Подсказки к решению задач

Задача 33.2

Малые невынужденные колебания математического маятника задаются дифференциальным уравнением гармонического осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

где φ — угол отклонения от положения равновесия отсчитываемый против часовой стрелки, ω — угловая частота колебаний. Точка привеса математического маятника движется с равномерно возрастающей скоростью pt, потому кинетическая энергия маятника равна:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left((l\dot{\varphi}\sin\varphi \pm pt)^2 + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\right).$$

Плюс для движения вверх, минус — вниз. В задаче одна степень свободы φ, обобщённая сила Q_φ:

$$Q_\varphi = m\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_\varphi = mgl\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -mgl\sin\varphi.$$

Составьте уравнение движения, приведите его к виду уравнения гармонического осциллятора, учтя малость колебаний: $\sin\varphi \to \varphi$, $\cos\varphi \to 1$, и определите период колебаний из получившейся угловой частоты.

Задача 33.5

Считаем ускорение свободного падения на высоте $h = 500\,\text{м}$ совпадающим с таковым у поверхности. Вспомним формулы ускорения при сложном движении и выразим $\mathbf{w}_r$. В получившемся выражении (проделайте самостоятельно) объединим слагаемые относящиеся к переносному ускорению и ускорение в неподвижной системе в одно, это g — ускорение свободного падения. Останется добавочное слагаемое относящееся к силе Кариолиса:

$$\mathbf{w}_r = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}),$$

которое и отвечает за смещением тела в восточном направлении во время свободного падения. В расчётах силы Кариолиса пренебрегайте горизонтальной компонентой скорости.

Задача 33.10

Одна степень свободы, примем за неё расстояние от тела до оси вращения x. Тогда в неподвижной системе отсчёта радиус–вектор задаётся таким образом:

$$\mathbf{r} = x\cos\omega t\mathbf{i} + x\sin\omega t\mathbf{j}.$$

Кинетическая энергия

$$T^{(0)} = \frac{m}{2}\, x^2\omega^2, \qquad T^{(1)} = 0, \qquad T^{(2)} = \frac{m}{2}\, \dot{x}^2$$

не зависит от времени явно, потенциальная энергия неизменна, считаем, что она нулевая. В таких условиях существует интеграл Якоби:

$$T^{(2)} - T^{(0)} = \mathrm{const}.$$

Используйте его, чтобы найти ответ.

Задача 33.11

Используйте кинетическую энергию для составления уравнения движения. Обобщённая сила Q_x нулевая. Интегрирование уравнений движения даст зависимость x от t.