

## Физика переноса излучения

В.В. Иванов<sup>1</sup>

*Астрономический институт им. В.В. Соболева,  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
198504 Санкт-Петербург, Петродворец,  
Университетский просп. 28, Российская Федерация*

Дается классификация задач аналитической теории многократного рассеяния света по физике процесса рассеяния. Рассматривается многократное монохроматическое рассеяние. Дается понятие о физической основе разного рода асимптотических упрощений в структуре полей излучения при монохроматическом рассеянии. Обсуждается специфика многократного рассеяния излучения в частотах спектральных линий, делающая неприменимым диффузионное приближение. Вводится и обосновывается приближение полного перераспределения по частотам (ППЧ). На простых примерах дается понятие о характере упрощений в структуре полей резонансного излучения при большой роли многократных рассеяний. В конце кратко обсуждается поляризация, возникающая при многократном рассеянии, как монохроматическом, так и в линиях (при ППЧ).

### 1. Введение

Первая книга по теории переноса излучения на русском языке появилась в 1953 г. Это знаменитая монография С. Чандрасекара "Перенос лучистой энергии" (Чандрасекар 1953). Выглядит она так. Открываем на произвольном месте (рис. 1). Не очень хочется читать такую книгу... Но если бы только одна такая была! Вторая книга по теории переноса излучения на русском языке появилась тремя годами позже. Это монография В.В. Соболева "Рассеяние света в атмосферах звезд и планет" (Соболев 1956). Открываешь ее — и видишь примерно то же самое. Легче не становится.

---

<sup>1</sup>viva@pobox.spbu.ru

<p style="text-align: center; font-size: small;">190 Глава VII. Принципы инвариантности</p> <p>являются аналитическими разложениями</p> $S(\tau_1; \nu, \varphi; \nu_0, \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi),$ $T(\tau_1; \nu, \varphi; \nu_0, \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi), \quad (58)$ <p>где, как показывают обозначения, <math>S^{(m)}</math> и <math>T^{(m)}</math> зависят только от <math>\tau_1</math>, <math>\nu</math> и <math>\nu_0</math>. Подставляя эти разложения <math>S</math> и <math>T</math> в уравнения (29)–(32), мы находим, что уравнения для различных составляющих ряда Фурье раздвоятся.</p> <p>Так, уравнение (29) приводит к системе уравнений</p> $\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_0}\right) S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0) + \frac{\partial S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0)}{\partial \tau_1} =$ $= (2 - \delta_{0,m}) \sum_{l=m}^{\infty} (-1)^{m+l} a_l^m P_l^m(\nu) P_l^m(\nu_0) +$ $+ \frac{1}{2} \sum_{l=m}^{\infty} a_l^m P_l^m(\nu_0) \int_0^1 P_l^m(\nu') S^{(m)}(\tau_1; \nu', \nu_0) \frac{d\nu'}{\nu'} +$ $+ \frac{1}{2} \sum_{l=m}^{\infty} a_l^m P_l^m(\nu_0) \int_0^1 S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'} +$ $+ \frac{1}{4(2-\delta_{0,m})} \sum_{l=m}^{\infty} (-1)^{m+l} a_l^m \int_0^1 \int_0^1 S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') P_l^m(\nu'') \times$ $\times S^{(m)}(\tau_1; \nu'', \nu_0) \frac{d\nu'}{\nu'} \frac{d\nu''}{\nu''}, \quad (60)$ <p>для <math>m=0, 1</math> и т. д.</p> <p>Правая часть последнего уравнения может быть представлена как сумма произведений вида</p> $\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_0}\right) S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0) + \frac{\partial S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0)}{\partial \tau_1} = (2 - \delta_{0,m}) \sum_{l=m}^{\infty} (-1)^{m+l} a_l^m \times$ $\times \left[ P_l^m(\nu) + \frac{(-1)^{m+l}}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'} \right] \times$ $\times \left[ P_l^m(\nu_0) + \frac{(-1)^{m+l}}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 P_l^m(\nu'') S^{(m)}(\tau_1; \nu'', \nu_0) \frac{d\nu''}{\nu''} \right], \quad (61)$	<p style="text-align: center; font-size: small;">§ 53. Преобразование интегральных уравнений 191</p> <p>Подобным же образом, из уравнений (30)–(32) получаем</p> $\frac{\partial S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0)}{\partial \tau_1} = (2 - \delta_{0,m}) \sum_{l=m}^{\infty} (-1)^{m+l} a_l^m \times$ $\times \left[ e^{-\nu_0 \nu} P_l^m(\nu) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 T^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'} \right] \times$ $\times \left[ e^{-\nu \nu_0} P_l^m(\nu_0) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 P_l^m(\nu'') T^{(m)}(\tau_1; \nu'', \nu_0) \frac{d\nu''}{\nu''} \right], \quad (62)$ $\frac{1}{\nu} S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0) + \frac{\partial T^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0)}{\partial \tau_1} =$ $= (2 - \delta_{0,m}) \sum_{l=m}^{\infty} a_l^m \left[ P_l^m(\nu) + \frac{(-1)^{m+l}}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'} \right] \times$ $\times \left[ e^{-\nu_0 \nu} P_l^m(\nu_0) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 P_l^m(\nu'') T^{(m)}(\tau_1; \nu'', \nu_0) \frac{d\nu''}{\nu''} \right], \quad (63)$ $\frac{1}{\nu_0} T^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0) + \frac{\partial T^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0)}{\partial \tau_1} = (2 - \delta_{0,m}) \sum_{l=m}^{\infty} a_l^m \times$ $\times \left[ e^{-\nu_0 \nu} P_l^m(\nu) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 T^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'} \right] \times$ $\times \left[ P_l^m(\nu_0) + \frac{(-1)^{m+l}}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 P_l^m(\nu'') S^{(m)}(\tau_1; \nu'', \nu_0) \frac{d\nu''}{\nu''} \right]. \quad (64)$ <p>Если теперь мы положим, что</p> $\psi^S(\tau_1; \nu) = P_l^m(\nu) + \frac{(-1)^{m+l}}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'}, \quad (65)$ <p>и</p> $\psi^T(\tau_1; \nu) = e^{-\nu_0 \nu} P_l^m(\nu) + \frac{1}{2(2-\delta_{0,m})} \int_0^1 T^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu') P_l^m(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'}, \quad (66)$ <p>то, учтя принцип взаимности (§ 52), сможем переписать уравнения (61)–(64) в виде</p> $\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu_0}\right) S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0) + \frac{\partial S^{(m)}(\tau_1; \nu, \nu_0)}{\partial \tau_1} =$ $= (2 - \delta_{0,m}) \sum_{l=m}^{\infty} (-1)^{m+l} a_l^m \psi^S(\tau_1; \nu) \psi^T(\tau_1; \nu_0), \quad (67)$
--	---

Рис. 1. Монография С. Чандрасекара "Перенос лучистой энергии". Вид изнутри.

Через несколько лет В.В. Соболев написал еще одну монографию по переносу излучения (Соболев 1972). Здесь совсем уже страшные вещи — функции с *тремя* индексами, зависящие от нескольких переменных, все невероятно громоздко. Море формул, почти никаких слов, кроме "легко видеть, что", или "продифференцировав, подставим... и в итоге получим". А зачем это все и в чем суть дела, уяснить не так-то легко.

В конце 60-х годов и я внес свой посильный вклад в эту традицию (Иванов 1969). Здесь тоже все выглядит не лучше. Недавно еще один член школы Соболева, работающий у нас, — Д.И. Нагирнер — опубликовал уже не монографию, а учебник по теории переноса излучения (Нагирнер 2001). Открываем его "Лекции по теории переноса излучения" — и опять похожая картина. Еще две книги того же стиля написали ученики Соболева, работавшие вне АИ: одну опубликовал И.Н. Минин (физический факультет нашего Университета) (Минин, 1988), другую — Э.Г. Яновицкий (Киев) (Яновицкий 1995). И соболевская школа — не исключение. Возьмите любую другую книгу, вышедшую в мире в этой области, начиная от самой первой монографии 30-х годов математика Э. Хопфа (Хопф 1934), книги физиков Б. Дэвисона (Дэвисон 1960) или К. Кейза и П. Цвайфеля (Кейз, Цвайфель 1972) и много-

много других книг, которые появились к сегодняшнему дню. Все они написаны подобным устрашающим образом. Чтобы разобраться в простых вещах, приходится пробиваться через горы формул.

Немудрено, что в итоге у астрономов, далеких от этой области, сложилось такое отношение к теории переноса излучения: "Это что-то очень страшное, чем могут заниматься только люди не от мира сего. К астрономии это имеет самое малое отношение, пользы от этого нет почти никакой, но, конечно, вызывает некоторое почтение, что люди *вот такое* могут делать".

Моя задача — показать, что на самом деле все не так страшно. О чем же будет говориться в этом сообщении? Сначала будет некоторое введение. То, что было сказано пока, — это скорее предисловие. Все упомянутые книги относятся к той части теории переноса излучения, которая сформировалась давно, несколько десятилетий назад, и которая называется "Аналитическая теория переноса излучения". По-английски это **Analytical Radiative Transfer**, или сокращенно ART. Но, как известно, art — это искусство. В современной теории переноса ART играет примерно такую же роль, какую искусство играет в повседневной жизни. Зарабатывать на хлеб насущный и есть нужно всем. Искусство кормит лишь немногих, большинству же оно доставляет удовольствие (а порой вызывает раздражение). Кормит современную астрономию другая часть теории переноса — **NUmerical Radiative Transfer**, сокращенно — NURT. Она практически полностью вытеснила из всех астрономических приложений искусство аналитической теории переноса. Но в этом искусстве, в ART, есть своя внутренняя красота. Более того, зачастую оно позволяет увидеть простые закономерности, простую физику там, где обширные численные расчеты почти бессильны. Не раз случалось так, что физически интерпретировать и по-настоящему понять результаты громоздких численных расчетов удавалось лишь привлекая ART. А ведь в конечном счете, цель расчетов — не числа, а понимание.

## 2. Классификация задач аналитической теории переноса

Задачи, которые рассматривает ART, не допускают одномерной классификации. Возможна классификация по физике процесса рассеяния, по методам решения, по геометрии рассеивающей области и т. д. Классификация, в основу которой положены особенности физики процесса рассеяния, дает дерево, изображенное на рис. 2. Блок

MONOCHR отвечает так называемому *монохроматическому*

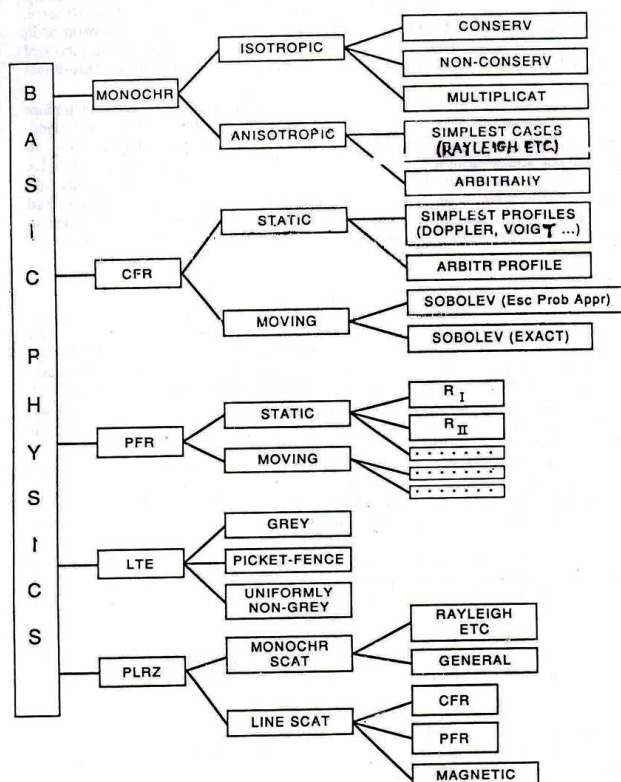


Рис. 2. Классификация задач теории переноса излучения по физике процесса рассеяния.

рассеянию, при котором частота фотона не меняется, а значит, не меняется и его длина свободного пробега. Важнейший частный случай монохроматического рассеяния — изотропное рассеяние (подблок `isotropic`). Здесь при каждом рассеянии фотон полностью забывает направление своего первоначального распространения. Иначе говоря, фотоны рассеиваются во всех направлениях с одинаковой вероятностью. Это самый простой вид рассеяния, и исторически именно он стал первым, который был детально изучен. Изотропное рассеяние может быть консервативным (крайний правый подблок `conserv`), все фотоны переизлучаются, их гибели при рас-

сеяниях не происходит), неконсервативным (подблок `non-conserv`), часть фотонов поглощается рассеивающей частицей и выбывает из процесса многократных рассеяний), либо, наконец, при рассеянии рождаются новые частицы, происходит их размножение (подблок `multiplicat`); этот случай осуществляется не с фотонами, а с нейтронами).

Более сложным для исследования является анизотропное монохроматическое рассеяние (подблок `anisotropic`), при котором вероятность переизлучения фотона при рассеянии в разных направлениях разная. Анизотропное рассеяние, как и изотропное, может быть консервативным или неконсервативным. Первоначально рассматривались простейшие формы угловой зависимости рассеянного излучения (рэлеевское рассеяние и т.п.; подблок `Rayleigh etc.`), позже "пробили" и общий случай произвольного углового распределения рассеянного излучения (подблок `arbitrary`).

Теория монохроматического рассеяния — классический раздел ART. Основная область его астрономического применения — атмосферы планет. Частный случай консервативного изотропного рассеяния сыграл в свое время важную роль и в теории звездных атмосфер. Элементы соответствующей теории излагаются во всех курсах астрофизики.

К середине XX века выяснилось, что когда речь идет о фотонах спектральных линий, классическая модель монохроматического рассеяния не годится. Характер случайных блужданий фотонов совсем иной. Причина этого в том, что при рассеянии фотоны могут слегка менять свою частоту, смещаясь, скажем, из ядра линии в крыло (или наоборот). В итоге длина пробега фотона от рассеяния к рассеянию может очень сильно меняться (на несколько порядков!). В результате усредненная по частотам линии длина свободного пробега фотона оказывается бесконечной, что радикально меняет картину процесса переноса в линии по сравнению с обычным монохроматическим рассеянием. Подробнее об этом речь пойдет в разд. 5 и 6.

Простейшее и вместе с тем наиболее широко используемое при рассмотрении переноса излучения в частотах линий приближение — это приближение **Полного Перераспределения по Частотам** (ППЧ), или по-английски **CFR** (**C**omplete **F**requency **R**edistribution). Что это такое, будет объяснено в разд. 5. На рис. 2 этому приближению соответствует блок `CFR`. В случае линий ситуация существенно зависит от того, является ли среда неподвиж-

ной (подблок `static`), или же в ней имеются дифференциальные макроскопические движения (подблок `moving`). В последнем случае должно учитываться то важное дополнительное обстоятельство, что фотон, излученный, скажем, в центре линии, пролетев некоторое расстояние, попадает в место, имеющее ненулевую составляющую макроскопической скорости в направлении полета фотона. Поэтому вероятность поглощения фотона уменьшается — из-за эффекта Доплера (обусловленного макроскопическим движением вещества, а не тепловыми движениями атомов) частота фотона оказывается смещена за пределы резонансного пика коэффициента поглощения в линии.

