переходит в $\sim a/(\pi x^2)$, где a — фойгтовский параметр ($a \sim (0.001 \div 0.1)$). Нетрудно показать, что при $\beta \lesssim (10^{-3} \div 10^{-4})$ в качестве $\phi(x)$ в (71) можно просто подставить $a/(\pi x^2)$, что дает правильное выражение для главного члена асимптотики:

$$\delta(\beta) \sim \sqrt{\frac{\pi a}{\beta}}, \quad (76)$$

так что в этом случае при $\epsilon \ll 1$ мы имеем $\bar{\epsilon} \sim \epsilon + (\pi a \beta)^{1/2}$. В частности, если гибель фотонов происходит в полете, а не при рассеяниях, то есть если $\epsilon \ll \beta \delta(\beta)$, то

$$\sqrt{\bar{\epsilon}} \sim (\pi a \beta)^{1/4}. \quad (77)$$

Это любопытный результат. Населенность возбужденного уровня у границы атмосферы меньше равновесной в $1/\sqrt{\bar{\epsilon}}$ раз. Даже сравнительно слабое поглощение в континууме, как следует из (77), исключает возможность очень больших отклонений от ЛТР. Далее, из физических соображений понятно, что при малых $\bar{\epsilon}$ интенсивность излучения в центральных частях линии в долях соседнего планковского континуума должна быть близка к $S(0) = \sqrt{\bar{\epsilon}}$, несколько возрастая от края диска звезды ($\mu = 0$) к центру ($\mu = 1$) (скажем, раза в два — два с половиной). Это немедленно следует из формулы (61): экспонента эффективно подавляет вклад в выходящее излучение глубин с $\tau \gtrsim z$, в поверхностном же слое $S(\tau)$ близко к $S(0) = \sqrt{\bar{\epsilon}}$. Поэтому формула (77) дает уверенную порядковую оценку центральной остаточной интенсивности сильной линии, образующейся в изотермической атмосфере. При $a = 0.01$ и $\beta = 10^{-6}$ согласно (77) получаем $\sim 1\%$, как это и наблюдается, например, у резонансных D -линий натрия в спектре Солнца. Заметим, что механизмом поглощения в континууме в этом конкретном случае является фотоотрыв электрона от отрицательного иона водорода.

Интересно, что эта оценка центральных остаточных интенсивностей сильных фраунгоферовых линий была получена очень рано, еще в 1949 г., в работе В.В. Соболева [43] (ее изложение см. в [15], Гл. VIII). В ней рассматривалась модель атмосферы Милна — Эддингтона, но не с монохроматическим рассеянием, а с ППЧ. Анализ проводился строгими методами аналитической теории переноса. Основным результатом, получение которого потребовало использования изоэренной техники, свелся к оценке центральных остаточных интенсивностей сильных линий,

фактически совпадающей с полученной выше ($\approx \sqrt{\bar{\epsilon}}$, формула (77)). Примечательно, что эта оценка была получена без каких-либо сложных вычислений — компьютеров еще не было — и не из физических соображений, скажем, того типа, что были только что приведены нами. В [43] проводились простые оценки величин, фигурирующих в нелинейном уравнении для соответствующей H -функции, которая напрямую определяет интенсивность выходящего излучения. Само же это уравнение было получено совсем непросто, с использованием принципа инвариантности.

При учете поглощения в континууме ($\beta \neq 0$) по-прежнему верны как формулы (52) и (55), так и оценки длины термализации (54), всё это с заменами $\epsilon \implies \bar{\epsilon}$. В частности, если $\epsilon \ll \beta\delta(\beta) \sim (\pi a\beta)^{1/2}$, то в поверхностных слоях, то есть при всех $\tau \ll \tau_t$, мы имеем $S(\tau) \sim (\pi a\beta)^{1/4} S_h(\tau)$, так что функция источников (при фиксированном τ) оказывается $\propto \beta^{1/4}$. Как мы уже упоминали, в случае солнечных D -линий натрия поглощение в континууме обусловлено фотоотрывом электронов от отрицательных ионов водорода H^- , с концентрацией n^- . Поскольку во всем пограничном слое $S \propto \beta^{1/4}$, это означает, что концентрация возбужденных атомов Na растет здесь пропорционально $\sqrt[4]{n^-}$. Вот какие неожиданные выводы позволяет подчас сделать закон $\sqrt{\bar{\epsilon}}$.

На самом деле в приведенном сейчас беглом обсуждении той ситуации, которая возникает, когда "подключен" континуум, нами (намеренно) допущена неточность. Свободный член в основном интегральном уравнении должен учитывать тот факт, что первичное возбуждение верхнего уровня происходит как за счет электронных столкновений (слагаемое ϵ), так и за счет фотовозбуждений излучением континуума, приходящимся на частоты линии (слагаемое $(1 - \epsilon)\beta\delta(\beta)f(\tau)$). Множитель $f(\tau)$ убывает от 1 в глубоких слоях, где существует ЛТР, так что создающее первичное возбуждение равновесное излучение падает со всех сторон, до $1/2$ у границы атмосферы, где излучение континуума приходит только снизу. Мы же в нашем обсуждении этим фактом пренебрегли, приняв $f(\tau) \equiv 1$ и получив в итоге постоянный свободный член, равный $\bar{\epsilon} = \epsilon + (1 - \epsilon)\beta\delta(\beta)$. Тем самым мы достигли нашей основной цели — понимания того, как выход излучения через границу сказывается на состоянии газа. Исследование же того, как на него влияют неравномерности в распределении мощности первичных источников — отдельная задача. Впрочем, так как $f(\tau)$ меняется всего в два раза (в изотермической атмосфере), для получения порядковых оценок вполне можно было принять $f(\tau) = 1$. Аккуратное рассмотрение см. в [51] и в [29], Гл. VII.

Подведем итог всего этого раздела статьи, точнее, его астрофизической составляющей. Главным здесь было обсуждение того, как в рассеивающих атмосферах устроен *неравновесный пограничный слой*, отделяющий горячие внутренние слои, находящиеся в термодинамическом равновесии, от холодного пространства за атмосферой, и как это сказывается на выходящем излучении. Чтобы понять суть дела и получить оценки, никаких вычислений не потребовалось. Оказалось, что достаточно знать всего две вещи — закон $\sqrt{\bar{\epsilon}}$ и асимптотику решения обобщенной задачи Милна. {При этом, образно говоря, $\sqrt{\bar{\epsilon}}$ задает *высоту* "прыжка", который соверша-

ет решение *неоднородного* уравнения (1), а асимптотика решения соответствующего ему *однородного* уравнения (4) — *длину* этого "прыжка"}.}

6. $\sqrt{\epsilon}$ и скейлинг

В этом (и только в этом) разделе будут рассматриваться атмосферы конечной оптической толщины T . Правильнее, наверное, говорить не об атмосфере конечной оптической толщины, а о плоском слое газа. Его оптическую толщину в линии считаем большой ($T \gg 1$), поглощения в континууме нет ($\beta = 0$). Закон $\sqrt{\epsilon}$ позволяет многое понять и здесь.

Дадим сначала качественное описание физической картины процесса переноса возбуждения фотонами резонансной линии в газе больших оптических размеров. Если среда является консервативной, у нас есть два характерных размера, один, принятый за единицу измерения оптических расстояний, и другой, характеризующий размер среды (в рассматриваемом случае — оптическая толщина слоя газа T). Если второй размер много больше первого, то есть $T \gg 1$, поле излучения в глубоких слоях среды можно описывать каким-то специфическим (пока нам неизвестным) способом, аналогично тому, как всюду, кроме пристеночных слоев, используются уравнения гидродинамики вместо уравнений кинетической теории газов. Однако когда оптическое расстояние от границы порядка единицы, такое приближение должно переставать работать, точно так же как гидродинамические уравнения не применимы вблизи стенок (кнудсеновский слой). Другой пример — перенос нейтронов в веществе (диффузионное приближение внутри + кинетическое описание вблизи границы). Наконец, третий пример — теория волноводов, с так называемой поправкой на открытый конец волновода.

6.1. Поверхностные слои. Начнем с изучения ситуации близ границ толстого слоя. Считая газ изотермическим и по-прежнему выражая функцию источников в долях функции Планка, вместо уравнения Винера – Хопфа (1) имеем теперь уравнение на конечном промежутке $[0, T]$:

$$S(\tau, T) = (1 - \epsilon) \int_0^T K(\tau - \tau') S(\tau', T) d\tau' + \epsilon. \quad (78)$$

По симметрии имеем

$$S(\tau, T) = S(T - \tau, T). \quad (79)$$

Из физических соображений можно считать очевидным, что в оптически толстом слое ($T \gg 1$) с равномерно распределенными первичными источниками рост функции источников от каждой из границ вглубь должен происходить так же, как и в полубесконечной среде с источниками, лежащими в глубоких слоях (формально — на бесконечности), так что

$$S(\tau, T) = S(T - \tau, T) \sim S(0, T) S_h(\tau), \quad \tau \ll \min(\tau_t, T/2). \quad (80)$$

Такой рост продолжается лишь пока $\tau \ll (\tau_t, T/2)$, поскольку только тогда большая часть возбуждающего излучения приходит из слоев, лежащих ближе к середине слоя. Поскольку решение проблемы Милна $S_h(\tau)$ известно, нахождение структуры пограничных областей сводится, таким образом, к получению асимптотической оценки $S(0, T)$ при $T \gg 1$.

