Задание №3
Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса

Постановка задачи:

Требуется найти решение системы линейных уравнений вида $Ax = B$, т.е.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

где элементы матрицы A и вектора B — вещественные числа.

Методов решения этой задачи существует много, мы начнем с метода Гаусса и его основных модификаций.

Основная схема метода Гаусса

Введем обозначение $a_{i,n+1} = b_i$. Сначала исходная система сводится к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей вида

$$\begin{cases} x_1 + a^{(1)}_{1,2}x_2 + \cdots + a^{(1)}_{1,n}x_n = a^{(1)}_{1,n+1} \\ x_2 + \cdots + a^{(2)}_{2,n}x_n = a^{(2)}_{2,n+1} \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a^{(n)}_{n,n+1} \end{cases}$$

с помощью преобразований

$$a^{(k)}_{k,j} = \frac{a^{(k-1)}_{k,j}}{a^{(k-1)}_{k,k}}, \qquad j = k, \dots, n+1. \tag{1}$$

и

$$a^{(k)}_{i,j} = a^{(k-1)}_{i,j} - a^{(k)}_{k,j}a^{(k-1)}_{i,k}, \qquad i = k+1, \dots, n, \qquad j = k, \dots, n+1. \tag{2}$$

для всех $k = 1, \dots, n$. В этом случае $a^{(0)}_{i,j}$ — это элементы исходной матрицы. Следует проводить проверку того, что ведущие элементы (на которые производится деление) не являются близкими к нулю (если это случится, программа должна вывести на экран сообщение о близком к нулю ведущем элементе, а затем продолжить выполнение).

На втором шаге вычисляется решение:

$$x_i = a^{(i)}_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a^{(i)}_{i,j}x_j, \qquad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Так как при втором шаге элементы матрицы ниже главной диагонали и на главной диагонали не используются (вернее, известно, чему они равны), их можно не вычислять (ради экономии времени). Также можно использовать их для тестирования программы.

Схема Йордана

Матрица полностью диагонализируется, в результате решение просто совпадает с преобразованным вектором B. Схема диагонализации такая же, как и в случае Гаусса, только вычисление (2) преобразуется в

$$a^{(k)}_{i,j} = a^{(k-1)}_{i,j} - a^{(k)}_{k,j}a^{(k-1)}_{i,k}, \qquad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n, \qquad j = k, \dots, n+1. \tag{3}$$

Второго шага, естественно, нет.

Схема с выбором ведущего элемента

Во избежание необходимости деления на малый ведущий элемент, можно реализовать схему Гаусса с добавкой условия: если $|a_{p,q}| \geqslant |a_{i,j}|$ для всех $i = k, \ldots, n$, $j = k, \ldots, n$, то на очередном шаге поменять местами q-й и k-й столбцы и p-ю и k-ю строки. Так как при перестановке столбцов меняется порядок переменных, необходимо после приведения матрицы к верхнему треугольному (или диагональному) виду восстановить исходный порядок.

Представление данных и результатов:

Требуется написать модуль (на Фортране и других языках, поддерживающих модули) или отдельные файлы (.c/.cpp и .h/.hpp для C/C++ и других языков, не поддерживающих модули) с функцией, получающей матрицу A и вектор B и возвращающей вектор решений. Все три метода должны реализовываться в виде одной функции с дополнительным параметром, задающим тип метода.

Модуль с функцией должен использоваться внешней программой, читающей данные из внешнего файла и записывающей результат в другой внешний файл. Выбор используемого метода должен задаваться ключом командной строки. На экран программа должна выводить модуль вектора невязки (т.е. модуль вектора $AX-B$, где X — найденное решение).

Файл с исходными данными называется *data.dat* и содержит:

- В первой строке — после символа $\sharp$ и пробела размер системы n (одно натуральное число).
- В последующих n строках — матрицу A. В каждой строке файла содержатся элементы одной строки матрицы, отделенные друг от друга одним или несколькими пробелами.
- В последующих n строках — вектор B, по одному элементу в строке.

Файл для вывода результата называется *result.dat* и содержит в первой строке символ $\sharp$, пробел и размер системы n, в последующих строках — вектор результата X (по одному элементу в строке). Имейте в виду, что n может быть достаточно большим ($n \sim 10^{(3\div4)}$).

Примечания:

При использовании Фортрана рекомендуется использовать встроенные средства языка для работы с матрицами, а также конструкцию **forall**

```
forall (<заголовок>)
       <операторы>
end forall
```

или ее же в краткой форме

```
forall (<заголовок>) <оператор>
```

Заголовок имеет вид «триплет, триплет,..., логическая маска» (где триплет — выражение вида «I=1:15:2»). Важно, что это не обычный цикл, а «параллельное выполнение» — сначала независимо вычисляются все правые части присваиваний, находящихся в блоке, а только потом «параллельно» выполняются присваивания. Ничего, кроме присваиваний, внутри блока быть не должно.

Возможно, полезной окажется также конструкция выборки

```
where (<логическое условие>) <действие>
```

или

```
where (<логическое условие или логический массив>)
  <действия>
elsewhere
  <другие действия>
end where
```

При реализации схемы с выбором ведущего элемента рекомендуется воспользоваться функциями **maxloc** и **minloc** (поиск максимального и минимального значения в массиве). Аргументы (array,dim,mask) — массив, конкретная размерность (если нужна), логическая маска (также если нужна). Помните, что функции такого типа дают на выходе координаты относительно начала массива-аргумента (считая, что его индексация по каждой из размерностей начинается с 1).

Исследование:

Попробуйте решить разными модификациями метода Гаусса систему с матрицей Гильберта, для которой $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Вектор свободных членов можно взять случайным. Посмотрите, что будет происходить с решением, если вектор свободных членов незначительно изменится (например, отдельные его элементы изменятся на некоторую малую величину). Что получается и как это объяснить?