Более аккуратное рассмотрение процесса рассеяния излучения в линии элементарным объемом газа показывает, что между частотами фотона до и после рассеяния имеется корреляция. Это так называемое частичное перераспределение по частотам, или по-английски **Partial Frequency Redistribution** (блок `PRF`). Возможности ART в этой области довольно ограничены, и мы этого раздела утонченной теории образования линий касаться не будем.

Ничего не будет у нас и об ART-задачах, связанных с переносом излучения или, что в данном случае является главным, с переносом *тепла* излучением в веществе, находящемся в локальном термодинамическом равновесии (ЛТР) (по-английски **Local Thermodynamic Equilibrium**; блок `LTE`). Простейший пример такого рода задач — это хорошо известная задача о расчете температуры в серой ЛТР-атмосфере, с ее знаменитой формулой

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right).$$

С той или иной степенью подробности это излагается в любом учебнике астрофизики.

До сих пор речь шла о так называемых *скалярных* задачах теории переноса излучения, когда поле излучения полностью характеризуется интенсивностью. На самом деле излучение обычно в большей или меньшей мере поляризовано, и одной интенсивности уже оказывается недостаточно для его полного описания. Задачи о многократном рассеянии поляризованного излучения (блок `PLRZ`), как в континууме (подблок `monochr scat`), так и в частотах линий (подблок `line scat`), будут кратко рассмотрены в последнем разделе нашей статьи.

### 3. Монохроматическое рассеяние. I

Начнем с того, что зададим себе три простых вопроса, которые естественно возникают, когда в пасмурный день идешь по улице. Небо затянуто сплошной пеленой облаков, Солнца не видно.

*Первый вопрос.* Солнечные лучи падают сверху на слой облаков наклонно, так что вектор потока излучения на верхней границе слоя облаков направлен под каким-то углом к нормали. Если вы поднимете голову и посмотрите на небо, то обнаружите, что облака ярче всего в зените, а к горизонту их яркость постепенно убывает (раза в три, как показывают простейшие измерения). Таким образом, поток излучения, прошедшего сквозь толстый слой облаков, всегда направлен вертикально вниз. Почему вектор потока поворачивается и почему всегда, какова бы ни была толщина облаков, если только она большая, он оказывается направлен строго по вертикали? Согласитесь, вопрос совсем простой, но вряд ли большинство из вас когда-либо его себе задавало.

*Второй вопрос.* Картина та же — небо затянуто сплошным слоем облаков, Солнца не видно. Оптическая толщина  $\tau_0$  такого слоя облаков зачастую бывает порядка 100. Последнее означает, что если бы фотон двигался строго по вертикали, то длина его пути составила бы 100 средних длин свободного пробега. На самом деле фотон перемещается в облаке по сильно изломанной зигзагообразной траектории, так как испытывает многократные рассеяния, и проходит в облаке гораздо больший путь. Если бы рассеяний не было (скажем, если бы облака состояли не из капелек воды или кристалликов льда, а из частиц сажи), то даже если Солнце было бы в зените, его излучение ослаблялось бы в  $e^{100} \sim 10^{43}$  раз, и было бы намного темнее, чем в самую темную безлунную ночь! На самом же деле освещенность в такой пасмурный день, когда оптическая толщина облаков  $\sim 100$ , составляет  $\sim 0.1$  от того, что было бы без облаков. Дело очевидно, в том, что фотоны пробиваются сквозь облака за счет многократных рассеяний. Это удастся сделать, грубо говоря, каждому десятому фотону. Казалось бы, все ясно, и вопроса никакого нет.

Но позвольте напомнить читателю — астрофизику то, что можно найти в любом приличном курсе астрофизики (см., например, Соболев 1985, §10, пункт 1). Поток, упавший на рассеивающий слой газа оптической толщины  $\tau_0$ , ослабляется в  $(\tau_0 + 1)$  раз (если решение получается в довольно грубом приближении Шварцшильда — Шустера) или точнее в  $(\tau_0 + 4/3)$  раз (решение в приближении Эддингтона). Задача эта решается в учебниках астрофизики, например у Соболева, при рассмотрении образования линий за счет мо-

нохроматического рассеяния. Обращающий слой освещается снизу, а ослабленный поток выходит из атмосферы сверху. Переверните задачу, так сказать, вверх дном — и перед вами освещенный сверху рассеивающий слой облаков. Согласно этому классическому решению, освещенность на земле, когда небо затянуто облаками с оптической толщиной  $\tau_0 \sim 10^2$ , должна, казалось бы, составлять примерно 0.01, а вовсе не 0.1 от освещенности в ясный безоблачный день. Итак, второй вопрос: почему же в пасмурный день все же *так* светло?

*Третий вопрос.* Можно ли было бы определить химический состав Солнца, если бы небо всегда было затянуто сплошной облачностью и диск Солнца никогда не был бы виден?

Переходим к ответам на поставленные вопросы. Начнем с третьего вопроса — он самый простой. Уже тот факт, что в пасмурный день дневной свет остается белым, показывает, что серьезных изменений спектрального состава излучения при прохождении сквозь облака не происходит. Спектр излучения, приходящего к нам сквозь облака, — это обычный солнечный фотосферный спектр, со всеми его фраунгоферовыми линиями. В спектре будет также присутствовать некоторое число теллурических линий поглощения, возникающих при прохождении солнечного излучения сквозь земную атмосферу. Их, однако, будет легко отделить от фраунгоферовых, если вести наблюдения достаточно долго (хотя бы несколько часов). Из-за изменения высоты Солнца их интенсивность по отношению к континууму будет меняться, у фраунгоферовых же линий она будет оставаться постоянной. Вывод очевиден — химический состав атмосферы Солнца вполне можно исследовать и сквозь толстый слой облаков, когда самого Солнца не видно! На самом деле то, на что мы хотели обратить внимание, задав этот наш третий вопрос, сводится к следующему. Хотя в ходе многократных рассеяний информация о первоначальном направлении распространения излучения полностью замывается (где на небе находится Солнце, когда все затянуто сплошной облачностью, сказать нельзя), спектральная информация практически полностью сохраняется. Это важно, так как указывает на принципиальную возможность извлечения из приходящего от звезд и планет излучения сведений о тех слоях их атмосфер, которые непосредственно не видны.

Переходим к ответу на первый вопрос. Он тоже совсем прост. Облака — это плоский слой рассеивающего свет вещества. Представим себе, что на верхней границе этого слоя имеется плоский источник, испускающий изотропно распределенное по направлени-



ям излучение. Один из факторов, вызывающий изменение углового распределения излучения с глубиной, — это выбывание фотонов из

$$I(\tau, \mu)/I(\tau, 1) = e^{-(1/\mu-1)\tau} \quad \mu = \cos \theta$$

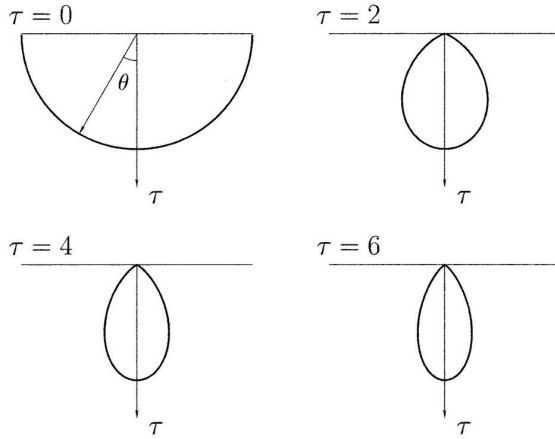


Рис. 3. Изменение с глубиной углового распределения прямо прошедшего излучения. Считается, что на уровне  $\tau = 0$  излучение изотропно.

пучка за счет поглощения (точнее, ослабления). Обозначим через  $I(\tau, \mu)$  интенсивность прямого излучения источника, то есть излучения, прошедшего напролет слой толщиной  $\tau$ . Считается, что оно распространяется под углом  $\theta$  с направленной вниз нормалью к слоям,  $\mu = \cos \theta$ . По закону Бугера  $I(\tau, \mu) = I(0, \mu) e^{-\tau/\mu}$ . Поэтому относительное угловое распределение этого прямо прошедшего излучения есть

$$I(\tau, \mu)/I(\tau, 1) = e^{-(\frac{1}{\mu}-1)\tau}.$$

С ростом  $\tau$  прямо прошедшее излучение становится все более анизотропным. Ясно, что до больших глубин с уровня  $\tau = 0$  доходят за один пролет в основном фотоны, летящие по нормали к слоям или под малыми углами к ней (рис. 3).

Таким образом, *итог прямого пролета с ослаблением* в средах с плоской геометрией — не только общее уменьшение интенсивности, но и *быстрая деизотропизация* углового распределения

прошедшего излучения. По сути дела, ответ на первый вопрос тем самым получен. Хотя прямое излучение Солнца падает на облака под каким-то фиксированным углом, уже после первого рассеяния появляются фотоны, летящие во всех направлениях, и начинает работать тот нехитрый механизм преимущественного отбора фотонов, летящих вертикально вниз, который мы только что описали. Яркость же в зените не сильно отличается от яркости у горизонта потому, что этому процессу деизотропизации противостоят многократные рассеяния, изотропизирующие излучение. Рассмотрение конкуренции этих процессов изотропизации и деизотропизации излучения при рассеяниях и особенно возникающего в итоге после многих рассеяний баланса этих процессов позволяет понять на физическом уровне множество явлений многократного рассеяния света. Увы, отведенного мне места слишком мало, чтобы иметь возможность обсудить этот важный вопрос.

Чтобы получить ответ на второй вопрос — о яркости неба в пасмурный день, — нам придется разобраться в том, как происходят многократные рассеяния. Отвлечемся на время от влияния всех факторов, связанных с геометрией среды, и рассмотрим процесс многократных рассеяний, так сказать, в чистом виде. Пусть у нас в бесконечной среде родился фотон. Пролетев в направлении первоначального испускания расстояние, равное в среднем длине свободного пробега, он испытает акт взаимодействия с веществом. С некоторой вероятностью  $\varepsilon$  он погибнет, с вероятностью  $a = 1 - \varepsilon$  будет переизлучен, то есть испытает рассеяние. Величина  $a$  называется вероятностью выживания фотона при рассеянии, или альбедо однократного рассеяния. Если гибели фотонов нет ( $a = 1$ ), то говорят, что рассеяние консервативно, при  $1 - a = \varepsilon \ll 1$  рассеяние называют почти консервативным. Фактически только в этих двух случаях и возникает проблема учета *многократных* рассеяний. Поэтому консервативное рассеяние занимает в теории переноса очень важное место. Задачи о почти консервативном рассеянии содержат малый параметр  $\varepsilon$ , и их решения можно получать из решений для консервативного случая методом возмущений.

Итак, пусть произошло первое рассеяние. Если при этом частота фотона не изменяется, то рассеяние называют монохроматическим. В этом случае поле излучения на каждой данной частоте можно находить независимо от полей излучения на других частотах. Это простейший и одновременно во многих отношениях важнейший случай. В результате однократного монохроматического рассеяния фотон изменяет лишь направление своего распространения, отклоняясь с какой-то вероятностью от первоначального направления на некоторый угол  $\gamma$ . Обозначим эту вероятность  $x(\gamma)$ . В

русскоязычной литературе ее принято называть индикатрисой рассеяния, в англоязычной — фазовой функцией. По причине, которая станет ясна позже (см. с. 41), мы будем различать эти два

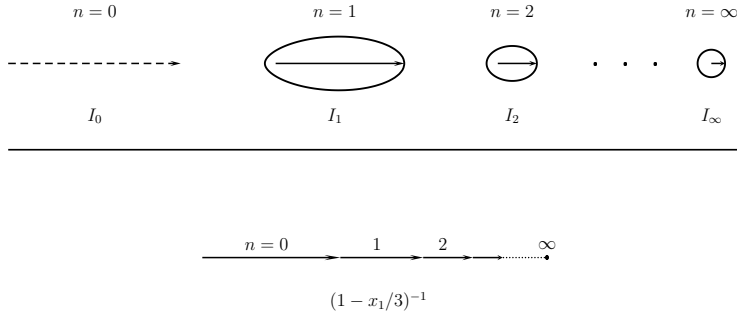


Рис. 4. Угловая релаксация в ходе многократных рассеяний (индикатриса Хэнли – Гринштейна с  $g = 0.6$ ).

термина, так что у нас фазовая функция — это не то же самое, что индикатриса.

Совсем без формул нам не обойтись, но я постараюсь ими не злоупотреблять. По определению, индикатриса  $x(\gamma)$  нормирована так, что ее значение, усредненное по всем направлениям, равно 1:

$$\int_{4\pi} x(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi} = 1.$$

Индикатрису рассеяния обычно представляют в виде разложения по полиномам Лежандра

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\cos \gamma).$$

Форма индикатрисы определяется набором коэффициентов  $x_1, x_2, \dots$  этого разложения ( $x_0 = 1$ ).

Если  $x(\gamma) = 1$ , рассеяние называют изотропным, в противном случае — анизотропным. При изотропном рассеянии информация о первоначальном направлении распространения полностью исчезает при каждом рассеянии. Образно говоря, фотон полностью забывает, в каком направлении он летел перед рассеянием, и после

рассеяния имеет равную вероятность двинуться в любом направлении. При анизотропном рассеянии информация о первоначальном направлении полета исчезает не полностью. Рис. 4 наглядно демонстрирует, как в ходе последовательных рассеяний происходит замытие информации о первоначальном направлении полета. На нем изображено угловое распределение фотонов  $x_n(\gamma)$ , испытавших  $n$  рассеяний,  $n = 1, 2, \dots$  ( $n$ -кратно итерированная индикатриса). Заметим, что  $x_1(\gamma)$  — это просто индикатриса рассеяния  $x(\gamma)$ . Постепенное замытие информации о первоначальном направлении распространения излучения в ходе многократных рассеяний мы называем процессом *угловой релаксации*.

Нетрудно показать (см. Приложение 1), что

$$x_n(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^n}{(2i+1)^{(n-1)}} P_i(\cos \gamma), \quad n = 1, 2, \dots$$

Но так как  $|x_i|/(2i+1) < 1$  при  $i > 0$ , то с ростом  $n$  вклад старших членов в значение суммы ряда, т. е. в  $x_n(\gamma)$ , быстро убывает. Иначе говоря, первоначально мононаправленное излучение после сравнительно небольшого числа рассеяний должно становиться близким к изотропному даже при сильной анизотропии однократного рассеяния. Только что приведенная формула количественно описывает процесс угловой релаксации, т. е. "забывания" фотоном направления первоначального распространения. Существенно, что угловая релаксация — это очень быстрый процесс. Даже для сильно вытянутых вперед индикатрис достаточно не более  $5 \div 7$  рассеяний, чтобы произошла почти полная изотропизация.