Когда ядерная функция в (78) милновская: $K(\tau) = E_1(|\tau|)/2$, то она, конечно, определена при всех $\tau \in (-\infty, \infty)$. Естественно считать определенным при всех τ и ядро Бибермана – Холстейна (36). Однако уравнение Фредгольма (78) *само по себе* определяет ядерную функцию $K(\tau)$ только для $\tau \in [-T, T]$. Ядро $K(\tau)$ в (78) не нормировано на 1 на промежутке его определения. Введем функцию $K_2(\tau)$ следующим образом:

$$K_2(\tau) = 1 - 2 \int_0^\tau K(\tau') d\tau', \quad T \geq \tau \geq 0. \quad (81)$$

Заметим, что если $K(\tau)$ "естественным образом" определена при всех $\tau \in (-\infty, \infty)$, это определение функции $K_2(\tau)$ тождественно использовавшемуся ранее (см. формулу (49)). Обозначим, далее,

$$K_T(\tau) \equiv K(\tau)/[1 - K_2(T)] \quad (82)$$

и

$$\epsilon_T = \epsilon + (1 - \epsilon)K_2(T). \quad (83)$$

Новая ядерная функция $K_T(\tau)$ нормирована на промежутке $[-T, T]$:

$$\int_{-T}^T K_T(\tau) d\tau = 1. \quad (84)$$

Теперь – решающий шаг. Продолжим $K_T(\tau)$ на всю τ -ось следующим образом: $K_T(\tau) = 0$ при $|\tau| > T$ и введем в рассмотрение наряду с (78) уравнение на полуоси

$$S_T(\tau) = (1 - \epsilon_T) \int_0^\infty K_T(\tau - \tau') S_T(\tau') d\tau' + \epsilon. \quad (85)$$

На языке физики, в *полубесконечной* среде, описываемой уравнением (85), непосредственный, прямой вклад в $S_T(\tau)$ дает лишь конечный слой $(\tau - T, \tau + T)$. Согласно закону $\sqrt{\epsilon}$, мы имеем *строгий* результат

$$S_T(0) = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon_T}}, \quad (86)$$

или

$$S_T(0) = \frac{\epsilon}{\sqrt{D(T)}}, \quad D(T) \equiv \epsilon_T. \quad (87)$$

Если $T \gg 1$, следует ожидать, что в поверхностных слоях полубесконечной атмосферы (непрямой) вклад в $S_T(\tau)$ от слоев с $\tau > T$ будет невелик. Пренебрежем

этим вкладом, что почти эквивалентно замене полубесконечной атмосферы конечным слоем толщины T . Итак, естественно предполагать, что $S(0, T) \approx S_T(0)$, или

$$S(0, T) \approx \frac{\epsilon}{\sqrt{D(T)}}. \quad (88)$$

Говорят, что атмосфера является эффективно толстой (по другой терминологии — сильно диссипативной), если $\epsilon \gg K_2(T)$. В этом случае $S(0, T) \approx \sqrt{\epsilon}$. Внутри, вдали от обеих границ, $S(\tau, T)$ близко к 1, то есть достигается термодинамическое равновесие. Этот случай не очень интересен — нечто вроде приложенных друг к другу внутренними слоями полубесконечных сред. Гораздо интереснее противоположный предельный случай $\epsilon \ll K_2(T)$ (так называемые эффективно тонкие, или слабо диссипативные среды). Здесь

$$S(0, T) \approx \frac{\epsilon}{\sqrt{K_2(T)}} \quad (89)$$

и во всем слое $S(\tau, T)$ существенно меньше 1. Роль гибели фотонов при рассеяниях в этом случае пренебрежимо мала. Основным механизмом выбывания фотонов из процесса многократных рассеяний служит их вылет из среды. Если он является единственным таким механизмом, то говорят, что в среде происходит чистое, или консервативное рассеяние ($\epsilon = 0$ в множителе перед интегралом в (78)). Для этого предельного случая наряду с приближением (89) известно асимптотически точное выражение [29], стр. 384:

$$S(0, T) \sim \epsilon \frac{c_1}{\sqrt{K_2(T)}}, \quad T \rightarrow \infty, \quad (90)$$

где

$$c_1 = \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sin \frac{\pi\alpha}{2}}{2\pi \Gamma(\alpha)}\right)^{1/2}. \quad (91)$$

В частности, $c_1 = 0.914$ при $\alpha = 1/2$ (фойгтовский и лоренцевский профили) и $c_1 = 0.707$ при $\alpha = 1$ (доплеровский профиль). Как и следовало ожидать, $c_1 < 1$, но все же близко к 1. При неконсервативном рассеянии, а тем более при учете поглощения в континууме все сильно усложняется (см. [29], Гл. VIII; существенные дополнения для случая $\beta \neq 0$ имеются в [53]).

6.2. Замечание. Как будет показано в разд. 9, решение $S(\tau)$ уравнения Винера – Хопфа (1) для случая, когда оно описывает блуждания Леви, при всех τ с высокой точностью аппроксимируется выражением

$$S^a(\tau) = \sqrt{\frac{\epsilon}{D(\tau)}}. \quad (92)$$

Точность этой аппроксимации тем выше, чем медленнее ядерная функция $K(\tau)$ убывает при $|\tau| \rightarrow \infty$. Сопоставление (88) и (92) показывает, что

$$S(0, T) \approx \sqrt{\epsilon} S(T). \quad (93)$$

Это соотношение имеет широкую область применимости. Оно выполняется для любых блужданий Леви, причем тем точнее, чем меньше характеристический показатель α . Для частного случая доплеровского блуждания это "remarkable approximate relation", казавшееся surprising, было найдено в [28] из анализа численных решений соответствующих интегральных уравнений. Как видим, это любопытное (но не более того!) соотношение — простая комбинация двух вполне понятных формул, (88) и (92).

{После ознакомления с только что появившейся в arXive статьей [52] хочу добавить, что соотношение (93) должно выполняться для блужданий Леви в пространствах любой размерности d ($d = 1$ — то, что у нас называют одномерной средой, она же rod, или стержень по-западному; $d = 2$ — так называемая флатландия; $d = 3$ — обычный трехмерный мир; $d = 4, 5 \dots$ — d -мерные миры).}

6.3. Крупномасштабный скейлинг. После обсуждения поведения функции источников $S(\tau, T)$ в поверхностных слоях естественно поставить вопрос о ее поведении вдали от границ. Ограничимся рассмотрением консервативного рассеяния. Мы сейчас покажем, что здесь имеет место автомодельность, или скейлинг: $S(\tau, T)$ зависит не от τ и T по отдельности, а лишь от их отношения τ/T и множителя, зависящего от T .

Интенсивность выходящего излучения дается известной формулой

$$I(0, \mu, x) = I(T, \mu, x) = \int_0^T S(\tau, T) \exp(-\phi(x)\tau/\mu) \phi(x) d\tau/\mu. \quad (94)$$

Как уже говорилось, если $T \gg 1$, то вблизи границы функция источников должна расти с τ примерно так же, как в обобщенной задаче Милна, а значит, интенсивность выходящего из слоя излучения должна с удалением от центра линии возрастать, так как становятся "видны" более глубокие слои. Однако если удалиться от центра линии достаточно далеко, то вся среда становится прозрачной, так что экспоненту в (94) можно заменить на 1, и интенсивность оказывается $\propto \phi(x)$, то есть убывает с удалением от центра линии. Значит, при $\phi(x)T/\mu \sim 1$ интенсивность должна достигать максимума. Искать асимптотику $I(0, \mu, x)$ при фиксированном большом $|x|$ и $T \rightarrow \infty$ — это, образно говоря, все равно что стоять на месте и ждать, пока тебя накроет волна яркости. Лучше заняться серфингом, оседлав эту волну — устремить к бесконечности одновременно x и T таким образом, чтобы значение $t \equiv \phi(x)T/\mu$ оставалось фиксированным. Эта простая мысль позволила очень давно, в 1964 г., получить первый результат в том направлении, которое потом стало известно как крупномасштабное описание поля излучения [54]. Эта первая крупномасштабная асимптотика выглядела так (консервативное рассеяние, доплеровский профиль):

$$I(0, \mu, x) \propto e^{-t/2} I_1(t/2), \quad x \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty, \quad t = \phi(x)T/\mu = \text{const}. \quad (95)$$

Здесь I_1 — бесселева функция мнимого аргумента.

