# Ряд Лапласа тел эллипсоидальной структуры и уровенного эллипсоида

К. В. Холшевников, Д. В. Миланов, В. Ш. Шайдулин

СПбГУ, ИПА РАН

Коуровка, январь 2018

# Эллипсоидальные фигуры

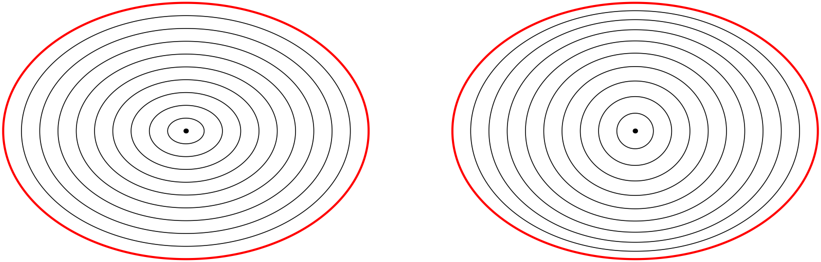
Сплошной эллипсоид $T \in \mathbb{R}^3$ расслаивается на семейство эллипсоидов вращения $\{S(u)\}$

$$\frac{x^2+y^2}{u^2}+\frac{z^2}{\varphi^2(u)}=a^2.$$

# Эллипсоидальные фигуры

- Поверхности семейства $\{S(u)\}$ не пересекаются и вложены друг в друга.
- Семейство $\{S(u)\}$ стягивается к точке $S(0)$, общему центру эллипсоидов $S(u)$.
- Эллипсоиды $S(u)$ сжаты, причем сжатие $(u-\varphi)/u$, а тем самым и квадрат первого $\varphi_1(u) = (u^2-\varphi^2)/u^2$ и квадрат второго эксцентриситета $\varphi_2(u) = (u^2-\varphi^2)/\varphi^2$ меридионального сечения эллипсоида возрастают (хотя бы нестрого) вместе с $u$.
- Наружный эллипсоид $\mathcal{S} = S(1)$ не является сферой, так что с учетом первого условия его сжатие $\alpha$ и эксцентриситет $\varepsilon$ заключены строго между нулем и единицей.

# Эллипсоидальные фигуры



$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.2929$$

# Ряд Лапласа эллипсоида

$$V(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{z}{r}\right). \qquad (*)$$

В частности, на положительной части оси $z$ в точке $Q_0(0,0,r)$

$$V(Q_0) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}.$$

Коэффициенты Стокса (гармонические коэффициенты) $I_n$ определяются интегралами по телу $T$:

$$I_n = \frac{1}{M a^n} \iiint\limits_T r^n P_n\left(\frac{z}{r}\right) \varrho\, d\tau, \quad M = \iiint\limits_T \varrho\, d\tau,$$

# Ряд Лапласа эллипсоида

$$I_n = (-1)^{n/2} J_n\,, \quad J_n = \frac{1}{\bar{\varrho}} \int_0^1 \varrho(u)\Phi_n(u)\,du, \quad n \equiv 2 \pmod 2.$$

$$0 < J_n < \frac{B\varepsilon^n}{n(n+1)}\,, \qquad B = \frac{3\varrho^*}{\bar{\varrho}}\,.$$

$$J_n \sim \frac{B_1\varepsilon^n}{n^\sigma}\,, \qquad \sigma = 2, \qquad B_1 = \frac{3\varrho(1)}{\bar{\varrho}}\,.$$

$\bar{\varrho}$ — средняя плотность, $\varrho^*$ — наибольшая плотность, $\varepsilon$ — эксцентриситет меридионального сечения наружного эллипсоида $\mathcal{S}$, $\Phi$ — некоторая положительная функция от $u$.

# Ряд Лапласа эллипсоида

Ряд Лапласа сходится абсолютно и равномерно вне и на поверхности сферы $\mathcal{S}_0$ и расходится внутри нее. Сфера $\mathcal{S}_0$ задается уравнением

$$r = a\varepsilon. \tag{1}$$

При малых $\varepsilon$ ряд (*) представляет потенциал во всем внешнем пространстве, а при больших ряд расходится в части внешнего пространства в окрестности полюсов. Критическое значение эксцентриситета равно $c/a = \varepsilon = 1/\sqrt{2}$.

