

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗВЕЗДНЫХ КАТАЛОГОВ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПОЛУСФЕРЕ

© 2010 г. В.В.Витязев<sup>1\*</sup>, А.С.Цветков<sup>1\*\*</sup>

*Санкт-Петербургский государственный университет, СПб<sup>1</sup>*

Поступила в редакцию 5 марта 2011 г.

Статья посвящена кинематическому анализу собственных движений звезд каталога UCAS3 с помощью векторных сферических функций, определяемых в зонах небесной сферы. Данный математический аппарат позволяет выявить все систематические составляющие в поле скоростей звезд, не привязываясь к конкретной физической модели, и проследить их изменение в разных направлениях небесной сферы. Кроме этого зональные сферические функции, позволяют построить критерий адекватности физической модели (например модели Огородникова-Милна) наблюдениям. В качестве численного материала использовался новейший каталог UCAS3, содержащий информацию о 100 млн. собственных движений звезд. При анализе (особенно слабых) звезд удалось обнаружить не только гармоника, не описываемые стандартными звездно-кинематическими моделями, но и значительную асимметрию в кинематике северного и южного галактического полушарий. Помимо этого в поле скоростей звезд были обнаружены несколько других аномалий меньшего масштаба.

**Ключевые слова:** массовые звездные каталоги, вейвлеты, звездные скопления, UCAS3

**PACS codes:** 95.10.Jk, 95.75.Pq, 95.80.+p, 98.10.+z, 98.35.-a

---

\* e-mail <vityazev@list.ru> \*\* e-mail <a.s.tsvetkov@inbox.ru>

## Каталог UCAC3

Последние два десятилетия ознаменовались бурными успехами в астрометрии, в частности в создании массовых высокоточных звездных каталогов положений и собственных движений звезд. В 1997 выходит в свет Hipparcos, содержащий свыше 100 тыс. звезд, в 2003 – Tycho-2, который содержит высокоточные собственные движения для 2.5 млн. звезд. Также в 2003 году выходит каталог USNO-B, в котором уже свыше 1 млрд. объектов, но точность положений звезд этого каталога невысока, а собственные движения, также весьма посредственного качества, есть только у трети звезд.

В 2009 году в Военно-морской обсерватории США заканчивается работа над каталогом UCAC3. Каталог содержит положения, точные собственные движения, фотометрические данные для 100 млн. звезд до  $17^m$ . Для большинства звезд приведена также ближняя инфракрасная фотометрия из проекта 2MASS. Данный каталог является богатейшим материалом для изучения кинематики Галактики. Распределение звезд каталога UCAC3 по видимой звездной величине представлено на рис. 1, а по модулю ошибки собственного движения – на рис. 2.

Каталог весьма плотно и равномерно заполняет небесную сферу. Для звезд  $14^m - 15^m$  в полярных областях плотность составляет уже около 100 звезд на квадратный градус, а начиная с широт  $|b| < 20^\circ$  превосходит 1000 звезд на квадратный градус. Имеется лишь небольшая аномально низкая по плотности узкая область, расположенная вдоль небесного экватора. Это связано, видимо, с какими-то техническими особенностями построения каталога. Карта распределения звездной плотности представлена на рис. 3.

### Классические кинематические модели

При исследовании кинематики звезд часто используют уравнения модели Огородникова-Милна (Рыбка, 2004). В этой модели поле скоростей звезд представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + M\mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  – общая скорость звезды,  $\mathbf{V}_0$  – скорость центра наблюдателя,  $M$  – матрица смещения,  $\mathbf{r}$  – гелиоцентрический радиус-вектор звезды.

Введем матрицу перевода ортов  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  прямоугольной галактической системы координат в орты  $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$ :

$$A(l, b) = \begin{bmatrix} -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos l \sin b & -\sin l \sin b & \cos b \\ \cos l \cos b & \sin l \cos b & \sin b \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Проектируя вектор  $\mathbf{V}$  на орты  $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$ , получим:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}\mu_l \cos b \\ \mathcal{K}\mu_b \\ V/r \end{bmatrix} = A(l, b) \begin{bmatrix} U/r \\ V/r \\ W/r \end{bmatrix} + A(l, b) M \begin{bmatrix} \cos b \cos l \\ \cos b \sin l \\ \sin b \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В методе Огородникова-Милна матрица смещения обычно представляется в следующем виде:

$$M = M^+ + M^-, \quad (4)$$

где  $M^+$  – симметричная матрица локальной деформации поля скоростей

$$M^+ = \begin{bmatrix} M_{11}^+ & M_{12}^+ & M_{13}^+ \\ M_{21}^+ & M_{22}^+ & M_{23}^+ \\ M_{31}^+ & M_{32}^+ & M_{33}^+ \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$M^-$  – антисимметричная матрица локального вращения

$$M^- = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Кроме того, вектор  $\mathbf{V}_0$  обычно интерпретируют как эффект движения Солнца относительно выбранного центра звезд с компонентами  $U, V, W$ :

$$\mathbf{V}_0 = -U \mathbf{e}_x - V \mathbf{e}_y - W \mathbf{e}_z. \quad (7)$$

Таким образом, модель Огородникова-Милна содержит 12 параметров:

$U, V, W$  – компоненты вектора скорости движения Солнца относительно центра звезд  $\mathbf{V}_0$ ;

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  – компоненты вектора твердотельного вращения центра звезд  $\mathbf{\Omega}$ ;

$M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$  – параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие сжатие-растяжение поля скоростей вдоль главных осей системы координат;

$M_{12}^+ = M_{21}^+, M_{13}^+ = M_{31}^+, M_{23}^+ = M_{32}^+$  – параметры тензора  $M^+$ , описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

Приведем явный вид уравнений модели Огородникова-Милна в галактической системе координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_l \cos b = & \quad U/r \sin l - V/r \cos l - \Omega_1 \sin b \cos l - \Omega_2 \sin b \sin l + \Omega_3 \cos b - \\ & - M_{13}^+ \sin b \sin l + M_{23}^+ \sin b \cos l + M_{12}^+ \cos b \cos 2l - \\ & - \frac{1}{2} M_{11}^+ \cos b \sin 2l + \frac{1}{2} M_{22}^+ \cos b \sin 2l, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_b = & \quad U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - W/r \cos b + \Omega_1 \sin l - \Omega_2 \cos l - \\ & - \frac{1}{2} M_{12}^+ \sin 2b \sin 2l + M_{13}^+ \cos 2b \cos l + M_{23}^+ \cos 2b \sin l - \\ & - \frac{1}{2} M_{11}^+ \sin 2b \cos^2 l - \frac{1}{2} M_{22}^+ \sin 2b \sin^2 l + \frac{1}{2} M_{33}^+ \sin 2b. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_r/r = & \quad - U/r \cos l \cos b - V/r \sin l \cos b - W/r \sin b + \\ & + M_{13}^+ \sin 2b \cos l + M_{23}^+ \sin 2b \sin l + M_{12}^+ \cos^2 b \sin 2l + \\ & + M_{11}^+ \cos^2 b \cos^2 l + M_{22}^+ \cos^2 b \sin^2 l + M_{33}^+ \sin^2 b, \end{aligned} \quad (10)$$

В формулах (8) и (9) имеется линейная зависимость между коэффициентами  $M_{11}^+$ ,  $M_{22}^+$ ,  $M_{33}^+$ , поэтому при анализе собственных движений звезд обычно вводят замены  $M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+$  и  $M_{33}^* = M_{33}^+ - M_{22}^+$ , а параметр  $M_{22}^+$  опускают.

Зачастую, эту модель считают слишком громоздкой и, исходя из гипотезе о плоском вращении Галактики из уравнений для собственных движений, кроме компонент

движения Солнца определяют только величины  $A = M_{12}^+$  – деформацию поля скоростей в плоскости Галактики и  $B = \Omega_3$  – вектор вращения всей системы звезд также в плоскости Галактики. Их разность  $\omega = B - A$  дает угловую скорости вращения Галактики в окрестности Солнца. Эти величины называют параметрами Оорта, а саму модель – моделью Оорта-Линблада (Огородников, 1965). Иногда в эту модель вносят часть параметров полной модели, как например в это сделано в (Миньяр, 2000).

Третье уравнение также упрощают, оставляя в нем (кроме  $U, V, W$ ) только параметр  $A = M_{12}^+$ , а также параметр  $K$ , описывающий так называемый  $K$ -эффект – общее расширение или сжатие системы без учета различия по направлениям.

Иногда рассматривают уравнения второго порядка, например обобщенную модель Оорта. Ее уравнения можно найти, например в (Витязев, Цветков, 2009).

Всем этим моделям присуще два недостатка. Во-первых, всегда остается вопрос об адекватности модели наблюдениям, т.е. полна ли она, и не приписывает ли она реальному полю скоростей звезд несуществующих свойств. Эта проблема уже рассматривалась ранее в (Миньяр, Морандо, 1990), (Витязев, Шуксто, 2005) и Витязев, Цветков, 2009).

Однако существует вторая проблема, ускользавшая от исследователей. Все модели неявно предполагают, что поле скоростей звезд в околосолнечной окрестности является изотропным, в том смысле, что компоненты тензора вращения-деформации 4 являются одинаковыми для всех направлений небесной сферы. При определении параметров моделей обычно использовались как можно более однородные и равномерно покрывающие небесную сферу выборки звезд. Как мы увидим, такой подход не позволял обнаруживать значительную асимметрию в собственных движениях звезд.

## Математические методы кинематического анализа

### *Метод наименьших квадратов*

Традиционный способ получения параметров поля скоростей состоит в записи условных уравнений выбранной модели (например, 8, 9) и решения их методом наименьших квадратов (далее МНК), который дает наивероятнейшие значения искоемых параметров и из среднеквадратичные ошибки. Решение уравнения проводят иногда отдельно, иногда совместно. Уравнениям также могут приписываться разные

веса. Этот способ хорошо зарекомендовал себя и широко использовался на протяжении десятилетий. Однако ему присущ, как уже говорилось, то недостаток, что мы навязываем собственным движениям заранее выбранную нами модель, не заботясь об ее адекватности наблюдательным данным. В собственных движениях могут быть систематические компоненты, не описываемые моделью. Здесь могут быть две ситуации. МНК «не заметит» их, и информация содержащаяся в них уйдет в увеличение среднеквадратичных ошибок. Вторая ситуация хуже: часть информации в неизвестных систематических компонент может проникнуть в параметры модели, исказив их. Возможна даже ситуация, когда в поле скоростей отсутствует эффект, описываемый моделью, а неизвестная составляющая, тем не менее, приведет к значимой величине параметра. В результате мы получим оценки параметров тех явлений, которых в действительности нет в наблюдательных данных. При достаточно большом числе звезд у них даже будут малые значения формальных ошибок.