{Появление бесселевых функций в задачах о переносе резонансного излучения сперва показалось мне почти мистическим, вызвало оторопь, но пришлось привыкать. Обращая взгляд в прошлое, вспоминаю, как в далеком 1955 г. В.В.Соболев, который вел у студентов-астрофизиков вычислительный практикум (да, было и такое!) как-то сказал мне, тогда пятикурснику, что было бы интересно получить асимптотику $I(0, \mu, x)$ при больших T и добавил: "Вот попробуйте, займитесь этим. Но это не просто. Я не сумел." Слова эти крепко запали мне в память. Сначала (1962 г.) у меня появились доплеровские асимптотики при $x = \text{const}$ и $T \rightarrow \infty$, но было понятно, что это не вся правда. Еще через два года асимптотический серфинг позволил получить (95).}

Можно показать, что при консервативном рассеянии $S(T/2, T) \approx \epsilon/K_2(T)$ (это приближение прямого вылета, оно же метод вынесения, оно же on-the-spot-approximation). Асимптотически точное выражение имеет еще числовой множитель $(2/\alpha\pi) \sin(\alpha\pi/2)$, или $2/\pi$ при доплеровском коэффициенте поглощения ($\alpha = 1$), см. [29], стр. 441. Поэтому

$$I(0, \mu, x) \approx \int_0^1 \frac{S(T\xi, T)}{S(T/2, T)} e^{-t\xi} t d\xi \sim e^{-t/2} I_1(t/2), \quad t = \phi(x)T/\mu = \text{const}, \quad T \rightarrow \infty. \quad (96)$$

Подстановка в (96) позволяет проверить, что

$$S(\xi T, T) \sim \epsilon S(T/2, T) 2\sqrt{\xi(1-\xi)}, \quad T \rightarrow \infty, \quad 0 < \xi < 1. \quad (97)$$

Этой формулой описывается крупномасштабное поведение $S(\tau, T)$ в толстом консервативно рассеивающем слое. Она применима всюду, кроме слоев, непосредственно примыкающих к границам среды. Учитывая асимптотику доплеровской $K_2(\tau)$ (см. формулы (40) и (49))

$$K_2(\tau) \sim \frac{1}{2\tau \ln(\tau/\sqrt{\pi})}, \quad (98)$$

можем переписать последнее выражение в виде

$$S(\tau, T) \sim \epsilon \frac{2}{TK_2(T)} \sqrt{\tau(T-\tau)} \propto \epsilon \left(\ln \frac{T}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \sqrt{\tau(T-\tau)}. \quad (99)$$

Вблизи границы $\tau = 0$, точнее, во всем приграничном слое, мы имеем, как уже говорилось, $S(\tau, T) = S(0, T) S_h(\tau)$ (формула (80)). При $1 \ll \tau \ll T$ это решение должно "спиваться" с (99), то есть давать то же, что и (99). Это последнее при $\tau \ll T$ принимает вид

$$S(\tau, T) \propto \epsilon \sqrt{T} \left(\ln \frac{T}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \sqrt{\tau}, \quad (100)$$

тогда как при $1 \ll \tau \ll T$ мы имеем

$$S(\tau, T) = S(0, T) S_h(\tau) \propto \frac{\epsilon}{\sqrt{K_2(T)}} \frac{1}{\sqrt{K_2(\tau)}} \propto \epsilon \sqrt{T} \left(\ln \frac{T}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/4} \left(\ln \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/4} \sqrt{\tau}. \quad (101)$$

Поскольку логарифм — медленно меняющаяся функция, его аргумент $\tau = T\xi$ при $T \rightarrow \infty$ и $\xi = \text{const}$ можно заменить на T , так что (101) переходит в (100), как и должно быть. Аккуратный подсчет коэффициентов пропорциональности, который мы для упрощения выкладок опустили, позволяет убедиться, что в правых частях (100) и (101) они действительно совпадают (и равны $4/\pi$, как нетрудно проверить).

Таким образом, нам удалось расщепить решение на две задачи. Одна — это задача о структуре пограничного слоя. Для заданного коэффициента поглощения она решается раз и навсегда и вид ее решения $S_h(\tau)$ не зависит от размера области, в которой происходят блуждания фотонов ($S_h(0)=1$). Это то, что у нас было названо обобщенной задачей Милна. Размер области определяет коэффициент пропорциональности при $S_h(\tau)$. Другая задача — нахождение строения внутренних слоев. Здесь характерный масштаб — толщина слоя. В случае консервативного доплеровского блуждания решение этой второй задачи дает формула (97). Понятно, что возможность подобного расщепления на две задачи — пограничный слой + "недра" — имеет весьма общий характер и возможно также, например, для полубесконечных атмосфер с $\epsilon \ll 1$ и $\beta \ll 1$ (см. [29], §§ 7.7 и 8.5, [55]).

Обобщение формулы (96) на случай консервативных блужданий Леви с произвольным характеристическим показателем α имеет вид [56], [29], § 8.5

$$I(0, \mu, x) \sim \epsilon \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1 - \alpha/2) K_2(T)} t^{1-\alpha/2} e^{-t/2} I_{(\alpha+1)/2}(t/2). \quad (102)$$

Это позволяет получить из (94), что

$$S(\xi T, T) K_2(T) \sim \epsilon \frac{2 \sin(\alpha\pi/2)}{\pi\alpha} \xi^{\alpha/2} (1 - \xi)^{\alpha/2} \equiv \epsilon 2\sigma(\xi), \quad T \rightarrow \infty, \quad 0 < \xi < 1. \quad (103)$$

Уравнение, которому удовлетворяет $\sigma(\xi)$, имеет вид

$$\sigma(\xi) \left[\xi^{-\alpha} + (1 - \xi)^{-\alpha} \right] = \alpha \int_0^1 \frac{\sigma(\xi) - \sigma(\xi')}{|\xi - \xi'|^{\alpha+1}} d\xi + 1. \quad (104)$$

Оно является крупномасштабной асимптотической формой основного интегрального уравнения (78) на конечном промежутке $[0, T]$, $T \gg 1$, из которого и получено. Характерная черта этого уравнения состоит в том, что в нем нет ни больших, ни малых параметров. Функция $\sigma(\xi)$ является его точным решением.

Если среда не является консервативной, то имеются два характерных размера — толщина слоя T и длина термализации τ_t . Из основного интегрального уравнения (78) с вероятностным ядром $K(\tau)$ можно получить уравнение, описывающее крупномасштабное поведение его решения. При $\alpha < 2$ оно заменяет обычное уравнение диффузии.

Описанный только что подход — не более чем надводная часть айсберга. В астрофизике соответствующий аппарат фигурирует под разными названиями: крупномасштабное описание [39], метод масштабирования [38], скейлинг [55]. Изучение блужданий Леви на основе подхода такого типа — это теперь, можно сказать, целая наука, с множеством применений в самых разных областях физики. Это так называемые явления аномальной диффузии, описываемые обобщенным уравнением диффузии. Основной аппарат здесь — использование производных дробных порядков, представляющих собой интегральные операторы типа того, который фигурирует в (104). Обзор этой области см. в [32].

7. $\sqrt{\epsilon}$: способы вывода

В этом разделе под термином *закон $\sqrt{\epsilon}$* понимается как сам этот закон, так и асимптотика решения однородного уравнения Винера – Хопфа (все это без поляризации). Мы ограничимся простым перечислением более чем десятка известных нам способов вывода этих важных результатов, с указанием соответствующих публикаций. Список ни в коем случае не претендует на полноту. Итак, вот эти способы:

- Непосредственно из интегрального уравнения Милна (М.П. Бронштейн [19]; Э. Хопф [20])
- Из нелинейного уравнения для H -функции (В.А. Амбарцумян [8], [9])
- Дискретизация уравнения переноса по угловой переменной + предел $n \rightarrow \infty$ (С. Чандрасекар [14])
- Вероятностная трактовка переноса излучения (В.В. Соболев [15])
- Траектории случайных блужданий в полупространстве (В.В. Иванов [29])
- Из квадратичного функционала (У. Фриш и Э. Фриш [1])
- Разложением $\epsilon^{-1/2}$ в ряд по $(1 - \epsilon)^n$ и геометрической интерпретацией членов ряда (Ланди Дел’Инноченти [2])
- Прямым применением принципа инвариантности (И. Губены [3])
- Из квадратичного интеграла Райбики (Дж. Райбики [57])
- Использованием вариационного формализма (А.Г. Никогосян [58])
- Разложением по сингулярным собственным функциям (К.М. Кейз и П.Ф. Цвайфель [59])

Заметим, что соотношение, фигурирующее в астрофизике под названием закона $\sqrt{\epsilon}$, давно, по крайней мере с 1950-х годов, известно в теории вероятностей, точнее, в теории случайных блужданий. Оно является частным случаем (для симметричного блуждания: $K(\tau) = K(-\tau)$) результата, известного как теорема Спарре–Андерсена [60] (см. также [30], Гл. XII, §7). Результат же, эквивалентный формуле (20), называется в теории вероятностей формулой Спитцера – Полачека [61], [62], причем $H(\mu)$ было получено в явном виде (формула (63)).

8. Поляризация и $\sqrt{\epsilon}$

У закона $\sqrt{\epsilon}$ началась, можно сказать, вторая жизнь, когда выяснилось, что он обитает и в богатейшем царстве задач о переносе поляризованного излучения.

Изучение зависимости линейной поляризации излучения края диска Солнца от длины волны более сорока лет назад неожиданно привело к обнаружению множества поляризационных "линий", как абсорбционных, так и эмиссионных [63]. Оказалось, что этот, как теперь принято говорить, **второй спектр Солнца** мало похож на обычный фраунгоферов спектр интенсивности (опубликован трехтомный атлас поляризационного солнечного спектра [64]). Это открытие вызвало подлинный взрыв интереса к поляризации, возникающей при многократном резонансном рассеянии (а впоследствии и в более сложных случаях, см. ниже). Численное исследование поляризации в резонансных линиях при принятии ППЧ выполнялось, в частности, в [65], [66], [67], [68], [69] и в ряде других работ, почему-то без использования векторно – матричного аппарата. Это странно, поскольку этот аппарат уже давно стал стандартным при исследовании многократного монохроматического рэлеевского и молекулярного рассеяния (см., например, [70], [71], [72], [73], [74]). Для нас это обстоятельство существенно, поскольку без использования векторно-матричного языка заподозрить существование векторного обобщения закона $\sqrt{\epsilon}$ было, по-видимому, трудно. Оно было обнаружено только в 1990 г. [75].