# Уровенный эллипсоид

Уровенный эллипсоид определяется 4 параметрами:
$M, a, \varepsilon, \omega$ (масса, большая полуось, эксцентриситет, угловая скорость вращения)
Вместо $\omega$ Клеро предложил безразмерный параметр

$$q = \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\,\bar{\varrho}} = \frac{\omega^2 a^3 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\mathcal{G}M}\,.$$

# Ряд Лапласа уровенного эллипсоида

Условие уровенности однозначно определяет гравитационный потенциал вне и на эллипсоиде (единственность решения внешней задачи Дирихле)

$$I_n = (-1)^{n/2} J_n\,, \qquad J_n = \frac{n(A_1 - 2A_2) + 3A_1}{(n+1)(n+3)}\,\varepsilon^{n+1},$$

$$A_1 = \frac{1}{\varepsilon}\,, \qquad A_2 = \frac{q}{3\Psi(\varepsilon)}\,,$$

$$\Psi(\varepsilon) = \left(\frac{3}{\varepsilon^2} - 2\right)\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\arcsin\varepsilon - \frac{3}{\varepsilon}(1-\varepsilon^2) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-k)(2k)!!}{(2k+5)!!}\,\varepsilon^{2k+3} = \frac{4}{15}\,\varepsilon^3\left(1 + \frac{1}{7}\,\varepsilon^2 - \frac{8}{231}\,\varepsilon^6 - \ldots\right).$$

# Свойства коэффициентов Стокса

Случай $A_1 = 2A_2$:

$$q = q^* := \frac{3\Psi(\varepsilon)}{2\varepsilon} =$$

$$= 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-k)(2k)!!}{(2k+5)!!}\,\varepsilon^{2k+2} = \frac{2}{5}\,\varepsilon^2\left(1 + \frac{1}{7}\,\varepsilon^2 - \frac{8}{231}\,\varepsilon^6 - \ldots\right),$$

$$J_n = \frac{3}{(n+1)(n+3)}\,\varepsilon^n.$$

Мы пришли к однородному равновесному эллипсоиду Маклорена.

# Свойства коэффициентов Стокса

Случай $A_1 \neq 2A_2$:

$$J_n \sim \frac{B_2}{n^\sigma}\,\varepsilon^n\,, \qquad \sigma = 1, \qquad B_2(\varepsilon) = (A_1 - 2A_2)\varepsilon = 1 - \frac{2q\varepsilon}{3\Psi(\varepsilon)}\,.$$

$$B_2(\varepsilon) = 1 - \frac{5q}{2\varepsilon^2}\left(1 - \frac{1}{7}\,\varepsilon^2 + \frac{1}{49}\,\varepsilon^4 + \frac{359}{11319}\,\varepsilon^6 \ldots\right), \qquad |\varepsilon| < 1.$$

# Два примера

1. Земля. Для Земли $\alpha = 0.00335$, $\varepsilon = 0.0818$, $q = 0.00345$, $q^* = 0.00268$.

2. Сатурн. Заметим, что в Солнечной системе среди больших планет, их регулярных спутников и самого Солнца наибольшим сжатием обладает Сатурн: $\alpha = 0.0980$, $\varepsilon = 0.432$, $q = 0.140$, $q^* = 0.0765$.

Для обеих планет $q^*$ значимо меньше $q$, что свидетельствует о быстром убывании плотности от центра.

# Третий пример

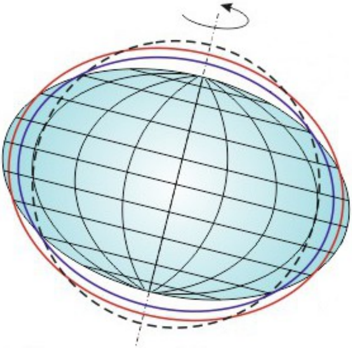
3. Пульсар PSR B0531+21 в Крабовидной туманности: $\omega = 188\text{с}^{-1}$. При $a = 12$ км и массе, равной 1.4 солнечной (Потехин 2010)

$$\frac{q}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 3.3 \cdot 10^{-4}.$$

Если принять $q = q^*$, то придем к

$$q = 0.00033, \qquad \varepsilon = 0.029, \qquad \alpha = 0.00042.$$

При большей массе и $q > q^*$ сжатие будет еще меньше.
Вывод: почти весь угловой момент унесла выброшенная при взрыве сверхновой материя.
Вывод остается в силе и при учете потери угловой скорости за 1000 лет за счет переработки энергии вращения в излучение.



# Спасибо!