Возьмем в качестве примера модельную индикатрису Хэньи — Гринштейна

$$x(\gamma) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{3/2}} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) g^i P_i(\cos \gamma).$$

Величина  $g$  — так называемый параметр вытянутости,  $g \in [-1, 1]$ . При  $g > 0$  рассеяние происходит преимущественно вперед, при  $g < 0$  — преимущественно назад. Для этой индикатрисы  $x_i = (2i+1) g^i$ , и поэтому здесь

$$x_n(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) g^{ni} P_i(\cos \gamma).$$

Таким образом,  $n$ -кратное рассеяние Хэньи — Гринштейна с параметром  $g$  эквивалентно однократному рассеянию с параметром  $g^n$ .

Так, при  $g = 0.75$  пять последовательных рассеяний дают тот же эффект, что и одно рассеяние с  $g = (0.75)^5 \approx 0.24$ , семь рассеяний эквивалентны одному рассеянию с  $g = 0.13$ .

После только что сказанного ясно, что если основной вклад в поле излучения дают фотоны, испытавшие много рассеяний, то старшие члены разложения индикатрисы по полиномам Лежандра должны быть не очень существенны. Это имеет место, например, при почти консервативном рассеянии. Причина — быстрота угловой релаксации. Однако, как мы сейчас убедимся, коэффициент  $x_1$  занимает особое положение.

Чтобы понять, в чем здесь дело, ответим на следующий вопрос: каково среднее суммарное смещение фотона в направлении первоначального излучения в ходе всех его блужданий в консервативной среде? Эта величина известна под названием *транспортной длины пробега*. Измеренная в длинах свободного пробега, она равна  $(1 - x_1/3)^{-1}$ . Если рассеяние происходит преимущественно вперед ( $x_1 > 0$ ), транспортная длина превосходит длину свободного пробега, при  $x_1 < 0$  она меньше длины пробега. Заметим, что характерная величина  $(1 - x_1/3)\tau$ , фигурирующая во многих формулах АРТ, есть не что иное как расстояние, измеренное в транспортных длинах пробега.

Обозначим  $\cos \gamma = \mu$ . Чтобы получить приведенное только что выражение для транспортной длины, заметим, что величина  $x_n(\gamma) d\mu/2$  представляет собой вероятность того, что косинус угла между первоначальным направлением полета фотона и направлением его полета после  $n$ -го рассеяния заключен между  $\mu$  и  $\mu + d\mu$ . Ясно, что среднее значение этого косинуса  $\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu x_n(\gamma) d\mu$  дает среднее смещение фотона в первоначальном направлении после  $n$ -го рассеяния. Но в силу свойств ортогональности полиномов Лежандра

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu x_n(\gamma) d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^n}{(2i+1)^{(n-1)}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu P_i(\mu) d\mu = \left(\frac{x_1}{3}\right)^n.$$

Дальнейшее очевидно: суммируя смещения после первого, второго и т. д. рассеяний и добавляя к ним единицу — смещение за первый свободный пролет, мы и приходем к приведенному выше выражению  $(1 - x_1/3)^{-1}$ . Картина здесь такова (см. рис. 4). После каждого рассеяния фотон продолжает в среднем продвигаться вперед в первоначальном направлении, но шаг с каждым разом становится в  $x_1/3$  раз меньше. Рассеяния как бы тормозят его продвижение в первоначальном направлении, и полное смещение оказывается конечным, равным транспортной длине пробега.

Резюмируя, можно сказать, что *многократные рассеяния* а) весьма эффективно *изотропизуют поле излучения* и б) *делают транспортную длину естественной единицей измерения расстояний* в рассеивающих средах.

Проведенное обсуждение показывает, что в тех случаях, когда рассеяние анизотропно, но фотоны испытывают много рассеяний, можно приближенно считать, что за один пролет фотон смещается на расстояние, равное транспортной длине пробега, после чего происходит изотропное рассеяние. Это один из эффективных методов приближенного решения задач об анизотропном рассеянии сведением их к более простым задачам изотропного рассеяния. Единственное, что требуется — заменить обычные оптические расстояния  $\tau$  на расстояния в транспортных длинах  $(1 - x_1/3)\tau$ .

Теперь мы готовы к тому, чтобы ответить на вопрос, почему в пасмурный день все же довольно светло. Частицы, на которых происходит рассеяние света в облаках, практически не вызывают поглощения, т. е. рассеяние является консервативным. Далее, поскольку рассеивающие частицы большие (по сравнению с длиной волны света), их индикатрисы рассеяния сильно вытянуты вперед, и коэффициент  $x_1$  близок к 3. Поэтому толщина облака, выраженная в транспортных длинах пробега  $(1 - x_1/3)\tau_0$ , оказывается примерно в десятков раз меньше обычной оптической толщины  $\tau_0$ . Именно из-за этого в пасмурный день все же остается довольно светло.

#### 4. Монохроматическое рассеяние. II

Существование угловой релаксации лежит в основе группы разнородных внешне, но единых в своей основе упрощений в структуре полей излучения, суть которых состоит в асимптотическом разделении переменных. Эти упрощения проявляются всякий раз, когда приходится иметь дело с фотонами, испытавшими большое число рассеяний. Такие случаи можно разбить на три группы. Во-первых, пространственные асимптотики, т. е. упрощения в поле излучения в глубоких слоях, при прохождении сквозь толстые слои и т. п. Во-вторых, почти консервативные асимптотики, т. е. обусловленные слабым истинным поглощением отклонения поля излучения при почти консервативном рассеянии от поля излучения в консервативном случае. Наконец, в-третьих, непосредственно асимптотики по номеру рассеяния  $n$  при больших  $n$ , т. е. учет вклада в поле излучения, даваемого  $n$ -кратно рассеянными фотонами, и тесно свя-

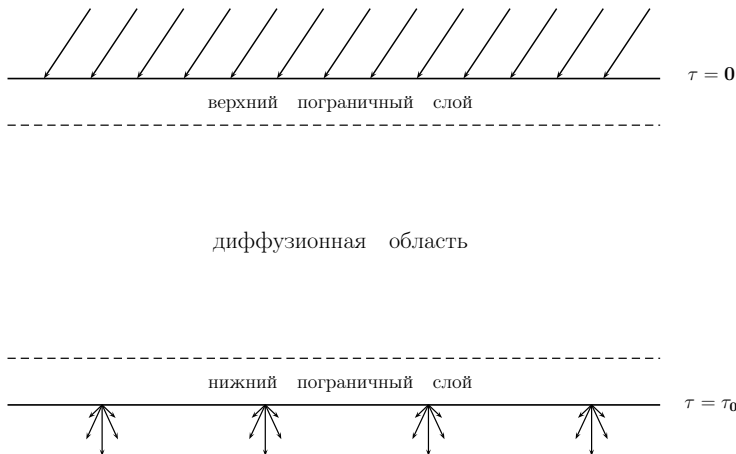


Рис. 5. Прохождение излучения через оптически толстый рассеивающий слой.

занные с ними временные асимптотики при больших  $t$  в нестационарных задачах.

Характерной чертой упрощений во всех перечисленных только что предельных случаях является некоторое разделение пространственных и угловых переменных, причем окончательные выражения, как правило, допускают непосредственное физическое истолкование. Большинство из них можно написать сразу же, прямо из физических соображений. Именно так мы и будем поступать. Следует иметь в виду, что поскольку угловая релаксация происходит очень быстро, всего за несколько рассеяний, порождаемые ею упрощения имеют очень широкую область применимости.

Начнем с качественного объяснения упрощений в структуре поля излучения, возникающих при прохождении через оптически толстые рассеивающие слои. Фактически мы возвращаемся к обсуждению того, как солнечное излучение пробивается сквозь толстый слой облаков (рис. 5).

Очевидно, что в оптически толстом слое можно выделить три существенно разные по своим "функциям" области: верхний пограничный слой (толщиной в несколько длин пробега), внутренние слои и нижний пограничный слой. В пределах верхнего пограничного слоя информация о первоначальном направлении освещающего излучения (характеризуемом косинусом угла падения внешнего излучения  $\mu_0$ ) замыкается. Какая-то часть этого излучения отра-

жается, а какая-то попадает во внутренние слои. Эта последняя доля зависит, очевидно, от  $\mu_0$ . Обозначим ее  $u(\mu_0)$ . Во внутренних слоях присутствуют лишь фотоны, испытавшие много рассеяний, и поэтому поле излучения должно иметь простую структуру. Можно показать, что здесь средняя по направлениям интенсивность излучения удовлетворяет обычному уравнению диффузии, так что ее расчет не составляет труда. Наконец, в нижнем пограничном слое на нескольких последних рассеяниях формируется угловое распределение выходящего излучения. Очевидно, что оно должно зависеть от косинуса  $\mu$  угла вылета фотона из этого поверхностного слоя. Относительное угловое распределение этого выходящего излучения не должно зависеть ни от толщины облака, ни от условий освещения его верхней границы. Обозначим эту угловую зависимость через  $\bar{u}(\mu)$ . Учитывая все только что сказанное, можно утверждать, что интенсивность излучения, выходящего вниз из толстого слоя облаков, должна даваться произведением трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$I(\tau_0, \mu, \mu_0) = \bar{u}(\mu) u(\mu_0) t(\tau_0), \quad \tau_0 \gg 1.$$

Здесь множитель  $t(\tau_0)$  описывает вероятность "просачивания" фотонов сквозь внутренние слои за счет диффузии.

Подчеркнем чрезвычайно общий характер этой замечательной формулы. Фактически единственное, что требуется для ее применимости, — это большая оптическая толщина слоя. Оптические же свойства рассеивающего вещества слоя могут меняться с высотой практически произвольным образом, рассеяние не обязательно должно быть консервативным — и все равно выражаемое этой формулой разделение переменных будет иметь место.

Если слой оптически однородный, т. е. его оптические характеристики — альbedo однократного рассеяния и индикатриса  $x(\gamma)$  — одинаковы в пределах слоя, то, как легко видеть,  $u(\mu) = \bar{u}(\mu)$ . Убедиться в этом можно так. Очевидно, что если мы осветим оптически однородный слой снизу параллельными лучами, падающими под углом  $\arccos \mu$ , то интенсивность излучения, выходящего через верхнюю границу под углом  $\arccos \mu_0$ , будет равна  $I(\tau_0, \mu_0, \mu)$ . Из физических соображений очевидно, что выходящая интенсивность в первоначальной задаче  $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$  должна быть равна интенсивности в "обращенной" задаче  $I(\tau_0, \mu_0, \mu)$ . Это равенство выражает оптическую обратимость — ничего не должно измениться, если фотоны будут двигаться по своим траекториям в обратную сторону. Из равенства  $I(\tau_0, \mu, \mu_0) = I(\tau_0, \mu_0, \mu)$ , как легко убедиться, немедленно следует, что  $u(\mu) = \bar{u}(\mu)$ . Поэтому для *оптически однородно-*



го оптически толстого слоя

$$I(\tau_0, \mu, \mu_0) = u(\mu) u(\mu_0) t(\tau_0), \quad \tau_0 \gg 1.$$

Получение функции  $t(\tau_0)$  в этом случае большого труда не составляет. Фактически она находится из обычного уравнения диффузии и выражается через элементарные функции. Здесь большой науки нет. Функция  $u(\mu)$  является макроскопической характеристикой проницаемости пограничного слоя. Ее вид — имеется в виду не какое-либо аналитическое представление, а характер зависимости от  $\mu$  — зависит от вида индикатрисы и альбеда однократного рассеяния. Аккуратный расчет  $u(\mu)$  — дело непростое, требующее применения аппарата ART.

Однако есть один очень важный частный случай, когда все совсем просто. Это случай однородного слоя с *консервативным рассеянием*. Если функцию  $u(\mu)$  нормировать условием

$$2 \int_0^1 u(\mu) \mu d\mu = 1,$$

то функция  $t(\tau_0)$ , характеризующая, какой доле фотонов, "накачаных" из верхнего пограничного слоя во внутренние области, удастся пробиться через слой оптической толщины  $\tau_0$ , оказывается равной

$$t(\tau_0) = \frac{4}{(3 - x_1)(\tau_0 + 2\tau_e)} = \frac{4}{3} \frac{1}{(1 - x_1/3)(\tau_0 + 2\tau_e)},$$

где  $\tau_e$  — число порядка 1, слабо зависящее от вида индикатрисы. При изотропном рассеянии в приближении Эддингтона (излагаемом обычно в учебниках астрофизики)  $\tau_e = 2/3 = 0.667$ ; строгая ART-теория дает  $\tau_e = 0.710$ . Подчеркнем присутствие множителя  $1 - x_1/3$  перед  $\tau_0$ . О том, насколько это важно, мы уже знаем.

Мы уже говорили о том, что приближенное решение задачи об анизотропном многократном рассеянии можно получить, заменив ее эквивалентной задачей об изотропном рассеянии, если сделать замену  $\tau_0 \rightarrow (1 - x_1/3)\tau_0$ . В соответствии с этим рецептом, для углового распределения выходящего из слоя излучения, т. е. фактически для распределения яркости по облачному небу (и одновременно по диску Солнца; не будем вдаваться в объяснения, почему это так) можно принять следующее приближенное выражение, справедливое для изотропного рассеяния:

$$\varphi(\mu) \equiv \frac{u(\mu)}{u(0)} \approx 1 + \sqrt{3} \mu.$$

Вывод этого выражения, совершенно элементарный, мы за недостатком места опускаем. Согласно этому приближению, яркость в зените ( $\mu = 1$ ) в  $1 + \sqrt{3} = 2.73$  раза больше яркости облаков у горизонта ( $\mu = 0$ ). Заметим лишь, что точное значение отношения яркостей (зенит)/(горизонт) =  $\varphi(1) = 2.91$  (если считать рассеяние изотропным). Громоздкая нетривиальная строгая теория многократного рассеяния в разбираемой задаче дает, таким образом, поправку к нашему простому приближенному решению, которая составляет меньше 7%!

Теперь обратимся к тому излучению, которое отражается от толстого облачного слоя. Сначала для простоты будем считать оптическую толщину облаков бесконечно большой ( $\tau_0 = \infty$ ), потом введем поправки на конечную оптическую толщину.