Метод наименьших квадратов теоретически для обнаружения анизотропии в собственных движениях можно применять для решения уравнений модели Огородникова-Милна на части небесной сферы, в частности и на полусфере. Однако на практике это сопряжено со значительными корреляциями между параметрами (до 0.9), что ставит под сомнение получаемые результаты. Метод зональных векторных сферических функций свободен от этого недостатка.

### *Векторные сферические функции*

Использовать сферические функции (скалярные) для анализа систематических разностей положений и собственных движений звезд впервые было предложено П.Броше (1966). В этой задаче отсутствие физической модели естественно привело к формальной модели. Этот подход стал стандартом в представлении систематических разностей каталога Hipparcos и FK5 (Шван, 2001). Непосредственно для анализа самих собственных движений на предмет соответствия модели наблюдениям сферические функции были впервые применены по-видимому в (Витязев, Цветков, 1989).

Так как собственные движения звезд имеют векторный характер, и методика построения современных каталогов такова, что обе компоненты собственного движения получаются в ходе одной вычислительной процедуры, то разумно использовать для анализа собственных движений звезд **векторные сферические функции** (далее

ВСФ). Способ построения системы этих функций описан в (Арфкен, 1970). Применение ВСФ для анализа локальной кинематики звезд продемонстрировано в (Макаров, Мерфи, 2007). Подробное описание аппарата ВСФ и использование его в анализе собственных движений и лучевых скоростей звезд каталога OSACA (Бобылев и др., 2006) изложено в (Витязев, Цветков, 2009). В этих работах с помощью ВСФ было выявлено наличие сильных систематических компонент, не описываемых стандартными моделями.

Однако, несмотря на то, что ВСФ обладают полнотой на сфере и выделяют в собственных движениях звезд все систематические компоненты, они не могут применяться в тех случаях, когда мы хотим исследовать кинематику только части небесной сферы (или у нас есть зональный каталог, не охватывающий всю небесную сферу). Для решения задач такого рода мы предлагаем рассмотреть технику зональных векторных сферических функций.

### *Зональные векторные сферические функции*

Зональные векторные сферические функции (далее ЗВСФ) получаются небольшой модификацией ВСФ. Поэтому мы решили уместным привести сначала формулы, описывающие ВСФ на всей сфере. Радиальную компоненту (лучевые скорости) мы рассматривать не будем.

Для начала введем скалярные сферические функции следующим образом:

$$K_{nks}(l, b) = R_{nk} \begin{cases} P_{n,0}(b), & k = 0, \quad s = 1; \\ P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, \quad s = 0; \\ P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, \quad s = 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$R_{nk} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k > 0; \\ 1, & k = 0. \end{cases} \quad (12)$$

В формуле (11) через  $l$  и  $b$  обозначены соответственно долгота и широта точки на сфере, ( $0 \leq l \leq 2\pi$ ;  $-\pi/2 \leq b \leq \pi/2$ ); через  $P_{nk}(b)$  — полиномы Лежандра (при  $k = 0$ ) и присоединенные функции Лежандра (при  $k > 0$ ), которые можно вычислить с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} P_{nk}(b) &= \sin b \frac{2n-1}{n-k} P_{n-1,k}(b) - \frac{n+k-1}{n-k} P_{n-2,k}(b), & k=0, 1, \dots \\ & & n=k+1, k+2, \dots \\ P_{kk}(b) &= \frac{(2k)!}{2^k k!} \cos^k b \\ P_{k+1,k}(b) &= \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!} \cos^k b \sin b. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим в касательной плоскости к сфере систему взаимно ортогональных ортов  $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b$  соответственно в направлениях изменения долготы, широты. Введем радиальные тороидальные  $\mathbf{T}_{nks}$  и сфероидальные  $\mathbf{S}_{nks}$  векторные сферические функции посредством следующих соотношений:

$$\mathbf{T}_{nks} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left( \frac{\partial K_{nks}(l, b)}{\partial b} \mathbf{e}_l - \frac{1}{\cos b} \frac{\partial K_{nks}(l, b)}{\partial l} \mathbf{e}_b \right), \quad (14)$$

$$\mathbf{S}_{nks} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left( \frac{1}{\cos b} \frac{\partial K_{nks}(l, b)}{\partial l} \mathbf{e}_l + \frac{\partial K_{nks}(l, b)}{\partial b} \mathbf{e}_b \right). \quad (15)$$

Для краткости обозначим компоненты при единичном векторе  $\mathbf{e}_l$  как  $T_{nks}^l$  и  $S_{nks}^l$ , а при единичном векторе  $\mathbf{e}_l$  – соответственно  $T_{nks}^b$  и  $S_{nks}^b$ :

$$\mathbf{T}_{nks} = T_{nks}^l \mathbf{e}_l + T_{nks}^b \mathbf{e}_b, \quad (16)$$

$$\mathbf{S}_{nks} = S_{nks}^l \mathbf{e}_l + S_{nks}^b \mathbf{e}_b. \quad (17)$$

Сами компоненты при этом записываются следующим образом:

$$T_{nks}^l = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} P_{n,1}(b), & k=0, s=1, \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \sin kl, & k \neq 0, s=0, \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \cos kl, & k \neq 0, s=1; \end{cases} \quad (18)$$

$$T_{nks}^b = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} 0, & k \neq 0, s=1, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, s=0, \\ +\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, s=1; \end{cases} \quad (19)$$

$$S_{nks}^l = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} 0, & k=0, s=1, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, s=0, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, s=1; \end{cases} \quad (20)$$

$$S_{nks}^b = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} 0, & k=0, s=1, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, s=0, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, s=1; \end{cases} \quad (21)$$

$$S_{nks}^l = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} 0, & k=0, s=1, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \cos kl, & k \neq 0, s=0, \\ -\frac{k}{\cos b} P_{nk}(b) \sin kl, & k \neq 0, s=1; \end{cases} \quad (22)$$

$$S_{nks}^b = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} P_{n,1}(b), & k=0, s=1; \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \sin kl, & k \neq 0, s=0, \\ (-k \operatorname{tg} b P_{nk}(b) + P_{n,k+1}(b)) \cos kl, & k \neq 0, s=1. \end{cases} \quad (23)$$

Для удобства часто вводят линейную нумерацию функций  $\mathbf{T}_{nks}$  и  $\mathbf{S}_{nks}$  одним индексом  $j$ , где

$$j = n^2 + 2k + s - 1. \quad (24)$$

$$j = n^2 + 2k + s - 1. \quad (25)$$



ВСФ определяются для всех точек сферы, где они обладают свойствами ортогональности и полноты. Однако для анализа данных в некоторой зоне широт (или склонений) можно также ввести полную систему ортогональных функций.

Пусть данные некоторого зоны принадлежат следующей области небесной сферы:

$$Z = \begin{cases} 0 \leq l \leq 2\pi \\ b_{min} \leq b \leq b_{max}. \end{cases} \quad (26)$$

Введем преобразование

$$\hat{b} = \arcsin(P \sin b + Q), \quad (27)$$

которое при

$$P = \frac{2}{s_2 - s_1}, \quad Q = -\frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1}, \quad (28)$$

$$s_1 = \sin b_{min}, \quad s_2 = \sin b_{max} \quad (29)$$

переводит всю сферу на область  $Z$ .

Легко показать, что если вместо нормировочного множителя (12) ввести нормировку с помощью множителя

$$R_{nk} = \sqrt{P \frac{2n+1}{4\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k > 0; \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad (30)$$

то наши функции будут удовлетворять следующим соотношениям:

$$\iint_Z (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = \iint_Z (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \quad (31)$$

$$\iint_Z (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = 0, \quad \forall i, j, \quad (32)$$

Другими словами, функции  $\mathbf{T}_{nkp}(l, \hat{b})$ ,  $\mathbf{S}_{nkp}(l, \hat{b})$  образуют на множестве  $Z$  ортонормированную систему функций.

### Разложение уравнений модели Огородникова-Милна по системе ЗВСФ

Как и в случае ВСФ на всей сфере для системы ЗВСФ можно также получить теоретическое разложение уравнений 8, 9. Однако мы должны выбрать для этого область  $Z$ . В этой статье мы ограничимся рассмотрением всего двух зон: северного ( $b \geq 0$ ) и южного ( $b \leq 0$ ) галактических полушарий (реальное число экспериментов

было значительно больше). Начальные коэффициенты разложения представлены в таблице 1. Так как ЗВСФ ортогональны на заданной части небесной сферы, то корреляции между определяемыми коэффициентами, в отличие от МНК, будут близки к нулю. Следует отметить весьма важное обстоятельство. Если разложение уравнений 8, 9 по ВСФ является конечным, то разложение этих же уравнений по ЗВСФ, определенных на полусферах является бесконечным. Каждый параметр (или их линейная комбинация) порождает целую серию убывающих коэффициентов. Эта особенность разложения открывает замечательную возможность определять значения параметров модели по нескольким коэффициентам. Сравнение полученных значений позволит судить об адекватности (в случае близких значений) модели наблюдениям. На практике, мы использовали всего два набора коэффициентов, через которые получили два набора параметров модели Огородникова-Милна. Мы назвали эти решения основным и альтернативным.

Основное и альтернативное решения по собственным движениям можно представить следующими выражениями:

$$\begin{bmatrix} U/\langle r \rangle \\ V/\langle r \rangle \\ W/\langle r \rangle \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ M_{13}^+ \\ M_{23}^+ \\ M_{12}^+ \\ M_{11}^* \\ M_{33}^* \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} s_{101} \\ s_{110} \\ s_{111} \\ s_{201} \\ s_{210} \\ s_{211} \\ s_{220} \\ s_{221} \\ t_{101} \\ t_{110} \\ t_{111} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U/\langle r \rangle \\ V/\langle r \rangle \\ W/\langle r \rangle \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ M_{13}^+ \\ M_{23}^+ \\ M_{12}^+ \\ M_{11}^* \\ M_{33}^* \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} s_{101} \\ s_{110} \\ s_{111} \\ s_{301} \\ t_{201} \\ t_{110} \\ t_{111} \\ t_{210} \\ t_{211} \\ t_{220} \\ t_{221} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

где в общем виде вид матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  определяется границами рассматриваемой зоны  $Z$ . Численное значение этих матриц для северного и южного полушарий приведен в таблицах 2–3.

Следует иметь в виду то, что компоненты движения Солнца входят в формулы (33) с множителем  $1/\langle r \rangle$ . Это означает, что при использовании ВСФ эффекты движения Солнца должны быть либо исключены, либо решение имеет смысл проводить лишь для звезд, находящихся на приблизительно одинаковом расстоянии от Солнца, при этом мы сможем определить параметры движения Солнца лишь с точностью до множителя  $1/\langle r \rangle$ .