8.1. Резонансное рассеяние. Векторы. Согласно стандартной модели, поле излучения в плоско-параллельной атмосфере, не облучаемой извне, является аксиально-симметричным, так что вектор Стокса $\mathbf{I}(\tau, \mu, x)$ имеет всего две компоненты, $\mathbf{I} = (I, Q)^T$, где T – транспонирование, и поляризация линейная. Причина возникновения поляризации – потемнение диска звезды к краю. Основное предположение при рассмотрении резонансного рассеяния, введенное в [66], – разделение угловых и частотных переменных при акте рассеяния, причем для перераспределения по частотам принимается ППЧ. Матрица перераспределения (размерности 2×2) имеет поэтому вид

$$\hat{\mathbf{R}}(\mu, x; \mu', x') = \phi(x)\phi(x')\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu'), \quad (105)$$

где $\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu')$ – фазовая матрица. При прямоугольном профиле резонансное рассеяние вырождается в обычное рэлеевское (точнее, молекулярное) рассеяние.

При принятии (105) расчет поля поляризованного излучения удается свести к решению векторного уравнения вида

$$\mathbf{S}(\tau) = (1 - \epsilon) \int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}(\tau - \tau') \mathbf{S}(\tau') d\tau' + \epsilon \mathbf{1}, \quad (106)$$

где $\mathbf{S}(\tau) = (S_I(\tau), S_Q(\tau))^T$ – векторная функция источников, компоненты которой выражены в долях функции Планка $B_\nu(T)$, и $\mathbf{1} = (1, 0)^T$. Фактически (106) – это система двух уравнений Винера – Хопфа.

Предельный случай уравнения (106) при $\epsilon = 0$ — однородное векторное уравнение

$$\mathbf{S}_h(\tau) = \int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}(\tau - \tau') \mathbf{S}_h(\tau') d\tau'. \quad (107)$$

Его решение (определенным образом нормированное, см. ниже) составляет векторную задачу Милна.

Ядерную матрицу уравнений (106) и (107) (ее размерность 2×2) можно привести к виду

$$\hat{\mathbf{K}}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \phi^2(x) dx \int_0^1 \exp(-\phi(x)|\tau|/\mu) \hat{\Psi}(\mu) d\mu/\mu, \quad (108)$$

где $\hat{\Psi}(\mu)$ — так называемая характеристическая матрица

$$\hat{\Psi}(\mu) = \hat{\mathbf{A}}^T(\mu) \hat{\mathbf{A}}(\mu), \quad (109)$$

причем

$$\hat{\mathbf{A}}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{W}{8}} (1 - 3\mu^2) \\ 0 & \sqrt{\frac{W}{8}} 3(1 - \mu^2) \end{pmatrix}. \quad (110)$$

Здесь W — параметр деполяризации, $0 < W \leq 1$. Поляризация оказывается наибольшей при $W = 1$ (дипольное рассеяние). Нормировка ядерной матрицы:

$$\int_{-\infty}^\infty \hat{\mathbf{K}}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7W/10 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Следует подчеркнуть, что приведенная только что форма уравнения для векторной функции источников является отнюдь не единственной. Фазовая матрица $\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu')$, фигурирующая в векторном уравнении переноса

$$\mu \frac{d\mathbf{I}(\tau, \mu, x)}{dx} = -\phi(x) \mathbf{I}(\tau, \mu, x) + \frac{1 - \epsilon}{2} \phi(x) \int_{-\infty}^\infty \phi(x') dx' \int_{-1}^1 \hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu') \mathbf{I}(\tau, \mu', x') d\mu' + \epsilon \mathbf{1},$$

может быть факторизована по-разному, то есть по-разному представлена в виде произведения матриц, зависящих каждая от одной угловой переменной: $\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu') = \hat{\mathbf{A}}_1(\mu) \hat{\mathbf{A}}_2(\mu')$ (см. [73], Гл. XVI). Матричная ядерная функция $\hat{\mathbf{K}}(\tau)$ имеет характеристическую матрицу вида (109) при принятии факторизации

$$\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu') = \hat{\mathbf{A}}(\mu) \hat{\mathbf{A}}^T(\mu'), \quad (112)$$

где $\hat{\mathbf{A}}(\mu)$ дается формулой (110).

Хотя векторные интегральные уравнения (106) и (107) выглядят в точности так же, как и рассматривавшиеся до сих пор скалярные уравнения (1) и (4), это вовсе не значит, что их решения тоже похожи. Однако закон $\sqrt{\epsilon}$ переносится со скалярного случая на векторный. Это один из всего двух известных нетривиальных аналитических результатов, касающихся структуры решений уравнения (106). Второй результат — асимптотика решения однородного векторного интегрального уравнения

(107). Эту асимптотику можно рассматривать как далекое обобщение классического соотношения Хопфа – Бронштейна $S(\tau) \sim \sqrt{3} \tau$.

Как показано в [75], квадратичный интеграл Райбики [57] легко обобщается на векторный случай. Одним из следствий этого является следующее векторное обобщение закона $\sqrt{\epsilon}$:

$$|\mathbf{S}(0)| = \sqrt{\epsilon}, \quad |\mathbf{S}(\infty)| = 1, \quad (113)$$

где $|\mathbf{S}|$ — эвклидова норма вектора \mathbf{S} , так что

$$|\mathbf{S}(\tau)|^2 = \mathbf{S}^T(\tau)\mathbf{S}(\tau) = S_I^2(\tau) + S_Q^2(\tau). \quad (114)$$

Если принять, что решение однородного векторного уравнения (107) связано с $\mathbf{S}(\tau)$ соотношением

$$\mathbf{S}_h(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{S}(\tau)}{\sqrt{\epsilon}}, \quad (115)$$

то в силу (113) оказывается, что нормировка $\mathbf{S}_h(\tau)$ имеет тогда вид

$$|\mathbf{S}_h(0)| = 1. \quad (116)$$

Последние две формулы — это очевидные векторные версии формул (6) и (5).

Хотя соотношение (113) и не дает возможности получить значения обеих компонент $\mathbf{S}(0)$, тем не менее оно оказалось полезным в качестве теста программ расчета векторной (и матричной, см. ниже) функции источников $\mathbf{S}(\tau)$. Как само оно, так и обобщающие его версии нашли применение во многих работах.

Заметим еще, что почти консервативное ($\epsilon \ll 1$) рэлеевское рассеяние в полубесконечной атмосфере (с учетом поляризации) было недавно изучено [76] на основе подхода того типа, который был описан в разд. 6 применительно к задаче о скалярном (без поляризации) консервативном рассеянии в оптически толстой атмосфере. В [76] решение разлагается по малому параметру ϵ (точнее, по степеням $\sqrt{\epsilon}$) и затем производится расщепление на две задачи — структура поверхностного слоя и строение внутренних слоев, где в данном случае работает диффузионное приближение. Хотя почти консервативное монохроматическое рассеяние поляризованного излучения было подробно исследовано уже давно (см., в частности, [71], [72]), подход, использованный в [76], для задач с поляризацией ранее, видимо, не применялся.

8.2. Резонансное рассеяние. Матрицы. В середине 1990-х годов для описания линейной поляризации, возникающей в плоско-параллельных атмосферах с источниками частично поляризованного излучения в результате процессов многократного рэлеевского [77], а затем и резонансного рассеяния с ППЧ [78] стало использоваться матричное уравнение переноса (размерность матриц 2×2). Не вдаваясь в подробности, сообщим, что матричная 2×2 функция источников $\hat{\mathbf{S}}(\tau)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и векторная $\mathbf{S}(\tau)$, с заменой в свободном члене вектора $\epsilon \mathbf{1}$ на матрицу $\hat{\epsilon} = \text{diag}(\epsilon_I, \epsilon_Q)$, где $\epsilon_I = \epsilon$ и $\epsilon_Q = 7W/10$. Матричное обобщение закона $\sqrt{\epsilon}$ имеет в этом случае вид ($\hat{\mathbf{E}}$ — единичная матрица)

$$\hat{\mathbf{S}}^T(0)\hat{\mathbf{S}}(0) = \hat{\mathbf{E}}, \quad \hat{\mathbf{S}}(\infty) = \hat{\epsilon}^{-1/2}. \quad (117)$$

Между четырьмя элементами матрицы $\hat{\mathbf{S}}(0)$ имеются, таким образом, три соотношения, которые доставляют чувствительные тесты при численных решениях соответствующих матричных уравнений.

В работах [78], [79], [80] было выполнено детальное аналитическое и численное исследование поляризации резонансного излучения, возникающей в рассеивающих атмосферах. Приведем важнейшие результаты.