Интенсивность излучения  $I^0(0, \mu, \mu_0)$ , отраженного от границы  $\tau = 0$  чисто рассеивающей (консервативной) среды с  $\tau_0 = \infty$  (последнее подчеркивается верхним индексом  $^0$  у  $I$ ), можно представить как сумму вкладов, даваемых  $n$ -кратно рассеянными фотонами,  $n = 1, 2, \dots$ :

$$I^0(0, \mu, \mu_0) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n^0(0, \mu, \mu_0), \quad \tau_0 = \infty.$$

Большой вклад в отраженное излучение дают фотоны, испытавшие много рассеяний ( $n \gg 1$ ), так что этот ряд сходится медленно. Именно в этом состоит трудность учета многократных рассеяний. Однако и здесь помогает по сути дела та же идея, которой мы пользовались при рассмотрении прохождения излучения через оптически толстый рассеивающий слой. Действительно, физически очевидно, что те фотоны, которые испытали в среде много рассеяний, должны были в ходе случайных блужданий "забраться" глубоко в среду, а потом оттуда выбраться наружу. Поэтому можно утверждать, что при  $n \gg 1$

$$I_n^0(0, \mu, \mu_0) = u(\mu) u(\mu_0) f(n).$$

Множитель  $u(\mu_0)$ , как и прежде, описывает эффективность процесса "накачки" во внутренние слои, множитель  $u(\mu)$  — процесс выхода из среды через поверхностный слой, наконец,  $f(n)$  — вероятность того, что фотон, попавший в глубокие слои среды, испытает там именно  $n$  рассеяний. Нахождение  $f(n)$  мы за недостатком места опустим, приведем готовый результат:

$$f(n) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{3 - x_1}} n^{-3/2}, \quad n \gg 1.$$

Простота этого выражения позволяет думать, что его тоже можно получить из элементарных соображений. Это действительно так.

Итак, для расчета интенсивности, отраженной от полубесконечного чисто рассеивающего слоя, можно поступить следующим образом. Несколько первых членов разложения  $I^0(0, \mu, \mu_0)$  по кратностям рассеяния рассчитываем непосредственно, так сказать методом грубой силы, а все остальные — по приведенной только что асимптотике  $I_n^0(0, \mu, \mu_0)$ .

Теперь, считая  $I^0(0, \mu, \mu_0)$  известным, мы можем найти и интенсивность излучения, отраженного от оптически толстого консервативно рассеивающего слоя:

$$I(0, \mu, \mu_0) = I^0(0, \mu, \mu_0) - u(\mu) u(\mu_0) t(\tau_0), \quad \tau_0 \gg 1.$$

Не давая подробного объяснения этой формулы, предоставим читателю возможность попытаться самому понять ее из физических соображений того типа, которыми мы пользовались до сих пор.

## 5. Перенос излучения в спектральной линии. I

Обратимся теперь к спектральным линиям. Они возникают, когда в атоме электрон переходит с одного дискретного уровня на другой. Коэффициент поглощения в спектральной линии имеет резкий максимум на центральной частоте линии и быстро спадает в крыльях. Конкретная зависимость коэффициента поглощения в линии от частоты в разных случаях разная, но, какова бы она ни была, мы всегда имеем дело с более или менее резким резонансным пиком. В течение долгого времени — фактически до середины прошлого века — молчаливо предполагалось, что частота фотона в линии при рассеянии строго сохраняется (так называемое монохроматическое рассеяние). Это было грубой ошибкой. Рассмотрим для примера простейший случай, когда линия возникает при переходах между бесконечно тонкими уровнями. Тогда уширение линии целиком определяется доплеровскими смещениями, обусловленными тепловыми движениями атомов. Характерный относительный разброс частот  $\Delta\nu_D/\nu$  равен отношению скорости теплового движения атомов  $u$  к скорости света  $c$ . При температурах  $\sim 10^4$  К имеем  $\Delta\nu_D/\nu = u/c \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ . Малость этого числа буквально завораживала астрофизиков на протяжении нескольких десятилетий. Казалось, что нет никакой нужды учитывать эффект такого ничтожного относительного изменения частоты, когда решение уравнения переноса получается с гораздо меньшей точностью. При этом допускали грубый просчет, так как дело вовсе не в том, силь-

но ли изменяется частота фотона, а в том, насколько меняется его длина свободного пробега.

В центральной части линии зависимость коэффициента поглощения от частоты полностью определяется максвелловским распределением тепловых скоростей атомов. Так называемый профиль коэффициента поглощения, т. е. отношение коэффициента поглощения на данной частоте в линии к его усредненному по всей линии значению имеет вид

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Здесь  $x$  — безразмерная частота, представляющая собой расстояние от центра линии (частота  $\nu_0$ ) в доплеровских ширинах  $\Delta\nu_D$ , обусловленных характерным разбросом тепловых скоростей атомов:  $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$ .

Центральная часть линии — ее доплеровское ядро — это область с  $|x| \lesssim 3.0 \div 3.5$ . На больших расстояниях от центра линии становятся существенными механизмы уширения линии, отличные от эффекта Доплера, разные в разных случаях. Так вот, в пределах доплеровского ядра коэффициент поглощения в линии убывает в  $\sim e^{3^2} = e^9$  раз, т. е. на 4 порядка. Это чрезвычайно важное обстоятельство. Величина, обратная коэффициенту поглощения — это длина свободного пробега фотона. Поэтому из-за ничтожного изменения частоты — всего на какие-то  $10^{-4}$  от своей величины — длина свободного пробега фотона возрастает в тысячи, десятки тысяч раз. А ведь нас интересует именно распространение фотонов, то, насколько далеко они сумеют доставить информацию о физических условиях в месте своего рождения.

Понимание того факта, что малые изменения частоты фотонов линий при их рассеяниях атомами (т. е. при цепочке переходов  $i \rightarrow j$ ,  $j \rightarrow i$ ) приводят к огромным изменениям в длинах их пробега и радикально изменяют характер случайных блужданий фотонов спектральных линий, пришло далеко не сразу. А ведь именно эти случайные блуждания в конечном счете и определяет перенос энергии возбуждения в разреженном рассеивающем газе. Одним из первых роль изменения частоты при рассеянии в частотах линий осознал В.В. Соболев еще в своей кандидатской диссертации (1941 г.). Не вдаваясь в детали обсуждения физики процесса изменения частоты при рассеянии, он сделал предположение, в определенном смысле противоположное принимавшемуся до этого. Соболев принял, что вероятность переизлучения фотона атомом вслед за фотовозбуждением  $i \rightarrow j$  при обратном переходе  $j \rightarrow i$  не зависит от того, какую частоту фотон имел при поглощении и

пропорциональна коэффициенту поглощения в линии. Иначе говоря, он предположил, что *при каждом рассеянии* фотон полностью "забывает" свою первоначальную частоту. Это так называемое *приближение полного перераспределения по частотам* (ППЧ) лежит в основе всей современной теории образования линий в звездных спектрах (и не только звездных!).

Поймем, почему приближение ППЧ является хорошей аппроксимацией (по крайней мере в пределах доплеровского ядра линии). Пусть фотоны летят вдоль оси  $z$ . Приближенно можно считать, что по  $1/3$  фотонов будет рассеиваться вдоль каждой из координатных осей, так что  $2/3$  фотонов будут рассеяны под прямым углом. Из-за эффекта Доплера частоты этих переизлученных фотонов будут, вообще говоря, смещены от центра линии, причем величина сдвига по частоте будет определяться скоростью движения атома-рассеивателя вдоль соответствующей оси,  $x$  или  $y$ . А так как распределение скоростей атомов вдоль каждой из осей максвелловское, то в рассматриваемом приближении  $2/3$  переизлучаемых фотонов будут иметь доплеровское распределение по частотам, даваемое приведенной выше формулой. У фотонов же, рассеиваемых вдоль оси  $z$ , такого перераспределения происходить не будет. Ясно, что если при каждом рассеянии  $2/3$  фотонов "забывают" свою первоначальную частоту и приобретают доплеровское распределение по частотам, то после  $2 \div 3$  рассеяний это случится практически со всеми фотонами. Поэтому если большинство фотонов испытывает много рассеяний, приближение ППЧ в пределах доплеровского ядра линии должно выполняться с очень высокой точностью. Разумеется, приведенные рассуждения — не более чем физическое пояснение сути дела. На самом деле при рассеянии излучения в линии между частотами фотона до и после рассеяния есть корреляция, но в ходе многократных рассеяний она должна быстро замываться. Количественное рассмотрение этой *частотной релаксации* см. в Приложении 2.

Рассмотрим простейшую модельную задачу о многократном рассеянии излучения частот спектральной линии в достаточно разреженном газе, скажем, таком, как в обычных звездных атмосферах. Пусть у нас есть плоский однородный изотермический слой газа. Считается, что газ состоит из атомов, имеющих лишь два дискретных уровня — основной и возбужденный, с населенностями  $n_1$  и  $n_2$ , причем  $n_2 \ll n_1$ , так что полная концентрация атомов  $n = n_1 + n_2 \approx n_1$ . Так как газ считается однородным, то  $n_1 = \text{const}$ . Кроме атомов, в газе имеются свободные электроны, концентрация которых  $n_e$  также постоянна. Электронная температура  $T_e$  равна температуре газа  $T$  и потому везде одинакова. Имеются два про-

цесса, ведущих к заселению верхнего уровня, — переходы вверх под действием электронных столкновений и фотовозбуждения собственным излучением газа, и два процесса опустошения верхнего уровня — спонтанные переходы и гасящие электронные столкновения, или так называемые удары второго рода. Задача состоит в том, чтобы рассчитать населенность верхнего уровня  $n_2$  в функции расстояния от границы. Считается, что извне на газ излучение не падает, а оптическая толщина слоя газа в центре линии велика. Заметим, что подобная простейшая модель двухуровневого атома является разумной аппроксимацией при рассмотрении образования резонансных линий.

Казалось бы, задача элементарна. Населенность верхнего уровня  $n_2$  определяется очевидным уравнением стационарности

$$n_1 n_e C_{12} + n_1 B_{12} J_{12} = n_2 A_{21} + n_2 n_e C_{21}.$$

Здесь  $A_{12}$ ,  $B_{12}$  — эйнштейновские коэффициенты,  $C_{12}$  и  $C_{21}$  — коэффициенты вероятностей электронных ударов первого и второго рода, рассчитанные на один электрон и один атом, наконец,  $J_{12}$  — усредненная по частотам линии средняя по направлениям интенсивность излучения.

Однако простота этого уравнения обманчива. На самом деле оно вовсе не алгебраическое, как кажется на первый взгляд, а интегральное. Суть дела в том, что величина  $J_{12}$  заранее неизвестна. В самом деле, фотоны в частотах линии, поглощающиеся в данном месте и возбуждающие атомы, зародились вовсе не здесь, а прилетели в это место из объемов, расположенных по всему слою. При этом там, откуда они прилетели, они сами появились при переходах с возбужденного уровня, и его населенность *там* влияет на скорость фотовозбуждения, а потому и на населенность *здесь*. Фактически написанное выше невинное на первый взгляд уравнение — это не что иное, как основное интегральное уравнение теории переноса излучения в линии. Чтобы не пугать читателя, мы не будем выписывать его в той стандартной форме, в которой оно фигурирует в теории переноса излучения, а из простых физических соображений поймем, как должно выглядеть его решение, т. е. зависимость  $n_2$  от глубины.

Ясно, что первичным источником появления возбужденных атомов служат электронные удары. Фотовозбуждения — это вторичный процесс, так как излучение, вызывающее эти переходы, само возникает при спонтанных переходах с возбужденного уровня, и если бы возбуждающих электронных столкновений не было бы, то все атомы просто находились бы на основном уровне. Однако чем толще слой газа, тем больше роль вторичного механизма засе-

ления, т. е. фотовозбуждений. Она может стать во много раз, часто даже на несколько порядков, выше вклада первичного механизма — электронных столкновений. Это объясняется весьма просто. Фотон, "рождающийся" в линии, т. е. излучаемый атомом при переходе с верхнего уровня непосредственно вслед за возбуждением электронным ударом, выходит из среды или "гибнет" вследствие удара второго рода, вообще говоря, не сразу, а лишь после ряда актов поглощения и переизлучения. В результате на одно возбуждение электронным ударом приходится несколько фотовозбуждений — тем больше, чем больше среднее число рассеяний, испытываемых фотоном до выхода из среды или гибели при тушащем столкновении. Понятно, что при прочих равных условиях число рассеяний должно возрасти с увеличением толщины слоя, так как выход фотонов через границы становится при этом более трудным. Рост среднего числа рассеяний будет приводить к повышению роли фотовозбуждений в заселении верхнего уровня.

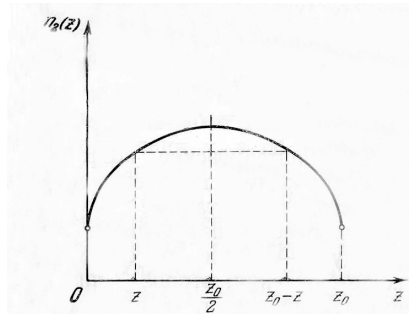


Рис. 6. Населенность верхнего уровня в оптически толстом однородном изотермическом слое в функции расстояния от границы.

С учетом сказанного очевидно, что концентрация возбужденных атомов будет зависеть от глубины примерно так, как это схематически изображено на рис. 6. В силу симметрии задачи, на равных расстояниях от верхней и нижней границ условия одинаковы, и потому населенности  $n_2(z)$  и  $n_2(z_0 - z)$  должны быть равны. Здесь  $z$  — расстояние, рассчитанное по нормали от границы,  $z_0$  — толщина всего слоя. Концентрация возбужденных атомов максимальна в середине слоя (при  $z = z_0/2$ ) и спадает к границам. Объясняется это тем, что процессы, опустошающие верхний уровень — спонтанные переходы и удары второго рода — всюду действуют с одной и

той же эффективностью, так как  $n_e = \text{const}$  и  $T_e = \text{const}$ . Эффективность возбуждения под действием электронных столкновений также всюду одинакова. С фотовозбуждениями же дело обстоит иначе — чем ближе к границе, тем бóльшую роль должен приобретать выход излучения, и средняя интенсивность  $J_{12}$  должна убывать. Это ничем не компенсируемое уменьшение радиативных возбуждений должно приводить к спаду концентрации возбужденных атомов к границам.

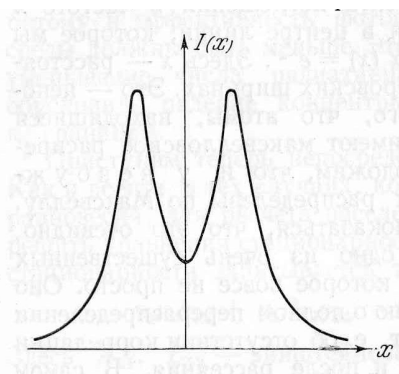


Рис. 7. Эскиз профиля линии, образующейся в оптически толстом чисто рассеивающем слое газа.

Такая форма зависимости числа возбужденных атомов от глубины должна приводить к тому, что профиль возникающей линии оказывается двугорбым, с провалом в центре (рис. 7). В самом деле, в центре линии, где непрозрачность газа максимальна, мы видим лишь самый поверхностный слой, а здесь концентрация возбужденных атомов мала, и поэтому испускаемое этими слоями излучение слабое. По мере удаления от центра линии газ становится более прозрачным, и поэтому главный вклад в излучение дают более далекие от границы слои, где концентрация излучающих возбужденных атомов выше. В конце концов прозрачность с удалением от центра линии увеличивается настолько, что излучение в основном приходит из самой середины слоя. Ясно, что для излучения, выходящего по нормали, это происходит на частоте  $x_0$ , для которой  $\phi(x_0)\tau_0/2 \sim 1$ . Здесь  $\tau_0$  — оптическая толщина нашего газового слоя. На частотах, близких к  $\pm x_0$ , интенсивность достигает максимумов. При дальнейшем удалении от центра линии постепенно весь слой становится прозрачным, и интенсивность выходящего по



нормали излучения делается пропорциональной  $N_2 \phi(x)$ , где  $N_2$  — суммарная концентрация возбужденных атомов в столбе единичного поперечного сечения. Таким образом, в этой части линии зависимость от частоты у выходящего из слоя излучения такая же, как и у коэффициента поглощения в линии.