Таким образом, теоретически использование ЗВСФ позволяет:

1. получить решение на полусфере, избежав сильных корреляций;
2. пересчитать полученные коэффициенты разложения в параметры любой кинематической модели (в нашем случае – модели Огородникова-Милна) и произвести тест на адекватность модели наблюдениям посредством сравнения решений, основанных на разных наборах коэффициентов;
3. обнаружить коэффициенты разложения, которые не предсказываются выбранной моделью.

### Применение ЗВСФ на практике

Мы применили ЗВСФ к исследованию собственных движений звезд северного и южного галактических полушарий на материале каталогов Hipparcos, Tycho-2 и UCAC3. Использовались звезды различных расстояний (в случае Hipparcos), звездных величин и показателей цвета. В качестве основного материала для исследования мы выбрали самый новый и массовый каталог UCAC3.

Объем данных каталога UCAC3 настолько велик, что непосредственное определение коэффициентов сферического разложения наталкивается на определенные технические трудности. Но этот же большой объем данных позволяет провести пикселизацию данных на сфере с достаточно частой сеткой.

Выполним осреднение собственных движений звезд по сферическим трапециям, полученных равномерным делением экватора и круга широты соответственно на  $M$  и  $N$  частей. Индексы  $m$  и  $n$ , описывающие номер площадки по прямому восхождению и склонению, легко вычисляются по координатам звезды следующими выражениями:

$$m = \left[ \frac{\alpha}{360^\circ} M \right] + 1; \quad n = \left[ \frac{90^\circ - \delta}{180^\circ} N \right] + 1, \quad (34)$$

где  $[x]$  – наименьшее целое, не превосходящее  $x$ . Координаты центра каждой площадки определяются как

$$l_m = \frac{180^\circ}{M} + \frac{360^\circ}{M}(m - 1), \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad (35)$$

$$b_n = 90^\circ - \frac{90^\circ}{N} - \frac{180^\circ}{N}(n - 1), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (36)$$

Для каждой площадки вычисляются усредненные значения  $\langle \mathcal{K}\mu_l \cos b \rangle$  и  $\langle \mathcal{K}\mu_b \rangle$  собственных движений звезд, попавших в эту площадку. Для каталога UCAC3 мы выбрали  $M = 180$ ,  $N = 90$ . Таким образом размер сферических трапеций составлял  $2^\circ \times 2^\circ$ ,

что позволяло определять значения весьма высоких гармоник, но для нашей цели мы ограничились определением 35 торроидальных и 35 сфероидальных коэффициентов. Их определение производилось методом наименьших квадратов с назначением веса каждой площадке равным числу звезд, попавших в нее. Площадки, в которые попало менее 3 звезд исключались. После определения коэффициентов  $T_j$ ,  $S_j$  по формулам (33) проводилось восстановление параметров модели Огородникова-Милна и сравнение между собой основного и альтернативного решения.

Перед проведением анализа реальных усредненных собственных движений были выполнены многочисленные тесты на сетке каталога UCAC3 с искусственными собственными движениями с целью определить устойчивость метода к случайным ошибкам, а также способность метода обнаруживать различные систематические составляющие. Все тесты показали высокую надежность получаемых результатов, устойчивость к шумам и совпадение в модельных случаях основного и альтернативного решения.

Коэффициенты векторного сферического разложения были вычислены по различным группам звезд каталогов Hipparcos, Tycho-2 и UCAC3. В силу ограниченного объема статьи приведем наиболее характерный пример для звезд  $15^m$  каталога UCAC3. Начальные коэффициенты приведены в таблице 4. Основное и альтернативное решения для нескольких групп звезд  $12^m - 16^m$  этого же каталога даны в таблицах 5 и 6.

### **Анализ результатов по материалам каталога UCAC3**

Анализ решения показывает, что в собственных движениях звезд обоих полушарий четко присутствуют, и об этом говорят совпадение основного и альтернативного решения, эффекты движения Солнца и вращения Галактики в рамках модели плоского вращения. Параметр  $\omega_3$  одинаков в основном и альтернативном решении в обоих полушариях. Что касается  $M_{12}^+$ , то в южном полушарии наблюдается хорошее согласие значений параметра, а также совпадение его с общепринятым значением параметра Оорта  $A$  (ссылка). В северном полушарии наблюдается противоположная картина – параметр  $M_{12}^+$  имеет даже разные знаки в основном и альтернативном решении.

Однако самый разительный результат – большой по модулю параметр  $\Omega_1$ , имеющий разные знаки в северном и южном полушарии! Среднее значение  $\Omega_1$ , полученное

по звездам  $12^m - 16^m$  в северном полушарии, составляет  $+20 \pm 1$  км/с · Кпк $^{-1}$ , в южном полушарии –  $-25 \pm 1$  км/с · Кпк $^{-1}$ . Реальность этого параметра подтверждается великоколепным согласием между основным и альтернативным решением, где наблюдается практически полное совпадение в пределах ошибок значений этого параметра. Такое поведение поля скоростей звезд означает, что северное и южное полушария «вращаются» вокруг оси  $X$  (направленной на центр Галактики) «навстречу» друг другу. При традиционном определении кинематических параметров методом наименьших квадратов по данным всей небесной сферы из-за почти одинакового по модулю, но разного по знаку значения  $\Omega_1$  в ответе мы получаем почти незначимое значение этого параметра (Таблица 7).

Интересно, что даже в решении по всей небесной сфере имеется достаточно значимый параметр  $\Omega_2$ . При анализе его поведения по полусферам, мы также замечаем асимметричное поведение. По северному полушарию его значение составляет около  $-15 \pm 1$  км/с · Кпк $^{-1}$  с хорошим согласием между основным и альтернативным решением, по южному полушарию не наблюдается такого согласия: основное решение дает значение около  $+5 \pm 1$ , альтернативное – около  $+15 \pm 1$  км/с · Кпк $^{-1}$ .

Неперпендикулярность оси вращения ближайших звезд плоскости Галактики уже отмечалась ранее (Цветков, 2006), но рассматриваемые группы звезд относятся к достаточно далеким объектам. Их групповой параллакс, основанный на параметрах движения Солнца показывает, что расстояние среднее расстояние до звезд  $13^\circ - 15^\circ$  составляет не менее 1 Кпк.

Что касается параметров  $M_{11}^*$  и  $M_{33}^*$ , то основное и альтернативное решение систематически расходятся как в северном, так и в южном полушарии, вплоть до разных знаков. Это означает, что мы не можем рассматривать получаемые значения в качестве характеристик именно сжатия-растяжения поля скоростей вдоль соответствующих осей. Существуют какие-то иные систематические эффекты, дающие вклад в соответствующие коэффициенты векторного сферического разложения, но этот вклад не является проявлением эффектов сжатия-растяжения.

Для наглядного представления выявленной асимметрии мы провели визуализацию остаточных собственных движений звезд, после вычета из них действий стандартных кинематических эффектов, определенных по всей небесной сфере (рис. 4). Анализ этого изображения показывает, что эффект противоположных значений  $\Omega_1$

действительно присутствует: отчетливо видно, что в северном полушарии имеется вращение вокруг оси, направленной на центр Галактики, по часовой стрелке, а в южном – против часовой стрелки.

Кроме этого факта, имеет еще несколько аномалий, а именно, локальные «вихри». Из них самый значительный имеет координаты центра приблизительно  $l = 121^\circ$ ,  $b = +20^\circ$  и диаметр около  $30^\circ$ . Мы даже оценили «период» обращения этого образования как  $200 \pm 30$  млн. лет.

Мы задавали себе вопрос, почему эффект асимметрии параметра  $\Omega_1$  не был замечен ранее. Обращение к исследованиям (Макаров, Мерфи, 2007) и (Витязев, Цветков, 2009) показало, что при анализе поля скоростей звезд с помощью ВСФ по *всей небесной сфере* обнаруживалась сильные внемоделльные гармоники  $\mathbf{S}_{310}$  и  $\mathbf{T}_{211}$ . Эти же гармоники обнаруживаются и в UCAC3 при анализе собственных движений методом векторных сферических функций на всей небесной сфере. Значения коэффициентов  $\mathbf{S}_{310}$  и  $\mathbf{T}_{211}$  для звезд разного блеска приведены в таблице 9. Вид комбинации этих гармоник вида  $20 \mathbf{T}_{211} - 15 \mathbf{S}_{310}$  приведен на рис. 5. Как мы видим – это изображение в достаточно широкой области около долготы  $l = 0^\circ$  показывает вид движения, который можно охарактеризовать как «вращение полусфер навстречу друг другу» с рис. 4. Также виден эффект «параллактического движения» в направлении  $l = -90^\circ$ . Следует подчеркнуть, что рис. 4 получен по данным полусфер, т.е. северная и южная полусферы строились отдельно, а рис. 5 – комбинация гармоник ВСФ на всей небесной сфере.

Для окончательного выяснения связи между гармониками  $\mathbf{S}_{310}$  и  $\mathbf{T}_{211}$  на всей сфере и разными значениями  $\Omega_1$  в северном и южном полушарии был проведен следующий эксперимент: мы задались значениями коэффициентов  $S_{310} = -15$ ,  $T_{211} = +20$  и на сетке каталога UCAC3 построили модельные собственные движения по этим гармоникам, затем была проведена уже описанная процедура анализа данных по полусферам. Краткие результаты данного анализа для сетки звезд  $15^m$  приведены в таблице 8. Как мы видим, наличие искусственных внемоделльных гармоник  $\mathbf{S}_{310}$  и  $\mathbf{T}_{211}$  при анализе по полушариям приводит к появлению параметров  $\Omega_1$  и  $M_{23}^+$  с разными знаками в полушариях, а также к отрицательному значению  $V/\langle r \rangle$  в обоих полушариях. Сопоставляя последнее с малыми значениями (и даже отрицательными)  $V/\langle r \rangle$  в таблице 6, можно сказать, что видимо это также является следствием этих гармоник.

Таким образом, можно равноправно утверждать, что наличие разных значений параметра  $\Omega_1$  в северном и южном полушарии приводит к появлению гармоник  $\mathbf{T}_{211}$  и  $\mathbf{S}_{310}$  в разложениях собственных движениях звезд, либо наоборот: присутствие этой гармоники при анализе кинематики по полушариям может толковаться как «вращение» в противоположные стороны северного и южного полушария относительно оси  $X$ . Окончательный ответ о природе этого явления должны дать динамические теории вращения Галактики. Очевидно только то, что в качестве теории вращения Галактики не может выступать не только модель плоского вращения Оорта-Линдблада, но и модель Огородникова-Милна, которая предполагает линейное изменение поля скоростей в любом направлении от Солнца. Реальная кинематика оказывается анизотропной и требует более тонких моделей, учитывающих различие тензора вращения-деформации в различных направлениях небесной сферы.