При принятии использовавшейся выше факторизации фазовой матрицы (112) степень поляризации излучения, выходящего из атмосферы под углом $\pi/2$ к нормали (в горизонтальном направлении; $\mu = 0$) выражается через элементы матрицы $\hat{\mathbf{S}}(0)$ следующим образом:

$$p = \frac{3S_{21}(0)}{(8/W)^{1/2}S_{11}(0) + S_{21}(0)}. \quad (118)$$

Наибольшей она является при дипольном консервативном рассеянии ($W = 1, \epsilon = 0$): 9.443% при доплеровском коэффициенте поглощения [78] и 5.421% при лоренцевском [79]. При фойгтовском коэффициенте поглощения с $0 \leq a \lesssim 0.01$ лимбовая поляризация p дается с тремя значащими цифрами эмпирической формулой [80]

$$p = 9.443 \exp(-1.387\sqrt{a}) \%. \quad (119)$$

Из-за влияния перераспределения по частотам эти числа меньше поляризационного предела Соболева – Чандрасекара 11.713% (монохроматическое рассеяние; физически — томсоновское рассеяние в чисто электронной атмосфере горячей звезды).

Несколько неожиданным (и остающимся необъясненным) оказалось появление $\sqrt{\epsilon}$ в полученной в [78] из анализа обширного массива численных данных эмпирической формуле, дающей поляризацию на краю ($\mu = 0$) в атмосфере с почти консервативным ($\epsilon \ll 1$) дипольным ($W = 1$) резонансным рассеянием (ППЧ, доплеровский коэффициент поглощения):

$$p = (9.443 - 38.05\sqrt{\epsilon}) \%, \quad W = 1. \quad (120)$$

Еще один результат, заслуживающий упоминания, касается задачи Милна. Как оказалось, при ППЧ с доплеровским коэффициентом поглощения асимптотика решения однородного уравнения (107), нормированного согласно (116), при $\tau \rightarrow \infty$ имеет вид (в компонентах)

$$\begin{aligned} S_{hI}(\tau) &\sim \frac{4}{\pi} \tau^{1/2} T^{1/4}, \\ S_{hQ}(\tau) &\sim \frac{5\pi}{64\sqrt{2}} \tau^{-1/2} T^{-9/4}, \end{aligned} \quad (121)$$

где $T \equiv \ln(\tau/\sqrt{\pi})$. Эти формулы являются векторным обобщением скалярного соотношения (59), точнее, главного члена разложения (59). Как и в скалярном случае, в [78] были получены полные асимптотические разложения $\mathbf{S}_h(\tau)$ по обратным

степеням T . Эти разложения — в высшей степени нетривиальный результат. Они послужили, в частности, очень чувствительными тестами для контроля точности численного решения однородного интегрального уравнения (107), описывающего доплеровские блуждания Леви в соответствующей векторной задаче Милна.

8.3. Магнитное поле. Эффект Ханле. Следующие по сложности задачи, где появился $\sqrt{\epsilon}$, — формирование линий в атмосферах со слабым магнитным полем, вызывающим эффект Ханле. О том, что это за эффект, см., например, [4]. Для нас важно то, что эффект Ханле позволяет измерять слабые магнитные поля по поляризационным характеристикам рассеянного излучения. Опубликован ряд работ, в которых были произведены соответствующие обобщения закона $\sqrt{\epsilon}$. Аппарат, который используется для описания полей излучения при наличии слабого магнитного поля, очень непросто. Достаточно сказать, что приходится иметь дело — ни мало ни много — с тензорными функциями источников. Излагать здесь этот громоздкий аппарат просто невозможно. Стандартная ссылка — монография Ланди Дел’Инноченти [81]. Вывод обобщенного закона $\sqrt{\epsilon}$ с использованием этой техники был дан в [4]; см. также [5], [82]. Пример использования закона $\sqrt{\epsilon}$ для проверки точности расчетов в Ханле-задачах см. в [83].

Уравнения, описывающие поле излучения при учете эффекта Ханле, были представлены С.И. Грачевым [6] в более или менее привычной форме. Поле считается однородным и мононаправленным. Его направление задается угловыми переменными (μ_B, φ_B) , где μ_B — косинус зенитного расстояния и φ_B — азимут. Даже в приближении ППЧ фазовая матрица Ханле имеет, прямо скажем, устрашающий вид. Приводим структуру полной ее факторизации, полученной в [6]:

$$\hat{\mathbf{P}}(\mu, \varphi; \mu', \varphi'; \mu_B, \varphi_B, \gamma_B) = \hat{\mathbf{A}}(\mu) \hat{\mathbf{R}}(\varphi_B - \varphi) \hat{\lambda} \hat{\mathbf{M}}_B(\mu_B, \gamma_B) \hat{\mathbf{R}}(\varphi' - \varphi_B) \hat{\mathbf{E}}_{12} \hat{\mathbf{A}}^T(\mu'). \quad (122)$$

Здесь $\hat{\mathbf{A}}(\mu)$ — матрица размерности 3×6 (ее мы не выписываем), $\hat{\mathbf{R}}(\varphi)$ — блочно-диагональная матрица 6×6 , состоящая из трех матриц 2×2 : $\hat{\mathbf{R}}(\varphi) = \text{diag}\{\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{r}}(-\varphi), \hat{\mathbf{r}}(2\varphi)\}$, где $\hat{\mathbf{E}} = \text{diag}\{1, 1\}$ и $\hat{\mathbf{r}}(\varphi)$ — матрица вращения на угол φ ; матрица $\hat{\mathbf{M}}_B(\mu_B, \gamma_B)$ размерности 6×6 описывает влияние магнитного поля, γ_B — безразмерная напряженность поля; $\hat{\mathbf{E}}_{12} = \text{diag}\{1, 1, 2, 2, 2, 2\}$; наконец, $\hat{\lambda} = \text{diag}\{\lambda, \lambda_p, \lambda_p, \lambda_p, \lambda_p, \lambda_p\}$ — матричное альбедро однократного рассеяния, где $\lambda \equiv (1 - \epsilon)$ — обычное альбедро однократного рассеяния, $\lambda_p = \lambda/(1 + \lambda\delta^{(2)})$ — альбедро с учетом упругих деполяризующих столкновений.

Основное матричное интегральное уравнение, к решению которого сводится расчет поля излучения в обсуждаемом случае, — это уравнение для матричной 6×6 функции источников $\hat{\mathbf{S}}(\tau)$. Откуда берется размерность 6×6 , объяснять не будем. Вот как выглядит это уравнение:

$$\hat{\mathbf{S}}(\tau) = \hat{\lambda} \hat{\mathbf{H}}_B \int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}(\tau - \tau') \hat{\mathbf{S}}(\tau') d\tau' + \hat{\mathbf{S}}^*, \quad (123)$$

где ядерная матрица $\hat{\mathbf{K}}(\tau)$ размерности 6×6

$$\hat{\mathbf{K}}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \hat{\mathbf{E}}_{12} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^{2\pi} e^{-\phi(x)|\tau|/\mu} \hat{\mathbf{R}}(\varphi) \hat{\mathbf{A}}^T(\mu) \hat{\mathbf{A}}(\mu) \hat{\mathbf{R}}(-\varphi) d\varphi. \quad (124)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{H}}_B = \hat{\mathbf{H}}_B(\mu_B, \varphi_B, \gamma_B) = \hat{\mathbf{R}}(\varphi_B) \hat{\mathbf{M}}_B(\mu_B, \gamma_B) \hat{\mathbf{R}}(-\varphi_B) \quad (125)$$

и $\hat{\mathbf{S}}^*$ — диагональная матрица первичных источников.

Было получено несколько версий векторного (и матричного) закона $\sqrt{\epsilon}$, относящихся к обсуждаемым задачам [4], [5], [82], [83]. Чтобы привести их в явном виде, понадобился бы еще с десяток формул. Воздержимся от этого, ограничившись сообщением, что самые общие формы закона $\sqrt{\epsilon}$, полученные в [6] и [84], — это матричные соотношения, схожие с (117), но чуть более сложные (размерность матриц 6×6). К сожалению, эти самые общие матричные соотношения практического использования пока не нашли.

Заканчивая на этом повествование про проявления, или точнее про появления $\sqrt{\epsilon}$ в теоретических исследованиях солнечного эффекта Ханле (сегодняшнее состояние дел см. в [85]), хочется упомянуть, что в 2015 г. солнечная спектрополяриметрия стала и заатмосферной. Осуществление проекта CLASP (**C**hromospheric **L**Ayer **S**pectro**P**olarimeter) привело к обнаружению эффекта Ханле в линии лайман-альфа и продемонстрировало богатые возможности, открываемые эффектом Ханле для исследования переходного слоя между хромосферой и короной [86].

В заключение так и хочется сказать: этот $\sqrt{\epsilon}$ — ну прямо вирус какой-то, во все программы проникает — но не вредит, а помогает!

9. Блуждания Леви: $\sqrt{\epsilon}$ и приближенное решение

Литература, посвященная блужданиям Леви, необъятна. Рожденные в теории вероятностей, они быстро нашли применения в физике, экономике, финансовой математике, теории рекордов и ее приложениях (климат, спорт и др.). Астрофизики о блужданиях Леви долгое время не слыхивали. Однако в середине 1960-х годов петербургские астрофизики открыли для себя сначала существование характеристического показателя, а потом, как свидетельствует статья [33], узнали и об устойчивых законах. Впоследствии изучение блужданий Леви, совершаемых фотонами резонансных линий, привело к формулировке приближения, которое может оказаться полезным и вне астрофизики. Об этом и пойдет сейчас речь.

В этом разделе мы будем сначала пользоваться преимущественно вероятностной терминологией, вернувшись позже к астрофизическому обсуждению.