Следует подчеркнуть, что линия такой седлообразной формы формируется в *изотермическом* слое газа. Центральный провал есть следствие спада к границам степени возбуждения, а вовсе не температуры. В рассеивающем газе прямой связи между локальной температурой и степенью возбуждения нет. Это очень важное качественное утверждение. Диагностика хода температуры в рассеивающем газе по профилям линий выходящего излучения — дело если и не безнадежное, то во всяком случае далеко не тривиальное.

Рис. 7 побуждает нас вернуться к вопросу о применимости ППЧ и его связи с распределением скоростей возбужденных атомов. Рассмотрим атомы в поверхностном слое, находящиеся на основном уровне и движущиеся по нормали к границе. Ясно, что при облучении объема излучением такого спектрального состава, как на рис. 7, те из этих атомов, которые имеют достаточно большие (по абсолютной величине) составляющие скорости вдоль этого направления, будут возбуждаться чаще, чем те, проекции скорости которых на это направление малы. В итоге распределение проекций скоростей возбужденных атомов на нормаль к слоям в поверхностном слое будет заметно отличаться от максвелловского. Поэтому в самом поверхностном слое приближение ППЧ может давать заметные погрешности. Однако вклад этих оптически тонких поверхностных слоев в интенсивность выходящего излучения не настолько велик, чтобы существенно повлиять на точность, обеспечиваемую ППЧ (см. также Приложение 2).

## 6. Перенос излучения в спектральной линии. II

Рассмотрим обсуждавшуюся выше задачу количественно. Прежде всего, возвратимся к вопросу о выходе фотонов из среды. Мы уже убедились что этот процесс играет важную роль. Рассмотрим его подробно. Возьмем единичный объем газа, находящийся на оптической глубине  $\tau$ . Число фотонов в линии, излучаемых этим объемом за единицу времени в единичном телесном угле в интервале безразмерных частот  $(x, x + dx)$ , равно  $n_2 A_{21} \phi(x) dx / (4\pi)$ . Обозначим, как обычно,  $\mu = \cos \theta$ , где  $\theta$  — зенитное расстояние (считается, что мы смотрим в сторону ближайшей границы). Так как элемент телесного угла  $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ , где  $\varphi$  — азимут, то чис-

ло фотонов, излучаемых нашим объемом с параметром  $\mu$  от  $\mu$  до  $\mu + d\mu$ ,  $\mu > 0$ , составляет  $n_2 A_{21} \phi(x) dx d\mu/2$ . Чтобы выйти из среды за один пролет, фотоны, излученные в направлении границы  $\tau = 0$ , должны пролететь вдоль своего наклонного луча оптическое расстояние  $\phi(x)\tau/\mu$ , что вызывает ослабление в  $\exp(-\phi(x)\tau/\mu)$  раз. Учитывая выход фотонов всех частот (интегрирование по  $x$ ) и под всеми углами (интегрирование по  $\mu$ ), мы окончательно находим, что число фотонов, вылетевших за единицу времени через границу  $\tau = 0$  с глубины  $\tau$  за один пролет, составляет  $n_2 A_{21} K_2(\tau)/2$ , где

$$K_2(\tau) = \int_0^1 d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp(-\phi(x)\tau/\mu) dx.$$

Функция  $K_2(\tau)$ , как мы вскоре убедимся, играет в рассматриваемом круге задач важную, во многом определяющую роль — примерно такую же, как  $e^{-\tau}$  в задачах монохроматического рассеяния, если не большую. Обозначение  $K_2$  может показаться странным — непонятным, зачем этот нижний индекс 2. Это обозначение является стандартным для теории переноса, и мы не стали его менять. В строгой теории важнейшую роль играет родственная  $K_2(\tau)$  функция  $K_1(\tau)$ . Чтобы помочь читателю не запутаться, мы постарались обойтись одной только функцией  $K_2(\tau)$ .

Чрезвычайно важное обстоятельство, по существу определяющее специфику всего класса проблем переноса линейчатого излучения, состоит в медленном убывании  $K_2(\tau)$  при больших  $\tau$ . Причина этого в том, что фотоны крыльев линии имеют очень большие длины пробега, и поэтому проинтегрированная по всей линии вероятность прямого вылета фотона с большой глубины оказывается сравнительно большой. Так, при доплеровском коэффициенте поглощения  $\phi(x) = \pi^{-1/2} \exp(-x^2)$ , как можно показать,

$$K_2(\tau) \sim \frac{1}{2\tau \sqrt{\ln(\tau/\sqrt{\pi})}}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Для коэффициентов поглощения, убывающих в крыльях  $\propto |x|^{-\kappa}$ , оказывается, что  $K_2(\tau) \propto \tau^{-(\kappa-1)/\kappa}$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Например, при фойгтовском коэффициенте поглощения  $K_2(\tau) \propto \tau^{-1/2}$ . В дальнейшем мы считаем  $K_2(\tau)$  известной. Во всех случаях она монотонно убывает от  $K_2(0) = 1$ , а о поведении  $K_2(\tau)$  при больших  $\tau$  мы уже только что говорили.

В рассматриваемой нами задаче наряду с выходом из среды имеется еще один путь выбывания фотонов из процесса многократных рассеяний — гибель при тушащих соударениях. Многое можно

понять, рассматривая конкуренцию этих двух процессов выбывания фотонов.

Альбе́до однократного рассеяния  $a$  в рассматриваемом случае равно, очевидно,

$$a \equiv 1 - \varepsilon = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e C_{21}}.$$

При низких электронных концентрациях  $n_e$  вероятность гибели фотона при рассеянии  $\varepsilon = 1 - a$  оказывается очень малой. В "реальной" астрофизике приходится иметь дело с задачами, в которых  $\varepsilon \sim (10^{-4} \div 10^{-6})$ , а теоретики "играют" и с моделями, для которых  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В бесконечной среде среднее число рассеяний фотона составляет, очевидно,  $N = \varepsilon^{-1}$ , в конечной среде оно, разумеется, меньше.

В дальнейшем считаем, что вероятность гибели фотона при рассеянии мала:  $\varepsilon \ll 1$ . Собственно, только в этом случае и проявляется в полной мере весь комплекс явлений многократного рассеяния. В рассматриваемой задаче есть еще один определяющий параметр — оптическая толщина среды  $\tau_0$ . Соотношение этих двух параметров во многом определяет физику дела. Если  $K_2(\tau_0) \gg \varepsilon$ , то в пределах всего слоя выход фотонов через границы доминирует над их гибелью при рассеяниях. Последней тогда можно полностью пренебречь. В этом случае все фотоны, рождающиеся в среде непосредственно после возбуждающих столкновений, претерпев многократные рассеяния, в конце концов выходят из среды через границы. Степень возбуждения атомов должна иметь качественно именно такой вид, как показано на рис. 6, — без плоского участка вдали от обеих границ. Такие среды в англоязычной литературе называют *эффективно тонкими*, у нас же в этом случае принято говорить, что в среде происходит чистое, или консервативное рассеяние. Этот важнейший частный случай мы рассмотрим подробнее чуть позже.

Совсем другая ситуация имеет место в противоположном случае, когда  $K_2(\tau_0) \ll \varepsilon$ . В середине слоя тогда имеется область (тем более обширная, чем сильнее выполняется приведенное неравенство), в пределах которой выходом фотонов можно пренебречь. Здесь влияние границ не чувствуется вовсе и условия такие же, как в бесконечной среде. Выбывание фотонов из рассеяний определяется в этой области гибелью при ударах второго рода. Условия здесь фактически не отличаются от термодинамически равновес-

ных, и населенность верхнего уровня дается формулой Больцмана

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT}\right).$$

Возникает естественный вопрос — начиная с какого расстояния от границы, с какой оптической глубины устанавливается такой равновесный режим. Иначе вопрос можно сформулировать так: какова толщина того слоя, где населенность верхнего уровня заметно меньше равновесной из-за выхода фотонов через границу? Эту величину называют *длиной термализации*  $\tau_t$ . По порядку величины она определяется тем, что на этой глубине вероятность прямого (т. е. за один пролет) выхода фотона становится равна вероятности гибели фотона при рассеянии:  $K_2(\tau_t) = \varepsilon$ . При  $\tau \ll \tau_t$  выход фотонов преобладает над их гибелью при рассеяниях, на больших глубинах его роль невелика. Весьма существенно, что при  $\varepsilon \ll 1$  длина термализации велика, так что неравновесный пограничный слой является оптически толстым. Так, как следует из определения  $\tau_t$  и приведенной выше асимптотики  $K_2(\tau)$  при больших  $\tau$ , при доплеровском коэффициенте поглощения по порядку величины

$$\tau_t \sim \left(\varepsilon \sqrt{\ln \varepsilon^{-1}}\right)^{-1},$$

при фойгтовском коэффициенте поглощения  $\tau_t \sim \varepsilon^{-2}$ . Если, скажем,  $\varepsilon \sim 10^{-4}$ , то при доплеровском профиле толщина пограничного слоя оказывается  $\sim 10^5$ . Из-за медленного убывания  $K_2(\tau)$  при больших  $\tau$  прямой вылет фотонов через границу довольно эффективно происходит и с больших глубин, и в итоге толщина неравновесного пограничного слоя оказывается огромной.

Как этот пограничный слой устроен? Прежде всего, во сколько раз населенность верхнего уровня на границе меньше, чем в равновесной зоне, т. е. там, где она дается формулой Больцмана? В предельном случае  $\tau_0 = \infty$  (полубесконечная атмосфера) ответ дает замечательная *точная* формула, известная как *закон*  $\sqrt{\varepsilon}$ :

$$\frac{n_2(0)}{n_2(\infty)} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Здесь уместно сделать одно замечание. Крайняя простота закона  $\sqrt{\varepsilon}$  заставляет предполагать, что это что-то элементарное, что этот  $\sqrt{\varepsilon}$  можно, вероятно, получить на пальцах. Увы, это не так. Закон  $\sqrt{\varepsilon}$  — это нетривиальный результат. Мне известен с десятков

разных способов вывода этой замечательной формулы. Иные из них по-своему изящны, но ни один нельзя назвать совсем простым.

Итак, пограничный слой при  $\varepsilon \ll 1$  оптически толстый, и концентрация возбужденных атомов в его пределах возрастает во много (а именно в  $\varepsilon^{-1/2}$ ) раз. Как, по какому закону происходит этот рост? Для полубесконечной атмосферы ( $\tau_0 = \infty$ ) строгие методы ART позволяют дать точный ответ на этот вопрос. Населенность  $n_2(\tau)$  удается получить в явном виде, в квадратурах, но окончательное выражение настолько громоздко, что от него не очень много пользы. Гораздо полезнее простые аппроксимации, в основу получения которых, впрочем, были в свое время положены исследования методами ART различных предельных случаев. Мы приведем лишь окончательный результат. В полубесконечной атмосфере концентрация возбужденных атомов в пограничном слое дается следующей простой формулой:

$$n_2(\tau) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{D(\tau)}} n_2(\infty),$$

где обозначено

$$D(\tau) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)K_2(\tau).$$

Хотя это и не точная формула, а лишь аппроксимация, обеспечиваемая ею точность очень высока. Населенность  $n_2(\tau)$  при достаточно малом  $\varepsilon$ , т. е. физически — при низкой плотности, может меняться на несколько порядков, погрешность же этой аппроксимации не превышает  $\sim 10 \div 20\%$ . Формула хорошо работает не только при доплеровском, но и при фойгтовском коэффициенте поглощения. Ее свойства настолько удивительны, что было бы странным, если бы это было лишь аппроксимационное выражение, лишенное физического смысла. На самом деле положение совсем иное, в каком-то смысле противоположное. Эта формула имеет сравнительно простой физический (точнее, вероятностный) смысл и отражает самую суть специфики процесса переноса излучения с перераспределением по частотам.

Рис. 8 дает наглядное представление о различии характера классических случайных блужданий при изотропном монохроматическом рассеянии (сверху) и при рассеянии с ППЧ при доплеровском коэффициенте поглощения (снизу). На этих рисунках показаны проекции на плоскость  $(\tau_x, \tau_y)$  соответствующих трехмерных случайных блужданий. Методом Монте-Карло были смоделированы траектории, описываемые фотоном, совершившим  $10^4$  рассеяний в бесконечной консервативной среде. Различие характера траекторий в двух случаях разительное. На верхнем рисунке мы имеем

обычное случайное блуждание броуновского типа, когда смещение частицы (в данном случае — фотона) пропорционально корню из длины пройденного пути. Смещение происходит в результате кумулятивного эффекта многих хаотических перемещений с не сильно отличающимися друг от друга длинами отдельных звеньев траектории.

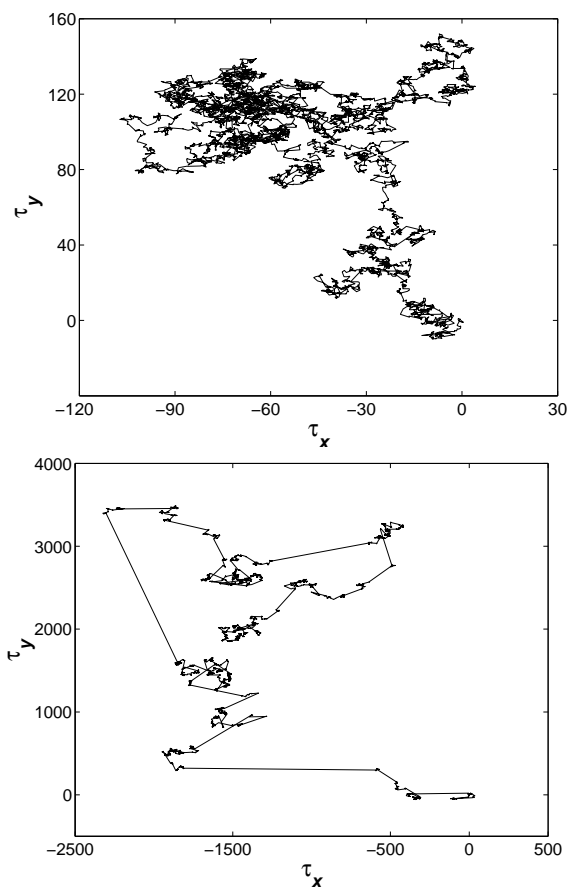


Рис. 8. Монохроматическое (наверху) и доплеровское (внизу) случайные блуждания ( $10^4$  рассеяний).