### **Анализ результатов по материалам каталогов Hipparcos и Tycho-2**

Результаты анализа данных UCAC3 оказались настолько неожиданными, что авторы решили провести аналогичное исследование по материалам каталогов Hipparcos и Tycho-2, чтобы исключить влияние возможных систематических ошибок UCAC3 на результат. Несмотря на то, что эти каталоги значительно меньше по мощности, они позволяют выполнить более тонкий отбор звезд по различным параметрам. Для Hipparcos мы провели решение для звезд различных расстояний и типов (красные гиганты, бело-голубая часть главной последовательности, желтые карлики). Поведение красных гигантов и бело-голубых звезд главной последовательности оказалось довольно схожим с результатами, полученными по UCAC3, особенно для звезд больших расстояний (свыше 500 пк). Желтые карлики напротив не показывали значительной асимметрии в кинематике северного и южного галактических полушарий. Истинная причина этого, видимо лежит в том, что в Hipparcos эти звезды не прослеживаются на больших расстояниях. Решение по красным гигантам, проведенное обычным МНК, представлены в таблицах 10-11. Как мы видим, и в этом случае, особенно для далеких звезд, наблюдается асимметрия параметров  $\Omega_1$  и  $M_{23}^+$ .

В каталоге Tycho-2 нет индивидуальных параллаксов, поэтому мы провели решение по полусферам для различных звездных величин и различных показателей цвета. В целом, мы получили аналогичные результаты, хотя эффекты асимметрии звездно-кинематических параметров и не столь резко выражены. Значения парамет-

ров, полученные по основу решению методом ЗВСФ, для звезд с показателем цвета  $0.5 < B - V < 1.0$  приведены в таблицах 12-13 (более подробные данные приведены на сайте авторов).

Таким образом, можно заключить, что данные Hipparcos и Tycho-2 подтверждают асимметрию звездно-кинематических параметров.



*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. *Г.Арфкен* Математические методы в физике, 493-498, М.: Атомиздат, (1970)
2. *В.В.Бобылев и др.* АЖ, **83**, 821-836, (2006).
3. *Броше* (P. Brosche), Veröff, des Astron. Rechen-Inst. Heidelberg, N 17, pp. 1–27 (1966)
4. *Шван* (H. Schwan), Astron. Astrophys., 367, 1078–1086, (2001)
5. *В.В.Витязев, А.С.Цветков*, Вестн. ЛГУ, сер. 1, вып. 2 (N8), 73–79 (1989).
6. *В.В.Витязев, А.С.Цветков*, Письма в Астрон. журн. **35**, N2, 114 (2009).
7. *Витязев В.В., Шуксто А.К.* Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. Вып. 1. С. 116-124 (2005)
8. *Макаров, Мерфи* (V.V. Makarov, D.W.Murphy), Astron. J., 134, 367–375, (2007)
9. *Миньяр* (Mignard F.), Astron. and Astrophys. 354, 522–536 (2000)
10. *Миньяр, Морандо* (Mignard F., Morando B.), Journees 90. Systemes de reference spatio-temporels. Paris, pp. 151–158 (1990)
11. *К.Ф.Огородников*, Динамика звездных систем, М.: Физматгиз (1965).
12. *С.П.Рыбка*, Кинемат. и физ. небесн. тел **20**, 437 (2004).
13. *А.С.Цветков* (A.S.Tsvetkov) Astron. and Astrophys. Transactions, Vol. 25, No. 2-3, p. 165-169 (2006)

**Таблица 1.** Теоретические значения начальных коэффициентов разложения  $T_j, S_j$  по ЗВСФ.

Верхние знаки соответствуют северному полушарию, нижние – южному; если знак один, то знаки коэффициента одинаковые для северного и южного полушария.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

$j$	$n$	$k$	$l$	$T_j$	$S_j$
1	1	0	1	$+1.949 \Omega_3$	$-1.949W/\langle r \rangle \pm 0.873M_X$
2	1	1	0	$\mp 0.768U/\langle r \rangle + 1.791 \Omega_2 - 0.256M_{13}^+$	$-1.791V/\langle r \rangle \mp 0.768 \Omega_1 \pm 1.279M_{23}^+$
3	1	1	1	$\pm 0.768V/\langle r \rangle + 1.791 \Omega_1 + 0.256M_{23}^+$	$-1.791U/\langle r \rangle \mp 0.768 \Omega_2 \pm 1.279M_{13}^+$
4	2	0	1	$\mp 0.453 \Omega_3$	$\pm 0.453W + 0.274M_X$
5	2	1	0	$+0.332U/\langle r \rangle \mp 0.332 \Omega_2 \pm 0.332M_{13}^+$	$\pm 0.332V/\langle r \rangle + 0.332 \Omega_1 + 0.728M_{23}^+$
6	2	1	1	$-0.332V/\langle r \rangle \mp 0.332 \Omega_1 \mp 0.332M_{23}^+$	$\pm 0.332U/\langle r \rangle - 0.332 \Omega_2 + 0.728M_{13}^+$
7	2	2	0	$\pm 0.216M_{11}^*$	$+1.338M_{12}^+$
8	2	2	1	$\mp 0.433M_{12}^+$	$+0.669M_{11}^*$
9	3	0	1	$+0.270 \Omega_3$	$-0.270W/\langle r \rangle \mp 0.017M_X$
10	3	1	0	$\mp 0.199U/\langle r \rangle + 0.199 \Omega_2 - 0.199M_{13}^+$	$-0.199V/\langle r \rangle \mp 0.199 \Omega_1 \mp 0.199M_{23}^+$
11	3	1	1	$\pm 0.199V/\langle r \rangle + 0.199 \Omega_1 + 0.199M_{23}^+$	$-0.199U/\langle r \rangle \pm 0.199 \Omega_2 \mp 0.199M_{13}^+$
12	3	2	0	$-0.109M_{11}^*$	$\mp 0.463M_{12}^+$
13	3	2	1	$+0.219M_{12}^+$	$\mp 0.231M_{11}^*$
14	3	3	0	0	0
15	3	3	1	0	0

В таблице 1 использованы следующие обозначения

$$M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+,$$

$$M_X = M_{33}^+ - \frac{1}{2}(M_{11}^+ + M_{22}^+)$$

**Таблица 2.** Матрица **A** для вычисления основного решения.

Верхние знаки соответствуют северному полушарию, нижние – южному; если знак один, то знаки коэффициента одинаковые для северного и южного полушария.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	$s_{101}$	$s_{110}$	$s_{111}$	$s_{201}$	$s_{210}$	$s_{211}$	$s_{220}$	$s_{221}$	$t_{101}$	$t_{110}$	$t_{111}$
$U/\langle r \rangle$	0	0	-0.54	0	0	$\pm 1.10$	0	0	0	$\pm 0.44$	0
$V/\langle r \rangle$	0	-0.54	0	0	$\pm 1.10$	0	0	0	0	0	$\mp 0.44$
$W/\langle r \rangle$	-0.29	0	0	$\pm 0.94$	0	0	0	0	0	0	0
$\Omega_1$	0	$\pm 0.21$	0	0	-0.64	0	0	0	0	0	0.77
$\Omega_2$	0	0	$\mp 0.21$	0	0	0.64	0	0	0	0.77	0
$\Omega_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.51	0	0
$M_{13}^+$	0	0	$pm 0.15$	0	0	1.16	0	0	0	0.15	0
$M_{23}^+$	0	$\pm 0.15$	0	0	1.16	0	0	0	0	0	-0.15
$M_{12}^+$	0	0	0	0	0	0	0.75	0	0	0	0
$M_{11}^*$	0	0	0	0	0	0	0	1.49	0	0	0
$M_{33}^*$	$\pm 0.49$	0	0	2.10	0	0	0	0.75	0	0	0

**Таблица 3.** Матрица **B** для вычисления альтернативного решения .

Верхние знаки соответствуют северному полушарию, нижние – южному; если знак один, то знаки коэффициента одинаковые для северного и южного полушария.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	$s_{101}$	$s_{110}$	$s_{111}$	$s_{301}$	$t_{201}$	$t_{110}$	$t_{111}$	$t_{210}$	$t_{211}$	$t_{220}$	$t_{221}$
$U/\langle r \rangle$	0	0	-0.42	0	0	$\pm 0.56$	0	2.04	0	0	0
$V/\langle r \rangle$	0	-0.42	0	0	0	0	$\mp 0.56$	0	-2.04	0	0
$W/\langle r \rangle$	-0.06	0	0	-3.25	0	0	0	0	0	0	0
$\Omega_1$	0	$\pm 0.14$	0	0	0	0	0.84	0	$\pm 1.18$	0	0
$\Omega_2$	0	0	$\mp 0.14$	0	0	0.84	0	$\pm 1.18$	0	0	0
$\Omega_3$	0	0	0	0	$\mp 2.21$	0	0	0	0	0	0
$M_{13}^+$	0	0	$\pm 0.28$	0	0	0.28	0	$\pm 2.15$	0	0	0
$M_{23}^+$	0	$\pm 0.28$	0	0	0	0	-0.28	0	$\mp 2.15$	0	0
$M_{12}^+$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mp 2.31$
$M_{11}^*$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\pm 4.63$	0
$M_{33}^*$	$\pm 1.00$	0	0	$\mp 7.25$	0	0	0	0	0	$\pm 2.32$	0

**Таблица 4.** Значение торроидальных  $T_j$  и сфероидальных  $S_j$  коэффициентов векторного сферического разложения звезд  $15^m$  каталога UCAC3.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