9.1. Иллюстративный пример. Начнем с одного частного, но важного примера. Рассмотрим блуждания вдоль полуоси $\tau \geq 0$ частиц, рождающихся при всех

τ с равной вероятностью (уравнение Винера – Хопфа (1)). Пусть плотность вероятности длин шагов блуждающих частиц — это распределение Коши:

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \tau^2}. \quad (126)$$

Может показаться неожиданным, что *при малых ϵ* столь простая функция как

$$S^a(\tau) = \sqrt{\epsilon} \left(1 - (1 - \epsilon) \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \tau \right)^{-1/2} \quad (127)$$

является очень хорошим приближением к точному решению уравнения Винера – Хопфа (1) с ядерной функцией $K(\tau)$ вида (126) (для краткости далее просто — с ядром Коши). Так, при $\epsilon = 10^{-4}$ максимальная относительная погрешность этого приближения составляет $\sim 10\%$, в то время как само решение $S(\tau)$ изменяется в 100 раз.

Более того, функция

$$G_0^a(\tau) = \frac{dS^a(\tau)}{d\tau} + \delta(\tau) = \sqrt{\epsilon} \frac{(1 - \epsilon)}{\pi(1 + \tau^2) \left(1 - (1 - \epsilon) \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \tau \right)^{3/2}} + \delta(\tau) \quad (128)$$

при $\epsilon \ll 1$ служит превосходным приближением для поверхностной функции Грина $G_0(\tau)$ уравнения (1) с ядром Коши.

Важный для дальнейшего факт: главный член асимптотики решения $S_h(\tau)$ однородного уравнения (4) с ядром Коши, нормированного так, что $S_h(0) = 1$, имеет вид

$$S_h(\tau) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tau^{1/2}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (129)$$

тогда как приближенное решение (127) при $\epsilon = 0$ дает

$$S_h^a(\tau) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau^{1/2}. \quad (130)$$

Коэффициент при $\tau^{1/2}$ у асимптотики $S_h^a(\tau)$ отличается от его точного значения на множитель, близкий к 1, именно, $2\sqrt{2}/\pi = 0.900$.

9.2. Основное приближение. Так что же, эти аппроксимации удалось так удачно подобрать именно для случая ядра Коши, и только этим все и ограничивается? Ответ, конечно, отрицателен, иначе не существовало бы отдельной части статьи, посвященной приближенным решениям для блужданий Леви.

Все проясняется, если заметить, что приближение (127) — это на самом деле написанное применительно к случаю ядра Коши общее выражение

$$S^a(\tau) = \sqrt{\frac{\epsilon}{D(\tau)}}, \quad (131)$$

где

$$D(\tau) = \epsilon + (1 - \epsilon)K_2(\tau) \quad (132)$$

и $K_2(\tau)$ — введенная ранее формулой (49) (стр. 16) так называемая вторая ядерная функция. Приближение (131) дает правильный результат на обоих концах промежутка изменения τ . При $\tau = 0$ мы имеем $S^a(0) = \sqrt{\epsilon}$, при $\tau = \infty$ формула (131) дает $S^a(\infty) = 1$. Таким образом, закону корня из эpsilon эта аппроксимация удовлетворяет. Простая выкладка показывает, что она удовлетворяет также соотношению, получающемуся из (1) при $\tau = 0$:

$$S(0) = (1 - \epsilon) \int_0^\infty K(\tau') S(\tau') d\tau' + \epsilon, \quad (133)$$

если в него в качестве $S(\tau)$ подставить аппроксимацию (131). При $\epsilon \ll 1$ имеется область значений τ , где $S(\tau) \approx S_h(\tau)$. Когда ядро $K(\tau)$ убывает при $|\tau| \rightarrow \infty$ настолько медленно, что его второй момент бесконечен (на жаргоне: когда ядро имеет толстые хвосты), то мы имеем дело с блужданиями Леви. Для них, как говорилось в разд. 5, имеет место следующая асимптотика:

$$S_h(\tau) \sim \frac{C}{\sqrt{K_2(\tau)}}, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

где C — даваемый (51) (стр. 16) множитель, близкий к 1 (для доплеровского блуждания $C = 0.900$, для лоренцевского $C = 0.985$). Таким образом, при больших τ с точностью до множителя порядка единицы $S_h(\tau) \sim 1/\sqrt{K_2(\tau)}$. Комбинируя это с тем, что $S(0) = \sqrt{\epsilon}$, в качестве естественной интерполяционной формулы приходим к аппроксимации (131). При $\epsilon \ll 1$ выражение (131) служит разумным приближением к решению уравнения (1), ядерная функция которого $K(\tau)$ — это плотность вероятности. Это приближение тем лучше, чем меньше ϵ и чем медленнее $K(\tau)$ убывает при $|\tau| \rightarrow \infty$. Но ограничивается ли этим дело, спрашиваем мы еще раз?

Как только приближение (131) было сформулировано (1971 г.), сразу же возникло предположение, что это не просто интерполяционная формула (как утверждается в [38], § 4.11.2), а нечто большее. Стоит взглянуть на рис. 2 и 3 (стр. 14–15) и прочесть приведенное на стр. 14 обсуждение характера траекторий, которые частица описывает в ходе блужданий Леви, чтобы заподозрить, что суть приближения, вероятно, состоит в том, что вся зигзагообразная траектория заменяется одним ее звеном — наибольшим. Для бесконечной среды это так называемое приближение **наибольшего пролета** (ПНП, longest flight approximation) было сформулировано Райбики и Хаммером в [36]. Впоследствии было показано [88], что $S^a(\tau)$ — это не что иное как ПНП для полубесконечной среды. Таким образом, этим приближением выражается самая суть специфики блужданий Леви — определяющая роль рекордно больших свободных пролетов. Поэтому неудивительно, что оно обладает качествами, которые редко встречаются вместе — простотой, высокой точностью и широкой областью применимости.

Доказательство того, что (131) — это ПНП для полупространства, в принципе не является трудным, однако требует довольно длинных рассуждений типа тех, которые были использованы при получении выражения для функции Грина $G(\tau, \tau_1)$ уравнения (1) через поверхностную функцию Грина $G_0(\tau)$ (формула (9), стр. 3). Приводить это доказательство здесь мы не будем; см. его в [88].

Точность, обеспечиваемая аппроксимациями (131) и (134) в задачах о переносе резонансного излучения с доплеровским и фойгтовским коэффициентами поглощения, детально исследована. Она очень высока — при доплеровском профиле того же порядка, что и точность самого приближения ППЧ. При фойгтовском коэффициенте поглощения в крыльях линии приближение ППЧ, как давно известно, работает плохо, можно сказать, отказывает. Однако если постулировать применимость ППЧ при фойгтовском профиле, то обсуждаемое приближение и в этом случае работает превосходно. Подробности см. в [87].

9.2. Дополнения. Сделаем два существенных добавления. Во-первых, оказывается, что производная аппроксимации $S^a(\tau)$ служит очень хорошим приближением несингулярной части поверхностной функции Грина:

$$G_0^a(\tau) = \sqrt{\epsilon}(1 - \epsilon) \frac{K(\tau)}{D^{3/2}(\tau)} + \delta(\tau). \quad (134)$$

Как было показано в разд. 1, через $G_0(\tau)$ сравнительно просто (в квадратурах) выражается функция Грина $G(\tau, \tau_1)$ уравнения (1). Поэтому мы фактически получили приближенное решение всех уравнений Винера – Хопфа с произвольным свободным членом и с симметричным вероятностным ядром $K(\tau)$, медленно (степенным или почти степенным образом) убывающим при $|\tau| \rightarrow \infty$. Единственное, что нужно иметь — ядерные функции $K(\tau)$ и $K_2(\tau)$.

Во-вторых, предположения о виде ядерной функции $K(\tau)$ фактически сводились у нас к тому, что оно должно описывать симметричные блуждания Леви — и больше ничего. Никакой специфики задач о переносе резонансного излучения мы не использовали. Это приближение имеет универсальный характер. Оно годится для любых блужданий Леви на полуоси (что мы и проиллюстрировали в начале этого раздела, рассмотрев блуждания с ядром Коши). Трудно поверить, что это приближение не было уже давно найдено, но никаких следов этого автору обнаружить не удалось. Впрочем, результат, по духу очень близкий к ПНП, имеется у Феллера в [30]. Утверждается, что для симметричного блуждания Леви с характеристическим показателем $\alpha < 1$ математическое ожидание отношения суммы n случайных шагов к величине максимального из шагов при $n \rightarrow \infty$ стремится к $1/(1-\alpha)$. Иначе говоря, при $\alpha < 1$ основной вклад в сумму вносится наибольшим из слагаемых (задача 20 в §11 Гл. XIII в [30]). Для доплеровского случайного блуждания и для блуждания с ядром Коши $\alpha = 1$, так что вклад наибольшего шага уже не является доминирующим, но приближение (131) все еще хорошо работает. Сведений о том, годится ли оно и при $\alpha > 1$, или правильнее, какую точность оно при этом обеспечивает, у меня нет.

Упомянем еще, что приближение (131) было использовано в разд. 6 для объяснения скейлинга функции источников на границе слоя конечной толщины (формула (93), стр. 27).