Совсем другой вид имеет траектория фотона спектральной линии, рассеивающегося с ППЧ (рис. 8, нижний график). Прежде всего, обратим внимание на различие масштабов. Если в классическом случайном блуждании за  $10^4$  рассеяний смещение составило  $\sim 100$ , т. е. порядка  $\sqrt{10^4}$ , как это и должно быть, то при доплеровском случайном блуждании (так для краткости будем называть случайное блуждание фотона спектральной линии с ППЧ при доплеровском коэффициенте поглощения) оно гораздо больше,  $\sim 10^4$ . Главное же, сам вид траектории совсем другой. Фактически все перемещение фотона из начального положения в конечное обусловлено всего несколькими свободными пролетами на огромные расстояния, которые происходят после того, как при очередном рассеянии фотон оказался излученным на большом расстоянии от центра линии. Подавляющая же часть звеньев случайной траектории столь мала, что в масштабе рисунка не видна вовсе. Фотон долго "топчется почти на месте", пока в конце концов не окажется излученным вдали от центра линии. Пролетев огромное расстояние, он в конце концов поглощается. После этого фотон опять многократно переизлучается близ центра линии — и потому снова "топчется", но уже в другом месте. Понятно, что все перемещение обусловлено всего несколькими большими свободными пролетами.

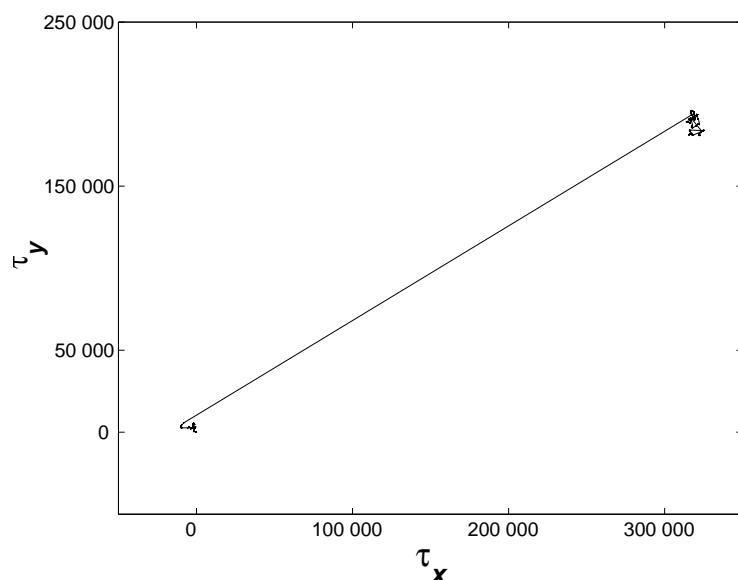


Рис. 9. Доплеровское случайное блуждание ( $10^5$  рассеяний).

Картина становится еще более драматичной, если продолжить следить за доплеровским блужданием, дав фотону совершить  $10^5$  рассеяний (рис. 9). Все смещение за 100 000 шагов фактически полностью определил один прямой пролет фотона, излученного вдали от центра линии. В этом состоит *радикальное* отличие процесса переноса излучения в линии от обычного диффузионного случайного блуждания.

В основе вывода приведенной выше простой формулы для  $n_2(\tau)$  лежит именно эта идея: весь перенос определяется одним (наибольшим) свободным пролетом. Как, каким образом отсюда следует именно то выражение, которое приведено выше, мы объяснять не будем. Важно, что стала ясна основная идея приближения. В определенном смысле это приближение является антиподом диффузионного приближения.

Одно из любопытных следствий формулы для  $n_2(\tau)$  таково. Рассмотрим отношение  $n_2(\tau)/n_2(0)$  и устремим в полученном выражении  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В результате получим

$$n_2(\tau)/n_2(0) = \frac{1}{\sqrt{K_2(\tau)}}, \quad \varepsilon = 0.$$

Этой простой формулой дается *универсальный* закон строения той части приграничного слоя, где гибелью фотонов при рассеяниях еще можно пренебрегать. В частности, если использовать приведенную выше асимптотику  $K_2(\tau)$  (см. с. 26), то из последней формулы следует, что для доплеровского коэффициента поглощения при больших  $\tau$

$$n_2(\tau)/n_2(0) = \left( 2\tau \sqrt{\ln \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}} \right)^{1/2}.$$

Строгая АРТ-теория дает результат, который отличается от этого лишь наличием в правой части дополнительного множителя  $2\sqrt{2}/\pi = 0.900$ . Обратим также внимание на то, что при фойгтовском коэффициенте поглощения, когда  $K_2(\tau) \propto \tau^{-1/2}$ , рост  $n_2(\tau)/n_2(0)$  происходит  $\propto \tau^{1/4}$ , т. е. медленнее, чем при доплеровском коэффициенте поглощения. Этим замечанием мы воспользуемся в следующем разделе при обсуждении поляризации в спектральных линиях.



Для *конечного* оптически толстого слоя можно предложить следующую аппроксимацию, обобщающую ту, что мы использовали выше (см. с. 29) для полубесконечной среды:

$$n_2(\tau) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D(\tau)D(\tau_0 - \tau)}} n_2(\infty),$$

где  $n_2(\infty)$  — уже фигурировавшая выше равновесная (больцмановская) населенность. Поскольку  $D(0) = 1$  и  $D(\infty) = \varepsilon$ , при  $\tau_0 = \infty$  получаем ранее использовавшееся приближение. Вдали от обеих границ, там, где  $\tau \gg \tau_t$  и  $\tau_0 - \tau \gg \tau_t$  (если такая область имеется, то иногда говорят, что среда "эффективно толстая"), мы имеем  $D(\tau) \approx D(\tau_0 - \tau) \approx \varepsilon$ , и эта формула дает  $n_2(\tau) \approx n_2(\infty)$ , как и должно быть. Рассмотрение других частных случаев мы оставляем читателю. Укажем лишь, что в качестве аппроксимационного выражения эта формула может использоваться при *любом* соотношении между  $\tau_0$  и  $\tau_t$ , т. е. и для эффективно толстых, и для эффективно тонких сред, а также и в промежуточном случае. Максимальная погрешность при доплеровском и фойгтовском коэффициентах поглощения составляет не более нескольких десятков процентов, что, учитывая огромный диапазон возможного изменения  $n_2(\tau)$  и других параметров ( $\tau_0$  и  $\varepsilon$ ), следует признать очень хорошим результатом. Резюмируя, можем сказать, что обсуждаемая аппроксимация обладает свойствами, которые редко встречаются вместе. Она сочетает простоту, высокую точность и широкую область применимости.

Хотя сама формула, которую мы обсуждаем, приближенная, для консервативной оптически толстой среды из нее можно получить один важный точный результат. Именно, из нее следует так называемая *крупномасштабная асимптотика*. Под этим термином мы понимаем следующее. Рассмотрим отношение  $n_2(\tau)/n_2(\tau_0/2)$ . В консервативном случае ( $\varepsilon = 0$ ) мы получим тогда

$$n_2(\tau)/n_2(\tau_0/2) = \frac{K_2(\tau_0/2)}{\sqrt{K_2(\tau)K_2(\tau_0 - \tau)}}.$$

Положим здесь  $\tau = T\tau_0$  и устремим  $\tau_0 \rightarrow \infty$ . Обозначим, наконец,

$$F(T) = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} n_2(T\tau_0)/n_2(\tau_0/2).$$

Воспользовавшись известной нам асимптотикой  $K_2(\tau)$  при больших  $\tau$ , нетрудно получить, что при доплеровском профиле

$$F(T) = 2\sqrt{T(1-T)}.$$

Это поистине замечательная формула. Мы не ожидаем, что читатель внимательно следил за ее выводом. В конце концов, вообще не вполне понятно, почему, исходя из приближенного выражения, мы в пределе сумели получить точный результат. Последнее приходится принять на веру. На самом деле в строгой асимптотической АРТ-теории эта формула выводится совсем иначе, но наша цель состояла в том, чтобы не просто взять эту формулу "с потолка" (как автор первоначально и предполагал поступить), а хоть как-то объяснить ее происхождение.

Итак, крупномасштабный ход населенности возбужденного уровня в оптически толстом консервативно рассеивающем слое газа дается элементарной функцией  $F(T)$ . Но ведь мы знаем, что ход населенности определяет форму испускаемой линии. В самом деле, для интенсивностей выходящего через границы  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  излучения (по симметрии задачи они равны) мы имеем общеизвестную формулу

$$I(0, x, \mu) = I(\tau_0, x, \mu) \propto \int_0^{\tau_0} n_2(\tau) \exp(-\phi(x)\tau/\mu) \frac{\phi(x)d\tau}{\mu}.$$

Введя в качестве переменной интегрирования вместо  $\tau$  крупномасштабную переменную  $T = \tau/\tau_0$  и обозначив для краткости

$$t = \phi(x)\tau_0/\mu,$$

обнаруживаем, что в пределе больших  $\tau_0$  (формально, при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ )

$$I(0, x, \mu) = I(\tau_0, x, \mu) \propto t \int_0^1 \sqrt{T(1-T)} \exp(-tT) dT.$$

Стоящий здесь интеграл выражается через бесселеву функцию мнимого аргумента  $I_1(t/2)$ :

$$I(0, x, \mu) = I(\tau_0, x, \mu) \propto e^{-t/2} I_1(t/2).$$

Это окончательное выражение. Переменная  $t$  представляет собой, очевидно, оптическую толщину слоя на частоте  $x$ , отсчитанную вдоль наклонного луча. Для рассматриваемой задачи это совершенно естественная переменная. Что удивительно, так это то, сколь просто интенсивность выходящего излучения через нее выражается. Коэффициента пропорциональности, зависящего, разумеется, от  $\tau_0$ , мы для краткости не приводим — и без того формул получилось гораздо больше, чем первоначально задумывалось.

Последняя формула задает в явном виде седлообразные профили линий типа того, что показан на рис. 7. Она асимптотически точно воспроизводит практически весь профиль, кроме самой центральной его части. Не будем останавливаться на том, почему для самого центра линии следует использовать другое выражение.

Заметим еще, что поскольку при фойгтовском профиле  $K_2(\tau) \propto \tau^{-1/2}$ , для  $F(T)$  в этом случае легко получить

$$F(T) = \sqrt[4]{4T(1-T)}.$$

Действуя далее таким же образом, как и при доплеровском профиле, можно убедиться, что интенсивность выходящего излучения окажется выраженной через бесселеву функцию  $I_{3/4}(t/2)$ . Множителем при ней будет на этот раз не просто  $e^{-t/2}$ , а  $t^{1/4}e^{-t/2}$ . Выкладку мы оставляем читателю. Обстоятельство же, которое мы хотели подчеркнуть, состоит в том, что порядок бесселевой функции, фигурирующей в окончательном выражении для профиля линии, не является универсальным и зависит от скорости убывания коэффициента поглощения в крыльях линии.

Появление бесселевых функций в задачах теории переноса с плоской (а не цилиндрической) геометрией — большой сюрприз, можно сказать, некое чудо. Фактически это означает, что решение сложного интегро-дифференциального уравнения переноса излучения можно в крупномасштабном приближении свести к решению дифференциального уравнения Бесселя.

Этот сборник посвящен юбилею Астрономического Института Санкт-Петербургского университета. Поэтому нам кажется уместным упомянуть, что почти все результаты, изложенные в этом разделе, были получены в 1960-е – 1980-е годы в нашем Институте.

## 7. Поляризация

С поляризацией дело обстоит сложнее, чем с теми вопросами, которые обсуждались до сих пор. Обычно поляризация излучения, возникающая в ходе многократных рассеяний, оказывается небольшой, не более нескольких процентов, а то и меньше. Объяснение природы, а тем более получение количественных оценок малых поправок, как правило, требует привлечения громоздкого аппарата, чего в нашем изложении мы всеми силами пытались избежать. С другой стороны, сравнительно недавно зародившаяся детальная спектрополяриметрия Солнца (см., в частности, Стенфло 1994; Гандорфер 2000, 2002; Ланди-дель-Инноченти, Ландольфи 2004) и

перспектива распространения такого рода исследований на звезды не позволяют нам обойти эту область полным молчанием.

Начнем с классики. В 1943 г. В.В. Соболев и вскоре независимо С. Чандрасекар (1946 г.) показали, что при приближении к краю диска горячей звезды, непрозрачность в атмосфере которой создается томсоновским рассеянием на свободных электронах, излучение должно становиться заметно поляризованным. На краю диска звезды с чисто рассеивающей электронной атмосферой поляризация должна достигать 11.713% (так называемый *поляризационный предел Соболева – Чандрасекара*). Получение точного значения лимбовой поляризации — дело далеко не простое, однако разумную оценку можно получить из простых соображений. Прежде всего, зададим себе естественный вопрос: а почему вообще эта поляризация возникает? Ответ неожиданно прост: из-за потемнения диска звезды к краю!

В самом деле, по симметрии задачи ясно, что мы имеем дело с линейной поляризацией, причем плоскость поляризации должна быть направлена по радиусу или перпендикулярно ему. Обозначим вектор Стокса  $\mathbf{I}(\mu) \equiv (I(\mu), Q(\mu))^T$ , где символ  $T$  означает транспонирование. В результате однократного томсоновского рассеяния вектор Стокса  $\mathbf{I}_0$  преобразуется в (если не понимаете этого, то просто поверьте!)

$$\mathbf{I}(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu') \mathbf{I}_0(\mu') d\mu',$$

где  $\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu')$  — так называемая фазовая матрица. Физический смысл фазовой матрицы по существу тот же, что и у фазовой функции, фигурирующей в скалярных (т. е. без поляризации) задачах об анизотропном рассеянии (см. Приложение 1). В случае томсоновского и рэлеевского рассеяния фазовая матрица имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu') = \hat{\mathbf{A}}(\mu) \hat{\mathbf{A}}^T(\mu'),$$

причем

$$\hat{\mathbf{A}}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{8}}(1 - 3\mu^2) \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{8}}(1 - \mu^2) \end{pmatrix}.$$

Конечно, это трудное для многих читателей место. К сожалению, без этих формул ничего получить будет невозможно. Это минимум-минимум, без которого нельзя обойтись. Принося извинения тем читателям, кому все это кажется непонятным, просим просто принять только что написанные формулы на веру и не бросать чтение на этом месте. Надеемся, вскоре кое-что прояснится.

Если мононаправленное неполяризованное излучение испытывает однократное томсоновское (или рэлеевское) рассеяние, то рассеянное излучение, как хорошо известно, оказывается плоско поляризованным, причем степень поляризации возрастает с углом рассеяния. При этом излучение, рассеянное под прямым углом к направлению первоначального распространения, оказывается полностью поляризованным. После второго рассеяния максимальная поляризация (по-прежнему в направлениях, образующих прямой угол с направлением первоначального "впрыскивания" излучения), составляет уже лишь  $\sim 64\%$ , после трех рассеяний она спадает до  $\sim 42\%$ , после четырех — до  $\sim 28\%$  и т. д. Этот процесс *поляризационной релаксации* при многократных рассеяниях, почему-то ни в одной книге по теории переноса не описанный (подробнее см. Приложение 3), приводит к важным последствиям, отчасти напоминающим те, которые порождаются угловой релаксацией. В частности, поляризация мало зависит от того, что происходит на расстояниях более двух — трех длин свободного пробега от рассматриваемого места. Поэтому поляризация излучения, выходящего из звездной атмосферы, формируется при нескольких последних рассеяниях.