				Северное полушарие		Южное полушарие	
$j$	$n$	$k$	$l$	$T_j$	$S_j$	$T_j$	$S_j$
1	1	0	1	$-29.30 \pm 0.63$	$-3.71 \pm 0.63$	$-37.75 \pm 0.64$	$-8.57 \pm 0.64$
2	1	1	0	$-33.36 \pm 0.67$	$-39.10 \pm 0.67$	$6.70 \pm 0.68$	$-52.54 \pm 0.68$
3	1	1	1	$41.50 \pm 0.67$	$-29.45 \pm 0.67$	$-34.26 \pm 0.66$	$-9.61 \pm 0.66$
4	2	0	1	$14.35 \pm 0.68$	$0.95 \pm 0.68$	$-8.78 \pm 0.67$	$0.51 \pm 0.67$
5	2	1	0	$6.14 \pm 0.66$	$5.72 \pm 0.66$	$-10.08 \pm 0.65$	$13.79 \pm 0.65$
6	2	1	1	$-5.94 \pm 0.67$	$1.88 \pm 0.67$	$6.05 \pm 0.68$	$3.28 \pm 0.68$
7	2	2	0	$14.47 \pm 0.64$	$4.83 \pm 0.64$	$8.50 \pm 0.65$	$12.55 \pm 0.65$
8	2	2	1	$11.38 \pm 0.64$	$-3.95 \pm 0.64$	$7.12 \pm 0.64$	$-8.79 \pm 0.64$
9	3	0	1	$1.98 \pm 0.68$	$1.33 \pm 0.68$	$-0.27 \pm 0.67$	$-0.71 \pm 0.67$
10	3	1	0	$0.60 \pm 0.68$	$-2.53 \pm 0.68$	$-0.24 \pm 0.67$	$-0.03 \pm 0.67$
11	3	1	1	$-1.58 \pm 0.67$	$-0.43 \pm 0.67$	$-0.32 \pm 0.67$	$2.66 \pm 0.67$
12	3	2	0	$1.25 \pm 0.66$	$-3.76 \pm 0.66$	$8.49 \pm 0.65$	$6.04 \pm 0.65$
13	3	2	1	$4.35 \pm 0.66$	$2.42 \pm 0.66$	$5.95 \pm 0.66$	$-5.60 \pm 0.66$
14	3	3	0	$-0.75 \pm 0.62$	$2.91 \pm 0.62$	$-0.06 \pm 0.64$	$-1.39 \pm 0.64$
15	3	3	1	$-7.88 \pm 0.62$	$0.81 \pm 0.62$	$-4.51 \pm 0.63$	$1.38 \pm 0.63$
16	4	0	1	$3.20 \pm 0.67$	$2.51 \pm 0.67$	$-1.65 \pm 0.67$	$-0.19 \pm 0.67$
17	4	1	0	$-0.45 \pm 0.67$	$-2.95 \pm 0.67$	$0.27 \pm 0.64$	$0.63 \pm 0.64$
18	4	1	1	$-1.79 \pm 0.67$	$3.67 \pm 0.67$	$0.40 \pm 0.67$	$1.25 \pm 0.67$
19	4	2	0	$4.74 \pm 0.66$	$4.53 \pm 0.66$	$2.63 \pm 0.66$	$2.50 \pm 0.66$
20	4	2	1	$0.77 \pm 0.66$	$4.47 \pm 0.66$	$3.93 \pm 0.65$	$-0.23 \pm 0.65$
21	4	3	0	$-1.71 \pm 0.64$	$-2.86 \pm 0.64$	$0.64 \pm 0.63$	$1.62 \pm 0.63$
22	4	3	1	$0.77 \pm 0.64$	$1.67 \pm 0.64$	$0.76 \pm 0.64$	$-0.79 \pm 0.64$
23	4	4	0	$3.48 \pm 0.61$	$5.64 \pm 0.61$	$-0.37 \pm 0.62$	$-2.21 \pm 0.62$
24	4	4	1	$0.89 \pm 0.61$	$0.36 \pm 0.61$	$-0.07 \pm 0.62$	$-2.60 \pm 0.62$
25	5	0	1	$-1.40 \pm 0.52$	$0.04 \pm 0.52$	$-1.72 \pm 0.49$	$-1.80 \pm 0.49$
26	5	1	0	$-1.06 \pm 0.52$	$-2.15 \pm 0.52$	$0.01 \pm 0.49$	$0.88 \pm 0.49$
27	5	1	1	$1.58 \pm 0.52$	$-1.09 \pm 0.52$	$3.18 \pm 0.50$	$-1.53 \pm 0.50$
28	5	2	0	$-0.12 \pm 0.52$	$-1.31 \pm 0.52$	$5.94 \pm 0.49$	$3.04 \pm 0.49$
29	5	2	1	$2.39 \pm 0.52$	$2.03 \pm 0.52$	$1.75 \pm 0.50$	$-6.73 \pm 0.50$
30	5	3	0	$-2.03 \pm 0.52$	$-1.74 \pm 0.52$	$-0.50 \pm 0.50$	$-1.94 \pm 0.50$
31	5	3	1	$-0.63 \pm 0.52$	$-0.11 \pm 0.52$	$0.64 \pm 0.50$	$-0.42 \pm 0.50$
32	5	4	0	$-2.77 \pm 0.52$	$1.62 \pm 0.52$	$3.19 \pm 0.51$	$-4.26 \pm 0.51$
33	5	4	1	$-0.49 \pm 0.53$	$-1.59 \pm 0.53$	$-1.20 \pm 0.51$	$-0.74 \pm 0.51$
34	5	5	0	$-0.17 \pm 0.54$	$-1.73 \pm 0.54$	$-1.96 \pm 0.53$	$-0.88 \pm 0.53$
35	5	5	1	$1.46 \pm 0.54$	$-5.21 \pm 0.54$	$0.04 \pm 0.52$	$3.72 \pm 0.52$

**Таблица 5.** Основное и альтернативное решение для звезд каталога UCAC3  
**северного** галактического полушария.  
*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

Основное решение					
	12 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	16 <sup>m</sup>
$U/\langle r \rangle$	11.12 ± 0.57	9.91 ± 0.64	6.73 ± 0.72	3.45 ± 0.87	3.08 ± 0.94
$V/\langle r \rangle$	19.15 ± 0.57	15.03 ± 0.64	10.78 ± 0.72	9.35 ± 0.87	9.85 ± 0.94
$W/\langle r \rangle$	5.23 ± 0.43	4.18 ± 0.49	2.65 ± 0.55	1.99 ± 0.66	1.81 ± 0.72
$\Omega_1$	24.96 ± 0.44	20.12 ± 0.50	20.44 ± 0.57	19.95 ± 0.68	19.51 ± 0.74
$\Omega_2$	-12.95 ± 0.45	-12.73 ± 0.50	-15.04 ± 0.57	-18.19 ± 0.68	-18.02 ± 0.74
$\Omega_3$	-12.62 ± 0.22	-14.02 ± 0.24	-14.18 ± 0.27	-15.03 ± 0.32	-14.89 ± 0.34
$M_{13}^+$	-8.85 ± 0.51	-6.71 ± 0.58	-6.86 ± 0.65	-7.28 ± 0.79	-4.76 ± 0.85
$M_{23}^+$	-20.85 ± 0.51	-11.69 ± 0.58	-8.36 ± 0.65	-5.50 ± 0.79	-6.97 ± 0.85
$M_{12}^+$	11.43 ± 0.32	8.40 ± 0.36	5.49 ± 0.40	3.61 ± 0.47	5.42 ± 0.51
$M_{11}^*$	-4.20 ± 0.63	-4.49 ± 0.71	-4.96 ± 0.80	-5.90 ± 0.95	-3.42 ± 1.01
$M_{33}^*$	-17.95 ± 0.99	-8.21 ± 1.12	-5.41 ± 1.26	-2.77 ± 1.53	-0.04 ± 1.65
Альтернативное решение					
$U/\langle r \rangle$	14.72 ± 0.94	16.31 ± 1.06	12.38 ± 1.19	6.21 ± 1.43	3.61 ± 1.55
$V/\langle r \rangle$	17.67 ± 0.94	13.95 ± 1.06	8.53 ± 1.19	5.30 ± 1.44	4.70 ± 1.55
$W/\langle r \rangle$	1.10 ± 1.43	-0.94 ± 1.62	-3.38 ± 1.83	-4.09 ± 2.22	-5.33 ± 2.41
$\Omega_1$	25.94 ± 0.63	20.85 ± 0.72	21.84 ± 0.81	22.38 ± 0.97	22.57 ± 1.05
$\Omega_2$	-10.93 ± 0.63	-9.09 ± 0.72	-11.83 ± 0.81	-16.66 ± 0.97	-17.78 ± 1.05
$\Omega_3$	-14.42 ± 0.97	-16.54 ± 1.09	-22.68 ± 1.23	-31.69 ± 1.49	-42.44 ± 1.62
$M_{13}^+$	-5.10 ± 0.95	0.00 ± 1.07	-0.94 ± 1.21	-4.39 ± 1.45	-4.22 ± 1.57
$M_{23}^+$	-22.53 ± 0.95	-12.90 ± 1.07	-10.78 ± 1.21	-9.80 ± 1.45	-12.44 ± 1.57
$M_{12}^+$	4.79 ± 0.97	-7.63 ± 1.10	-18.08 ± 1.23	-26.29 ± 1.47	-29.10 ± 1.57
$M_{11}^*$	10.68 ± 1.96	20.31 ± 2.20	42.19 ± 2.46	67.01 ± 2.94	90.81 ± 3.15
$M_{33}^*$	-19.58 ± 3.37	-7.15 ± 3.81	4.80 ± 4.30	20.23 ± 5.20	31.26 ± 5.64