10. Заключение

По-английски Аналитическая Теория Переноса — это **Analytical Radiative Transfer**, или сокращенно ART, то есть **Искусство**. В этом искусстве закону $\sqrt{\epsilon}$ принадлежит достойное место. Закон $\sqrt{\epsilon}$ для уравнения Винера – Хопфа (1) и асимптотика решения однородного уравнения (4) с тем же ядром были исторически первыми нетривиальными строгими результатами, полученными в теории переноса излучения. Это произошло около 1930 г. Как впоследствии оказалось, эти результаты допускают обобщения в различных направлениях. Они послужили ключом к пониманию величины не-ЛТР эффектов в задачах об образовании спектральных линий в рассеивающих атмосферах. Далее, $\sqrt{\epsilon}$ дал объяснение долгое время остававшемуся непонятным скейлингу в задачах об образовании линий в атмосферах конечной толщины. Оставаясь и по сегодняшний день единственным точным аналитическим результатом в задачах о переносе поляризованного излучения, обобщенный закон $\sqrt{\epsilon}$ в различных его версиях доставляет ценный контроль при численных расчетах полей поляризованного излучения. Это задачи о рэлеевском и о резонансном рассеянии, а также задачи об образовании линий в атмосферах со слабым магнитным полем, вызывающим эффект Ханле. Наконец, закон $\sqrt{\epsilon}$ в комбинации с асимптотикой решения обобщенной задачи Милна послужил отправным пунктом при построении приближения высокой точности в задачах о *любых* симметричных блужданиях Леви на полуоси. На этом славная история закона $\sqrt{\epsilon}$ *пока* заканчивается.

Благодарность

Автор признателен А.В. Дементьеву за проведение расчетов и изготовление рисунков.

Приложение

В этом Приложении интегральное уравнение Винера – Хопфа для функции $S(\tau)$ со свободным членом $Q = Q(\tau)$ и параметром $\lambda \equiv 1 - \epsilon$

$$S(\tau) = \lambda \int_0^\infty K(\tau - \tau') S(\tau') d\tau' + Q(\tau) \quad (\text{A.1})$$

будем записывать кратко в виде

$$S = \lambda \Lambda S + Q. \quad (\text{A.2})$$

Функция Грина $G(\tau, \tau_1)$ уравнения (A.1)

$$G = \lambda \Lambda G + \delta(\tau - \tau_1) \quad (\text{A.3})$$

дает решение уравнения (A.2) при произвольном $Q(\tau)$:

$$S(\tau) = \int_0^\infty G(\tau, \tau_1) Q(\tau_1) d\tau_1. \quad (\text{A.4})$$

Пусть, далее, $G_\infty(\tau)$ — функция Грина бесконечной среды, то есть решение уравнения

$$G_\infty = \lambda \Lambda_\infty G_\infty + \delta(\tau), \quad (\text{A.5})$$

где Λ_∞ — оператор той же формы, что и Λ , но с интегрированием по τ' в пределах $(-\infty, \infty)$, а не $(0, \infty)$.

Цель этого Приложения — показать, следуя [7], как формулу (63) со стр. 19 можно получить элементарными средствами. Прежде всего заметим, что $H(z)$ есть по существу преобразование Лапласа поверхностной функции Грина \bar{G}_0 , точнее,

$$H(1/s) = \bar{G}_0(s) \equiv \int_0^\infty G_0(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (\text{A.6})$$

так что мы хотим доказать, что

$$\ln \bar{G}_0(s) = -\frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln(1 - \lambda \tilde{K}(\omega)) \frac{d\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (\text{A.7})$$

Здесь $\tilde{K}(\omega)$ — преобразование Фурье ядерной функции $K(\tau)$ (формула (45), стр. 12).

Чтобы стало более или менее ясно, как можно достичь желаемого, сравним (A.7) с выражением для функции Грина G_∞ для полного пространства

$$G_\infty(\tau) = \Phi_\infty(\tau) + \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\lambda \tilde{K}(\omega)}{1 - \lambda \tilde{K}(\omega)} e^{-i\tau\omega} d\omega + \delta(\tau), \quad (\text{A.8})$$

которое легко получается применением преобразования Фурье к уравнению типа свертки (A.5) для $G_\infty(\tau)$. Это сравнение позволяет обнаружить, что

$$\lambda \frac{\partial \ln \bar{G}_0(s)}{\partial \lambda} = \bar{\Phi}_\infty(s), \quad (\text{A.9})$$

где $\bar{\Phi}_\infty(s)$ — преобразование Лапласа несингулярной части $G_\infty(\tau)$.

Таким образом, чтобы получить (А.7), достаточно доказать (А.9). Это — нелинейное соотношение между преобразованиями Лапласа функций Грина для полного пространства и для полупространства. В нем фигурирует производная по параметру λ , что несколько неожиданно. Однако именно эта производная по λ и служит ключом для получения формулы (А.7) элементарными средствами.

Теперь уже нетрудно сообразить, как нужно дальше действовать. Из уравнения, которым определяется полупространственная поверхностная функция Грина

$$G_0 = \lambda \Lambda G_0 + \delta(\tau) \quad (\text{А.10})$$

мы получаем

$$\frac{\partial G_0}{\partial \lambda} = \lambda \Lambda \frac{\partial G_0}{\partial \lambda} + \Lambda G_0. \quad (\text{А.11})$$

Согласно (А.10), член ΛG_0 в правой части (А.11) равен $\lambda^{-1}(G_0(\tau) - \delta(\tau))$. Формулу (А.11) можно, таким образом, рассматривать как уравнение нашего обычного вида (А.2) для функции $\partial G_0/\partial \lambda$ со свободным членом

$$Q(\tau) = \lambda^{-1}(G_0(\tau) - \delta(\tau)). \quad (\text{А.12})$$

Вводя это Q в (А.4) и пользуясь симметрией $G(\tau, \tau_1)$, получаем

$$\lambda \frac{\partial G_0(\tau)}{\partial \lambda} = \int_0^\infty G(\tau_1, \tau) [G_0(\tau_1) - \delta(\tau_1)] d\tau_1. \quad (\text{А.13})$$

В правой части этой формулы стоит произведение *трех* функций G_0 , см. формулу (9) для $G(\tau, \tau_1)$ на стр. 3. Далее, применяем к (А.13) преобразование Лапласа по τ (параметр преобразования s) и в качестве $\bar{G}(\tau_1, s)$ в правой части подставляем

$$\bar{G}(\tau_1, s) = \bar{G}_0(s) \int_0^{\tau_1} G_0(\tau_1 - t) e^{-st} dt. \quad (\text{А.14})$$

Это выражение для $\bar{G}(\tau_1, s)$ получается из формулы (9) со стр. 3 применением преобразования Лапласа по τ . В результате этой подстановки появляется двойной интеграл. Меняем в нем порядок интегрирования по τ_1 и по t и затем полагаем $\tau_1 = \tau + t$:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \bar{G}_0(s)}{\partial \lambda} &= \bar{G}_0(s) \int_0^\infty \int_0^{\tau_1} G_0(\tau_1 - t) [G_0(\tau_1) - \delta(\tau_1)] e^{-st} dt d\tau_1 \\ &= \bar{G}_0(s) \int_0^\infty \int_t^\infty \left(G_0(\tau_1 - t) [G_0(\tau_1) - \delta(\tau_1)] d\tau_1 \right) e^{-st} dt \\ &= \bar{G}_0(s) \int_0^\infty \left(\int_0^\infty G_0(\tau) G_0(\tau + t) d\tau - \delta(t) \right) e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (\text{А.15})$$

Пользуясь формулой (13) со стр. 4 и учитывая, что $G_\infty(t) = \Phi_\infty(t) + \delta(t)$, находим

$$\lambda \frac{\partial \bar{G}_0(s)}{\partial \lambda} = \bar{G}_0(s) \int_0^\infty \Phi_\infty(t) e^{-st} dt,$$

что есть то же самое, что и (A.9) Таким образом, формула (A.7) доказана.

Список литературы

- [1] U. Frisch, H. Frisch, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **173**, 167, 1975.
- [2] E. Landi Degl'Innocenti, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **186**, 369, 1978.
- [3] I. Hubeny, *Astron. Astrophys.* **185**, 332, 1987.
- [4] E. Landi Degl'Innocenti, Bommier V., *Astron. Astrophys.*, **284**, 865, 1994.
- [5] J. Štěpán, V. Bommier, *Astron. Astrophys.* **468**, 797, 2007.
- [6] С.И. Грачев, *Вестник Санкт-Петербургского ун-та*, сер. 1, т. 1(59), 632, 2014.
- [7] V.V. Ivanov, *Astron. Astrophys.* **286**, 328, 1994.
- [8] В.А. Амбарцумян, *Астрон. ж.*, **19**, 30, 1942; см. также: *Научные Труды*, т. I, с. 206, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1960 (English transl. in: V.A. Ambarzumian, *A Life in Astrophysics*, pp. 67 – 82, Allerton Press, 1998).
- [9] В.А. Амбарцумян, *Доклады АН Арм. ССР*, **8**, 101, 1948; см. также: *Начные Труды*, т. I, с. 282, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
- [10] E.A. Milne, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **89**, 620, 1929.
- [11] E.A. Milne, *Thermodynamics of the Stars*, pp. 70 – 172 in *Handbuch der Astrophysik*, vol. III, part I, Springer, Berlin, 1930; reprinted in: D. Menzel (ed.), *Selected Papers on the Transfer of Radiation*, pp. 77 – 269, Dover Publ., New York, 1966.
- [12] A.S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1926.
- [13] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.*, **106**, 145, 1947.
- [14] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, Clarendon Press, Oxford, 1950 (русский перевод: С. Чандрасекар, *Перенос излучения*, Изд. иностр. лит-ры, М., 1953).
- [15] V.V. Sobolev, *A Treatise on Radiative Transfer*, Van Nostrand, Princeton, 1963.
- [16] E.A. Milne, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **81**, 361, 1921.
- [17] I. Hubeny, D. Mihalas, *Theory of Stellar Atmospheres*, Princeton Univ. Press, 2015.
- [18] E. Hopf, *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium*, Cambridge Univ. Press, 1934.
- [19] M. Bronstein, *Zs. f. Physik*, **58**, 696, 1929; *Zs. f. Physik*, **59**, 144, 1929.
- [20] E. Hopf, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **90**, 287, 1930.