В качестве простейшего приближения можно принять, что поляризация возникает при последнем рассеянии, происходящем практически на границе атмосферы (на оптической глубине  $\tau = 0$ ). На этот самый поверхностный слой снизу падает неполяризованное излучение с вектором Стокса  $\mathbf{I}_0(\mu) = (I_0\varphi(\mu), 0)^T$ ,  $\mu \geq 0$ . Функция  $\varphi(\mu)$  описывает угловую анизотропию интенсивности выходящего излучения, т. е. закон потемнения к краю. Подставим это выражение в приведенную на предыдущей странице формулу, связывающую вектора Стокса  $\mathbf{I}_0$  и  $\mathbf{I}$ . Важный момент состоит в том, что поскольку на границу атмосферы излучение снаружи не падает, интегрирование по  $\mu'$  должно производиться по промежутку  $[0, 1]$ , а не  $[-1, 1]$ . Произведя элементарную выкладку, получим

$$I(\mu) = \left[ \alpha + \beta \frac{1}{8} (1 - 3\mu^2) \right] I_0, \quad Q(\mu) = \beta \frac{3}{8} (1 - \mu^2) I_0,$$

где через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначены, соответственно,

$$\alpha = \int_0^1 \varphi(\mu') d\mu', \quad \beta = \int_0^1 (1 - 3\mu'^2) \varphi(\mu') d\mu'.$$

Обсудим полученный результат. Если потемнения к краю нет, то  $\varphi(\mu) = 1$ , так что  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , и поэтому  $I(\mu) = I_0$ ,  $Q(\mu) = 0$ . Поляризации нет. Если в качестве закона потемнения взять, например, уже использовавшееся нами выше (см. с. 17) приближение

$\varphi(\mu) = 1 + \sqrt{3}\mu$ , то элементарный подсчет дает  $\alpha = 1.866$ ,  $\beta = -0.433$ . В этом приближении степень поляризации на краю диска ( $\mu = 0$ ) оказывается равной  $p(0) = -Q(0)/I(0) = 8.96\%$ . Учитывая грубость сделанных приближений, говорить о трех значащих цифрах, конечно, не приходится. (Замечание для экспертов в теории переноса: если бы мы взяли "точный" амбарцумяновский закон потемнения  $\varphi(\mu)$ , отвечающий, впрочем, изотропному, а не рэле-евскому рассеянию, то получили бы  $p(0) = 8.904\%$ ). Однако порядок величины лимбовой поляризации звезд с чисто рассеивающими томсоновскими атмосферами получен нами верно:  $p(0) \sim 10\%$ .

Мы приходим к довольно грустному выводу. Сколь ни замечательны сами по себе и эстетичны — на утонченный вкус иных теоретиков — и соболевская, и чандрасекаровская теория многократного томсоновского рассеяния излучения в атмосферах звезд ранних типов (они, заметим, существенно отличаются по используемому аппарату), справедливость, увы, заставляет признать, что большой нужды в точном рассмотрении на самом деле не было, особенно если учесть, что полученную нами оценку можно улучшить.

То, о чем до сих пор шла речь — классика теории переноса. Теперь мы хотим хотя бы скороговоркой сказать несколько слов о бурно развивающейся и сулящей замечательные перспективы новой области астрофизики — спектрополяриметрии. Пока она в полный голос заявила о себе лишь применительно к Солнцу, звезды еще ждут своего часа. Перед теорией переноса, в первую очередь численной, здесь открылось новое, не будет преувеличением сказать — почти необъятное поле деятельности. Теоретики-аналитики также нашли здесь достойное применение своему ремеслу.

Даже среди астрофизиков сегодня мало кто знает, что уже более тридцати лет тому назад в оптике было открыто то, что получило название *второй спектр Солнца*. Что это такое? Излучение вблизи самого края солнечного диска слабо поляризовано, причем не только в континууме. Самое замечательное состоит в том, что зависимость от длины волны  $I$ - и  $Q$ -компонент вектора Стокса существенно разная. Обычный спектр Солнца — это зависимость интенсивности от длины волны. Зависимость от  $\lambda$  степени линейной поляризации  $-Q/I$  вблизи края диска, где поляризация наибольшая, получила название второго спектра Солнца. По богатству имеющихся в нем спектральных деталей он может поспорить с обычным спектром интенсивности. Самое главное в том, что этот поляризационный спектр совершенно не похож на привычный спектр интенсивности. Одни фраунгоферовы линии почти не видны в поляризации, другие, наоборот, довольно сильно поляризова-

ны. Имеются также многочисленные поляризационные детали там, где в спектре интенсивности никаких деталей нет. Замечательный атлас второго спектра спокойного Солнца (Гандорфер, 2000, 2002) дает возможность составить представление о его богатстве. Даже довольно слабое магнитное поле (скажем,  $\sim 10$  Гс, а то и меньше) существенно меняет поляризацию в линиях за счет эффекта Ханле (см., например, Стенфло 1994; Ланди-дель-Инноченти, Ландольфи 2004). Поэтому спектрополяриметрия Солнца обещает стать (и отчасти уже стала) мощным диагностическим средством исследования солнечной атмосферы.

Простейшая задача, относящаяся к расчету поляризации в резонансных линиях, во многом подобна классической задаче Соболева – Чандрасекара. Разница состоит в том, что при рассеянии в линии происходит перераспределение по частотам. Поляризация — довольно тонкая вещь, и поэтому обычное для теории образования неполяризованных линий приближение ППЧ должно здесь использоваться с осторожностью. Оно несомненно не применимо в крыльях резонансных линий, но в доплеровском ядре, по-видимому, может служить осмысленным приближением. Во всяком случае, с него следует начинать. Этот круг вопросов привлек внимание астрономов СПбГУ около 15 лет назад. Здесь мы упомянем только о двух наших результатах. Во-первых, классический закон  $\sqrt{\epsilon}$ , о котором говорилось в предыдущем разделе, был обобщен на задачи о резонансном рассеянии с учетом поляризации. На сегодняшний день это единственный нетривиальный точный аналитический результат в теории образования поляризованных линий в рассеивающих атмосферах. Во-вторых, для рассеивающих атмосфер математический аппарат обычной стандартной теории образования неполяризованных линий в приближении ППЧ был обобщен на учет поляризации. В частности, был рассмотрен аналог задачи Соболева – Чандрасекара — расчет поляризации в резонансной линии, возникающей в чисто рассеивающей атмосфере. Оказалось, что предельная поляризация на краю диска составляет 9.443% при доплеровском коэффициенте поглощения и всего 5.421% — при лоренцевском ( $\varphi(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ ). Причина меньшей поляризации при лоренцевском профиле состоит в том, что в этом случае концентрация возбужденных атомов возрастает с глубиной медленнее ( $\propto \tau^{1/4}$ ), чем при доплеровском профиле (рост  $\propto \tau^{1/2} [\ln(\tau/\sqrt{\pi})]^{1/4}$ ). Соответственно этому, потемнение к краю диска, являющееся, как мы знаем, причиной появления обсуждаемой поляризации, при лоренцевском коэффициенте поглощения меньше, чем при доплеровском.

На этом пора остановиться. Боюсь, что у читателя могло сложиться впечатление, что громоздкая аккуратная ART-теория едва ли вообще кому-то нужна, достаточно приближений того типа, о которых мы дали некоторое представление. Это впечатление ошибочно, так как в основе получения большинства рассмотренных (и ряда других) приближений в свое время лежал строгий анализ соответствующих задач. И только потом, часто годы спустя, обнаруживалось, что многие результаты можно на самом деле получить совсем просто.

## 8. Заключение

Мы изложили лишь малую часть из того, что в теории переноса излучения можно получить буквально "на пальцах". Читатель, безусловно, заметил, что на протяжении всего нашего изложения основное уравнение теории многократного рассеяния света — уравнение переноса излучения (УПИ) — так ни разу и не появилось. Как говорил когда-то один из моих учителей Хенк ван де Хюлст, УПИ — не единственная и далеко не лучшая станция, с которой можно начинать захватывающее путешествие по удивительной стране многократного рассеяния света.

\*\*\*\*\*

Один из слушателей доклада, послужившего основой этой статьи, задал мне вопрос, как говорится, не в бровь, а в глаз: "А где же астрофизика, какое все это имеет к ней отношение?" Не буду уподобляться зануде, всерьез отвечающему на вопрос: "Ну, как живешь?" Напомню лишь, что сегодня на передний край практической медицины неожиданно для многих наряду с привычными лекарствами, похоже, выходят совершенно новые технологии, основанные на использовании удивительных свойств стволовых клеток. Методы и идеи ART уже не раз сыграли подобную же роль в решении астрофизических проблем. Нет сомнений, что идейный потенциал ART, о котором мы дали лишь самое общее представление, еще далеко не исчерпан.

Автор признателен А.В. Дементьеву за расчет случайных блужданий фотонов и изготовление большинства рисунков. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 06-02-17096 и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-8542.2006.2.



## Приложение 1 Угловая релаксация при многократных рассеяниях

Пусть в бесконечной консервативно рассеивающей среде появились фотоны, летящие в каком-то направлении. Примем это направление за ось  $z$ . Эти фотоны будут испытывать в среде многократные рассеяния. Пусть  $I_n(\mu)$  — интенсивность  $n$ -кратно рассеянного излучения. По симметрии задачи очевидно, что эта интенсивность должна зависеть лишь от угла между направлением распространения излучения и осью  $z$ . Косинус этого угла мы обозначили через  $\mu$ . Рассмотрим пучок излучения, распространяющегося в направлении  $(\mu, \varphi)$ , где  $\varphi$  — азимут. Пусть произошло рассеяние на угол  $\gamma$  и в результате этого фотон полетел в направлении  $(\mu', \varphi')$ . Вероятность такого события определяется индикатрисой рассеяния  $x(\gamma)$ . Косинус угла рассеяния  $\gamma$  выражается через переменные  $(\mu, \varphi)$  и  $(\mu', \varphi')$ , характеризующие направления полета фотона до и после рассеяния, следующим образом:

$$\cos \gamma = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi').$$

Азимут нас не интересует, так как конечное поле излучения от него не зависит. Интерес представляет лишь то, с какой вероятностью фотоны, летевшие под любым азимутом, но имевшие некоторое фиксированное значение  $\mu$ , переходят в фотоны, летящие в направлениях с некоторым другим угловым косинусом  $\mu'$  (и произвольным азимутом). Ясно, что интересующая нас величина получается путем усреднения  $x(\gamma)$  по азимуту и зависит лишь от  $\mu$  и  $\mu'$ :

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\gamma) d\varphi.$$

Зависящую от двух переменных функцию  $p(\mu, \mu')$  будем называть *фазовой функцией*. Итак, у нас *фазовая функция* — это усредненная по азимуту индикатриса рассеяния. (Обобщением фазовой функции на задачи с поляризацией служит фазовая матрица, место индикатрисы в поляризационных задачах занимает матрица рассеяния. Соотношение между фазовой матрицей и матрицей рассеяния не так просто, как в скалярном случае, и поэтому эти две матрицы всегда четко различают. Нам представляется целесообразным перенести эту терминологию на задачи без поляризации, и вместо длинного термина "усредненная по азимуту индикатриса рассеяния" говорить просто *фазовая функция*).

Будем считать, что индикатриса рассеяния разложена по полиномам Лежандра:

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\cos \gamma).$$

Тогда, подставляя это разложение в предыдущую формулу и пользуясь теоремой сложения для сферических функций, можно показать, что

$$p(\mu, \mu') = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\mu) P_i(\mu').$$

Это единственное неприятное место во всем, о чем пойдет речь в этом Приложении. Выкладки, дающие эту формулу, можно найти в любом руководстве по теории переноса излучения. Для нас будет вполне достаточно того, что читатель примет сказанное про теорему сложения на веру. Главное — смысл последней формулы после сделанных нами пояснений должен быть ясен.

Интенсивности излучения двух последовательных кратностей рассеяния,  $n - 1$  и  $n$ , связаны между собой очевидным соотношением

$$I_n(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I_{n-1}(\mu') d\mu', \quad n = 1, 2, \dots$$

Первичное введенное в среду мононаправленное излучение распространяется вдоль оси  $z$  и имеет  $\mu = 1$ . Тогда его интенсивность есть

$$I_0(\mu) = J_0 2\delta(\mu - 1) = J_0 \sum_{i=0}^{\infty} (2i + 1) P_i(\mu).$$

Здесь  $J_0$  — средняя по углам интенсивность излучения,  $\delta(\mu - 1)$  — дельта-функция. В дальнейшем для упрощения вида формул полагаем  $J_0 = 1$ .

Введем последнюю формулу и разложение  $p(\mu, \mu')$  в соотношение, связывающее  $I_n$  и  $I_{n-1}$ . Условие ортогональности полиномов Лежандра

$$\frac{2i + 1}{2} \int_{-1}^1 P_i(\mu) P_k(\mu) d\mu = \delta_{ik},$$

где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$  и  $0$  при  $i \neq k$ ) позволяет тогда получить

$$I_1(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\mu).$$

Повторяя эту процедуру  $n - 1$  раз, мы окончательно получим

$$I_n(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^n}{(2i+1)^{n-1}} P_i(\mu).$$

Это основная формула, которой описывается процесс угловой релаксации. Она приводилась без вывода в разд. 3, причем величина  $I_n(\mu)$ , рассматриваемая как функция угла  $\gamma = \arccos \mu$ , была названа там  $n$ -кратно итерированной индикатрисой и обозначена через  $x_n(\gamma)$ .

## Приложение 2

### Частотная релаксация при многократных рассеяниях

Аккуратное рассмотрение показывает, что между частотами фотона резонансной линии до и после рассеяния имеется корреляция. Однако в процессе многократных рассеяний эта корреляция быстро замывается. Этот процесс мы называем *частотной релаксацией*. Изучим его для простейшего случая, когда уширение линии вызывается только эффектом Доплера, так что уровни считаются бесконечно тонкими.

Вообще говоря, изменение спектрального состава излучения в пределах линии в ходе рассеяний обусловлено двумя факторами: во-первых, пространственными градиентами интенсивности (из-за влияния границ и неоднородности в распределении первичных источников в среде) и, во-вторых, собственно процессом частотной релаксации. Чтобы изучить релаксацию по частоте в чистом виде, нужно рассмотреть эволюцию при последовательных рассеяниях спектрального состава однородного и изотропного поля излучения в бесконечной среде.