**Таблица 6.** Основное и альтернативное решение для звезд каталога UCAC3

**южного** галактического полушария.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

Основное решение					
	12 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	16 <sup>m</sup>
$U/\langle r \rangle$	$8.08 \pm 0.65$	$6.75 \pm 0.64$	$2.27 \pm 0.72$	$-1.35 \pm 0.88$	$-3.02 \pm 0.96$
$V/\langle r \rangle$	$15.01 \pm 0.64$	$7.54 \pm 0.63$	$2.76 \pm 0.70$	$-1.76 \pm 0.86$	$-2.04 \pm 0.93$
$W/\langle r \rangle$	$5.56 \pm 0.48$	$4.52 \pm 0.48$	$3.45 \pm 0.53$	$2.04 \pm 0.65$	$1.09 \pm 0.72$
$\Omega_1$	$-28.27 \pm 0.50$	$-25.48 \pm 0.49$	$-23.85 \pm 0.55$	$-24.05 \pm 0.67$	$-23.44 \pm 0.73$
$\Omega_2$	$5.16 \pm 0.51$	$4.07 \pm 0.50$	$5.38 \pm 0.56$	$5.22 \pm 0.69$	$4.14 \pm 0.76$
$\Omega_3$	$-11.15 \pm 0.25$	$-14.68 \pm 0.25$	$-17.05 \pm 0.27$	$-19.37 \pm 0.33$	$-19.08 \pm 0.36$
$M_{13}^+$	$9.08 \pm 0.60$	$5.81 \pm 0.58$	$6.72 \pm 0.65$	$6.27 \pm 0.80$	$6.48 \pm 0.88$
$M_{23}^+$	$29.39 \pm 0.58$	$29.32 \pm 0.57$	$29.07 \pm 0.63$	$29.11 \pm 0.77$	$26.85 \pm 0.84$
$M_{12}^+$	$14.06 \pm 0.37$	$10.31 \pm 0.36$	$9.31 \pm 0.40$	$9.38 \pm 0.49$	$11.21 \pm 0.53$
$M_{11}^*$	$-3.58 \pm 0.72$	$-8.21 \pm 0.70$	$-10.95 \pm 0.79$	$-13.14 \pm 0.95$	$-9.84 \pm 1.04$
$M_{33}^*$	$17.17 \pm 1.12$	$6.27 \pm 1.10$	$0.67 \pm 1.23$	$-1.32 \pm 1.51$	$1.68 \pm 1.66$
Альтернативное решение					
$U/\langle r \rangle$	$6.79 \pm 1.05$	$-3.26 \pm 1.03$	$-12.88 \pm 1.16$	$-20.29 \pm 1.41$	$-22.49 \pm 1.53$
$V/\langle r \rangle$	$14.10 \pm 1.09$	$4.42 \pm 1.06$	$-1.74 \pm 1.19$	$-9.46 \pm 1.46$	$-12.34 \pm 1.60$
$W/\langle r \rangle$	$4.36 \pm 1.60$	$0.36 \pm 1.58$	$0.10 \pm 1.77$	$2.83 \pm 2.17$	$4.51 \pm 2.38$
$\Omega_1$	$-28.92 \pm 0.73$	$-27.38 \pm 0.71$	$-26.52 \pm 0.80$	$-28.56 \pm 0.98$	$-29.46 \pm 1.07$
$\Omega_2$	$5.94 \pm 0.72$	$9.88 \pm 0.70$	$14.17 \pm 0.79$	$16.18 \pm 0.96$	$15.41 \pm 1.05$
$\Omega_3$	$-13.54 \pm 1.08$	$-10.04 \pm 1.07$	$-11.90 \pm 1.20$	$-19.38 \pm 1.47$	$-29.57 \pm 1.62$
$M_{13}^+$	$10.49 \pm 1.06$	$16.39 \pm 1.05$	$22.71 \pm 1.17$	$26.25 \pm 1.43$	$27.02 \pm 1.55$
$M_{23}^+$	$30.48 \pm 1.10$	$32.72 \pm 1.08$	$33.92 \pm 1.21$	$37.31 \pm 1.48$	$37.79 \pm 1.62$
$M_{12}^+$	$15.04 \pm 1.11$	$15.28 \pm 1.09$	$15.78 \pm 1.21$	$16.45 \pm 1.47$	$15.21 \pm 1.60$
$M_{11}^*$	$-4.82 \pm 2.31$	$-25.63 \pm 2.23$	$-39.85 \pm 2.47$	$-39.35 \pm 3.01$	$-18.47 \pm 3.27$
$M_{33}^*$	$19.09 \pm 3.77$	$6.75 \pm 3.72$	$-6.41 \pm 4.17$	$-16.26 \pm 5.11$	$-10.33 \pm 5.60$

**Таблица 7.** Значения параметров модели Огородникова-Милна, определенные МНК по всей небесной сфере.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	12 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	16 <sup>m</sup>
$U/\langle r \rangle$	15.07 ± 0.15	12.09 ± 0.15	8.72 ± 0.16	5.51 ± 0.18	4.19 ± 0.19
$V/\langle r \rangle$	34.29 ± 0.16	25.06 ± 0.16	19.03 ± 0.17	14.59 ± 0.19	14.05 ± 0.20
$W/\langle r \rangle$	8.99 ± 0.13	5.57 ± 0.13	3.36 ± 0.14	2.01 ± 0.15	1.75 ± 0.15
$\Omega_1$	-0.18 ± 0.19	0.28 ± 0.19	1.48 ± 0.21	2.48 ± 0.25	3.56 ± 0.26
$\Omega_2$	-4.99 ± 0.19	-5.74 ± 0.19	-6.43 ± 0.22	-7.93 ± 0.25	-9.02 ± 0.27
$\Omega_3$	-9.87 ± 0.13	-11.03 ± 0.13	-12.18 ± 0.13	-14.56 ± 0.15	-16.56 ± 0.15
$M_{13}^+$	-1.33 ± 0.22	-2.11 ± 0.22	-3.14 ± 0.25	-4.45 ± 0.28	-4.49 ± 0.30
$M_{23}^+$	2.26 ± 0.22	5.18 ± 0.22	6.26 ± 0.24	6.12 ± 0.28	3.74 ± 0.29
$M_{12}^+$	14.20 ± 0.18	11.78 ± 0.17	10.27 ± 0.18	10.02 ± 0.19	11.66 ± 0.20
$M_{11}^*$	-1.77 ± 0.34	-4.03 ± 0.33	-6.08 ± 0.36	-9.24 ± 0.39	-9.74 ± 0.39
$M_{33}^*$	1.71 ± 0.46	1.87 ± 0.46	1.67 ± 0.50	1.54 ± 0.56	2.32 ± 0.58

**Таблица 8.** Значения параметров модели Огородникова-Милна, определенные методом ЗВСФ для модельного каталога, использующего координатную сетку звезд 15<sup>m</sup> каталога UCAC3, собственные движения заданы функцией

$$20\mathbf{T}_{210}(l, b) - 15\mathbf{S}_{310}(l, b).$$

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	Северное полушарие		Южное полушарие	
	Основное	Альтернативное	Основное	Альтернативное
$U/\langle r \rangle$	-0.04 ± 0.06	0.00 ± 0.09	0.00 ± 0.06	-0.09 ± 0.10
$V/\langle r \rangle$	-16.81 ± 0.06	-21.08 ± 0.09	-16.90 ± 0.06	-21.02 ± 0.10
$W/\langle r \rangle$	-0.02 ± 0.04	-0.02 ± 0.04	0.06 ± 0.05	0.06 ± 0.05
$\Omega_1$	14.26 ± 0.04	16.73 ± 0.06	-14.29 ± 0.05	-16.67 ± 0.07
$\Omega_2$	-0.03 ± 0.04	-0.01 ± 0.06	0.02 ± 0.05	0.07 ± 0.07
$\Omega_3$	-0.01 ± 0.02	-0.01 ± 0.02	-0.03 ± 0.02	-0.03 ± 0.02
$M_{13}^+$	-0.02 ± 0.05	0.03 ± 0.10	-0.04 ± 0.06	0.05 ± 0.10
$M_{23}^+$	-15.82 ± 0.05	-20.31 ± 0.10	15.86 ± 0.05	20.19 ± 0.11
$M_{12}^+$	-0.02 ± 0.03	0.01 ± 0.10	-0.01 ± 0.03	-0.13 ± 0.10
$M_{11}^*$	0.02 ± 0.06	-0.01 ± 0.19	-0.10 ± 0.07	-0.34 ± 0.21
$M_{33}^*$	-0.01 ± 0.10	-0.03 ± 0.13	-0.28 ± 0.11	-0.40 ± 0.15

**Таблица 9.** Значения внемоделных коэффициентов  $T_{211}$  и  $S_{310}$ , полученные по собственным движениям УСАСЗ по всей небесной сфере.  
*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

Основное решение					
	$12^m$	$13^m$	$14^m$	$15^m$	$16^m$
$T_{211}$	$38.95 \pm 0.45$	$33.47 \pm 0.50$	$32.89 \pm 0.56$	$33.63 \pm 0.69$	$33.31 \pm 0.75$
$S_{310}$	$-19.57 \pm 0.47$	$-15.31 \pm 0.52$	$-13.07 \pm 0.59$	$-10.99 \pm 0.72$	$-10.82 \pm 0.78$



**Таблица 10.** Значения параметров модели Огородникова-Милна, определенные МНК в **северном** галактическом полушарии по красным гигантам каталога Hipparcos на различных расстояниях.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	100 – 250 пк (6103 звезд)	250 – 500 пк (7637 звезд)	500 – 1000 пк (2269 звезд)
$U/\langle r \rangle$	$56.14 \pm 5.64$	$23.43 \pm 2.59$	$13.27 \pm 3.74$
$V/\langle r \rangle$	$93.63 \pm 5.72$	$52.55 \pm 3.00$	$31.05 \pm 4.48$
$W/\langle r \rangle$	$40.40 \pm 4.75$	$18.12 \pm 2.30$	$7.63 \pm 3.38$
$\Omega_1$	$-12.71 \pm 4.93$	$-6.11 \pm 2.52$	$-15.33 \pm 3.69$
$\Omega_2$	$-10.44 \pm 4.88$	$3.75 \pm 2.33$	$5.88 \pm 3.37$
$\Omega_3$	$-14.29 \pm 2.49$	$-13.60 \pm 1.24$	$-15.97 \pm 1.84$
$M_{13}^+$	$-2.88 \pm 4.75$	$1.39 \pm 2.31$	$-0.07 \pm 3.37$
$M_{23}^+$	$7.16 \pm 4.74$	$7.45 \pm 2.39$	$13.99 \pm 3.46$
$M_{12}^+$	$17.24 \pm 3.19$	$15.42 \pm 1.58$	$15.54 \pm 2.35$
$M_{11}^*$	$-14.29 \pm 6.42$	$-3.02 \pm 3.14$	$-4.34 \pm 4.52$
$M_{33}^*$	$-15.06 \pm 10.88$	$8.73 \pm 5.23$	$17.29 \pm 7.58$

**Таблица 11.** Значения параметров модели Огородникова-Милна, определенные МНК в **южном** галактическом полушарии по красным гигантам каталога Hipparcos на различных расстояниях.

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	100 – 250 пк (6094 звезд)	250 – 500 пк (7280 звезд)	500 – 1000 пк (2215 звезд)
$U/\langle r \rangle$	$64.30 \pm 5.36$	$20.55 \pm 2.68$	$10.96 \pm 3.47$
$V/\langle r \rangle$	$104.32 \pm 5.51$	$50.86 \pm 3.05$	$30.73 \pm 4.04$
$W/\langle r \rangle$	$35.92 \pm 4.49$	$17.94 \pm 2.37$	$10.61 \pm 3.16$
$\Omega_1$	$0.73 \pm 4.82$	$6.00 \pm 2.59$	$11.35 \pm 3.37$
$\Omega_2$	$11.52 \pm 4.73$	$-4.35 \pm 2.41$	$-10.16 \pm 3.10$
$\Omega_3$	$-4.68 \pm 2.43$	$-13.79 \pm 1.27$	$-14.45 \pm 1.65$
$M_{13}^+$	$8.99 \pm 4.65$	$-3.75 \pm 2.40$	$-8.15 \pm 3.04$
$M_{23}^+$	$-4.06 \pm 4.68$	$-11.11 \pm 2.46$	$-14.10 \pm 3.14$
$M_{12}^+$	$13.11 \pm 3.14$	$13.32 \pm 1.65$	$11.34 \pm 2.15$
$M_{11}^*$	$-10.38 \pm 6.25$	$-8.65 \pm 3.24$	$-13.83 \pm 4.17$
$M_{33}^*$	$-6.70 \pm 10.57$	$-8.89 \pm 5.51$	$-8.67 \pm 7.19$

**Таблица 12.** Значения параметров модели Огородникова-Милна, определенные по основному решению ЗВСФ в **северном** галактическом полушарии звездам Tucho-2 с показателем цвета  $0.5 < B - V < 1.0$ .