- [21] B. Davison, Neutron Transport Theory, Oxford Univ. Press, 1957 (русский перевод: Б. Девисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960).
- [22] G. Placzek, W. Seidel, Phys. Rev., **72**, 550, 1947.
- [23] T. Viik, Astrophys. Space Sci., **127**, 285, 1986.
- [24] T. Viik, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **183**, 162, 2016.
- [25] O. Halpern, R.K. Lueneburg, O. Clark, Phys. Rev. **53**, 173, 1938; Phys. Rev. **53**, 173, 1938; Phys. Rev. **53**, 173, 1938;
- [26] Л.М. Биберман, ЖЭТФ, **17**, 416, 1947; **19**, 484, 1949.
- [27] T. Holstein, Phys. Rev., **72**, 1212, 1947; **83**, 1159, 1951.
- [28] E. Avrett, D.G. Hummer, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **130**, 295, 1965.
- [29] V.V. Ivanov, Transfer of Radiation in Spectral Lines, NBS Special Publ. #385, US Gov. Printing Office, 1973.
- [30] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II, J. Wiley, New York, 1966 (русский перевод: В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., Мир, 1968).
- [31] И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Наука, М., 1965.
- [32] В.В. Учайкин, Успехи физич. наук, **173**, 847, 2003. [Sov. Phys. Usp., **46**, 821, 2003].
- [33] V.V. Ivanov, Sh.A. Sabashvili, Astrophys. Space Sci., **17**, 13, 1972.
- [34] B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman, New York, 1982.
- [35] A.B. Kukushkin, P.A. Sdvizhenskii, Journ. Phys. A Math. and Theoretical, vol. 49, #25 article id 255002, 2016.
- [36] G. Rybicki, D.G. Hummer, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **144**, 313, 1968.
- [37] В.В. Иванов, Астрон. ж., **39**, 1020, 1962 [Soviet Astronomy – AJ, Vol. 6, p. 793]
- [38] D.I. Nagirner, Analytical Methods in Radiative Transfer Theory, Astrophys. Space Sci. Rev, **13**, pp. 1 -440, 2007.
- [39] Ю.Ю. Абрамов, А.М. Дыхне, А.П. Напартович, Стационарные задачи радиационного переноса возбуждения, ИАЭ-1804, 1969.
- [40] D.G. Hummer, J.C. Stewart, Astrophys. J., **146**, 290, 1966.

- [41] V.V. Ivanov, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **10**, 665, 1970.
- [42] S.N. Majumdar, Ph. Mounaix, G. Schehr, *J. Stat. Mech.* P09013, 2014.
- [43] В.В. Соболев, *Астрон. ж.*, **26**, 129, 1949.
- [44] M.A. Heaslet, R.F. Warming, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **8**, 1968.
- [45] В.В. Иванов, *Вестник ЛГУ*, No. 19, 117, 1960.
- [46] Д.И. Нагирнер, В.В. Иванов, *Астрофизика*, **1**, 143, 1965 [*Astrophysics*, **1**, 143, 1965].
- [47] R.F. Warming, *Astrophys. J.*, **159**, 593, 1970.
- [48] Д.И. Нагирнер, *Труды Астрон. общ. ЛГУ*, т. XXXI, 3, 1975.
- [49] В.В. Григорьев, Д.И. Нагирнер, С.И. Грачев, *Астрофизика*, **62**, 151, 2019 [*Astrophysics*, **62**, 129, 2019].
- [50] S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago Press, 1939 (русский перевод: С. Чандрасекар, *Введение в учение о строении звезд*, Изд. иностр. лит., М., 1948).
- [51] D.G. Hummer, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **138**, 73, 1968.
- [52] E. d'Eon, J. McCormick, arXiv:1905.07825v1 [physics.class-ph] 19 May 2019.
- [53] А.Г. Никогосян, *Астрофизика*, **49**, 263, 2006 [*Astrophysics*, **49**, 228, 2006].
- [54] В.В. Иванов, *Астрон. ж.*, **41**, 1097, 1964 [*Soviet Astron – AJ*, Vol. 8, 874, 1965].
- [55] U. Frisch, H. Frisch, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **181**, 273, 1977.
- [56] Д.И. Нагирнер, *Астрофизика*, **3**, 293, 1967 [*Astrophysics*, **3**, 133, 1967].
- [57] G.B. Rybicki, *Astrophys. J.*, **213**, 165, 1977.
- [58] А.Г. Никогосян, *Астрофизика*, **54**, 275, 2011 [*Astrophysics*, **54**, 242, 2011].
- [59] К.М. Case, P.F. Zweifel, *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967 (русский перевод: К.М. Кейз, П.Ф. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, М., 1972).
- [60] E. Sparre-Andersen, *Math. Scand.* **1**, 263, 1953; **2**, 195, 1954.
- [61] F. Spitzer, *Duke Math. J.*, **24**, 327, 1957.
- [62] F. Pollaczek, *Comptes Rendues Acad. Sci. Paris, Ser. IV* **234**, 2334, 1952.
- [63] J.O. Stenflo, T.G. Baur, D.F. Elmore, *Astron. Astrophys.*, **84**, 60, 1980.

- [64] A. Gandorfer, The Second Solar Spectrum, vdf Hochschulverlag AG an der ETH, Zurich, vol. I, 2000; vol. II, 2002; vol. III, 2005.
- [65] J.O. Stenflo, L. Stenholm, *Astron. Astrophys.*, **46**, 69, 1976.
- [66] S. Dumont, A. Omont, J.-C. Pecker, D. Rees, *Astron. Astrophys.*, **654**, 675, 1977.
- [67] D. Rees, G.J. Saliba, *Astron. Astrophys.*, **115**, 1, 1987.
- [68] M. Faurobert, *Astron. Astrophys.*, **178**, 269, 1987; **194**, 268, 1988.
- [69] M. Faurobert, H. Frsch, *Astron. Astrophys.*, **218**, 338, 1989.
- [70] T.W. Mullikin, *Astrophys. J.*, **145**, 886, 1966.
- [71] X. Домке, *Астрон. ж.*, **50**, 126, 1973 [*Sov. Astron.*, **17**, 81, 1973].
- [72] H. Domke, V. Ivanov, *Астрон. ж.*, **52**, 1034, 1975 [*Sov. Astron.*, **19**, 624, 1976].
- [73] H.C. van de Hulst, *Multiple Light Scattering*, Academic Press, New York, 1980.
- [74] T. Viik, *Earth, Moon and Planets*, **49**, 163, 1990.
- [75] В.В. Иванов, *Астрон. ж.*, **67**, 1233, 1990 [*Soviet Astron.*, **34**, 621, 1990].
- [76] H. Frisch, *Astron. Astrophys.*, **625**, A125 (in print), 2019.
- [77] V.V. Ivanov, *Astron. Astrophys.*, **303**, 609, 1995.
- [78] V.V. Ivanov, S.I. Grachev, V.M. Loskutov, *Astron. Astrophys.*, **318**, 315, 1997; **321**, 968, 1997.
- [79] В.М. Лоскутов, В.В. Иванов, *Астрофизика*, **50**, 199, 2007 [*Astrophysics*, **50**, 157, 2007].
- [80] А.В. Дементьев, *Письма в Астрон. ж.*, **34**, 633, 2008 [*Astronomy Letters*, **34**, 574, 2008].
- [81] E. Landi Degl'Innocenti, H. Landolfi, *Polarization in Spectral Lines*, Kluwer Academic Publ., 2004.
- [82] H. Frisch, *Astron. Astrophys.*, **338**, 683, 1998.
- [83] T. del Pino Alemán, R. Manso Sainz, J. Trujillo Bueno, *Astrophys. J.*, **784**, 46, 2014.
- [84] С.И. Грачев, *Астрофизика*, **44**, 455, 2001 [*Astrophysics*, **44**, 469, 2001].
- [85] E.A. Ballester, L. Beluzzi, J. Trujillo Bueno, *Astrophys. J.*, **836**, 6, 2017.
- [86] J. Trujillo Bueno + 28 coauthors, *Astrophys. J.*, **866L**, 15T, 2018.
- [87] В.В. Иванов, В.М. Сербин, *Астрон. ж.*, **61**, 900, 1983 [*Sov. Astron.*, **28**, 524, 1984].
- [88] В.В. Иванов, *Астрон. ж.*, **62**, 283, 1985 [*Sov. Astron.*, **29**, 162, 1985].