Пусть  $R(x, x') dx$  — вероятность того, что фотон, имевший первоначально (в полете) безразмерную частоту  $x'$ , измеренную в доплеровских ширинах, после рассеяния окажется переизлученным в интервале частот  $(x, x + dx)$ . Явный вид этой *функции перераспределения*  $R$  зависит от механизма уширения линии. В случае, когда уширение чисто доплеровское, как можно показать (см., например, Михалас 1982, с. 200),

$$R(x, x') = e^{x_0^2} \int_{|x|}^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad \overline{|x|} = \max(|x|, |x'|).$$

Не приводя вывода этой формулы, мы в конце этого Приложения объясним физику, лежащую в ее основе, что, надеемся, сде-

лает формулу понятной. Обозначим, далее, через  $I_n(x, x_0)$  интенсивность  $n$ -кратно рассеянного излучения в среде, в которую первоначально были "впрыснуты" фотоны частоты  $x_0$ , так что  $I_0(x, x_0) = J_0 \delta(x - x_0)$ , где  $J_0$  — средняя интенсивность. Считая рассеяние консервативным, будем иметь

$$I_n(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, x') I_{n-1}(x', x_0) dx', \quad n = 1, 2 \dots$$

Подставляя сюда  $I_0(x, x_0) = J_0 \delta(x - x_0)$  и полагая в дальнейшем для простоты  $J_0 = 1$ , находим, что  $I_1(x, x_0) = R(x, x_0)$ .

Дальнейшие действия вполне подобны тому, что делалось при изучении угловой релаксации (см. Приложение 1). Там в основе лежало разложение индикатрисы по полиномам Лежандра. Здесь такую же роль играет разложение функции перераспределения по полиномам Эрмита:

$$R(x, x') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{2i+1} H_{2i}(x) H_{2i}(x'),$$

где обозначено

$$c_i = \left(2^{2i} (2i)!\right)^{-1}$$

и  $H_n(x)$  — полином Эрмита порядка  $n$ :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Для получения  $I_2(x, x_0)$  подставляем в соотношение, связывающее  $I_n$  и  $I_{n-1}$ , разложения  $R(x, x')$  и  $I_1(x, x_0)$  (последнее, как мы убедились, равно  $R(x, x_0)$ ). Пользуясь ортогональностью полиномов Эрмита

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm},$$

где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера:  $\delta_{nm} = 1$  при  $n = m$  и 0 при  $n \neq m$ , находим  $I_2$ . Повторяя эту процедуру, убеждаемся, что

$$I_n(x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{(2i+1)^n} H_{2i}(x) H_{2i}(x').$$

Отсюда, в частности, следует, что  $I_n(x, x_0) \rightarrow \pi^{-1/2} e^{-x^2}$ .

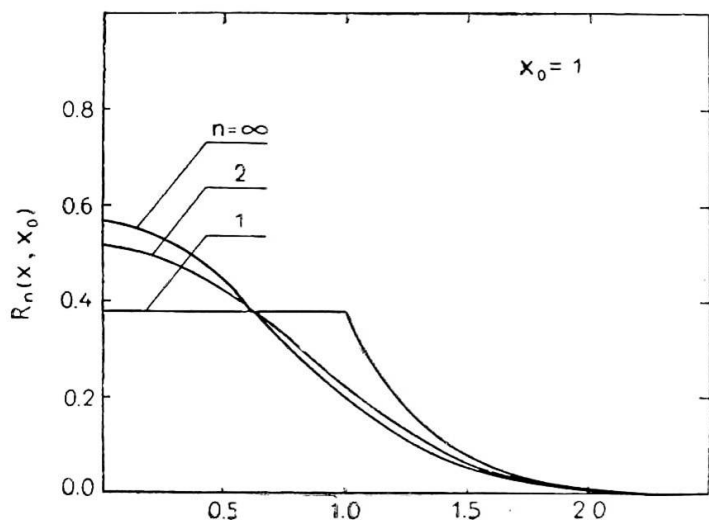


Рис. 10. Частотная релаксация при многократных рассеяниях (чисто доплеровское уширение).

Полученная формула количественно описывает скорость протекания частотной релаксации. Приближение ППЧ в рассматриваемом случае эквивалентно отбрасыванию в последнем разложении всех членов с  $i > 0$ . Как видно из этого разложения, с ростом  $n$  вклад членов с  $i \neq 0$  убывает очень быстро (экспоненциально по  $n$ ), так что процесс частотной релаксации в доплеровском ядре линии протекает очень быстро. В качестве иллюстрации на рис. 10 показано, как это происходит при  $x_0 = 1$ . Общий вывод таков: в пределах доплеровского ядра линии частотная релаксация успевает сработать не более чем за 3 ÷ 4 рассеяния.

В рассматриваемом нами случае нулевой естественной ширины линии частота фотона однозначно определяется проекцией скорости излучившего его атома на луч зрения. Стремление  $I_n$  к  $\pi^{-1/2}e^{-x^2}$  означает поэтому, что распределение скоростей тех атомов, которые возбуждены  $n$ -кратно рассеянными фотонами, с ростом  $n$  приближается к максвелловскому. У атомов, возбужденных первичным строго монохроматическим излучением частоты  $x_0$ , оно совершенно не похоже на максвелловское. Это видно хотя бы из того,

что, как нетрудно сообразить, возбужденных атомов со скоростями  $v < u|x_0|$ , где  $u$  — тепловая скорость, в этом случае нет вовсе.

Любопытно проследить, как в ходе многократных рассеяний распределение скоростей возбужденных атомов релаксирует к максвелловскому. Функция  $I_n(x, x_0)$  есть функция распределения проекций на произвольную ось скоростей атомов, которые были возбуждены фотонами, испытавшими  $n - 1$  рассеяние (скорости  $x$  измеряются в единицах тепловой скорости). Обозначим через  $F_n(x, x_0)$  функцию распределения значений полной скорости таких атомов. Связь между функцией распределения  $I_n(x, x_0)$  проекции случайно ориентированного вектора скорости атомов и функцией распределения  $F_n(x, x_0)$  длины вектора полной скорости дается следующим общим соотношением (см., например, Феллер 1967, гл. I, §10)

$$F_n(x, x_0) = -2x \frac{dI_n(x, x_0)}{dx}, \quad x > 0.$$

Отсюда, пользуясь явным интегральным представлением для  $R(x, x_0)$ , легко получить, что  $F_1(x, x_0) = 0$  при  $x < |x_0|$  и  $F_1(x, x_0) = 2x \exp(x_0^2 - x^2)$  при  $x > |x_0|$ . Тот факт, что кривая на рис. 10, соответствующая  $n = 1$  (т. е.  $I_1(x, x_0)$ ), имеет горизонтальный участок, как раз и отражает то, что среди атомов, возбужденных первичным излучением с безразмерной частотой  $x_0$ , нет атомов, движущихся с полной (безразмерной) скоростью, меньшей  $x_0$ .

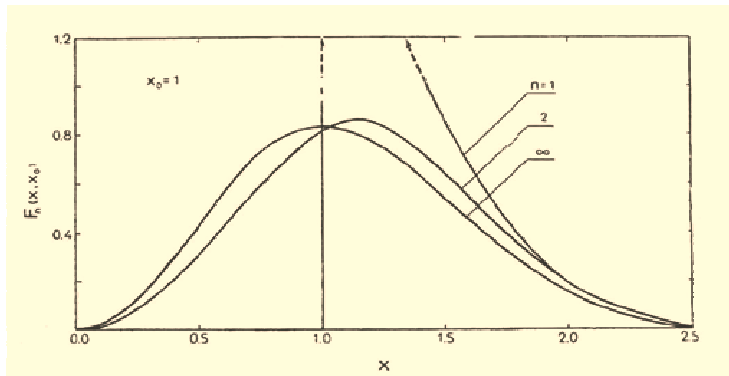


Рис. 11. Релаксация функции распределения скоростей возбужденных атомов к максвелловской.

Наконец, если в соотношение, выражающее  $F_n$  через производную от  $I_n$ , подставить разложение  $I_n$  по полиномам Эрмита и воспользоваться известным соотношением  $2xH_i(x) - H_i'(x) = H_{i+1}(x)$ , получим следующее представление для функции распределения скоростей атомов, возбужденных  $n$ -кратно рассеянным излучением:

$$F_n(x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x H_{2i+1}(x) H_{2i}(x_0), \quad x \geq 0,$$

где

$$a_i = \left( 2^{2i-1} (2i+1)^n \right)^{-1}.$$

Результаты расчетов по этой формуле иллюстрируются рис. 11. Видно, сколь быстро с ростом  $n$  распределение скоростей возбужденных атомов релаксирует к максвелловскому.

### Приложение 3

#### Поляризационная релаксация при многократных рассеяниях

Общий подход, который будет использован для изучения процесса поляризационной релаксации, фактически тот же, что и при исследовании угловой релаксации при многократных рассеяниях (см. Приложение 1). Различие лишь в технических деталях — вместо скалярных величин здесь приходится иметь дело с векторами и матрицами.

Пусть в среде происходит многократное рэлеевское (или томсоновское) рассеяние. Будем считать, что в начальный момент в среде произошла вспышка, "впрыснувшая" в нее мононаправленное неполяризованное излучение с вектором Стокса  $(I(\mu), Q(\mu))^T = (I_0 \delta(\mu - 1), 0)^T$ . Здесь и далее  $\mu$  — косинус угла между направлением распространения излучения и направлением распространения "затравочного" излучения. Обозначим, далее, через  $\mathbf{I}_n(\mu)$  вектор Стокса  $n$ -кратно рассеянного излучения. Ясно, что  $\mathbf{I}_n(\mu)$  удовлетворяет следующему соотношению, обобщающему на случай многократных рассеяний первую формулу разд. 7 (см. с. 36):

$$\mathbf{I}_n(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu') \mathbf{I}_{n-1}(\mu') d\mu', \quad n = 1, 2, \dots$$

Пользуясь тем, что  $\hat{\mathbf{P}}(\mu, \mu') = \hat{\mathbf{A}}(\mu) \hat{\mathbf{A}}^T(\mu')$ , предыдущую формулу можно представить в виде

$$\mathbf{I}_n(\mu) = \hat{\mathbf{A}}(\mu) \mathbf{i}_{n-1},$$

где обозначено

$$\mathbf{i}_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \hat{\mathbf{A}}^T(\mu') \mathbf{I}_n(\mu') d\mu'.$$

В частности, в результате первого рассеяния неполяризованное первичное излучение  $\mathbf{I}_0(\mu) = (I_0 \delta(\mu - 1), 0)^T$  дает  $\mathbf{i}_0 = I_0(1, -1/\sqrt{2})^T$ , так что

$$\mathbf{I}_1(\mu) = \hat{\mathbf{A}}(\mu) \mathbf{i}_0 = I_0 \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 \\ -(1 - \mu^2) \end{pmatrix},$$

и степень поляризации оказывается равной

$$p_1(\mu) = -\frac{Q_1(\mu)}{I_1(\mu)} = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} = \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \cos^2 \gamma},$$

где  $\gamma$  — угол рассеяния. Таким образом, при рассеянии на угол  $\pi/2$

$$p_1(0) = 1.$$

Как и должно было быть, мы получили обычный закон рэлеевского рассеяния, со 100% поляризацией излучения, рассеянного под прямым углом.

Подставляя полученное только что для  $\mathbf{I}_1(\mu)$  выражение в общую формулу для  $\mathbf{i}_n$ , находим, что

$$\mathbf{i}_1 = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{i}_0,$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \hat{\mathbf{A}}^T(\mu) \hat{\mathbf{A}}(\mu) d\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{10} \end{pmatrix},$$

так что

$$\mathbf{i}_1 = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Повторяя эту процедуру, находим, что

$$\mathbf{i}_n = \hat{\boldsymbol{\lambda}}^n \mathbf{i}_0 = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{7}{10}\right)^n \end{pmatrix}.$$



Вектор Стокса  $n$ -кратно рассеянного излучения оказывается по-этому равен

$$\mathbf{I}_n(\mu) = \hat{\mathbf{A}}(\mu) \mathbf{i}_{n-1},$$

или в компонентах

$$I_n(\mu) = I_0 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{7}{10} \right)^{n-1} (1 - 3\mu^2) \right],$$

$$Q_n(\mu) = -I_0 \frac{3}{4} \left( \frac{7}{10} \right)^{n-1} (1 - \mu^2).$$

Эти формулы описывают процесс угловой и поляризационной релаксации при многократном рэлеевском рассеянии. Множитель  $(7/10)^n$  быстро убывает с ростом  $n$ . В результате интенсивность излучения изотропизуется, а  $Q$ -компонента вектора Стокса стремится к нулю. Наибольшая поляризация после любого числа рассеяний, разумеется, наблюдается в направлениях, перпендикулярных к направлению первоначального распространения излучения и составляет

$$p_n(0) = -\frac{Q_n(0)}{I_n(0)} = \frac{3}{4 \left( \frac{10}{7} \right)^{n-1} - 1}.$$

Так, при  $n = 2$  она равна примерно 64%, при  $n = 3$  убывает до 42%, при  $n = 4$  — до 28% и т. д. Эти числа были приведены без вывода в тексте разд. 7.

## Источники

- Гандорфер А. (A.Gandorfer), The Second Solar Spectrum, Vol. I: 4625 to 6995 Angstroms (Zurich; VdF), ISBN No. 3.7281 2764 7 (2000), p. 272.
- Гандорфер А. (A.Gandorfer), The Second Solar Spectrum, Vol. II: 3910 to 4630 Angstroms (Zurich; VdF), ISBN No. 3 7281 2844 4 (2002), p. 103.
- Дэвисон Б., Теория переноса нейтронов (М.: Госатомиздат, 1957), с. 520.
- Иванов В.В., Перенос излучения и спектры небесных тел (М.: Физматгиз, 1969), с. 472.
- Кейз К., Цвайфель П., Линейная теория переноса (М.: Мир, 1972), с. 384.

- Ланди-дель-Инноченти, Ландольфи (E. Landi degl'Innocenti, M. Landolfi), Polarization in Spectral Lines (Kluwer Academic Publ., 2004), p. 890.
- Минин И.Н., Теория переноса излучения в атмосферах планет (М.: Наука, 1988), с. 264.
- Михалас Д., Звездные атмосферы, т. 2 (М: Мир, 1982), с. 422.
- Нагирнер Д.И., Лекции по теории переноса излучения (СПб.: Изд. СПбГУ, 2001), с. 283.
- Соболев В.В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет (М.: ГТТИ, 1956), с. 391.
- Соболев В.В., Рассеяние света в атмосферах планет (М.: Физматгиз, 1972), с. 335.
- Соболев В.В., Курс теоретической астрофизики (М.: Физматгиз, 1985), с. 502.
- Стенфло Я.О. (J.O. Stenflo), Solar Magnetic Fields. Polarized Radiation Diagnostics (Kluwer Academic Publ., 1994), p. 385.
- Феллер В. (W. Feller), Введение в теорию вероятностей и ее приложения (М.: Мир, 1967), с. 752.
- Хопф Э. (E. Hopf), Mathematical Problems of Radiative Equilibrium (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934), p. 142.
- Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии (М.: ИЛ, 1953), с. 431.
- Яновицкий Э.Г., Рассеяние света в неоднородных атмосферах (Киев: Главная астрон.обс. НАН Украины. 1995). с. 402.