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	$6^m - 10^m$ (40 963 звезд)	$10^m - 12^m$ (170 560 звезд)	$12^m - 14^m$ (34 808 звезд)
$U/\langle r \rangle$	$33.95 \pm 3.10$	$16.42 \pm 1.03$	$15.21 \pm 1.95$
$V/\langle r \rangle$	$68.60 \pm 3.08$	$37.15 \pm 1.03$	$29.57 \pm 1.90$
$W/\langle r \rangle$	$23.36 \pm 2.36$	$11.10 \pm 0.79$	$10.16 \pm 1.51$
$\Omega_1$	$10.36 \pm 2.39$	$23.32 \pm 0.80$	$24.16 \pm 1.48$
$\Omega_2$	$-5.49 \pm 2.45$	$-9.73 \pm 0.81$	$-8.19 \pm 1.56$
$\Omega_3$	$-14.00 \pm 1.19$	$-14.76 \pm 0.39$	$-13.60 \pm 0.77$
$M_{13}^+$	$-5.31 \pm 2.81$	$-10.62 \pm 0.93$	$-7.31 \pm 1.77$
$M_{23}^+$	$-20.06 \pm 2.77$	$-27.19 \pm 0.93$	$-23.96 \pm 1.69$
$M_{12}^+$	$11.99 \pm 1.76$	$9.87 \pm 0.58$	$8.40 \pm 1.16$
$M_{11}^*$	$-3.67 \pm 3.43$	$-4.09 \pm 1.14$	$-1.36 \pm 2.18$
$M_{33}^*$	$-8.96 \pm 5.44$	$-18.56 \pm 1.81$	$-18.07 \pm 3.48$

**Таблица 13.** Значения параметров модели Огородникова-Милна, определенные по основному решению ЗВСФ в **южном** галактическом полушарии звездам Tucho-2 с показателем цвета  $0.5 < B - V < 1.0$ .

*Единицы измерения – км/с · Кпк<sup>-1</sup>*

	$6^m - 10^m$ (43 188 звезд)	$10^m - 12^m$ (206 333 звезд)	$12^m - 14^m$ (47 046 звезд)
$U/\langle r \rangle$	$28.47 \pm 2.71$	$11.56 \pm 0.86$	$11.49 \pm 1.74$
$V/\langle r \rangle$	$61.82 \pm 2.70$	$33.72 \pm 0.87$	$29.24 \pm 1.75$
$W/\langle r \rangle$	$23.92 \pm 2.03$	$17.59 \pm 0.64$	$19.46 \pm 1.32$
$\Omega_1$	$-16.56 \pm 2.09$	$-21.71 \pm 0.67$	$-20.74 \pm 1.33$
$\Omega_2$	$2.89 \pm 2.14$	$6.40 \pm 0.68$	$4.03 \pm 1.40$
$\Omega_3$	$-6.42 \pm 1.06$	$-9.71 \pm 0.33$	$-10.47 \pm 0.69$
$M_{13}^+$	$4.84 \pm 2.46$	$8.64 \pm 0.78$	$5.18 \pm 1.58$
$M_{23}^+$	$17.53 \pm 2.44$	$26.04 \pm 0.79$	$24.70 \pm 1.58$
$M_{12}^+$	$24.44 \pm 1.56$	$18.71 \pm 0.48$	$15.61 \pm 1.02$
$M_{11}^*$	$-2.34 \pm 3.03$	$-5.71 \pm 0.96$	$-5.34 \pm 1.98$
$M_{33}^*$	$5.31 \pm 4.70$	$-3.33 \pm 1.49$	$-8.72 \pm 3.04$

## ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1. Распределение звезд каталога UCAC3 по видимой (fit model) звездной величине (в млн.).

Рис.2. Распределение звезд каталога UCAC3 по полной ошибке собственного движения. По оси абсцисс – модуль ошибки полного собственного движения, по оси ординат – число звезд в млн.

Рис.3. Распределение звездной плотности каталога UCAC3. Темный цвет соответствует плотности выше 1000 звезд на кв. градус, серый цвет – выше 100 звезд на кв. градус, светлый – менее 100 звезд на кв. градус.

Рис.4. Остаточные собственные движения звезд  $15^m$  каталога UCAC3 после вычета из них действий стандартных кинематических эффектов, определенных МНК по всей небесной сфере.

Рис.5. Вид линейной комбинации гармоник ВСФ  $20 T_{211} - 15 S_{310}$  на всей небесной сфере.

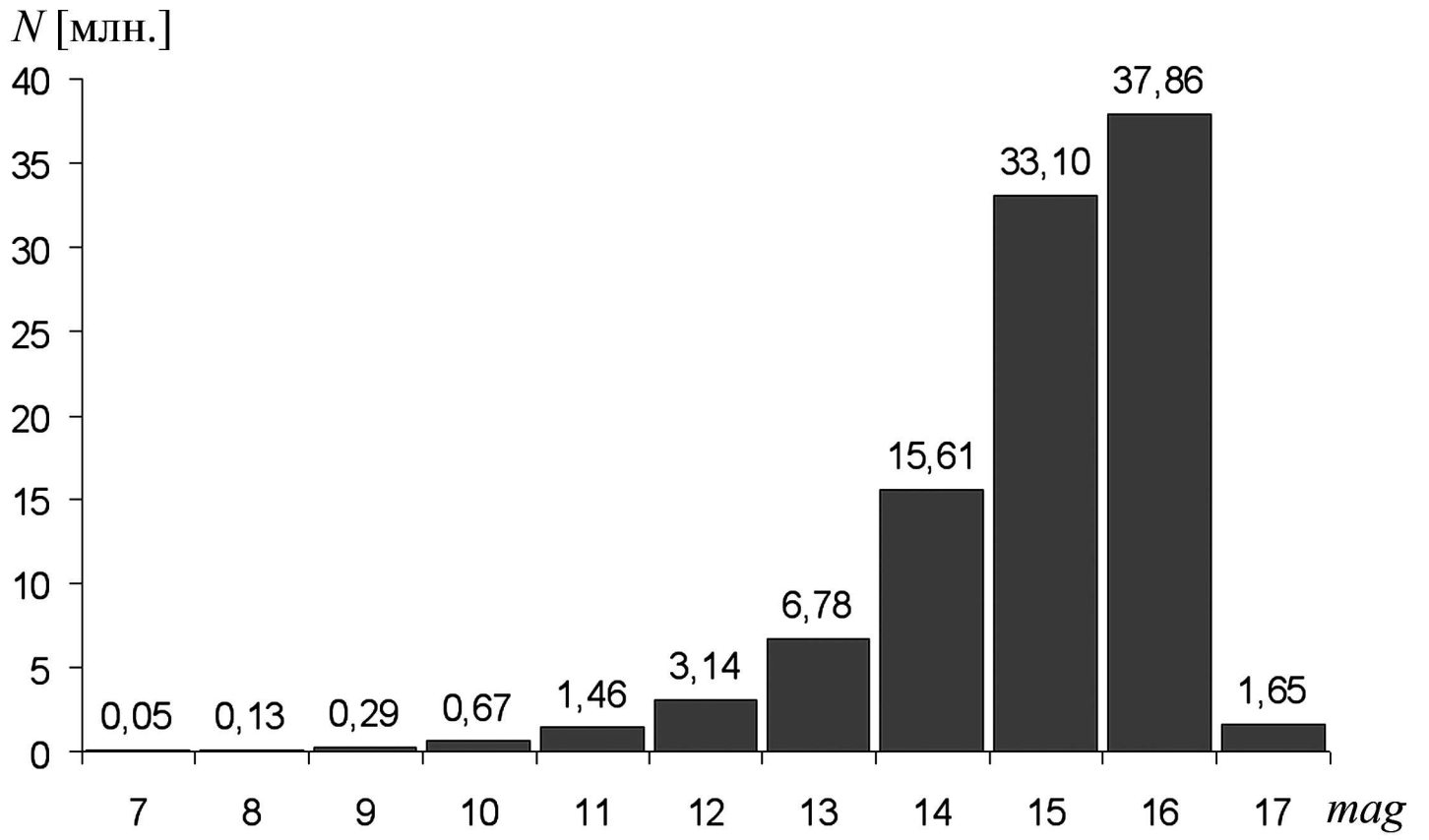


Рис. 1:

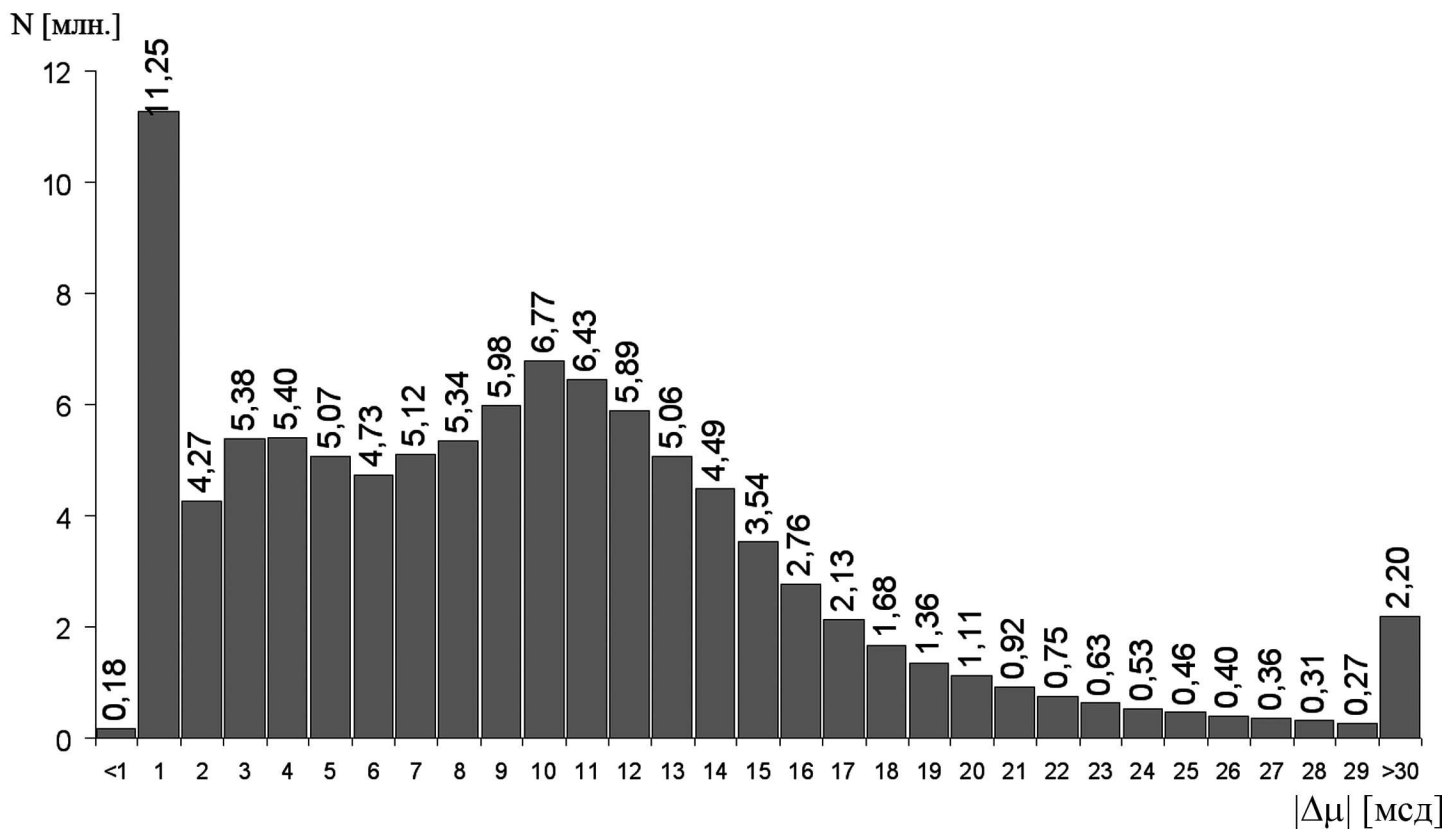


Рис. 2:

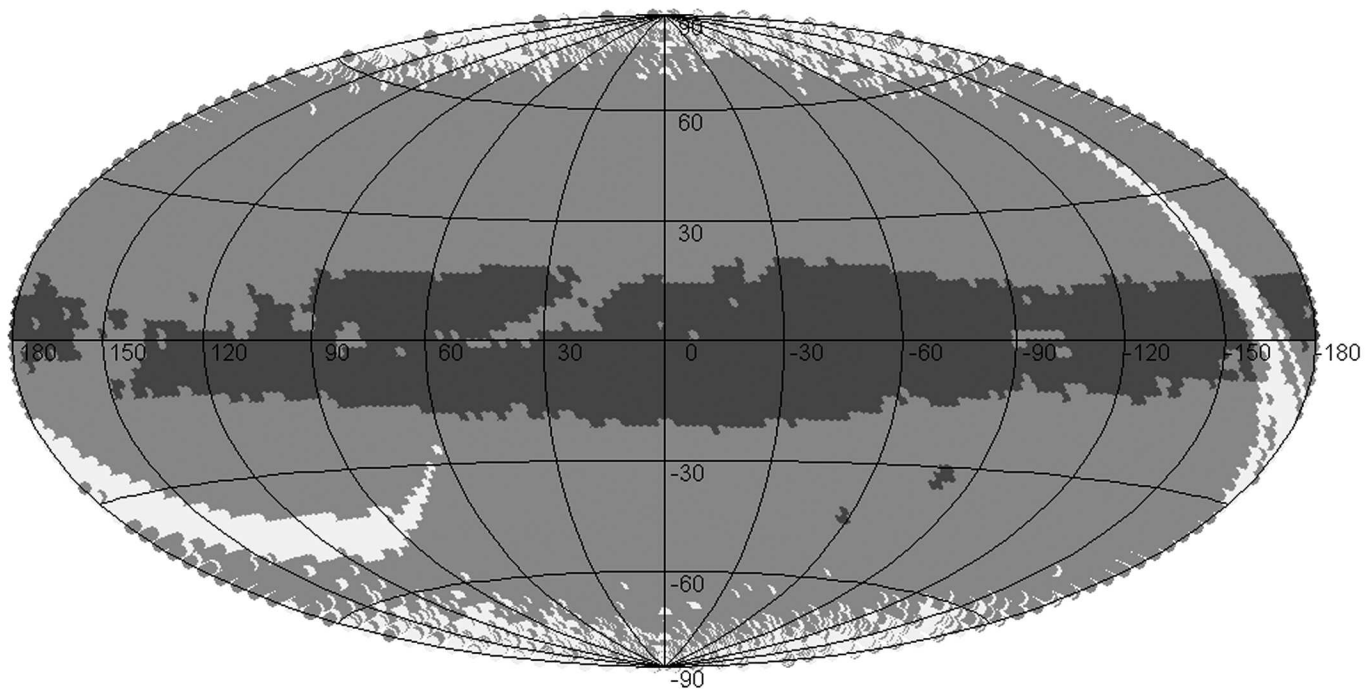


Рис. 3:

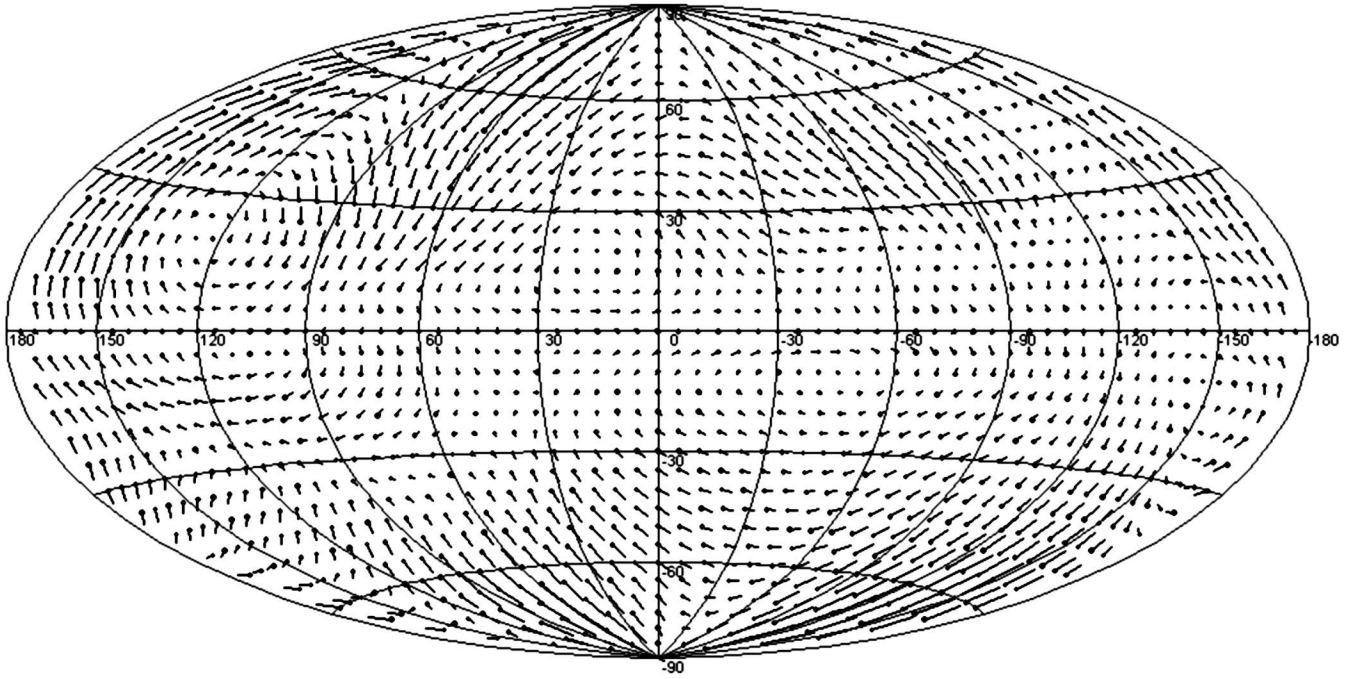


Рис. 4:

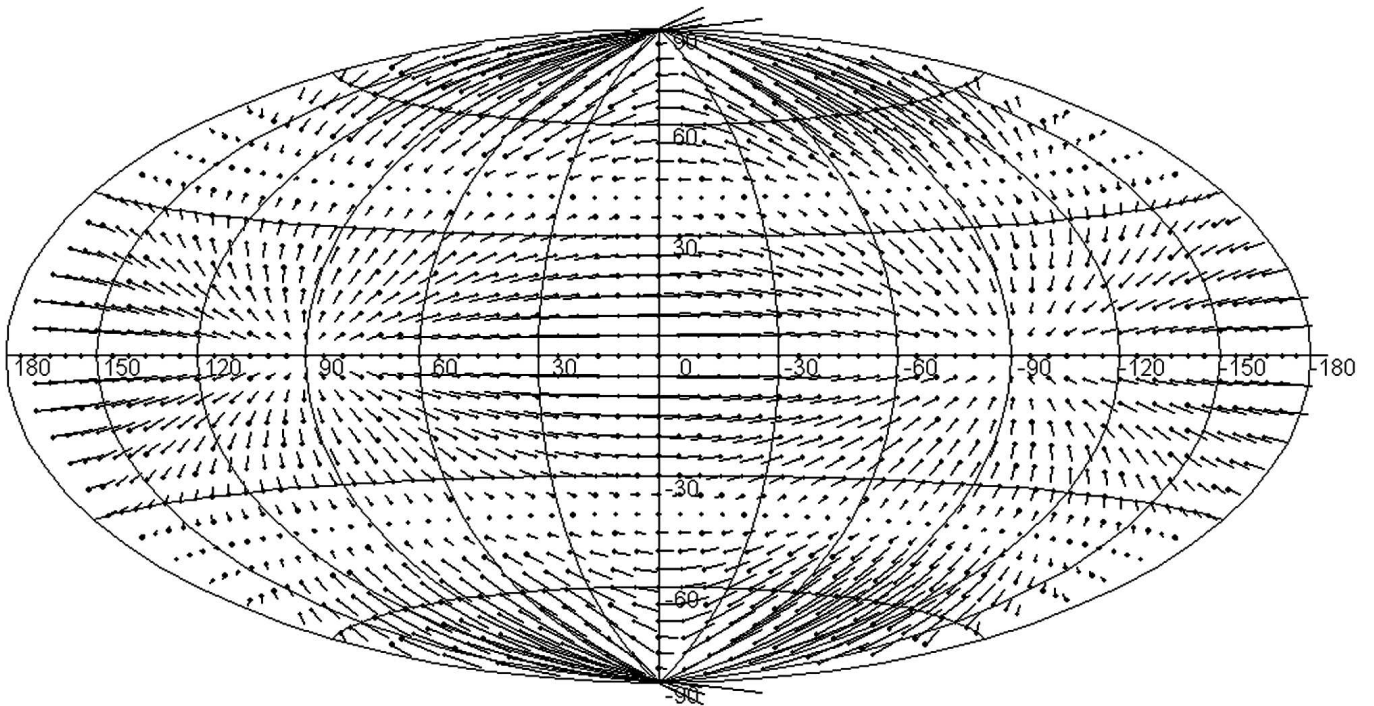


Рис. 5: