Основные формулы ОТО

А.С.Цветков

2010 г.

1 Принцип относительности

1.1 Интервал

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2}$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1}$$

1.2 Времениподобные и пространственноподобные интервалы

$$t_{12} \equiv t_2 - t_1, \quad l_{12}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

В одной системе

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2,$$

во второй системе

$$s'^2_{12} = c^2t'^2_{12} - l'^2_{12}.$$

Система, в которой события произошли в одной точке $l'_{12} = 0$

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t'^2_{12} > 0,$$

связаны *времениподобным* интервалом ($l_{12} < ct_{12}$).

$$t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}$$

Система, в которой события произошли в одно время $t'_{12} = 0$

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l'^2_{12} < 0,$$

связаны *пространственноподобным* интервалом ($l_{12} > ct_{12}$).

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}$$

1.3 Собственное время

$$\underbrace{dt'}_{\text{собств.}} = \underbrace{dt}_{\text{набл.}} \sqrt{1 - \frac{dl^2}{c^2 dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

2 Преобразования Лоренца

2.1 Поворот в псевдопространстве

Преобразование, сохраняющее интервал – поворот в четырехмерном псевдопространстве.

$$x = x' \operatorname{ch} \psi + ct' \operatorname{sh} \psi \tag{2}$$

$$ct = x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi \tag{3}$$

$$\operatorname{th} \psi = V/c$$

$$\operatorname{sh} \psi = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{4}$$

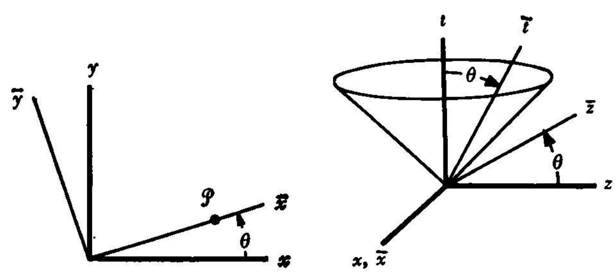

Рис. 1: Поворот в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах

2.2 Собственная длина

$$\underbrace{l}_{\text{набл.}} = \underbrace{l_0}_{\text{собств.}} \sqrt{1 - V^2/c^2} \tag{5}$$

2.3 Преобразование скорости

Введем обозначения

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{r}'}{dt}$$

Находим

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \tag{6}$$

В частном случае

$$v = \frac{v' + V}{1 + v' V/c^2} \tag{7}$$

2.4 Аберрация

Пусть скорость частицы лежит в плоскости xy. Тогда в системе K скорость частицы имеет компоненты

$$v_x = v \cos\theta, \quad v_y = v \sin\theta,$$

а в системе K'

$$v'_x = v' \cos\theta', \quad v'_y = v' \sin\theta'.$$

С помощью (6) находим:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v' \sqrt{1 - V^2/c^2} \sin\theta'}{v' \cos\theta' + V}. \tag{8}$$

Частный случай $v = v' = c$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\cos\theta' + V/c} \sin\theta'. \tag{9}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (V/c)\cos\theta'} \sin\theta', \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + V/c}{1 + (V/c)\cos\theta'}. \tag{10}$$

В случае $V << c$ с точностью до членов порядка V/c

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c} \sin\theta' \cos\theta'.$$

С той же точностью

$$\Delta\theta = \theta' - \theta = \frac{V}{c} \sin\theta'. \tag{11}$$

3 Четырехмерные векторы

3.1 Определение

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Четырехмерный вектор (4-вектор) – совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3, которые преобразуются при преобразовании как компоненты 4-радиус вектора

$$A^0 = \frac{A'^0 + (V/c)A'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + (V/c)A'^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \quad (12)$$

Квадрат величины 4-вектора определяется:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

3.2 Два вида координат

Два «сорта» координат

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (13)$$

A^i – **контравариантные** компоненты, A_i – **ковариантные** компоненты.

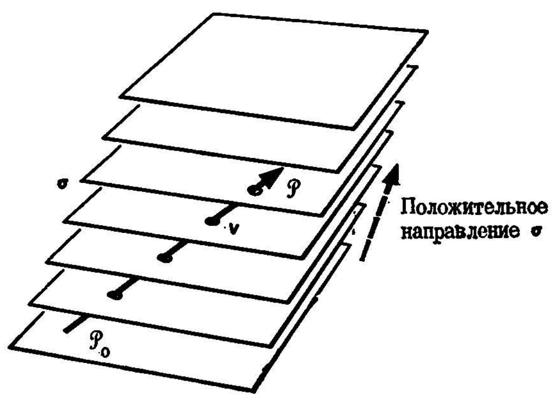

Рис. 2: Геометрическая интерпретация контравариантного (дифференциальной 1-формы и ковариантного вектора и их произведения

Суммирование по *немым индексам*:

$$A^i A_i \equiv \sum_{i=0}^{2} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Скалярное произведение

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

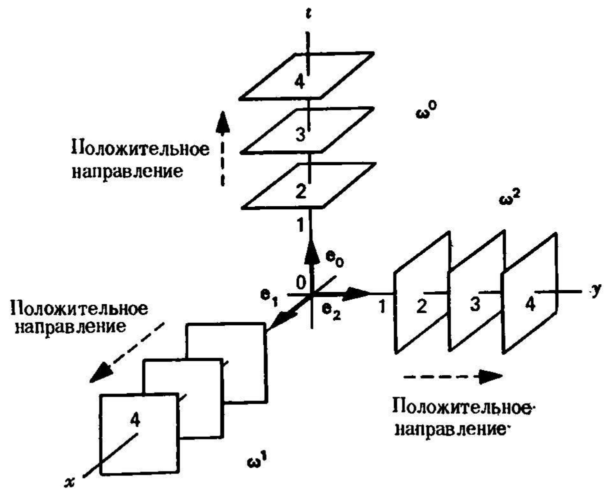

Рис. 3: Геометрическая интерпретация ковариантного и контравариантного базиса

3.3 Четырехмерные тензоры

4-тензор 2-го ранга – совокупность 16 величин A^{ik}, которые при преобразовании координат изменяются как произведения компонент двух 4-векторов. Надо различать контравариантные A^{ik}, ковариантные A_{ik} и смешанные A^i_k компоненты (в последнем случае также $A^i{}_k$ и $A_i{}^k$). Поднятие и опускание временного индекса (0) не меняет знак компоненты, а пространственного (1, 2, 3) меняет.

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \quad \ldots,$$
$$A^0{}_0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad \ldots$$

Симметричный тензор $A^{ik} = A^{ki}$, антисимметричный тензор $A^{ik} = -A^{ki}$. У симметричного тензора все смешанные компоненты совпадают A^i_k. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты равны 0.

3.4 След тензора

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

– свертывание или упрощение тензора.

3.5 Единичный тензор

$$\delta_i^k A^i = A^k \tag{14}$$

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \tag{15}$$

3.6 Метрический тензор

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Метрический тензор можно использовать для «поднятия» и «опускания» значков:

$$g_{ik} A^k = A_i, \quad g^{ik} A_k = A^i. \tag{17}$$

Скалярное произведение можно записать в виде

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k \tag{18}$$

3.7 Единичный антисимметричный тензор 4-го ранга (тензор Леви-Чевиты)

e^{iklm} – при перестановке любых двух индексов меняет знак. Отличные от нуля компоненты ± 1. Если хотя бы два индекса совпадают, то компоненты равна 0.

$$e^{0123} = +1 \tag{19}$$

$$e^{0123} e_{0123} = -24 \tag{20}$$

e^{iklm} – *псевдотензор*. Псевдотензоры ведут себя, как тензоры при поворотах СК, но не при отражениях.

Если A^{ik} – антисимметричный тензор, то тензор A^{ik} и псевдотензор

$$A^{*ik} = 1/2\, e^{iklm} A_{lm}$$

называются *дуальными* друг другу.

Аналогично $e^{iklm} A_m$ – антисимметричный псевдотензор 3-го ранга дуальный вектору A^i.

Полярные векторы при отражении СК меняют знаки компонент. Векторное произведение не меняет – это *аксиальный* вектор. Скалярное произведение полярного и аксиального вектора является псевдоскаляром. Аксиальный вектор – псевдовектор, дуальный антисимметричному тензору:

$$C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

Компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы:

$$A^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Можно записать $A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$ и $A^{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$

3.8 Дифференциальные и интегральные операции

3.8.1 Дифференциальные операции

4-градиент скаляра есть 4-вектор

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi\right).$$

Вообще операторы дифференцирования по координатам x^i $\frac{\partial}{\partial x^i}$ должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Иногда пишут $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ или $\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$

3.8.2 Интегральные операции

1. Интеграл по кривой в 4-пространстве. Эл-т интегрирования 4-вектор.

2. Интеграл по двумерной поверхности в 4-пространстве. Эл-т интегрирования параллелограмм, построенный на двух векторах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, его эл-т определяется $df^ik = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$. Вектора, нормального к «поверхности», построить нельзя, но можно построить дуальный тензор
$$df^{*ik} = \frac{1}{2}e^{iklm}df_{lm}.$$

3. Интеграл по гиперповерхности. Эл-т интегрирования – параллелепипед на трех 4-векторах dx^i, dx'^i, dx''^i:
$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix}$$
Можно использовать 4-вектор dS^i, дуальным тензору dS^{ikl}
$$dS^i = -\frac{1}{6}e^{iklm}dS_{ikl}, \quad dS_{ikl} = e_{iklm}dS^i.$$
При этом $dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \ \ldots$

4. Интеграл по четырехмерному объему по $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\,dt\,dV$

Обобщение теоремы Гаусса

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\, d\Omega. \tag{22}$$

Обобщение теоремы Стокса

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right). \tag{23}$$

4 4-скорость

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{24}$$

$$ds = c\, dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \tag{25}$$

4-скорость есть величина безразмерная, геометрически – 4-вектор касательной к мировой линии частицы. Ее компоненты не независимы:

$$u^i u_i = 1 \tag{26}$$

4-ускорение

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds} \tag{27}$$

Дифференцируя соотношение (26) находим что векторы 4-скорости и 4-ускорения ортогональны:

$$u^i w_i = 0 \tag{28}$$

5 Принцип наименьшего действия

Действие для свободной частицы

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

Действие в виде интеграла по времени

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

L – функция Лагранжа для механической системы. С помощью $\frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ находим

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha\, c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad L = -\alpha\, c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

При $c \to \infty$ $L \to \frac{mv^2}{2}$

$$L = -\alpha\, c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

Сравнив с классическим выражением $L = mv^2/2$, находим $\alpha = mc$. Таким образом действие для свободной материальной точки равно

$$S = -mc \int_a^b ds, \tag{29}$$

а функция Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{30}$$

6 Энергия и импульс

6.1 Импульс частицы

$\mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{v}$ С помощью (30) находим

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{31}$$

Сила, направленная перпендикулярно скорости:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{32}$$

Сила направлена вдоль скорости:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{33}$$

6.2 Энергия частицы

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L.$$

Подставляя сюда (30) и (31) получим:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{34}$$

Энергия $\neq 0$ при $v = 0$!

$$\mathcal{E}_0 = mc^2. \tag{35}$$

При $v << c$, разлагая в ряд (34):

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Масса сложного тела не равна сумме масс, необходимо учитывать взаимное движение его частиц. Имеет место только закон сохранения энергии.

Возводя (31) и (34) в квадрат и сравнивая их найдем

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{36}$$

Энергия, выраженная через импульс, называется функцией Гамильтона:

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{37}$$

При $v << c$

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

Из (31) и (34) следует

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2} \tag{38}$$

для частиц с $m \neq 0$. Для фотонов $(m = 0)$ и приближенно для *ультрарелятивистских* частиц имеем

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} \tag{39}$$

6.3 Четырехмерные формулы для энергии и импульса

$$\delta S = mc\,\delta \int_a^b ds = 0.$$

Замечая, что $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ и поэтому

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta x^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i d\delta x^i.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds. \tag{40}$$

На пределах $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$. Истинная траектория определяется из условия $\delta S = 0$. Из (40) получаем $du_i/ds = 0$ – постоянство скорости свободной частицы в четырехмерном виде.

Вариация как функция от координат. Считаем заданной только одну точку $(\delta x^i)_a = 0$

$$\delta S = -mcu_i dx^i. \tag{41}$$

4-импульс

$$p_i = -\frac{\partial S}{dx^i}. \tag{42}$$

$$p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\mathbf{p}\right), \quad p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right) \tag{43}$$

Из (41) видно

$$p^i = mcu^i. \tag{44}$$

Подставив сюда компоненты 4-скорости из (25) получим выражения (31) и (34). Из определения 4-импульса (44) и тождества $u^i u_i = 1$ имеем

$$p^i p_i = m^2 c^2 \tag{45}$$

6.4 4-сила

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds} \tag{46}$$

Компоненты удовлетворяют тождеству $g_i u^i = 0$ и выражаются через обычный 3-мерный вектор $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$:

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{47}$$

Временная компонента связана с работой силы.

7 Гравитационное поле в классической механике

Функция Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{48}$$

где φ – *гравитационный потенциал.* Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{49}$$

8 Гравитационное поле в релятивистской механике

В ИСО интервал
$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

В неинерциальной системе ds^2 не будет суммой квадратов дифференциалов четырех координат! А будет некоторой квадратичной формой общего вида:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k, \tag{50}$$

где g_{ik} – некоторые функции x^i. Четырехмерная СК x^0, x^1, x^2, x^3, является, таким образом, при пользовании не ИСО криволинейной. Величины g_{ik} устанавливают *метрику* пространства-времени. Очевидно $g_{ik} = g_{ki}$ – всего 10 независимых величин.

Если
$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0,\ i \neq k, \tag{51}$$

то будем называть такую СК *галилеевой*.

- Гравитационное поле – изменение метрики пространства времени g_{ik}.
- В не ИСО g_{ik} получаются преобразованием координат, обратным преобразованием можно привести *во всем пространстве* к галилееву виду.
- В истинном гравитационном поле этого сделать нельзя, однако в любой точке g_{ik} можно привести к диагональному виду.

Всегда будет
$$g = |g_{ik}| < 0 \tag{52}$$

Изменение метрики пространства-времени означает также изменение и чисто пространственной метрики. В общем случае метрика не только неевклидова, но еще и меняется со временем. Само понятие СО нуждается в пересмотре.

9 Криволинейные координаты

Рассмотрим преобразование одной СК x^0, x^1, x^2, x^3 в другую x'^0, x'^1, x'^2, x'^3
$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \tag{53}$$

Контравариантный 4-вектор – совокупность 4 величин A^i, которые преобразуются как их дифференциалы координат:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \tag{54}$$

Пусть φ – скаляр, производные преобразуются согласно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \tag{55}$$

Ковариантный 4-вектор – – совокупность 4 величин A_i, которые преобразуются как производные от скаляра.

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \tag{56}$$

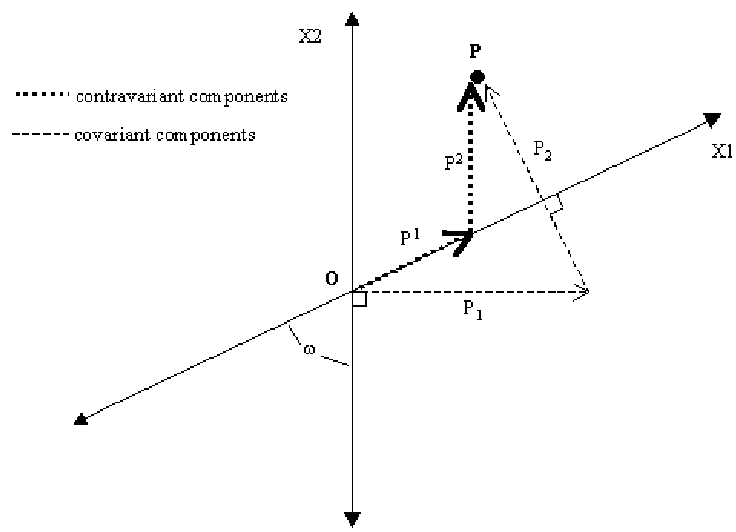

Рис. 4: Геометрическое представление контра- и ковариантных координат в косоугольной СК

Контравариантный тензор

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \tag{57}$$

Ковариантный тензор

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}. \tag{58}$$

Смешанный тензор

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l_m. \tag{59}$$

Дифференциалы координат dx^i составляют контравариантный вектор, а производные $\partial\varphi/\partial x^i$ – ковариантный 4-вектор.

Скалярное произведение инвариантно:

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l} A'^l B'_m = A'^l B'_l$$

Квадрат элемента длины в криволинейных координатах:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{60}$$

Метрический тензор

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{61}$$

Обратные друг другу тензоры

$$A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l \tag{62}$$

Контравариантный метрический тензор – обратный к ковариантному

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l \tag{63}$$

Связь между контра- и ковариантными компонентами:

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k \tag{64}$$

В галилеевой СК

$$g_{ik}^{(0)} = g^{ik(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Формулы (64) дают известную связь $A^0 = A_0$, $A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$,

9.1 Антисимметричный псевдотензор к криволинейных координатах

Пусть x'^i – галилеевы, а x^i – произвольные координаты, согласно общим правилам

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t} e^{prst},$$

или

$$E^{iklm} = J e^{iklm},$$

где J – определитель, составленный из производных или якобиан преобразования от галилеевых кординат к произвольным:

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}$$

Можно легко показать, что $J = 1/\sqrt{-g}$. Напишем формулу преобразования метрического тензора:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g^{lm(0)},$$

и приравниваем определители, составленные из обеих частей этого равенства: определитель обратного тензора $|g^{ik}| = 1/g$, а $|g^{lm(0)}| = -1$, Поэтому $1/g = -J^2$.

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}. \tag{66}$$

Опускание индексов у этого тензора осуществляется по формуле

$$e^{prst} g_{ip} g_{kr} g_{ls} g_{mt} = -g e_{iklm},$$

так что его ковариантные компоненты

$$E_{iklm} = \sqrt{-g} e_{iklm}$$

9.2 Элементы интегрирования в криволинейных координатах

В галилеевой системе $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ – скаляр. В криволинейной системе скаляр

$$\frac{1}{J} d\Omega = \sqrt{-g} d\Omega \tag{67}$$

Элемент площади – контравариантный антисимметричный тензор dS^{ikl}, дуальный ему вектор:

$$\sqrt{-g} dS_i = -\frac{1}{6} e_{iklm} dS^{klm} \sqrt{-g} \tag{68}$$

Элемент поверхности – df^{ik}, дуальный ему тензор:

$$\sqrt{-g} df^*_{ik} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} e_{iklm} df^{lm} \tag{69}$$

В теореме Гаусса потребуется замена

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{70}$$

10 Расстояния и промежутки времени

10.1 Связь времени с координатой x^0

Два события в одной точке, интервал – $ds = c\, d\tau$, полагая $dx^\alpha = 0$, имеем

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2,$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0. \tag{71}$$

Промежуток собственного времени между любыми двумя событиями в одной и той же точке пространства:

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}dx^0. \tag{72}$$

10.2 Элемент пространственного расстояния dl

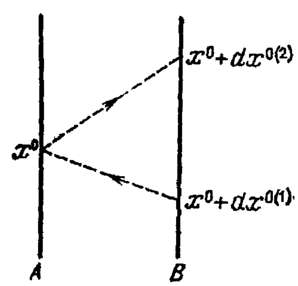

Рис. 5: Световой сигнал $A \leftrightarrow B$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{00}(dx^0)^2 \tag{73}$$

Решая уравнение $ds^2 = 0$, находим

$$dx^{0\,(1,2)} = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha \mp \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right) \tag{74}$$

Полный промежуток времени –

$$dx^{0\,(2)} - dx^{0\,(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta} \tag{75}$$

Промежуток собственного времени из (71) получается умножением на $\sqrt{g_{00}}/c$, а расстояние – еще умножением на $c/2$:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta \tag{76}$$

Перепишем это выражение в виде:

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{77}$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{78}$$

– трехмерный метрический тензор. g_{ik} зависят от x^0 – $\gamma_{\alpha\beta}$ меняется со временем. Нет смысла интегрировать по dl. Расстояние теряет определенность (только в б.м.).

10.3 Связь трехмерного и четырехмерного метрического тензоров

$-\gamma_{\alpha\beta}$ – обратный $g^{\alpha\beta}$. Распишем $g^{ik}g_{ik} = \delta^i_k$:

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} &= \delta^\alpha_\gamma, \\
g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} &= 0, \\
g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} &= 1.
\end{aligned} \tag{79}
$$

Определив $g^{\alpha 0}$ из второго равенства и подставив в первое, получим

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

Иначе можно сформулировать, что $-g^{\alpha\beta}$ – контравар. трехмерн. метрич. тензор:

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \tag{80}$$

Определители $g = |g_{ik}|$, $\gamma = |\gamma_{\alpha\beta}|$:

$$-g = g_{00}\gamma \tag{81}$$

Введем трехмерный вектор
$textbfg$, его ковариантные компоненты:

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \tag{82}$$

контравариантные компоненты:

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \equiv -g^{0\alpha}. \tag{83}$$

Из третьего равенства (79) следует

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha \tag{84}$$

10.4 Понятие одновременности в ОТО

Рассмотрим опять (10.2). Одновременным с моментом x^0 в точке A следует считать показание часов в точке B, лежащее посередине между моментами отправления и обратного прибытия:

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}(dx^{0(2)} + dx^{0(1)}).$$

Подставляя сюда (74), находим разность значений x^0 для двух одновременных событий в бесконечно близких точках:

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha dx^\alpha. \tag{85}$$

Продолжая подобную синхронизацию дальше, можно синхронизовать часы вдоль любой незамкнутой линии. Синхронизация вдоль замкнутого контура, вообще говоря, невозможна! Вернемся назад в точку с $\Delta x^0 \neq 0$. Тем более невозможна однозначная синхронизация часов во всем пространстве. Исключение составляют лишь такие СО, в которых все компоненты $g_{0\alpha}$ равны нулю.

Невозможность синхронизации времени является свойством именно произвольной СО, а не пространства времени как такового. В любом гравитационном поле всегда можно выбрать (даже бесчисленным числом способов) СО, т.о. чтобы обратить в нуль все три величины $g_{0\alpha}$ (*синхронная СО*)

Уже в СТО течение собственного времени различно для разных СО. А в ОТО в разных точках пространства уже разное течение времени даже в одной СО.

11 Ковариантное дифференцирование

11.1 Символы Кристоффеля

В галилеевых координатах dA_i – вектор, $\partial A_i/\partial x^k$ – тензор, в криволинейных координатах это не так. dA_i – разность векторов в разных (хоть и бесконечно близких) точках, в разных точках векторы преобразуются по разному! Убедимся в этом.

Ковариантный вектор преобразуется согласно

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k,$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

Только в случае если 2-е производные равны 0, т.е. x'^k являются линейными функциями от x^k, dA_i преобразуется как вектор.

Необходимо преобразовать тензор $\partial A_i/\partial x^k$ от галилеевых координат к криволинейным.

Для того чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, необходимо «перенести» один из векторов в точку, в которой находится второй, затем определить разность векторов уже в одной точке пространства.

При *параллельном переносе* вектора в галилеевой системе его координаты не меняются, а в криволинейных координатах меняются.

Рассмотрим контравариантный вектор A^i в точке x^i, в соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$. Вектор A^i перенесем в $x^i + dx^i$, его изменение обозначим δA^i. Разность между векторами, находящимися в одной точке теперь равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{86}$$

Изменение δA^i компонент вектора при б.м. параллельном переносе:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{87}$$

Γ^i_{kl} – некоторые функции координат (i-я компонента изменения $\mathbf{e_k}$ при параллельном переносе вдоль $\mathbf{e_l}$), вид которых зависит от выбора СК, в галилеевой системе все $\Gamma^i_{kl} = 0$. Γ^i_{kl} – не тензор! (В галилеевой =0, то тензор был бы везде 0). Принцип эквивалентности[1] требует, чтобы в б.м. участке пространства можно было бы обратить в 0 величины Γ^i_{kl}. Но во всем пространстве в искривленной СК невозможно обратить Γ^i_{kl} в ноль везде! Величины Γ^i_{kl} играют роль напряженности грав. поля.

Величины Γ^i_{kl} называют *коэффициентами связности* или символами Кристоффеля.

Введем

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}, \qquad \text{обрано:} \qquad \Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \tag{88}$$

11.2 Изменение ковариантных компонент вектора при параллельном переносе

Пусть A_i и B^i – произвольные векторы. Для скалярного произведения имеем $\delta(A_i B^i) = 0$, тогда сразу запишем

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma^i_{kl} B^k A_i dx^l,$$

меняем расположение индексов:

$$B^i \delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k B^i dx^l,$$

ввиду произвольности B^i:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l, \tag{89}$$

11.3 Ковариантная производная

Подставим (87) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l$ в (86):

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k \right) dx^l. \tag{90}$$

Для ковариантного вектора находим

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k \right) dx^l. \tag{91}$$

[1] Неинерциальная система отсчета эквивалента некоторому гравитационному полю

Выражения в скобках являются тензорами, т.к. умноженные на вектор они снова дают вектор. Эти тензоры носят название *ковариантных производных* векторов A^i и A_i. Обозначим их через $A^i{}_{;\,k}$ и $A_{i;\,k}$:

$$DA^i = A^i{}_{;\,l} dx^l, \quad DA_i = A_{i;\,l} dx^l. \tag{92}$$

Сами ковариантные производные

$$A^i{}_{;\,l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k, \tag{93}$$

$$A_{i;\,l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k. \tag{94}$$

В галилеевых координатах ($\Gamma^i_{kl} = 0$) ковариантные производные переходят в обычные.

11.4 Ковариантные производные от тензора

Рассмотри контравариантный тензор $A^i B^k$. При параллельном переносе имеем:

$$\delta(A^i B^k) = A^i \delta B^k + B^k \delta A^i = -A^i \Gamma^k_{lm} B^l dx^m - B^k \Gamma^i_{lm} A^l dx^m.$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место для любого тензора A^{ik}:

$$\delta A^{ik} = -(A^{im} \Gamma^k_{lm} + A^{mk} \Gamma^i_{ml}) dx^l. \tag{95}$$

Подставляя это в

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}{}_{;\,l} dx^l,$$

находим *ковариантную производную тензора* A^{ik}:

$$A^{ik}{}_{;\,l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}. \tag{96}$$

Ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров

$$A^i_{k;\,l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k, \tag{97}$$

$$A_{ik;\,l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im}. \tag{98}$$

11.5 Свойства ковариантной производной

Ковариантная производная произведения

$$(A_i B_k)_{;\,l} = A_{i;\,l} B_k + A_i B_{k;\,l}.$$

Контравариантная производная

$$A_i{}^{;\,k} = g^{kl} A_{i;\,l}, \quad A^{i;\,k} = g^{kl} A^i{}_{;\,l}.$$

11.6 Преобразования символов Кристоффеля при переходе к другой СК

Получаются при преобразовании обеих частей равенств, определяющую любую из ковариантных производных:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \tag{99}$$

Первое слагаемое ведет себя как тензор, второе равно нулю лишь при линейных преобразованиях координат. Второе слагаемое симметрично по k и l, выпадает для $S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$:

$$S^i_{kl} = S'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l},$$

– тензор кручения пространства. При выполнении принципа эквивалентности $S^i_{kl} = 0$. Действительно, в локальной галилеевой СК $\Gamma^i_{kl} = 0$, следовательно и $S^i_{kl} = 0$, а это тензор, т.е. он равен нулю в любой СК. Следовательно:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}, \quad \Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}, \tag{100}$$

т.о. имеется всего 40 уникальных значений.

Формула (99) при условии (100) позволяет сделать утверждение о возможности выбора такой СК, в которой все Γ^i_{kl} обращаются в нуль в любой наперед заданной точке[2]. Такую систему называют *локально-инерциальной* или *локально-геодезической*. Пусть заданная точка x^i выбрана в качестве начала СК и Γ^i_{kl} имеют в ней значение $(\Gamma^i_{kl})_0$. Произведем вблизи этой точки преобразование:

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}(\Gamma^i_{kl})_0 x^k x^l, \tag{101}$$

тогда

$$\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} = (\Gamma^i_{kl})_0 \tag{102}$$

и согласно (99) все $\Gamma'^m_{np} = 0$.

Заметим, что для преобразования (101)

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)_0 = \delta^i_k,$$

поэтому оно не меняет значений любого тензора, поэтому одновременно можно привести и g_{ik} к галилееву виду.

[2] Можно показать, что надлежащим выбором СК можно обратить в нуль все Γ^i_{kl} вдоль заданной мировой линии

12 Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

12.1 Ковариантная производная от метрического тензора

Докажем, что $g_{ik;\,l} = 0$. Заметим, что

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik}A^k$, поэтому

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

В виду произвольности A^i получаем $Dg_{ik} = 0$, поэтому

$$g_{ik;\,l} = 0. \tag{103}$$

Т.о. при ковариантном дифференцировании g_{ik} следует рассматривать как постоянные.

12.2 Выражение символов Кристоффеля через метрический тензор

$$g_{ik;\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,\,il} - \Gamma_{i,\,kl} = 0$$

Производные от g_{ik} выражаются через символы Кристоффеля. Запишем, переставляя индексы:

$$g_{ik,\,l} = \Gamma_{k,\,il} + \Gamma_{i,\,kl}, \quad g_{li,\,k} = \Gamma_{i,\,kl} + \Gamma_{l,\,ik}, \quad -g_{kl,\,i} = -\Gamma_{l,\,ki} - \Gamma_{k,\,li}$$

Взяв полусумму этих равенств (помня $\Gamma_{i,\,kl} = \Gamma_{i,\,lk}$

$$\Gamma_{i,\,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{104}$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{105}$$

12.3 Некоторые полезные выражения

12.3.1 Упрощенный символ Кристоффеля

Найдем Γ^i_{ki}, для этого определим dg, взяв дифференциал каждой компоненты g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в определителе (соответствующий минор). Компоненты обратного тензора g^{ik} равны минорам определителя из величин g_{ik}, деленным на этот определитель. Поэтому миноры определителя g равны gg^{ik}, т.о.

$$dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^{ik} \tag{106}$$

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right).$$

Меняя индексы m и i в 3-м и 1-м членах, видим, что они сокращаются:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

или согласно (106)

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{107}$$

12.3.2 Выражение для $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$:

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

С помощью (106) преобразуется к

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{108}$$

12.3.3 Связь производных от контра- и ковариантного метрического тензора

$$g_{il} \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{109}$$

– получается при дифференцировании равенства $g_{il} g^{lk} = \delta^k_l$

12.3.4 Выражение производных от g^{ik} через Γ^i_{kl}

Из тождества $g^{ik}{}_{;\,l} = 0$ следует:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml} g^{mk} - \Gamma^k_{ml} g^{im}. \tag{110}$$

12.4 Дивергенция в криволинейных координатах

Обобщение дивергенции $A^i{}_{;\,i}$, используя (107) имеем

$$A^i{}_{;\,i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i},$$

или окончательно

$$A^i{}_{;\,i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^i}{\partial x^i}. \tag{111}$$

Дивергенция антисимметричного тензора

$$A^{ik}_{;\,k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}$$

Поскольку $A^{mk} = -A^{km}$, то $\Gamma^i_{mk}A^{mk} = -\Gamma^i_{km}A^{km} = 0$, подставляя (107) находим:

$$A^{ik}_{;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}A^{ik}}{\partial x^k}. \tag{112}$$

Пусть A_{ik} – симметричный тензор, определим выражение $A^k_{i;\,k}$ для смешанных компонент:

$$A^k_{i;\,k} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk}A^l_i - \Gamma^l_{ik}A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{(\partial A^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki}A^k_l.$$

Последний член равен

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

В силу симметрии A^{kl} два члена в скобках взаимосокращаются:

$$A^k_{i;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}A^k_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}. \tag{113}$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ – антисимметричный тензор. В криволинейных координатах – это $A_{i;\,k} - A_{k;\,i}$, однако в виду того что $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$

$$A_{i;\,k} - A_{k;\,i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{114}$$

12.5 Аналог оператора Лапласа (Далабмера)

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x^i}$ в криволинейных координатах $\varphi^{;\,i}_{;\,i}$. Ковариантное дифференцирование скаляра – обычное дифференцирование: $\varphi_{;\,i} = \partial\varphi/\partial x^i$, поднимая индекс

$$\varphi^{;\,i} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$$

$$\varphi^{;\,i}_{;\,i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}.\right) \tag{115}$$

12.6 Теорема Гаусса

$$\oint A^i\sqrt{-g}\,dS_i = \int A^i_{;\,i}\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{116}$$

13 Движение частицы в гравитационном поле

13.1 Движение частицы

В СТО движение частицы определяется принципом наименьшего действия:

$$\delta S = -mc\, \delta \int ds = 0. \tag{117}$$

В галилеевой 4-системе координат решение – $du^i/ds = 0$ или $du^i = 0$, где $u^i = dx^i/ds$. В криволинейной СК это уравнение обращается в

$$Du^i = 0. \tag{118}$$

Из (90) имеем $du^i + \Gamma^i_{kl} u^k\, dx^l$, разделив на ds:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{119}$$

$\frac{d^2x^i}{ds^2}$ – 4-ускорение, $\Gamma^i_{kl} u^k u^l$ – 4-сила, g_{ik} – «потенциалы» гравитационного поля, его производные Γ^i_{kl} – «напряженность» поля.
В ковариантных координатах $Du_i = 0$ приводит к

$$\frac{d^u_i}{ds} - \Gamma^k_{il} u^k u^l = 0. \tag{120}$$

Подстановка (104) дает

$$\frac{d^u_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l = 0. \tag{121}$$

Выбор СК, в которой $\Gamma^i_{kl} = 0$, означает исключение гравитационного поля.

4-импульс частицы в гравитационном поле и его квадрат:

$$p^i = mcu^i, \quad p_i p^i = m^2 c^2. \tag{122}$$

Подставив сюда $-\partial S/\partial x^i$ вместо p_i найдет ур-е Гамильтона-Якоби:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0. \tag{123}$$

13.2 Распространение света

Для распространения света ур-е (119) неприменимо ($ds = 0$). Волновой вектор: $k^i = dx^i/d\lambda$, где λ – некоторый параметр, меняющийся вдоль луча. В СТО $dk^i = 0$, в грав. поле $Dk^i = 0$ или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0. \tag{124}$$

Квадрат волнового 4-вектора равен нулю[3]

$$k_i k^i = 0. \tag{125}$$

Ур-е эйконала[4]

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0. \tag{126}$$

13.3 Предельный переход к классическим уравнениям

Нерелятивистская функция Лагранжа (добавлена $-mc^2$)

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{127}$$

$$S = \int L\, dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt.$$

Сравнивая это с $S = -mc \int ds$, мы видим, что в предельном случае

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt$$

Возводя в квадрат и $c \to \infty$, находим, учитывая, что $\mathbf{v}\, dt = d\mathbf{r}$

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi) dt^2 - d\mathbf{r}^2. \tag{128}$$

Таким образом,

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{129}$$

Следовало бы ожидать, что $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$, но это не так. Поправки к ним того же порядка, что и для g_{00}.

14 Постоянное гравитационное поле

14.1 Статическое и стационарное гравитационное поле

Гравитационное поле называется *постоянным*, если можно выбрать такую СО, в которой все компоненты g_{ik} не зависят от x^0 (*мировое время*). Если создающее поле тело неподвижно, то оба направления времени эквивалентны и все компоненты $g_{0\alpha} = 0$. Такие поля будем называть *статическими*. Гравитационное поле вращающегося тела – не статическое ($g_{0\alpha} \neq 0$), но *стационарное*.

Смысл мирового времени в постоянном гравитационном поле: промежуток в между двумя событиями в одной точке пространства совпадает с промежутком с одновременными событиями в другой точке пространства. Но

[3] $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, $k^i = \ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k}$

[4] $f = ae^{i(-k_i x^i + \alpha)} = ae^{i\psi}$, ψ – эйконал, $\mathbf{k} = \operatorname{grad}\psi$, $k_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$

одинаковым промежуткам мирового времени x^0 соответствуют различные (конечные, а не только бесконечно малые (71)) промежутки собственного времени τ:

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}x^0. \tag{130}$$

В слабом гравитационном поле:

$$\tau = \frac{x^0}{c}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{131}$$

Время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал ($\varphi < 0$). Если из двух одинаковых часов одни находились в гравитационном поле, то они окажутся отставшими.

В *статическом* гравитационном поле $g_{0\alpha} = 0$ – синхронизация часов во всем пространстве возможна, а

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{132}$$

В *стационарном* гравитационном поле $g_{0\alpha} \neq 0$ – синхронизация часов во всем пространстве невозможна. g_{ik} не зависят x^0, то (85) можно переписать

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{133}$$

при синхронизации вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени равна

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}. \tag{134}$$

14.2 Распространение света в гравитационном поле

Частота света – производная (с обратным знаком) по времени от эйконала ψ. Частота, измеренная в мировом времени x^0/c равна $\omega_0 = -c\,\partial\psi/\partial x^0$. Поскольку уравнение эйконала (126) в постоянном поле не содержит x^0явно, то ω_0 остается постоянной при распространении луча света. Частота в собственном времени $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$ – различна в разных точках пространства:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}},$$

окончательно имеем:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{135}$$

В слабом гравитационном поле получаем приближенно:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{136}$$

Частота света возрастает с увеличением $|\varphi|$, т.е. возрастает при приближении к создающим поле телам; наоборот, при удалении луча от этих тел частота света уменьшается.

Если луч света испущен из точки с потенциалом φ_1 с частотой ω, то придя в точку с потенциалом φ_2, он будет иметь частоту (в собственном времени этой точки)

$$\omega \frac{\left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\varphi_1}{c^2}\right)} \approx \omega \left(1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right) \tag{137}$$

Таким образом сдвиг частоты составит

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\omega, \tag{138}$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы в месте испускания и месте наблюдения. При наблюдении спектра Солнца на Земле $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и $|\Delta\omega| < 0$ – *гравитационное красное смещение.*

14.3 Энергия частицы в гравитационном поле

При движении частицы сохраняется ее энергия $(-c\,\partial S/\partial x^0)$. Это временная компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$ и энергия есть:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00}\frac{x^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2 - dl^2}}$$

Введем скорость частицы, измеренную в собственном времени:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{c\,dl}{\sqrt{g_{00}}dx^0}$$

Тогда энергия, которая остается постоянной при движении частицы:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{139}$$

Легко показать, что (139) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если измерять v в собственном времени, синхронизованным вдоль траектории частицы.

В предельном случае слабого гравитационного поля, подставляя в (139) $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ получим

$$\mathcal{E}_0 \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi. \tag{140}$$

15 Вращение

Особый случай стационарных гравитационных полей – равномерно вращающаяся СО. В неподвижной цилиндрической СК r', φ', z', t интервал

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r'^2d\varphi'^2 - dz'^2. \tag{141}$$

Во вращающейся СК r, φ, z, если ось вращения z, z', $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$ (Ω – угловая скорость вращения)

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi\, dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2. \tag{142}$$

Вращающейся СО можно пользоваться только до расстояний c/Ω!

На вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Проводя синхронизацию вдоль замкнутой линии, возвратясь в исходную точку получим разность

$$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2}\oint \frac{\Omega^2 r^2 d\varphi}{1 - \Omega^2 r^2/c^2}$$

Предполагая $\Omega r/c \ll 1$

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2}\int r^2 d\varphi = \pm\frac{2\Omega}{c^2}S, \tag{143}$$

где S – площадь проекции контура на плоскость перпендикулярную оси вращения.

Пусть по замкнутому контуру длиной L распространяется луч света. Вычислим (с точностью до членов порядка v/c) время t между отправлением и возвращением его в исходную точку. Скорость света есть c, если время синхронизируется вдоль замкнутой линии и в каждой точке мы пользуемся собственным временем. Разность между собственным временем и мировым порядка v^2/c^2, то этим можно пренебречь. Поэтому имеем

$$t \approx \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2}S.$$

Соответственно скорость света, измеренная как отношение L/t равна

$$c \pm 2\Omega\frac{S}{L}. \tag{144}$$

16 Тензор кривизны

16.1 Параллельный перенос

Бесконечно малый параллельный перенос – перенос, при котором компоненты вектора не меняются в СК, галилеевой в данном б.м. элементе объема. Если $x^i = x^i(s)$ (s – длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то $u^i = dx^i/ds$ – единичный вектор, касательный к кривой. Для геодезической кривой $Du^i = 0$, т.е. при параллельном переносе u^i из x^i в $x^i + dx^i$ он совпадет с $u^i + du^i$, по-прежнему, касательном в новой точке.

- При передвижении вдоль геодезической вектор касательной переносится параллельно самому себе.

- Угол между вектором и касательной при пар. переносе вдоль геодезической остается неизменным.

- Пар. перенос дает разные результаты, если он совершается по разным путям (частный случай – замкнутый контур).

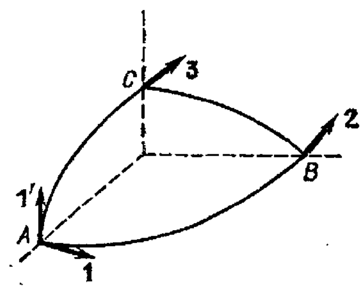

Рис. 6: Параллельный перенос вектора по замкнутому контуру

16.2 Изменение вектора при параллельном переносе по замкнутому контуру

Это изменение ΔA_k можно записать как $\oint \delta A_k$, подставляя (89) имеем

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l; \tag{145}$$

где A_i меняется по мере его переноса вдоль контура, но неоднозначно, однако неоднозначность второго порядка. С точность до первого порядка $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, т.е.

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n. \tag{146}$$

Применяя к интегралу (145) теорему Стокса (23), учитывая, что б.м. площадь огибаемой поверхности есть Δf^{lm}, получим

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km} A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl} A_i)}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}.$$

Подставляя сюда (146) находим

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i{}_{klm} A_i \Delta f^{lm}, \tag{147}$$

где R^i_{klm} – *тензор кривизны* или *тензор Римана*:

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{148}$$

Легко получить аналогичную формулу для контравариантного вектора A^k. При пар. переносе скаляры не меняются: $\Delta(A^k B_k) = 0$.

$$\Delta(A^k B_k) = A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2} A^k B_i R^i{}_{klm} \Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k =$$

$$= B_k \left(\Delta A^k + \frac{1}{2} A^i R^k_{ilm} \Delta f^{lm} \right) = 0,$$

в виду произвольности B_k:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k_{ilm} A^i \Delta f^{lm}. \tag{149}$$

16.3 Двойное ковариантное дифференцирование

Если дважды ковариантно продифференцировать A_i по x^k и по x^l, то результат зависит от порядка дифференцирования:

$$A_{i;\,k;\,l} - A_{i;\,l;\,k} = A_m R^m_{ikl}, \tag{150}$$

$$A^i{}_{;\,k;\,l} - A^i{}_{;\,l;\,k} = -A^m R^i{}_{mkl}. \tag{151}$$

Аналогично для тензора:

$$A_{ik;\,l;\,m} - A_{ik;\,m;\,l} = A_{in} R^n_{klm} + A_{nk} R^n_{ilm}. \tag{152}$$

16.4 Плоское и искривленное пространство

- В плоском 4-пространстве везде $\Gamma^i_{kl} = 0$, поэтому и $R^i{}_{klm} = 0$.
- Верно и обратное: если $R^i{}_{klm} = 0$, то пространство плоское.
- Если выбрана в кривом пространстве локально-геодезическая СК, то $\Gamma^i_{kl} = 0$, но $R^i{}_{klm} \neq 0$, т.к. производные от Γ^i_{kl} не обращаются в нуль одновременно с самими Γ^i_{kl}.

17 Свойства тензора кривизны

17.1 Свойства симметрии

$$R_{iklm} = g_{im} R^n_{klm}$$

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right). \tag{153}$$

Из этого выражения следует

$$R_{iklm}=-R_{kilm}=-R_{ikml} \tag{154}$$

$$R_{iklm}=R_{lmik} \tag{155}$$

Антисимметричен по каждой из пар индексов ik и lm и симметричен к перестановке этих двух пар. В частности все компоненты, диагональные по паре индексов ik или lm, равны нулю.

Равна нулю циклическая сумма из компонент, образованная по любым из трех индексов, например:

$$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0. \tag{156}$$

Тождество Бианки

$$R^n{}_{ikl;\,m}+R^n{}_{imk;\,l}+R^n{}_{ilm;\,k}=0. \tag{157}$$

Докажем в локально-инерциальной СК. Дифференцируем (148) и полагаем затем $\Gamma^i_{kl}=0$, находим:

$$R^n{}_{ikl;\,m}=\frac{\partial R^n{}_{ikl}}{\partial x^m}=\frac{\partial^2\Gamma^n_{il}}{\partial x^m\partial x^k}-\frac{\partial^2\Gamma^n_{ik}}{\partial x^m\partial x^l}.$$

С помощью этого выражения можно убедиться в справедливости тождества Бианки.

17.2 Упрощения тензора кривизны

17.2.1 Тензор Риччи

В силу антисимметричности упрощение можно производить только одним способом:

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}=R^l{}_{ilk}. \tag{158}$$

Согласно (148) имеем

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}. \tag{159}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik}=R_{ki}. \tag{160}$$

17.2.2 Скалярная кривизна

Упрощая R_{ik}, получаем

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm} \tag{161}$$

Упрощение тождества Бианки (157) по парам ik и ln дает

$$R^{l}{}_{m;\,l} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m} \tag{162}$$

17.3 Число независимых компонент тензора кривизны

Рассмотрим случай 2-х измерений. Пусть тензор кривизны P_{abcd}, а метрический тензор – γ_{ab}. Индексы пробегают значения только 1, 2. В этом случае все отличные от нуля компоненты либо равны, либо различаются знаком. Т.о. имеется только одна независимая компонента, например P_{1212}. Скалярная кривизна при этом равна

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2. \tag{163}$$

Величина $P/2$ совпадает с *гауссовой кривизной* поверхности K :

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}. \tag{164}$$

В 3-мерном пространстве тензор кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, а метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$. Пары индексов $\alpha\beta$ и $\alpha\beta\gamma\delta$ пробегают три существенно различных набора значений: 32, 31, 12. Поскольку тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по отношению к перестановке этих пар, то имеется всего 3 независимых компоненты, а также 3 компоненты с одинаковыми парами – всего 6 компонент. Столько же компонент имеет симметричный тензор $P_{\alpha\beta}$. Если же привести тензор к главным осям, то останется всего три числа.

В 4-пространстве пары индексов ik и lm пробегают 6 различных наборов, поэтому имеется 6 компонент R_{iklm} с одинаковыми и $6 \cdot 5/2 = 15$ компонент с различными парами индексов. Последние в силу тождества (156) связаны

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0 \tag{165}$$

В 4-пространстве тензор кривизны имеет 20 независимых компонент.

Выбирая СК, галилееву в данной точке, и рассматривая преобразования, поворачивающие эту систему, можно добиться обращения в ноль еще 6 компонент. В общем случае остается 14 величин, определяющих кривизну пространства. Если $R_{ik} = 0$[5], то в произвольной СК тензор кривизны имеет всего 10 независимых компонент. Если же привести тензор R_{iklm} (в заданной точке) привести к «каноническому» виду, то его компоненты выражаются через 4 независимых величины.

[5]Этим свойством обладает тензор кривизны для гравитационного поля в пустоте

18 Действие для гравитационного поля

Действие $S_g = \int G\sqrt{-g}d\Omega$, взятый по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя значениями. Будем исходить из того, что уравнения гравитационного поля должны содержать производные от «потенциалов» поля не выше 2-го порядка, для этого необходимо, чтобы выражение G содержало производные от g_{ik} выше 1-го порядка, т.е. G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}, однако из них невозможно построить скаляр. Существует еще и R, который содержит наряду с g_{ik} и первыми производными, еще и вторые производные от g_{ik}, но последние входят только линейно. С помощью теоремы Гаусса интеграл $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ можно преобразовать в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных:

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \int G\sqrt{-g}\,d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}w^i)}{\partial x^i}d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные. Второе слагаемое – дивергенция некоторой величины w^i, согласно теореме Гаусса его можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объем. При варьировании, вариация второго слагаемого равно нулю, т.к. на границе области вариация есть ноль:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \delta \int G\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Слева – скаляр, следовательно и справа – скаляр, хотя G скаляром не является. В гауссовой системе единиц мы можем записать

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int G\sqrt{-g}d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega, \qquad (166)$$

здесь k – *гравитационная постоянная*. Действие имеет размерность г $\cdot$ см$^2 \cdot$ с$^{-1}$; все координаты имеют размерность см, g_{ik} – безразмерные, следовательно R имеет размерность см$^{-2}$, в результате размерность k есть г$^{-1} \cdot$ см$^3 \cdot$ с$^{-2}$, ее численное значение

$$k = 6.67 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}. \qquad (167)$$

Можно было бы положить k равной единице, при этом определился бы выбор единицы для измерения массы[6].

Вычислим G в (166). Из (159) для R_{ik} имеем

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} =$$

[6] Если положить $k = c^2$, то масса будет измеряться в см, причем 1 см $= 1.35 \cdot 10^{28}$ г. Иногда вместо k используют $\kappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1.86 \cdot 10^{-27}$ см $\cdot$ г$^{-1}$, которую называют эйнштейновской гравитационной постоянной.

$$\sqrt{-g}\left(g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right).$$

Представим первые два слагаемые как

$$\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}=\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{il})-\Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik}),$$

Опуская полные производные, находим

$$\sqrt{-g}G=\Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik})-(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})g^{ik}\sqrt{-g}.$$

С помощью (107–110) находим, что первые два члена равны

$$\sqrt{-g}\left(2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk}-\Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{im}g^{ik}\right)=2\sqrt{-g}g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right).$$

Окончательно имеем

$$G=g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right). \tag{168}$$

Величинами, определяющими гравитационное поле, являются компоненты метрического тензора, поэтому варьированию подлежат именно величины g_{ik}. Однако, не всякое изменение g_{ik} соответствует изменению метрики пространства-времени, т.к. возможны просто преобразования СК. Чтобы исключить не связанные с изменением метрики изменения g_{ik} необходимо наложить четыре дополнительных условия, при соблюдении которых действие имеет минимум по отношению к варьированию.

Покажем, что гравитационная постоянная должна быть положительной. В качестве четырех дополнительных условий потребуем:

$$g_{0\alpha}=0,\quad |g_{\alpha\beta}|=\text{const};$$

в силу последнего из этих условий:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial x^0}|g_{\alpha\beta}|=0.$$

Члены, которые содержат производные от g_{ik} по x^0:

$$-\frac{1}{4}g^{00}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}$$

Легко видеть, что эта величина отрицательна. Выбирая пространственную СК, которая была бы декартовой в данной точке в данный момент вермени (так что $g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}$, получим

$$-\frac{1}{4}g^{00}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2,$$

поскольку $g^{00} = 1/g_{00} > 0$, то знак очевиден.

Достаточно быстрым изменением компонент $g_{\alpha\beta}$ со временем x^0 можно сделать величину $-G$ сколь угодно большой. Если бы постоянная k была бы отрицательной, то действие при этом неограниченно уменьшалось бы (не имело бы минимума).

19 Тензор энергии-импульса

19.1 Определение тензора энергии-импульса

Рассмотрим некоторую систему, интеграл действия для которой имеет вид

$$S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV dt = \frac{1}{c} \int \Lambda d\Omega, \tag{169}$$

где Λ – некоторая функция от величин q, определяющих состояние системы. Заметим, что интеграл по пространству $\int \Lambda \, dV$ – функция Лагранжа. Λ – плотность функции Лагранжа. Для краткости будем рассматривать только одну величину q. Обозначим $q_{,\,i} \equiv \partial q / \partial x^i$. Уравнения движения получаются путем варьирования S:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\,i}} \delta q_{,\,i} \right) = \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\,i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\,i}} \right]$$

Второй член исчезает при интегрировании по всему пространству (т-ма Гаусса) и мы находим «уравнения движения»:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \tag{170}$$

Далее пишем

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\,k}} \frac{\partial q_{,\,k}}{\partial x^i}$$

Подставляя сюда (170) и замечая, что $q_{,k,i} = q_{,i,k}$, находим

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right).$$

Заменив в левой части равенства

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}$$

и введя обозначение

$$T_i^k = q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda, \tag{171}$$

напишем полученное соотношение в виде

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{172}$$

Если имеется не одна а несколько величин $q^{(l)}$, то

$$T_k^i = \sum_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda. \tag{173}$$

Уравнение (172) (дивергенция, но тензора по одному индексу) эквивалентно утвреждению

$$P^i = \mathrm{const} \cdot \int T^{ik}\, dS_k.$$

Этот вектор должен быть отождествлен с 4-импульсом системы. Константу подберем так, чтобы P^0 была по-прежнему равна энергии системы, деленной на c.

$$P^0 = \mathrm{const} \cdot \int T^{0k}\, dS_k = \mathrm{const} \cdot \int T^{00}\, dV,$$

если интегрировать по гиперплоскости $x^0 = \mathrm{const}$. С другой стороны, согласно (171)

$$T^{00} = \dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda,$$

где $\dot{q} \equiv \partial q/\partial t$. В соответствии с обычной формулой, связывающей энергии с функцией Лагранжа, эту величину надо рассматривать как плотность энергии, и поэтому $\int T^{00} dV$ – полная энергия. Т.о.

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik}\, dS_k. \tag{174}$$

Тензор T^{ik} называется *тензором энергии-импульса* системы.

19.2 Смысл компонент тензора энергии-импульса

Существует неоднозначность в определении T^{ik} (с точностью до некоторой величины). Для однозначного определения можно потребовать, чтобы 4-тензор момента импульса выражался обычным образом:

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l, \tag{175}$$

легко показать, что отсюда следует

$$T^{ik} = T^{ki}. \tag{176}$$

Если производить интегрирование по гиперплоскости $x^0 = \mathrm{const}$, то

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{i0}\, dV. \tag{177}$$

Пространственные компоненты P^α образуют 3-вектор импульса системы, а $c \cdot P^0$ – энергия системы. Поэтому вектор

$$\frac{1}{c} T^{\alpha 0}$$

назовем *плотностью импульса*, а

$$W = T^{00}$$

– *плотностью энергии*.

Выясним смысл остальных компонент, выписав уравнения сохранения (172), отделив пространственные и временные производные:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{178}$$

Интегрируя эти уравнения по некоторому объему пространства V, имеем

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} dV + \int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = 0,$$

преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} dV = -c \oint T^{0\alpha} df_\alpha. \tag{179}$$

Слева – скорость изменения энергии в объеме V, справа – количество энергии, протекающей через границу этого объема. Вектор $\mathbf{S}$ с составляющими

$$cT^{0\alpha}$$

– плотность потока энергии, протекающего в единицу времени через единицу поверхности.

Из второго уравнения (178) аналогично находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = -\oint T^{\alpha\beta} df_\beta. \tag{180}$$

Слева – изменение импульса системы в объеме V в единицу времени, поэтому $\oint T^{\alpha\beta} df_\beta$ – количество импульса, вытекающего в единицу времени из этого объема. $T^{\alpha\beta}$ составляют 3-тензор плотности потока импульса, обозначим его через $-\sigma_{\alpha\beta}$ (*тензор напряжений*).

Плотность потока энергии (скаляра) – вектор, плотность потока импульса (вектора) – тензор. Окончательно

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{181}$$

Для макроскопических тел тензор энергии импульса равен

$$T_{ik} = (p+\varepsilon)u_i u_k - p g_{ik}. \tag{182}$$

Поток импульса через элемент поверхности тела – сила, действующая на этот элемент, поэтому $-\sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta$ есть α-компонента силы. В СО, в которой тело покоится, имеет место закон Паскаля: $\sigma_{\alpha\beta} df_\beta = -p\, df_\alpha$, откуда тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta} = -p\,\delta_{\alpha\beta}$. Что касается компонент $T^{\alpha 0}$, то в рассматриваемой СО они равны 0. Компонента T^{00} равна плотности энергии тела ε, а ε/c^2 – плотность массы. Т.о., в рассматриваемой СО тензор энергии-импульса для данного участка тела имеет вид

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{183}$$

19.3 Тензор энергии-импульса в криволинейной СК

В криволинейных координатах интеграл (169) записывается в виде

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{184}$$

Интегрирование производится по всему пространству и на заданном промежутке времени.

Дадим новый способ вычисления тензора энергии-импульса, который сразу приводит к симметричному выражению. Произведем в (184) преобразование от координат x^i к $x'i = x^i + \xi^i$, где ξ^i – малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются, согласно

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{lm}(x^l)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = g^{lm}\left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right)$$

$$\approx g^{ik}(x^l) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Чтобы привести тензоры g'^{ik} и g^{ik} к функциям от одних координат, разложим $g'^{ik}(x^l+\xi^l)$ по степеням ξ^l. Пренебрегая членами высшего порядка по ξ^l, находим

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Путем непосредственной проверки можно убедиться, что три последних члена могут быть написаны в виде $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$, т.о. находим окончательно

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}. \tag{185}$$

$$g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i}. \tag{186}$$

Поскольку действие S – скаляр, оно не меняется при преобразовании СК. С другой стороны найдем вариацию δS при преобразовании СК. Пусть q – обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S. При преобразовании координат величины q меняются на δq. Однако при вычислении δS можно не писать членов, связанных с изменениями q. В силу «уравнений движения» физической системы эти члены взаимно сокращаются (приравнивание нулю вариации S по величинам q). Достаточно выписать члены, связанные с изменение g_{ik}. Воспользуемся теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik} = 0$, находим

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right) \delta g^{ik}\, d\Omega$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}, \tag{187}$$

тогда δS примет вид

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\, \delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega = -\frac{1}{2c}\int T^{ik}\, \delta g_{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{188}$$

Замечаем, что $g^{ik}\delta g_{ik} = -g_{ik}\delta g^{ik}$, и поэтому $T^{ik}\delta g_{ik} = -T_{ik}\delta g^{ik}$. Подставляя сюда выражение (185) для δg^{ik} и пользуясь симметрией T_{ik} получаем:

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k} + \xi^{k;i})\sqrt{-g}\, d\Omega = \frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\, d\Omega.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int (T^k_i\xi^i)_{;k}\sqrt{-g}\, d\Omega - \int \frac{1}{c}T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{189}$$

Первый интеграл с помощью (111) может быть написан в виде

$$\frac{1}{c}\int \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\, T^k_i\xi^i)d\Omega$$

и преобразован в интеграл по гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает. Приравнивая δS нулю, находим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\, d\Omega = 0.$$

В виду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T_{i\ ;k}^{k} = 0. \tag{190}$$

Сравнивая это уравнение с (172), мы видим, что тензор T_{ik} должен быть отождествлен с *тензором энергии-импульса.* По-прежнему, для макроскопических тел тензор энергии импульса равен

$$T_{ik} = (p + \varepsilon)u_i u_k - p g_{ik}. \tag{191}$$

Отметим, что $T_{00} \geqslant 0$.

20 Уравнения Эйнштейна

20.1 Вывод уравнений гравитационного поля

$\delta(S_m + S_g) = 0$, S_g и S_m – действия гравитационного поля и материи. Варьированию подлежат величины $g_i k$. Вычислим вариацию δS_g:

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega =$$

$$= \int (R_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\delta R_{ik})\, d\Omega.$$

Подставляя (106)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik},$$

находим

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega. \quad (192)$$

Для вычисления δR_{ik} заметим, что $\delta\Gamma^i_{kl}$ образуют тензор ($\delta\Gamma^i_{kl} A_k\, dx^l$ – разность векторов, получающихся при параллельном переносе векторов в одну точку – вектор). Воспользуемся локально-геодезической СК (все $\Gamma^i_{kl} = 0$), с помощью (159) для R_{ik} имеем (помня, что первые производные от g_{ik} равны теперь 0):

$$g^{ik}\,\delta R_{ik} = g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}\right) = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik} = \frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

где

$$w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^l_{lk}.$$

Поскольку w^l – вектор, то мы можем написать полученное соотношение в любой СК:

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{-g}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g} w^l).$$

Следовательно второй интеграл в правой части (192) равен

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \frac{\partial\sqrt{-g}w^l}{\partial x^l} d\Omega.$$

и по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от w^l по гиперповерхности, охватывающий весь 4-объем. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна 0, то весь интеграл исчезает. Т.о.

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (193)$$

Можно было бы исходить для действия поля из выражения:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

тогда мы получили бы

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int \left(\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right)\delta g^{ik} d\Omega.$$

Сравнивая это с (193), находим

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right). \tag{194}$$

Для вариации действия материи согласно (188)

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{195}$$

Для макроскопических тел обычно для T_{ik} надо писать выражение (191). Из принципа наименьшего действия $\delta S_m + \delta S_g = 0$ находим

$$-\frac{c^3}{16\pi k}\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega = 0,$$

откуда в виду произвольности δg^{ik}

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \tag{196}$$

или в смешанных компонентах

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4}T_i^k. \tag{197}$$

Это и есть *уравнения гравитационного поля* – основные уравнения ОТО. Их называют *уравнениями Эйнштейна*.
Упрощая (197) по индексам i и k, находим ($T_i^i \equiv T$):

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4}T. \tag{198}$$

Поэтому уравнения поля можно написать также в виде

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{199}$$

Уравнения Эйнштейна нелинейны – несправедлив принцип суперпозиции (только приближенно для слабых полей).

В пустом пространстве $T_{ik} = 0$ и уравнения гравитационного поля сводятся к

$$R_{ik} = 0. \tag{200}$$

Но это не означает, что пустое пространство плоское (для этого требуется $R_{iklm} = 0$) Тензор энергии-импульса для ЭМ-поля обладает свойством $T_i^i = 0$, т.о. при наличии одного только ЭМ-поля (без гравитирующих масс) скалярная кривизна пространства-времени равна 0.
Известно, что дивергенция тензора энергии-импульса равна 0:

$$T^k_{i;\,k} = 0. \tag{201}$$

Поэтому равна нулю и дивергенция левой части уравнения (197). Т.о. уравнения содержат в себе не только уравнения движения, но и законы сохранения энергии и импульса. Для полного определения распределения и движения материи следует добавить еще и уравнение состояния вещества (связывающее давление и плотность, а также температуру, но последнее в теории тяготения обычно несущественно).
Четыре координаты x^i могут быть подвергнуты произвольному преобразованию, поэтому независимыми остаются шесть из величин g_{ik}. В силу $u_i u^i = 1$, остается только три независимых величины из 4-скорости, входящей в тензор энергии-импульса. Таким образом мы имеем 10 уравнений поля для 10 независимых величин:

- 6 из компонент g_{ik}
- 3 из компонент u^i
- плотность материи ε/c^2

Для гравитационного поля в пустоте остается всего 6 неизвестных величин g_{ik}

20.2 Особенности структуры уравнений Эйнштейна

Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Однако в уравнения входят вторые производные входят вторые производные по времени не от всех 10 компонент g_{ik}. Из (153) видно, что $-\ddot{g}_{\alpha\beta}/2$ содержаться только в компонентах $R_{0\alpha0\beta}$, вторые производные от компонент $g_{0\alpha}$ и g_{00} вообще отсутствуют. Ясно, что получающийся путем упрощения тензор R_{ik} тоже содержат вторые производные по времени лишь от шести пространственных компонент $g_{\alpha\beta}$, которые входят лишь в уравнения

$$R^\beta_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha R = \frac{8\pi k}{c^4} T^\beta_\alpha. \tag{202}$$

Уравнения же

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4} T^0_0, \quad R^0_\alpha = \frac{8\pi k}{c^4} T^0_\alpha, \tag{203}$$

содержат производные по времени лишь первого порядка. Более того, левые части уравнений (203) не содержат и первых производных $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$ (а лишь производные $\dot{g}_{\alpha\beta}$.

Начальные условия должны задавать распределение плотности материи и трех компонент ее скорости, а также еще 4 величин, характеризующих свободное (не связанное с материей) гравитационное поле (всего 8 величин), для свободного гравитационного поля в пустоте, остается всего 4 последние величины.

21 Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи выражается уравнением

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

обобщение этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение (190):

$$T^k_{i;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial (T^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl} = 0. \tag{204}$$

В таком виде, это уравнение не выражает закона сохранения. В гравитационном поле должен сохраняться не 4-импульс одной материи, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем. Для определения такой величины выберем СК так, чтобы в некоторой точке все первые производные g_{ik} по координатам обратились в нуль, тогда в этой точке второй член уравнения (204) обратится в нуль, а $\sqrt{-g}$ можно вынести из-под знака производной:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}T^k_i = 0 \text{или} \frac{\partial}{\partial x^k}T^{ik} = 0.$$

Величины, тождественно удовлетворяющие данному уравнению, могут быть записаны в виде

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\eta^{ikl},$$

где

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

Нетрудно привести T^{ik} к такому виду. Исходя из уравнений поля:

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right),$$

а для R^ik имеем, согласно (153):

$$R^{ik} = \frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{ln}\left(\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n}\right)$$

После простых преобразований тензор T^{ik} может приведен к виду

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{-g}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})\right]\right\}.$$

Стоящее в фигурных скобках как раз и есть η^{ikl}. Введем обозначения

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m}\lambda^{iklm}, \tag{205}$$

$$\lambda^{iklm} = \frac{c^4}{16\pi k}(-g)(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km}); \tag{206}$$

Величины h^{ikl} антисимметричны по двум последним индексам:

$$h^{ikl} = -h^{ilk}. \tag{207}$$

Тогда можно написать

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} = (-g)T^{ik},$$

это соотношение справедливо только в предположении $\partial g_{ik}/\partial x^l = 0$. В произвольной СК обозначим разность $\partial h_{ikl}/\partial x^l - (-g)T^{ik}$ через $(-g)t^{ik}$, тогда по определению:

$$(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \tag{208}$$

t^{ik} – симметричен:

$$t^{ik} = t^{ki}. \tag{209}$$

t^{ik} явно выражается (довольно громоздко) через символы Кристоффеля или через производные от компонент метрического тензора. Величины t^{ik} не образуют тензора, однако ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям координат (как и Γ^i_{kl}).
Из определения (208) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = 0. \tag{210}$$

Это значит, что имеет место закон сохранения:

$$P^i = \frac{1}{c}\int(-g)(T^{ik} + t^{ik})\, dS_k. \tag{211}$$

При отсутствии гравитационного поля в галилеевых координатах данный интеграл переходит в обычный 4-импульс материи. Поэтому величины (211) должны быть отождествлены с полным 4-импульсом материи вместе с гравитационным полем. Совокупность величин t^{ik} называют *псевдотензором энергии импульса* гравитационного поля.
Интегрирование можно проводить по любой гиперповерхности, в частности по $x^0 = \text{const}$:

$$P^i = \frac{1}{c}\int(-g)(T^{i0} + t^{i0})\, dV. \tag{212}$$

Симметрия по индексам i, k означает, что сохраняется и4-момент импульса:

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int \left[x^i (T^{kl} + t^{kl}) - x^k (T^{il} + t^{il}) \right] (-g) dS_l. \tag{213}$$

Выбирая СК, инерциальную в данном элементе объема, можно обратить все t^{ik} в нуль, с другой стороны можно получить отличные от нуля t^{ik} в плоском пространстве, воспользовавшись криволинейной СК. Не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве!

Величины же P^i имеют вполне определенный смысл: выделим область пространства, включающую в себя рассматриваемые массы. В 4-пространстве с течением времени область прорезывает «канал», вне канала поле убывает, так что пространство асимптотически приближается к плоскому. В согласии с физическим смыслом величины P^i оказываются независимы от СК внутри канала. Так как t^{ik} являются тензором по отношению к линейным преобразованиям СК, то и P^i обладают тем же свойством, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца.

4-импульс может быть выражен в виде интеграла по удаленной трехмерной поверхности, охватывающей все «пространство». Подставив (208) в (211), находим

$$P^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} dS_k.$$

Можно преобразовать в

$$P^i = \frac{1}{2c} \oint h^{ikl} df^*_{kl}. \tag{214}$$

Если в качестве области интегрирования в (211) выбрать гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной поверхностью:

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha} df_\alpha. \tag{215}$$

Заметим, что как будет показано далее, величины $h^{i0\alpha}$ убывают в стационарном случае на больших расстояниях от тел по закону $1/r^2$, так что интеграл (215) остается конечным при удалении поверхности интегрирования на бесконечность.

Аналогично для момента импульса можно получить выражение

$$M^{ik} = \frac{1}{c} \oint (x^i h^{k0\alpha} - x^k h^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k})\, df_\alpha. \tag{216}$$

22 Синхронная система отсчета

22.1 Построение синхронной СО

Условие, допускающее синхронизацию хода часов в различных точках пространства $g_{0\alpha} = 0$, если кроме того $g_{00} = 1$, то временная координата $x^0 = t$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства[7]. Систему отсчета, удовлетворяющую условиям

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0 \tag{217}$$

назовем *синхронной*. Элемент интервала в такой СО дается выражением

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{218}$$

причем

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}. \tag{219}$$

В синхронной СО линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве. 4-вектор $u^i = dx^i/ds$ касательный к мировой линии x^1, x^2, $x^3 = \mathrm{const}$, имеет составляющие $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = \Gamma^i_{00} = 0,$$

поскольку при условиях (217) Γ^α_{00}, Γ^0_{00} равны нулю.
Легко видеть, что эти линии нормальны к гиперповерхностям $t = \mathrm{const}$. 4-вектор нормали к такой гиперповерхности $n_i = \partial t/\partial x^i$ имеет ковариантные компоненты $n_\alpha = 0$, $n_0 = 1$, соответствующие контравариантные компоненты при условии (217) тоже равны $n^\alpha = 0$, $n^0 = 1$, т.е. совпадают с компонентами 4-вектора u^i касательных к линиям времени.
Обратно, этими свойствами можно воспользоваться для геометрического построения синхронной СО. Такое построение возможно всегда (да еще и несколькими способами)! Аналитически преобразование к синхронной СО можно произвести при помощи уравнения Гамильтона-Якоби (опустим пока).

22.2 Уравнения Эйнштейна в СО

Введем обозначение

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}. \tag{220}$$

Это 3-тензор, перемещение значков и ковариантное дифференцирование осуществляется в 3-пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$. Отметим, что

$$\kappa^\alpha_\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \gamma, \quad \gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g. \tag{221}$$

[7] в этом параграфе положим $c = 1$

Для символов Кристоффеля находим выражения

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^\alpha_{00} = \Gamma^0_{0\alpha} = 0, \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{1}{2}\kappa^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma}, \tag{222}$$

где $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ – 3-мерные символы Кристоффеля, образованные из тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ вычисление по формуле (159) приводит к следующим выражениям для R_{ik}:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa^\alpha_\alpha - \frac{1}{4}\kappa^\beta_\alpha\kappa^\alpha_\beta, \quad R_{0\alpha} = \frac{1}{2}(\kappa^\beta_{\alpha;\,\beta} - \kappa^\beta_{\beta;\,\alpha}), \tag{223}$$

$$R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(\kappa_{\alpha\beta}\kappa^\gamma_\gamma - 2\kappa^\gamma_\alpha\kappa_{\beta\gamma}).$$

Здесь $P_{\alpha\beta}$ – трехмерный тензор Риччи, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как и R_{ik} строится из g_{ik}.
Уравнения Эйнштейна запишем в смешанных компонентах

$$R^0_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa^\alpha_\alpha - \frac{1}{4}\kappa^\beta_\alpha\kappa^\alpha_\beta = 8\pi k\left(T^0_0 - \frac{1}{2}T\right), \tag{224}$$

$$R^0_\alpha = \frac{1}{2}(\kappa^\beta_{\alpha;\,\beta} - \kappa^\beta_{\beta;\,\alpha}) = 8\pi k T^0_\alpha, \tag{225}$$

$$R^\beta_\alpha = -P^\beta_\alpha - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\kappa^\beta_\alpha) = 8\pi k\left(T^\beta_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha T\right). \tag{226}$$

Характерным свойством синхронных систем отсчета является их нестационарность: в такой системе гравитационное поле не может быть постоянным. В постоянном поле было бы $\kappa_{\alpha\beta} = 0$, между тем при наличии материи обращение $\kappa_{\alpha\beta}$ противоречило хотя бы уравнению (224). Заполняющая пространство материя не может, вообще говоря, покоится относительно синхронной СО. Частицы материи, в которой действуют силы давления, не движутся по геодезическим! Исключение «пылевидная» материя ($p = 0$), частицы не взаимодействуют друг с другом (надо еще, чтобы и вращения не было).
Из уравнения (224) следует, что определитель метрического тензора $-g = \gamma$ обратится в нуль за конечное время. Выражение в правой части при любом распределении материи положительно. Из (191) имеем

$$T^0_0 - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}(\varepsilon + 3p) + \frac{(p+\varepsilon)v^2}{1-v^2}$$

Из (224) имеем

$$-R^0_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\kappa^\alpha_\alpha + \frac{1}{4}\kappa^\beta_\alpha\kappa^\alpha_\beta \leqslant 0. \tag{227}$$

В силу алгебраического неравенства

$$\kappa^\beta_\alpha\kappa^\alpha_\beta \geqslant \frac{1}{3}(\kappa^\alpha_\alpha)^2$$

можно переписать (227) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\kappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{6}(\kappa_\alpha^\alpha)^2 \leqslant 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\kappa_\alpha^\alpha} \geqslant \frac{1}{6}. \tag{228}$$

Отсюда следует, поскольку $\kappa_\alpha^\alpha = \partial \ln \gamma / \partial t$, что определитель γ обращается в нуль (не быстрее, чем t^6). Но эта особенность – фиктивная, связанная с СО, скалярные величины (плотность материи, инварианты тензора кривизны) остаются конечными. В синхронной СО линии времени непременно пересекаются друг с другом, но это геометрический, а не физический эффект.

23 Тетрадное представление уравнений Эйнштейна

Определение компонент тензора Риччи – громоздкая процедура. Один из выходов – выражение тензора кривизны в *тетрадном* виде.
Введем совокупность четырех линейно-независимых *реперных* 4-векторов $e^i_{(a)}$ (a – номер вектора), подчиненных требованию

$$e^i_{(a)} e_{(b)i} = \eta_{ab}, \tag{229}$$

где η_{ab} – заданная постоянная симметричная матрица с сигнатурой $+---$; обратную матрицу обозначим η^{ab} ($\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^a_b$).
Наряду с *тетрадой* векторов $e^i_{(a)}$, введем четверку *взаимных* с ними векторов $e^{(a)i}$, определенных условиями

$$e^{(a)}_i e^i_{(b)} = \delta^a_b, \tag{230}$$

т.е. каждый их векторов $e^{(a)}_i$ ортогонален трем векторам $e^i_{(b)}$ с $b \neq a$. Умножив (230) на $e^k_{(a)}$, получим $(e^k_{(a)} e^{(a)_i}) e^i_{(b)} = e^j_{(b)}$, откуда видно, что

$$e^{(a)}_i e^k_{(a)} = \delta^k_i. \tag{231}$$

Умножив обе части равенства $e^i_{(a)} e_{(c)i} = \eta_{ac}$ на η^{bc}, получим

$$e^i_{(a)}(\eta^{bc} e_{(c)i}) = \delta^b_a;$$

сравнив с (230), находи, что

$$e^{(b)}_i = \eta^{bc} e_{(c)i}, \quad e_{(b)i} = \eta_{bc} e^{(c)}_i. \tag{232}$$

Т.е. опускание и поднимание реперных индексов осуществляется матрицами η^{bc} и η_{bc}. Значение реперных векторов в том, что через них может быть выражен метрический тензор: имеем $e_i^{(a)} = g_{il} a^{(a)l}$; умножив это равенство на $e_{(a)k}$ и использовав (231) и (232), найдем:

$$g_{ik} = e_{(a)i} e_k^{(a)} = \eta_{ab} e_i^{(a)} e_k^{(b)}. \tag{233}$$

Квадрат элемента интервала с метрическим тензором (233) принимает вид

$$ds^2 = \eta_{ab} (e_i^{(a)} dx^i)(e_k^{(b)} dx^k). \tag{234}$$

Матрица η_{ab} – произвольна, наиболее естественно – «галилеева» форма $(1, -1, -1, -1)$, при этом реперные векторы взаимно ортогональны (один – времениподобен, три – пространственноподобны). Но это на обязательно, в силу особенностей задачи (симметрии метрики), можно выбрать и неортогональную тетраду.

Тетрадные компоненты 4-вектора A^i (и тензоров, аналогично) определяются как «проекции» на реперные 4-векторы:

$$A_{(a)} = e_{(a)}^i A_i, \quad A^{(a)} = e_i^{(a)} A^i = \eta^{(ab)} A_{(b)}. \tag{235}$$

Обратное преобразование

$$A_i = e_i^{(a)} A_{(a)}, \quad A^i = e_{(a)}^i A^{(a)}. \tag{236}$$

Определение операции дифференцирования «вдоль направления a»:

$$\varphi_{,(a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

Определим «коэффициенты вращения Риччи»:

$$\gamma_{abc} = e_{(a)i;\,k} e_{(b)}^i e_{(c)}^k \tag{237}$$

и их линейные комбинации

$$\begin{gathered}\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = \\ = (e_{(a))i;\,k} - e_{(a))k;\,i}) e_{(b)}^i e_{(c)}^k = (e_{(a))i,\,k} - e_{(a))k,\,i}) e_{(b)}^i e_{(c)}^k.\end{gathered} \tag{238}$$

Последнее равенство следует из (114). Обратное выражение:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}). \tag{239}$$

Эти величины обладают свойствами симметрии

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}, \quad \lambda_{abc} = \lambda_{acb}. \tag{240}$$

Определение тетрадных компонент тензора кривизны. Надо исходить из определения (150), примененного к ковариантным производным реперных векторов:

$$e_{(a)i;\,k;\,l} - e_{(a)i;\,l;\,k} = e_{(a)}^m R_{mikl}$$

или

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = (e_{(a)i;\,k;\,l} - e_{(a)i;\,l;\,k})e^i_{(b)}e^k_{(c)}e^l_{(d)}.$$

Это выражение легко выразить через γ_{abc}, пользуясь $e_{(a)i;\,k} = \gamma_{abc}e^{(b)_i}e^{(c)_k}$ и тем, что ковариантная производная от скалярной величины γ_{abc} совпадает с ее простой производной:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}(\gamma^f_{\ cd} - \gamma^f_{\ dc}) + \gamma_{afc}\gamma^f_{\ bd} - \gamma afd\gamma^f_{\ bc}, \quad (241)$$

где в соответствии с общим правилом $\gamma^a_{\ bc} = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$. Упрощение по паре индексов a и c дает искомые тетрадные представления тензора Риччи:

$$R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2}(\lambda_{ab}{}^{c}{}_{,c} + \lambda_{ba}{}^{c}{}_{,c} + \lambda^{c}{}_{ab,c} + \lambda^{c}{}_{cb,a}) + \lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{cda} + \lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{dca} -$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda_{b}{}^{cd}\lambda_{acd} + \lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ab}{}^{d} + \lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ba}{}^{d}). \quad (242)$$

24 Закон Ньютона

Малые скорости частиц и слабые гравитационные поля.

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Для компонент тензора энергии-импульса можно воспользоваться выражением $T^k_i = \mu c^2 u_i u^k$, где μ – плотность массы тела (сумма масс покоя частиц в единице объема). Для медленного движения можно положить $u^\alpha = 0$, $u^0 = u_0 = 1$. Из всех компонент T^k_i остается только

$$T^0_0 = \mu c^2, \quad T^i_i = T = \mu c^2 \quad (243)$$

Уравнения Эйнштейна напишем в форме (199):

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right).$$

при i=k=0

$$R^0_0 = \frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

При вычислении R^0_0 по общей формуле (159), замечаем, что члены, содержащие произведения величин Γ^i_{kl}, имеют второй порядок малости. Члены, содержащие производные по $x^0 = ct$ являются малыми по сравнению с производными по координатам a^α. В результате остается $R^0_0 = R_{00} = \partial\Gamma^\alpha_{00}/\partial x^\alpha$. Подставляя

$$\Gamma^\alpha_{00} \approx -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},$$

находим

$$R^0_0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \equiv \frac{1}{c^2}\triangle\varphi.$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна дают:

$$\triangle\varphi = 4\pi k\mu. \tag{244}$$

Это и есть уравнение гравитационного поля в нерелятивистской механике - уравнение Пуассона. Его решение:

$$\varphi = -k\int \frac{\mu}{r}dV, \tag{245}$$

в частности для потенциала поля одной частицы с массой m:

$$\varphi = -\frac{km}{r}, \tag{246}$$

следовательно сила $F = -m'\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, действующая на частицу массой m', равна

$$F = -k\frac{mm'}{r^2}. \tag{247}$$

Это – *закон тяготения Ньютона*!

25 Центрально-симметричное гравитационное поле

Рассмотрим гравитационное поле: центрально-симметричным должно быть не только распределение, но и движение вещества! Метрика пространства-времени, т.е. выражение для интервала ds, должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В евклидовом пространстве это расстояние – радиус-вектор, в неевклидовом пространстве (при наличии гравитационного поля) нет величины, которая обладала бы свойством радиус-вектора (одновременное равенство расстояния до центра и деленой на 2π длине окружности). Поэтому выбор «радиус-вектора» теперь произволен.

В сферических координатах $r,\ \theta,\ \varphi$ наиболее общим центрально-симметричным выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r,t)\,dr^2 + k(r,t)(\sin^2\theta\cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r,t)\,dt^2 + a(r,t)\,dr\,dt, \tag{248}$$

где a, h, k, l – некоторые функции от «радиус-вектора» r и «времени» t. В виду произвольности в выборе СО в ОТО, мы можем подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds; это значит, что мы может преобразовать координаты координаты r и t посредством формул

$$r = f_1(r',t'), \quad t = f_2(r',t'),$$

где f_1, f_2 – любые функции от новых координат r', t'. Выберем координату r и время t т.о., чтобы коэффициент (a,r) обратился в нуль, а коэффициент

$k(r,t) = r^2$. Последнее означает, что радиус-вектор r определен так, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$. Остальные величины удобно будет записать как $h = -e^{\lambda}$, $l = c^2 e^{\nu}$, где λ и ν – некоторые функции от r и t:

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) - e^{\lambda} dr^2. \tag{249}$$

Подразумевая под x^0, x^1, x^2, x^3 соответственно ct, r, θ, φ, мы имеем следовательно для отличных от нуля компонент метрического тензора:

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta.$$

Очевидно, что

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g_{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta.$$

По формуле (105) найдем величины Γ^i_{kl} (штрих – дифференцирование по r, а точка над буквой – дифференцирование по ct):

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2} e^{\lambda-\nu},$$

$$\Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}. \tag{250}$$

$$\Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, \quad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot\nu}{2}, \quad \Gamma^1_{10} = \frac{\dot\lambda}{2}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}.$$

Все остальные компоненты Γ^i_{kl} (кроме тех, которые отличаются перестановкой индексов k, l) равны нулю. Для составления уравнений надо вычислить по формуле (159) компоненты тензора R^i_k. Затем простые вычисления приводят к следующим формулам

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{251}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4} T^3_3 =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{v^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\ddot\lambda + \frac{\dot\lambda^2}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right), \tag{252}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^0_0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{253}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_0 = -e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{r}. \tag{254}$$

остальные компоненты уравнения (197) тождественно обращаются в 0.

Уравнения (251)–(254) могут быть проинтегрированы до конца в очень важном случае центрально-симметричного поля в пустоте, т.е. вне создающих его масс. Полагая в этом случае $T_k^i = 0$, получим:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{255}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0, \tag{256}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \tag{257}$$

Уравнение (252) не выписывается, так как оно является следствием остальных трех уравнений. Из (257) следует, что λ не зависит от времени, складывая (255) и (256), находим $\lambda' + \nu' = 0$, т.е.

$$\lambda + \nu = f(t), \tag{258}$$

где $f(t)$ – функция только от t. Выбрав интервал в виде (249), мы оставили за собой возможность произвольного преобразования времени вида $t = f(t')$. Такое преобразование эквивалентно прибавлению к ν произвольной функции времени, с его помощью всегда можно обратить $f(t)$ в 0, т.е. можно считать $\lambda + \nu = 0$. Отметим, что *центрально-симметричное поле в пустоте автоматически оказывается статическим.*

Уравнение (256) легко интегрируется и дает:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const}}{r}. \tag{259}$$

Как и следовало ожидать при $r \to \infty$ $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$, т.е. вдали от гравитирующих тел метрика оказывается галилеевой. Постоянную легко выразить через массу тела, потребовав, чтобы на больших расстояниях выполнялся закон Нютона [8] Должно быть $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$, где потенциал $\varphi = -km/r$. Отсюда const $= -2km/c$. Эту величину называют *гравитационным радиусом тела*:

$$r_g = \frac{2km}{c^2} \tag{260}$$

Окончательно находим пространственно-временную метрику в виде:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - r_g/r}. \tag{261}$$

Это решение найдено *Шварцшильдом* (1916). Эта метрика справедлива и в случае пульсации тела. Есть зависимость только от массы тела (как и в Ньютоновской теории).

[8] Для поля внутри сферической полости const $= 0$, иначе была бы особенность при $r = 0$, таким образом метрика внутри полости оказывается галилеевой, как и в нютоновской теории

Пространственная метрика определяется выражением:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r_g/r} + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{262}$$

Геометрический смысл координаты r определяется тем, что длина окружности с центром в центре поля равна $2\pi r$. Расстояние между двумя точками r_1 и r_2 при одном и том же радиусе есть

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r_g/r}} > r_2 - r_1. \tag{263}$$

Далее, мы видим, что $g_{00} \leqslant 1$, в связи с (71) $d\tau = \sqrt{g_{00}}dt/c$ следует

$$d\tau \leqslant dt. \tag{264}$$

Происходит «замедление» времени по сравнению с временем на бесконечности (где достигается равенство)

Приведем приближенное выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2}(dr^2 + c^2dt^2). \tag{265}$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевой метрике. На больших расстояниях все поля центрально-симметричны, поэтому (265) определяет метрику вдали от любой системы тел.

26 Движение в центрально-симметричном гравитационном поле

26.1 Движение частицы

Движение будет происходить в одной плоскости. Выберем плоскость $\theta = \pi/2$ Для определения траектории воспользуемся уравнениями Гамильтона-Якоби

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0, \tag{266}$$

здесь m – масса частицы (массу центрального тела обозначим как m'. С метрическим тензором (261) получаем:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\,\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2c^2 = 0, \tag{267}$$

где $r_g = 2m'k/c^2$ – гравитационный радиус центрального тела. По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби ищем S в виде:

$$S = -\mathcal{E}_0 t + M\varphi + S_r(r) \tag{268}$$

с постоянными энергией $\mathcal{E}_0$ и моментом импульса M. Подставив (268) в (267), найдем производную dS_r/dr и затем

$$S_r = \int \left[\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \right]^{1/2} dr. \tag{269}$$

Зависимость $r = r(t)$ дается (как известно из механики) $\partial S/\partial \mathcal{E}_0 = \text{const}$, откуда

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0^2}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right]^{1/2}}. \tag{270}$$

Траектория дается уравнением $\partial S/\partial M = \text{const}$, откуда

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \left[\left(\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2}\right) - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right]^{1/2} dr. \tag{271}$$

Для вычисления релятивистских поправок удобно исходить из выражения (269) радиальной части действия до его дифференцирования по M. Заменим переменную интегрирования согласно $r(r - r_g) = r'^2$, $r - \frac{r_g}{2} \approx r'$, в результате M^2, M^2/r'^2. В остальных же членах производим разложение по степеням r_g/r' и получаем с требуемой точностью:

$$S_r = \int \left[\left(2\mathcal{E}'m + \frac{\mathcal{E}'^2}{c^2}\right) + \frac{1}{r}(2m^2m'k + 4\mathcal{E}'mr_g) - \frac{1}{r^2} \left(M^2 - \frac{3m^2c^2r_g^2}{2}\right) \right]^{1/2} dr, \tag{272}$$

где для краткости опустили штрих у r' и ввели нерелятивистскую энергию $\mathcal{E}'$ (без энергии покоя). Поправочные коэффициенты в первых двух членах отражаются лишь на изменение связи между энергией и моментом частицы и параметрами ньютоновской орбиты. Изменение же коэффициента при $1/r^2$ приводит к систематическому *вековому смещению перигелия* орбиты. Траектория определяется уравнением $\varphi + \frac{\partial S_r}{\partial M} = \text{const}$, то изменение угла φ за время одного оборота планеты по орбите есть

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r,$$

разлагая S_r по степеням поправки к коэффициенте при $1/r^2$, получим

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2c^2r_g^2}{4M} \frac{\partial \Delta S_r^{(0)}}{\partial M},$$

где $\Delta S_r^{(0)}$ соответствует движению по несмещающемуся замкнутому эллипсу. Дифференцируя это соотношение по M и учитывая, что

$$-\frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r^{(0)} = \Delta\varphi^{(0)} = 2\pi,$$

найдем

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{3\pi m^2 c^2 r_g^2}{2M^2} = 2\pi + \frac{6\pi k^2 m^2 m'^2}{c^2 M^2}.$$

Второй член и представляет собой искомое угловое перемещение $\delta\varphi$ ньютоновского эллипса за время одного оборота. Выражая его через длину большой полуоси a и эксцентриситет эллипса e с помощью известной формулы $M^2/(km'm^2) = a(1-e^2)$, получим [9]

$$\delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m^2 m'^2}{c^2 M^2} \tag{273}$$

26.2 Распространение света

Путь света определяется уравнением эйконала (126)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0.$$

отличающимся от уравнением Гамильтона-Якоби только тем, что в нем надо положить $m = 0$. Поэтому траекторию луча можно получить из (271), положив в ней $m = 0$; вместо энергии частицы $\mathcal{E}_0$ надо писать частоту света $\omega_0 = -\partial\psi/\partial t$. Введя вместо постоянной M постоянную $\rho = cM/\omega_0$, получим

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \tag{274}$$

При $r_g \to 0$ это уравнение дает $r = \rho/\cos\varphi$ – уравнение прямой, проходящей на расстоянии ρ от начала координат. Для исследования релятивистских поправок поступим аналогично тому, как это было сделано для частицы. Для радиальной части эйконала имеем (ср. (269)):

$$\psi_r = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r(r-r_g)}}dr.$$

Производя такие же преобразования, которые служил для перехода от (269) к (272) получим

$$\psi_r = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}$$

Разлагая теперь подынтигральное выражение по степеням r_g/r, имеем

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\,\mathrm{Arch}\,\frac{r}{\rho},$$

[9] Числовые значения по формуле (273) для Меркурия и Земли 43.0"и 3.8"за 100 лет.

где $\psi_r^{(0)}$ отвечает классическому прямолинейному лучу. Полное изменение ψ_r при распространении луча от некоторого очень большого R до ближайшей точки $r=\rho$ и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\frac{r_g\omega_0}{c}\,\mathrm{Arch}\,\frac{R}{\rho}.$$

Изменение же полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M = \rho\omega_0/c$:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_g R}{\rho\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

Переходя к пределу $R\to\infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует $\Delta\varphi = \pi$, получим

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}.$$

Это означает что под влиянием поля тяготения луч искривляется, а угол между асимптотами отличается от π на

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho}. \tag{275}$$

Луч, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\delta\varphi$ [10].

27 Гравитационный коллапс сферического тела

В шварцшильдовской метрике (261) g_{00} обращается в 0, а g_{11} – в ∞ при $r=r_g$. Возможно ли существование тел с «радиусом», меньшим гравитационного? Определитель $g = -r^4\sin^2\theta$ не имеет никакой особенности. Мы увидим, что фактически невозможно осуществление при $r<r_g$ жесткой системы отсчета.

Для выяснения истинного характера пространственно-временной метрики в этой области произведем преобразование координат вида

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)dr}{1-r_g/r}, \quad R = ct + \int \frac{dr}{(1-r_g/r)f(r)}. \tag{276}$$

Тогда

$$ds^2 = \frac{1-r_g/r}{1-f^2}(c^2d\tau^2 - f^2dR^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

[10] Для луча, проходящего мимо края Солнца, $\delta\varphi = 1.75$”

Устраним особенность при $r = r_g$, выбрав $f(r)$ так, чтобы было $f(r_g) = 1$. Если положить $f(r) = \sqrt{r_g/r}$, то новая СК будет и синхронной ($g_{\tau\tau} = 1$). Выберем для определенности верхние знаки:

$$R - c\tau = \int \frac{(1-f^2)dr}{(1-r_g/r)f} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}}dr = \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}}$$

или (постоянная интегрирования полагаем равной 0)

$$r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3} \tag{277}$$

Элемент интервала:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{4/3} r_g^{2/3}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{278}$$

В этих координатах особенность на шварцшильдовой сфере отсутствует (здесь этой особенности соответствует $\frac{3}{2}(R - c\tau) = r_g$). Метрика – нестационарна. Линии времени являются геодезическими, другими словами покоящиеся относительно СО «пробные» частицы – это частицы, свободно движущиеся в данном поле. Заданным значениям r отвечают мировые ли-

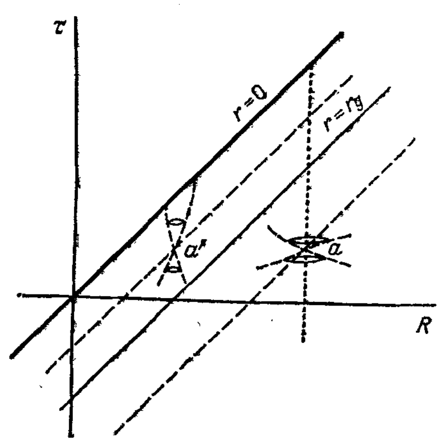

Рис. 7: Мировые линии частиц в окрестности r_g

нии $R - c\tau = \text{const}$ (наклонные линии на рис.27) Мировые линии частиц, покоящиеся относительно СО – вертикальные прямые, частицы передвигаются и падают за конечное собственное время в центр поля ($r = 0$), где есть истинная особенность метрики.

Распространение радиальных световых сигналов: $ds^2 = 0$ (при $\theta,\ \varphi = \mathrm{const}$ дает для производной $d\tau/dR$ вдоль луча:

$$c\frac{d\tau}{dR} = \pm\left[\frac{3}{2r_g}(r - c\tau)\right]^{-1/3} = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r}}, \tag{279}$$

два знака отвечают двум границам светового конуса. При $r > r_g$ (точка a на рис.27) наклон этих границ $|cd\tau/dr| < 1$, так что прямая $r = \mathrm{const}$ попадает внутрь конуса. В области же $r < r_g$ (точка a') имеем $|cd\tau/dr| > 1$ так что прямая $r = \mathrm{const}$ лежит вне конуса. Обе границы конуса на конечном расстоянии пересекают линию $r = 0$. Поскольку никакие причинно связанные события не могут лежать на мировой линии вне светового конуса, отсюда следует, что в области $r < r_g$ никакие частицы не могут оставаться неподвижными. Все взаимодействия и сигналы за конечный промежуток времени τ падают к центру.

Исследования условий равновесия показывают, что для тела достаточно большой массы может не существовать равновесного состояния. Такое тело должно неограниченно сжиматься (*гравитационный коллапс*).

В не связанной с телом галилеевой на бесконечности СО радиус центрального тела не может быть меньше, чем r_g. Это значит, что по часам удаленного наблюдателя радиус сжимающегося тела лишь асимптотически при $t \to \infty$ стремиться к гравитационному радиусу. Частица на поверхности сжимающегося тела находится в поле постоянной массы m. При $r - r_g$ силы тяготения становятся очень большими, а плотность тела (и давление) остается конечной. Пренебрегая силами давления, определим зависимость радиуса тела от времени, т.е. рассмотрим просто свободное падение пробной частицы в поле массы m. Зависимость $r(t)$ дается (270), причем для чисто радиального движения $M = 0$. Если падение начинается на «расстоянии» r_0 от центра с нулевой скоростью в момент t_0, то энергия частицы $\mathcal{E}_0 = mc^2\sqrt{1 - r_g/r_0}$ и для времени t достижения ею «расстояния» r имеем

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - r_g/r_0}\int_r^{r_0}\frac{dr}{(1 - r_g/r)\sqrt{r_g/r - r_g/r_0}}. \tag{280}$$

Этот интеграл расходится при $r \to r_g$ как $-r_g\ln(r - r_g)$. Отсюда асимптотический закон приближения r к r_g:

$$r - r_g = \mathrm{const}\cdot e^{-ct/r_g}. \tag{281}$$

Приближение коллапсирующего тела к гравитационному радиусу происходит по экспоненциальному закону с очень малым характерным временем $\sim r_g/c$.

Хотя скорость наблюдаемого извне сжатия стремится к нулю, скорость v падающих частиц, измеренная в их собственном времени, напротив, стремится к скорости света. Действительно[11]

$$v^2 = \left(\frac{\sqrt{-g_{11}}\, dr}{\sqrt{g_{00}}\, dt} \right)^2 .$$

Взяв g_{11} и g_{00} из (261), а dr/dt из (280), найдем

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0}. \tag{282}$$

Приближение к гравитационному радиусу в сопутствующей СК занимает конечное время, это ясно уже из предварительного анализа, но можно непосредственно вычислить интеграл

$$c\tau = \int ds = \int \left(c^2 g_{00} \frac{dt^2}{dr^2} + g_{11} \right)^{1/2} dr.$$

Взяв dr/dt из (280), находим для собственного времени падения из r_0 в r:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int_r^{r_0} \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)^{-1/2} dr. \tag{283}$$

Этот интеграл сходится при $r \to r_g$.

Все частицы по собственному времени достигнут центра за конечное собственное время. Веся процесс сжатия под шварцшильдовой сферой не наблюдаем из внешней СО. Моменту прохождения поверхностью тела этой сферы отвечает $t = \infty$ (весь процесс сжатия происходит за временной бесконечностью!). Частицы и лучи могут пересекать эту сферу (в сопутствующей СО) только в одном направлении –внутрь. Такую поверхность «одностороннего клапана» называют *горизонтом событий*.

По отношению ко внешнему наблюдателю сжатие к гравитационному радиусу сопровождается «самозамыканием» тела. Время распространения посылаемых с тела сигналов стремиться к бесконечности. Действительно $ds^2 = 0$, в шварцшильдовой сфере имеем $c\,dt = dr/(1 - r_g/r)$; время от r до некоторого $r_0 > r$ дается интегралом:

$$c\,\Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - r_g/r} = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \tag{284}$$

расходящимся при $r \to r_g$.

Интервалы собственного времени на поверхности тела сокращены по отношению к интервалам времени t бесконечно удаленного наблюдателя в отношении

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}; \tag{285}$$

[11]пользуясь $v^\alpha = \frac{c\, dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}(dx^0 + g_{0\alpha}/g_{00}\, dx^\alpha)}$

при $r \to r_g$ все процессы на теле по отношению к внешнему наблюдателю «застывают». Частота спектральной линии, испускаемой на теле, уменьшается не только из-за гравитационного красного смещения, но и из-за эффекта Доплера от движения источника к центру вместе с поверхностью шара. Когда радиус шара уже близок к r_g (скорость падения близка к c), этот эффект уменьшает частоту в

$$\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c} \approx \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{286}$$

раз. Под влиянием обоих эффектов частота излучаемого света стремиться к нулю при $r \to r_g$ по закону

$$\omega = \mathrm{const}\left(1-\frac{r_g}{r}\right). \tag{287}$$

С точки зрения удаленного наблюдателя коллапс приводит к возникновению «застывшего» тела, которое не посылает никаких сигналов и взаимодействует с внешним миром только своим статическим гравитационным полем. Такое образование называют *черной дырой* или *коллапсаром*.

28 Гравитационный коллапс пылевидной сферы

Выяснение хода изменения внутреннего состояния коллапсирующего тела требует решения уравнения Эйнштейна для гравитационного поля в материальной среде. Пренебрегая давлением вещества, используем уравнения состояния «пылевидной» материи. Можно использовать синхронную (одновременно и сопутствующую) СК. Сферически-симметричный элемент интервала

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)}dR^2 - r^2(\tau,R)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi) \tag{288}$$

Функция $r(\tau,R)$ – «радиус», определенный так, что $2\pi r$ есть длина окружности. Вычисление компонент тензора Риччи для этой метрики приводит к следующей системе уравнений Эйнштейна:

$$-e^{-\lambda}r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0, \tag{289}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} = 0, \tag{290}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = 8\pi k\varepsilon, \tag{291}$$

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0, \tag{292}$$

где штрих означает дифференцирование по R, а точка – по τ.

Уравнение (292) непосредственно интегрируется по времени, давая

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1+f(R)}, \tag{293}$$

где $f(R)$ – произвольная функция, удовлетворяющая лишь условию $1+f > 0$, подставляя это выражение в (289), получим

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0$$

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \tag{294}$$

где $F(R)$ – еще одна произвольная функция. Отсюда

$$\tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{f + F/r}}.$$

Получающуюся в результате интегрирования зависимость $r(\tau, R)$ можно представить в параметрическом виде

$$r = \frac{F}{2f}(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2f^{2/3}}(\operatorname{sh}\eta - \eta), \quad f > 0 \tag{295}$$

$$r = \frac{F}{-2f}(1 - \cos\eta), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta - \sin\eta), \quad f < 0 \tag{296}$$

где $\tau_0(R)$ – снова произвольная функция. Если же $f = 0$, то

$$r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (\tau_0(R) - \tau]^{2/3}, \quad f = 0 \tag{297}$$

Во всех случаях, подставив (293) в (291) и исключив f с помощью (294) получим выражение для плотности материи:

$$8\pi k\varepsilon = \frac{F'}{r'r^2}. \tag{298}$$

Фигурируют три независимых функций, но их число может быть сведено к двум, с помощью произвольного преобразования $R = R(R')$. Эти функции как раз и определяют радиальному распределению плотности и радиальной скорости материи.

Поскольку СО сопутствует материи, то каждой частице вещества отвечает определенное значение R, функция $r(\tau, R)$ определяет закон движения данной частицы, а $\dot{r}$ есть ее радиальная скорость. Важное свойство полученного решения состоит в том, что задание входящих в него произвольных функций в интервале от 0 до некоторого R_0 полностью определяет поведение сферы этого радиуса, он не зависит от значений этих функций при $R > R_0$. автоматически получается решение внутренней задачи для любой конечной сферы.

29 Гравитационный коллапс несферических и вращающихся тел

29.1 Нарушение сферической симметрии

- Качественная картина для тел с небольшими отклонениями от сферической симметрии та же.
- Возмущения в симметрии нарастаю в процессе коллапса.
- Если возмущения малы, то они и останутся небольшими и в момент достижения телом гравитационного радиуса.

За горизонтом событий никаких возмущений мы не увидим! Останутся лишь внешние возмущения гравитационного поля, которые должны рассеятся в виде гравитационных волн. Останется ли асимметрия под горизонтом событий – вопрос не ясен до сих пор.

29.2 Вращение коллапсара

Должен сохранятся момент импульса. Возмущение, связанное с вращением тела описывается добавкой к шварцшильдовскому метрическому тензору

$$g_{03} = \frac{2kM}{r}\sin^2\theta.[12] \tag{299}$$

Получающееся поле уже не статично, а лишь стационарно. Можно утверждать, что с точки зрения внешнего наблюдателя, свойства возникающего в результате коллапса образования не зависят ни от каких характеристик первоначального тела, за исключением лишь его полных массы m и момента M[13]. Гравитационное поле вращающегося коллапсара дается аксиально-симметричной *метрикой Керра*.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2\, d\theta^2 -$$

$$- \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2}\sin^2\theta\, d\varphi\, dt, \tag{300}$$

где введены обозначения

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{301}$$

а r_g по-прежнему равно $2mk$. Эта метрика зависит от двух параметров: m и a. На больших расстояниях с точностью до членов $\sim 1/r$ имеем

$$g_{00} \approx 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{03} \approx \frac{r_g a}{r}\sin^2\theta;$$

[12] В этом параграфе $c = 1$

[13] Мы не рассматриваем тел, несущих на себе электрический заряд

сравнение первого выражения с (265), а второго с (299) показывает, что m – масса тела, а a связан с моментом M соотношением

$$M = ma \quad (= mac \text{ в обычных единицах}). \tag{302}$$

Метрика переходит в Шварцишильдову при $a = 0$. Есть симметрия по времени (при $t \to -t$, $a \to -a$). Определитель метрического тензора из (300):

$$-g = \rho^4 \sin^2 \theta. \tag{303}$$

Метрика (300) имеет фиктивные особенности, но в шварцшильдовом случае на поверхности $r = r_g$ происходит одновременное обращение $g_{00} = 0$ и $g_{11} = \infty$, в метрике Керра эти две поверхности разделены. $g_{00} = 0$ при $\rho^2 = rr_g$; бо́льший из двух корней этого квадратного уравнения есть

$$r_0 = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (g_{00} = 0). \tag{304}$$

Обращение g_{11} в бесконечность имеет место при $\Delta = 0$; бо́льший из двух корней этого квадратного уравнения

$$r_{hor} = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2} \quad (g_{11} = \infty). \tag{305}$$

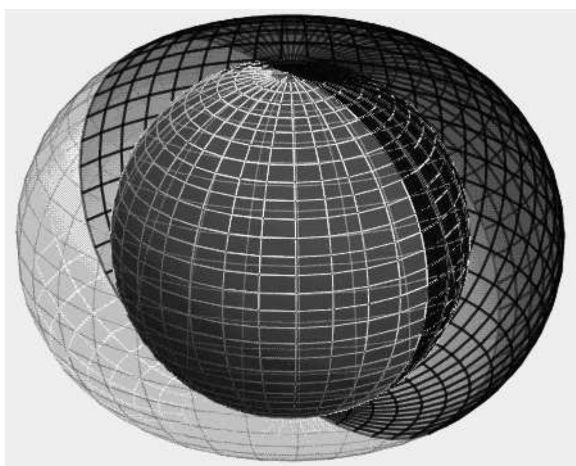

Рис. 8: Эргосфера вращающейся черной дыры

Поверхность $r = r_0$ обозначим S_0 (представляет собой сплюснутую фигуру вращения), Поверхность $r = r_{hor}$ обозначим S_{hor} (представляет собой сферу), заключена внутри S_0, касаются друг друга в полюсах. Обе поверхности существуют только при $a \leqslant r_g/2$. При $a > r_g/2$ появляются такие особенности метрики[14], которые нарушают принцип причинности.

[14]Например, замкнутые времениподобные траектории (можно отправиться в прошлое и попасть в будущее!)

Потеря смысла метрикой Керра при $a > r_g/2$ означает, что значение

$$a_{max} = \frac{r_g}{2}, \quad M_{max} = \frac{mr}{2} \tag{306}$$

дает верхнюю границу возможных значений момента вращения коллапсара. Соответствующие предельные радиусы

$$r_0 = \frac{r_g}{2}(1 + \sin\theta), \quad r_{hor} = \frac{r_g}{2}. \tag{307}$$

Покажем, что S_{hor} является горизонтом событий. Предварительно покажем с более общей точки зрения, что свойством одностороннего пропускания обладает всякая *нулевая гиперповерхность* – нормаль к которой в каждой ее точке является нулевым 4-вектором. Пусть гиперповерхность $f(x^i) = \text{const}$, нормаль к ней направлена вдоль 4-градиента $n_i = \partial f/\partial x^i$. Для нулевой гиперповерхности имеем $n_i n^i = 0$. Это значит, что направление нормали лежит в самой гиперповерхности, т.е. $df = n_i dx^i = 0$, это равенство выполняется, когда направление dx^i и n^i совпадают, при этом элемент длины на гиперповерхности $ds = 0$. Гиперповерхность касается светового конуса, построенного из данной точки. Таким образом, построенные световые конусы (например, в сторону будущего) лежат целиком по одну из сторон. Это свойство как раз и означает, что мировые линии частиц или световых лучей могут пересекать гиперповерхность лишь в одну сторону. Это выражение носит тривиальный характер, отражающий невозможность движения со скоростью, большей скорости света (простейший пример, гиперплоскость $x = t$ в плоском пространстве-времени).

Нетривиальная ситуация возникает, когда нулевая гиперповерхность не простирается на пространственную бесконечность. Ее сечения ($t = \text{const}$) представляют собой замкнутые пространственные поверхности. Такой же является и поверхность S_{hor} в поле Керра. Условие $n_i n^i = 0$ для гиперповерхности $f(r, \theta) = \text{const}$ имеет вид

$$g^{11}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2\right] = 0 \tag{308}$$

Это уравнение выполняется на S_{hor} (для которой $\partial f/\partial\theta = 0$, $\Delta = 0$), но не выполняется на S_0.

Продолжение метрики Керра под горизонт событий (как это было сделано для метрики Шварцшильда) не имеет физического смысла. Эффекты несферичности в сопутствующей СО нарастают, и поэтому нет никаких оснований ожидать, что поле под горизонтом могло определяться всего лишь полной массой и моментом тела.

29.3 Эргосфера

Основное свойство эргосферы – никакая частица не может оставаться в покое по отношению к СО удаленного наблюдателя: при $r, \theta, \varphi = \text{const}$ имеем

$ds^2 < 0$, т.е. интервал не времениподобен, как это д.б. для мировой линии частицы, переменная t теряет свой временной характер. Жесткая СО не может простираться от бесконечности внутрь эргосферы.

В эргосфере невозможно $\varphi = \text{const}$ (в шварцшильдовской метрике невозможно $r = \text{const}$), но возможно $r = \text{const}$. Более того, частицы и световые лучи могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r, выходя во внешнее пространство.

Из-за вращательного движения частиц естественная форма представления метрики в эргосфере:

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right) dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} \left(d\varphi + \frac{g_{03}}{g_{33}} dt\right)^2 . \tag{309}$$

Коэффициент при dt^2

$$g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2 + r_g r a^2 \sin^2\theta/\rho^2}$$

положителен везде вне S_{Hor} (и не обращается в нуль при S_0); интервал ds на $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $d\varphi = -(g_{03}/g_{33})dt$ времениподобен. Величина

$$-\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{r_g a r}{\rho^2(r^2 + a^2) + r_g r a^2 \sin^2\theta} \tag{310}$$

играет роль «угловой скорости вращения эргосферы» относительно внешней СО (направление совпадает с направлением вращения центрального тела). Обратим внимание, что интервалы собственного времени не обращаются в нуль вместе с g_{00} – поверхность S_0 не является поверхностью бесконечного красного смещения.

Энергия частицы, определенная как производная $-\partial S/\partial\tau$ от действия по собственному времени (синхронизованному вдоль траектории) всегда положительна. При движении частицы в поле, не зависящем от t, сохраняется энергия $\mathcal{E}_0 = -\partial S/\partial t$; эта величина совпадает с ковариантной компонентой 4-импульса $p_0 = m u_0 = m g_{0i} dx^i$ (здесь m – масса частицы). Тот факт, что переменная t (время по удаленным часам) не имеет в эргосфере временного характера, приводит к своеобразной ситуации: в этой области $g_{00} < 0$, и поэтому величина

$$\mathcal{E}_0 = m\left(g_{00} u^0 + g_{03} u^3\right) = m\left(g_{00}\frac{dt}{ds} + g_{03}\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

может быть отрицательной. Поскольку во внешнем пространстве t – время, то $\mathcal{E}_0$ не может быть отрицательной, то частица с $\mathcal{E}_0 < 0$ не может попасть в эргосферу извне. Возможный источник возникновение такой частицы – распад влетающего в эргосферу тела, скажем, на две части: одна часть захватывается на орбиту с «отрицательной энергией», эта часть не может выйти из эргосферы и захватывается внутрь горизонта. Вторя часть может выйти во внешнее пространство; поскольку $\mathcal{E}_0$ – аддитивная сохраняющаяся величина, то энергия этой частицы окажется больше энергии первоначального тела – произойдет извлечение энергии из вращающейся черной дыры!

S_0 не является особой для 4-метрики, но пространственная метрика имеет особенность (в СО (300)): вне S_0, где переменная t имеет временной характер, метрический тензор вычисляется по (78) и элемент пространственного расстояния имеет вид

$$dl^2 = \frac{\rho^2}{\Delta} + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Delta \sin^2\theta}{1 - r\, r_g/\rho^2} d\varphi^2. \tag{311}$$

Вблизи S_0 длины параллелей ($\theta = \mathrm{const}$, $r = \mathrm{const}$) стремятся к бесконечности по закону $2\pi \sin^2\theta/\sqrt{g_{00}}$. Здесь же стремится к бесконечности и разность показания часов (134) при их синхронизации вдоль этого замкнутого контура.

30 Гравитационное поле вдали от тел

Рассмотрим стационарное гравитационное поле на больших расстояниях r от создающего его тела и определим первые члены его разложения по степеням $1/r$ Метрика пространства в слабом поле «почти галилеева»:

$$g^{(0)}_{00} = 1, \quad g^{(0)}_{0\alpha} = 0, \quad g^{(0)}_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{312}$$

Соответственно этому представим g_{ik} в виде

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h_{ik}, \tag{313}$$

где h_{ik} – малые поправки, определяющие гравитационное поле. Условимся опускать и поднимать индексы тензора h_{ik} с помощью «невозмущенной» метрики: $h^k_i = g^{(0)kl} h_{il}$. При необходимо отличать h^{ik} от поправок в контравариантных компонентах метрического тензора g^{ik}. Поправки определяются решением уравнений

$$g_{il} g^{lk} = (g^{(0)}_{il} + h_{il}) g^{lk} = \delta^k_i.$$

С точностью до величин второго порядка малости находим

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik} + h^i_l h^{lk}. \tag{314}$$

С той же точностью определитель метрического тензора

$$g = g^{(0)} \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h^i_k h^k_i \right), \tag{315}$$

где $h \equiv h^i_i$.

Малость h_{ik} не фиксирует однозначного выбора СО. Оно будет выполнено и после любого преобразования $x'^i = x^i + \xi^i$, где xi^i – малые величины. Тензор h_{ik} переходит (186) при этом в

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial xi_k}{\partial x_i}, \qquad (316)$$

где $\xi_i = g^{(0)}_{ik}\xi^k$ (в виду постоянства $g^{(0)ik}$ ковариантные производные сводятся к обычным).

В первом приближении малые добавки даются сопутствующими членами метрики Шварцшильда. Если Шварцшильдова метрика представлена в виде (261), первые члены разложения при больших r даются (265). Перейдя от сферических координат к декартовым ($dr = n_\alpha dx^\alpha$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$), получим

$$h^{(1)}_{00} = \frac{r_g}{r}, \quad h^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h^{(1)}_{0\alpha} = 0, \qquad (317)$$

где $r_g = 2km/c^2$.

Члены, пропорциональные $1/r^2$ имеют двоякое происхождение: часть членов возникает в результате нелинейности уравнений Эйнштейна, остальные члены второго порядка возникают как соответствующие решения линеаризованных уравнений поля. Поскольку последние зависят только от массы тела, то только от нее зависят и эти члены второго порядка. Ясно, что и эти члены можно получить путем разложения шварцшильдовой метрики. В тех же координатах найдем:

$$h^{(2)}_{00} = 0, \quad h^{(2)}_{\alpha\beta} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta, \qquad (318)$$

Остальные члены второго порядка возникают как соответствующие решения линеаризованных уравнений поля. Произведем линеаризацию уравнений, выписывая сначала формулы в более общем виде, чем понадобится здесь (не учитывая сразу стационарности поля).

При малых h_{ik} величины Γ^i_{kl} тоже малы, поэтому, пренебрегая степенями выше первой, мы можем оставить в тензоре кривизны (153) только члены в первой скобке:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right). \qquad (319)$$

Для тензора Риччи с той же точностью

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} \approx g^{lm(0)} R_{limk},$$

или

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\left(-g^{lm(0)}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right). \qquad (320)$$

Это выражение можно упростить, наложив на h_{ik} четыре дополнительных (по числу произвольных функций ξ^i) условия

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h. \tag{321}$$

Тогда три последних члена в (320) взаимно сокращаются и остается

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} \tag{322}$$

В стационарном случае, когда h_{ik} не зависят от времени (322) сводится к $R_{ik} = \triangle h_{ik}/2$, где $\triangle$ – оператор Лапласа по пространственным координатам. Уравнения Эйнштейна для поля в пустоте сводятся, таким образом, к уравнениям Лапласа

$$\triangle h_{ik} = 0, \tag{323}$$

с дополнительными условиями (321), принимающими вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(h_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta\right) = 0, \tag{324}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} h_0^\beta = 0. \tag{325}$$

Эти условия все еще не фиксируют вполне однозначного выбора СО. Если h_{ik} удовлетворяют условиям (324) и (325), то таким же условиям будут удовлетворять и h'_{ik} (316), если только

$$\triangle \xi^i = 0. \tag{326}$$

Компонента h_{00} должна даваться скалярным решением трехмерного уравнения Лапласа. Такое решение, пропорциональное $1/r^2$ имеет вид $\mathbf{a}\nabla(1/r)$, где $\mathbf{a}$ – постоянный вектор. Но член такого вида в h_{00} всегда может быть ликвидирован путем простого смещения начала координат.

Компоненты $h_{0\alpha}$ даются векторным решение уравнения Лапласа:

$$h_{0\alpha} = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}$$

где $\lambda_{\alpha\beta}$ – постоянный тензор. Условие (325) дает

$$\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r}\ 0,$$

откуда следует, что $\lambda_{\alpha\beta}$ должны иметь вид $a_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}$, где $a_{\alpha\beta}$ – антисимметричный тензор. Решение вида $\lambda\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r}$ может быть исключено преобразованием с $\xi^0 = \lambda/r,\ \xi^\alpha = 0$. Поэтому реальным смыслом обладает лишь решение

$$h_{0\alpha} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}.$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что надлежащим преобразованием пространственных координат всегда можно исключить величины $h_{\alpha\beta}$, даваемые тензорным решением уравнения Лапласа.

Тензор $a_{\alpha\beta}$ связан с тензором полного момента $M_{\alpha\beta}$ выражением

$$h_{0\alpha}^{(2)} = \frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r} = \frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{n_\beta}{r^2}. \tag{327}$$

Это выражение получается в результате вычисления интеграла (216). Подчеркнем, что в общем случае, когда поле вблизи тела может и не быть слабым, $M_{\alpha\beta}$ – момент импульса тела вместе с гравитационным полем, лишь если поле слабо, его вкладом в момент можно пренебречь.

Формулы (317), (318) и (327) дают ответ с точностью до членов порядка $\frac{1}{r^2}$. Ковариантные компоненты метрического тензора:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)}. \tag{328}$$

Формула (327) может быть переписана в векторном виде

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2} [\mathbf{nM}], \tag{329}$$

где вектор $\mathbf{M}$ – вектор полного момента тела. В стационарном гравитационном поле на частицу действует «кориолисова сила», такая же какая действовала бы на частицу в СО, вращающейся с угловой скоростью

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c}{2} \sqrt{g_{00}} \operatorname{rot} \mathbf{g}.$$

Поэтому можно сказать, что в поле вращающегося тела на удаленную частицу действует кориолисова сила, отвечающая угловой скорости:

$$\mathbf{\Omega} \approx \frac{c}{2} \operatorname{rot} \mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3} [\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})]. \tag{330}$$

Применим выражения (317) для вычисления полной энергии гравитирующего тела по интегралу (215). Вычислив нужные коэффициенты h^{ikl} по формуле (205), (206) получим с требуемой точностью

$$h^{\alpha 0 \beta} = 0$$

$$h^{00\alpha} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(g^{00} g^{\alpha\beta} \right) = \frac{mc^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(-\frac{\delta^\alpha \beta}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} \right) = \frac{mc^2}{4\pi} \frac{n^\alpha}{r^2}.$$

Интегрируя теперь в (215) по сфере радиуса r, получим окончательно:

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc \tag{331}$$

– результат, который следовало ожидать. Он является отражением факта равенства «тяжелой» и «инертной» масс.

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей. Получить его можно из выражения (справедливого только, когда все величины на зависят от x^0):

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha \right). \tag{332}$$

Интегрируя $R_0^0\sqrt{-g}$ по трехмерному пространству и применив теорему Гаусса, получим

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \oint \sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha\, df_\alpha.$$

Взяв достаточно удаленную поверхность интегрирования и воспользовавшись на ней выражениями (317) для g_{ik}, получим

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \frac{4\pi k}{c^2} m = \frac{4\pi k}{c^3} P^0.$$

Замечая, что согласно уравнениям поля,

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) = \frac{4\pi k}{c^4} \left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3 \right),$$

получаем искомую формулу

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int \left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3 \right) \sqrt{-g}\, dV \tag{333}$$

Эта формула выражает полную энергию материи и постоянного гравитационного поля через тензор энергии-импульса одной только материи.

31 Уравнения движения системы тел во втором приближении

Далее мы увидим, что гравитационные волны появятся лишь в пятом приближении по $1/c$. следовательно, система гравитирующих тел может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка $1/c^4$ (в отличие от э-м поля!, где это возможно только до членов 2-го порядка). Произведем вывод функции Лагранжа системы тел с точностью до членов 2-го порядка (постньютоновское приближение). Пренебрегаем размерами и структурой тел. С точностью до величин порядка $1/c^2$ поле вдали от тел дается полученными выражениями $h_{ik}^{(1)}$. Поскольку поле $h_{ik}^{(1)}$ представляет решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, то для него справедлив принцип суперпозиции. Вдали от тел поле получается просто суммированием полей каждого из них:

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2} \varphi \delta_\alpha^\beta, \tag{334}$$

$$h_0^0 = \frac{2}{c^2}\varphi, \quad h_0^\alpha = 0, \tag{335}$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}) = -k\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}$$

есть ньютонов потенциал системы точечных тел. Выражение для интервала

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2\,dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{336}$$

В ньютоновском приближении учитывался только g_{00}. Для получения искомых уравнений достаточно знать компоненты $h_\alpha\beta$ с полученной в (334) точностью ($\sim 1/c^2$), смешанные компоненты необходимо иметь с точностью до $\sim 1/c^3$, а временную h_{00} – до $\sim 1/c^4$.

Пренебрегая размерами тел выписываем в криволинейных координатах

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \tag{337}$$

Компонента

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

в первом приближении (галилеевы g_{ik}) равна $\sum_a m_a c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$; в следующем приближении (подставляем g_{ik} из (336)

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2\left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \tag{338}$$

где $\mathbf{v}$ – обычная трехмерная скорость ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$), а φ_a – потенциал поля в точке $\mathbf{r}_a$.

Для компонент $T_{\alpha\beta}$ и $T_{0\alpha}$ то для них в том же приближении достаточно первых членов разложения выражений (337):

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad T_{0\alpha} = \sum_a m_a c\, v_{a\alpha}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \tag{339}$$

Переходим к вычислению компонент тензора R_{ik} по формуле $R_{ik} = g^{lm}R_{limk}$ с R_{limk} из (153). Главные члены R_{00} порядка $1/c^2$, наряду с ними мы должны сохранить и члены $\sim 1/c^4$. Результат

$$R_{00} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\triangle h_{00} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}\left(2\frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

Еще не было дополнительного условия на h_{ik}, налагая

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} = 0, \tag{340}$$

убираем из R_{00} члены, содержащие $h_{0\alpha}$, и получаем с требуемой точностью

$$R_{00} = \frac{1}{2}\triangle h_{00} + \frac{2}{c^4}\varphi\triangle\varphi - \frac{2}{c^4}(\nabla\varphi)^2. \tag{341}$$

Для $R_{0\alpha}$ (сохраняя члены до $\sim 1/c^3$) аналогичным образом получим

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\alpha^\beta}{\partial t \partial x^\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\beta^\beta}{\partial t \partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\triangle h_{0\alpha}$$

и с учетом условия (340):

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2}\triangle h_{0\alpha} + \frac{1}{2c^3}\frac{\partial\varphi}{\partial t \partial x^\alpha} \tag{342}$$

С помощью полученных выражений (338)-(342) составим уравнения Эйнштейна:

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{343}$$

Временная компонента дает

$$\frac{1}{2}\triangle h_{00} + \frac{2}{c^4}\varphi\triangle\varphi - \frac{2}{c^4}(\nabla\varphi)^2 = \frac{8\pi k}{c^4}\sum_a m_a c^2\left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a); \tag{344}$$

с помощью тождества

$$4(\nabla\varphi)^2 = 2\triangle(\varphi^2) - 4\varphi\triangle\varphi$$

и уравнения ньютоновского потенциала

$$\triangle\varphi = 4\pi k i\sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \tag{345}$$

переписываем это уравнение в виде

$$\triangle\left(h_{00} + \frac{2}{c^4}\varphi^2\right) = \frac{8\pi k}{c^2}\sum_a m_a\left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \tag{346}$$

После проведения всех вычислений мы заменили в правой части уравнения (346) φ_a на

$$\varphi_a' = -k\sum_b{}' \frac{m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|},$$

т.е. на потенциал, создаваемый в точке a всеми телами, за исключением тела m_a. Эта операция соответствует «перенормировке» всех масс, в результате которой они принимают свои истинные значения, учитывая создаваемые телами поля.

Решение уравнения (346) может быть написано сразу, учитывая соотношение:

$$\triangle\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \tag{347}$$

Таким образом, найдем

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4}\sum\frac{m_a\varphi'_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4}\sum\frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}. \tag{348}$$

Смешанная компонента уравнения (343) дает

$$\triangle h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3}\sum_a m_a v_{a\alpha}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x^\alpha}. \tag{349}$$

Решение этого линейного уравнения есть

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3}\sum_a\frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x^\alpha},$$

где f – решение вспомогательного уравнения

$$\triangle f = \varphi = -\sum\frac{km_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}.$$

Учитывая соотношение $\triangle r = 2/r$, находим

$$f = -\frac{k}{2}\sum_a m_a|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|,$$

и затем, после простого вычисления, окончательно получаем

$$h_{0\alpha} = \frac{k}{2c^3}\sum_a\frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}\left[7v_{a\alpha} + (\mathbf{v}_a\mathbf{n}_a)n_{a\alpha}\right], \tag{350}$$

где $\mathbf{n}_a$ – единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_a$. Выражения (334), (348), (350) достаточны для вычисления искомой функции Лагранжа с точностью до членов 2-го порядка. Функция Лагранжа одного тела в гравитационном поле, создаваемом другими телами:

$$L_a = -m_a c\frac{ds}{dt} = -m_a c^2\left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta}\frac{v_a^\alpha v_a^\beta}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Раскладывая радикал и опустив несущественную постоянную $-m_a c^2$, переписываем с требуемой точностью:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2\left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2}h_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2}v_a^2\right). \tag{351}$$

Значения всех h_{ik} берутся в точке $\mathbf{r}_a$; члены, обращающиеся в бесконечность, опускаем.

Полная функция Лагранжа L не равна сумме функций L_a! Но L_a составлена так, что приводит к правильным значениям сил $\mathbf{f}_a$, действующих на каждое тело при заданном движении всех остальных. Для этого вычисляем силы $\mathbf{f}_a$:

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

После этого легко составить такую общую функцию L, из которой все те же силы $\mathbf{f}_a$ получаются взятием частных производных $\partial L/\partial \mathbf{f}_a$. Окончательный результат:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a {\sum_b}' \frac{3k m_a m_b v_a^2}{2c^2 r_{ab}} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a {\sum_b}' \frac{k m_a m_b}{2 r_{ab}} - \tag{352}$$

$$- \sum_a {\sum_b}' \frac{k m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} \left[7(\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})\right] - \sum_a {\sum_b}' {\sum_c}' \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}},$$

где $r_{ab} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$, $\mathbf{n}_{ab}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$, а штрих у суммы означает, что должен быть опущен член с $b = a$ или $c = a$

32 Слабые гравитационные волны

32.1 Волновое уравнение

Конечность скорости распространения взаимодействий приводит к возможности гравитационных волн. Рассмотрим слабое гравитационное поле:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}. \tag{353}$$

С точностью до величин первого порядка

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik}, \tag{354}$$

а определитель тензора g_{ik}:

$$g = g^{(0)}(1 + h), \tag{355}$$

где $h = h_i^i$; все операции поднимания и опускания значков производятся по невозмущенной метрике $g_{ik}^{(0)}$. Условие малости h_{ik} оставляет возможность произвольных преобразований СО вида $x'^i = x^i + \xi^i$ с малыми ξ^i, при этом

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} \tag{356}$$

Воспользовавшись этим произволом, налагаем на h_{ik} дополнительное условие

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h, \tag{357}$$

после чего тензор Риччи принимает простой вид

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\Box h_{ik}, \tag{358}$$

где $\Box$ обозначает оператор д'Аламбера:

$$\Box = -g^{lm(0)}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Условия (357) все еще не фиксируют однозначного выбора СО: если некоторые h_{ik} удовлетворяют этим условиям, то им же будут удовлетворять и h'_{ik} (357), если только ξ^i являются решениями уравнения

$$\Box \xi^i = 0. \tag{359}$$

Приравняв выражение (358) нулю, найдем уравнение гравитационного поля в пустоте в виде

$$\Box h_i^k = 0. \tag{360}$$

Это – обычное волновое уравнение. Гравитационные волны распространяются в пустоте со скоростью света.

32.2 Плоская гравитационная волна

Поле меняется вдоль одного направления в пространстве $x^1 = x$. Уравнения (360) превращается в

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0, \tag{361}$$

решением которых является любая функция от $t \pm x/c$. Дополнительные условия (357) дают в этом случае $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, где точка над буквой означает дифференцирование по t. Эти равенства можно проинтегрировать, постоянные интегрирования отбросить (нас интересует только переменная часть поля), получим соотношение между компонентами:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{362}$$

Как было указано, условия (357) не определяют однозначно СО, преобразованием вида $x'^i = x^i + \xi^i(t - xc)$ можно обратить в нуль четыре величины: ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$. Из равенств (362) следует, что при этом обратятся в 0 также и компоненты ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Остающиеся величины ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, то их нельзя обратить в нуль никаким выбором СО, поскольку при преобразовании (356) с $\xi_i = \xi_i(t - x/c)$ эти компоненты вообще не меняются. Заметим, что обращается в нуль и $\psi \equiv \psi_i^i$, а поэтому $\psi_i^i = h_i^k$.

Плоская гравитационная волна определяется двумя величинами h_{23}, $h_{22} = -h_{33}$ – поперечная волна, поляризация которой определяется симметричным тензором 2-го ранга в плоскости yz и сумма диагональных членов которого $h_{22} + h_{33}$ равна 0. В качестве двух независимых поляризаций можно выбрать случаи, в которых отлична от нуля одна из двух величин h_{23} и $(h_{22} - h_{33})/2$. Такие две поляризации отличаются друг от друга поворотом на угол $\pi/4$ в плоскости yz.

32.3 Псевдотензор энергии-импульса плоской гравитационной волны

Компоненты t^{ik} – величины второго порядка малости, можно пренебречь членами еще более высокого порядка: для плоской полны все отличные от нуля члены в t^{ik} заключены в члене

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h_q^{n,\,i} h_n^{q,\,k}. \tag{363}$$

Поток энергии в волне определяется величинами $-cgt^{0\alpha} \approx ct^{0\alpha}$. В плоскости, распространяющейся вдоль оси x^1, в которой отличные от нуля h_{23} и $h_{22} = -h_{33}$ зависят только от разности $t - x/c$, этот поток направлен вдоль той же оси x^1 и равен

$$ct^{01} = \frac{c^3}{16\pi k}\left[\dot{h}_{23}^2 + \frac{1}{4}(\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2\right]. \tag{364}$$

Начальные условия для произвольного поля гравитационных волн должны задаваться четырьмя произвольными функциями координат.

33 Гравитационные волны в искривленном пространстве-времени

Рассмотрим распространение малых возмущений на фоне произвольной (негалилеевой) «невозмущенной» метрики $g_{ik}^{(0)}$. Напишем снова g_{ik} в виде (353), найдем, что поправка первого порядка к символам Кристоффеля выражается через поправки h_{ik}:

$$\Gamma_{kl}^{i(1)} = \frac{1}{2}(h^i_{k;l} + h^i_{l;\,k} - h_{kl}{}^{;\,i}), \tag{365}$$

здесь и далее все тензорные операции производятся с помощью негалилеевой метрики $g_{ik}^{(0)}$. Для поправок к тензору кривизны получается

$$R_{klm}^{i(1)} = \frac{1}{2}(h^i_{k;m;l} + h^i_{m;k;l} - h_{km;}{}^{;i}{}_{;l} - h^i_{k;l;m} - h^i_{l;k;m} + h_{kl;}{}^{;i}{}_{;m}) \tag{366}$$

Отсюда поправки к тензору Риччи получаются из соотношения

$$R_{ik}^{(1)} = R_{ilk}^{l(1)} = \frac{1}{2}(h^l_{i;k;l} + h^l_{k;i;l} - h_{ik;}{}^{;l}{}_{;l} - h_{;i;k}). \tag{367}$$

Точная метрика в пустоте должна удовлетворять точным уравнениям Эйнштейна $R_{ik} = 0$, поскольку невозмущенная метрика $g_{ik}^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям $R_{ik}^{(0)} = 0$, то для возмущения получается уравнение $R_{ik}^{(1)} = 0$, т.е.

$$h^l_{i;k;l} + h^l_{k;i;l} - h_{ik;}{}^{;l}{}_{;l} - h_{;i;k} = 0. \tag{368}$$

В общем случае произвольных гравитационных волн упрощение до формы (360) невозможно. Это можно, однако сделать в важном случае волн большой частоты: длина волны λ и период колебаний λ/c малы по сравнению с характерными расстояниями L и характерными временами L/c на которых меняется «фоновое поле». Каждое дифференцирование компонент h_{ik} увеличивает порядок величины в отношении L/λ по сравнению с производными от невозмущенной метрики $g_{ik}^{(0)}$. Если ограничиться точностью до членов двух наибольших порядков $(L/\lambda)^2$ и (L/λ), то в (368) можно менять порядок дифференцирования; разность

$$h^l_{i;k;l} - h^l_{i;l;k} \approx h^l_m R^{m(0)}_{ikl} - h^m_i R^{i(0)}_{mkl}$$

имеет порядок (L/λ), между тем, каждое из выражений $h^l_{i;k;l}$, $-h^l_{i;l;k}$ содержит члены бо́льших порядков. Наложив теперь на h_{ik} дополнительные условия

$$\psi^k_{i;k} = 0 \tag{369}$$

(аналогичные (357)), получим уравнение

$$h_{ik;}{}^{;l}{}_{;l} = 0, \tag{370}$$

обобщающее уравнение (360). Условие (369) не фиксирует однозначный выбор координат, последние можно подвергнуть преобразованию $x'^i = x^i + \xi^i$, где малые величины ξ^i удовлетворяют уравнению $\xi^{i;k}{}_{;k} = 0$. Этими преобразованиями можно наложить на h_{ik} также и условие $h \equiv h^i_i = 0$. Тогда $\psi^k_i = h^k_i$, так что h^k_i подчинены условиям

$$h^k_{i;k} = 0, \quad h = 0. \tag{371}$$

Круг все еще допустимых преобразований суживается требованием $\xi^i{}_{;i} = 0$.

Псевдотензор t^{ik} содержит наряду с невозмущенной частью $t^{ik(0)}$ также и члены различных порядков по h_{ik}. Мы придем к выражению, аналогичному (363), если рассмотрим величины t^{ik}, усредненными по 4-пространству с размерами, большими по сравнению с λ, но малыми по сравнению с L. Такое усреднение ($\langle \ldots \rangle$) не затрагивает $g_{ik}^{(0)}$ и обращает в нуль все члены, линейные по быстро осцилирующим величинам h_{ik}. Из квадратичных членов сохраним лишь члены наиболее высокого (второго) порядка по $1/\lambda$ – это члены, квадратичные по производным $h_{ik,l} \equiv \partial h_{ik}/\partial x^l$. При такой степени точности из всех членов 2-го порядка остается лишь

$$\langle t^{ik(2)} \rangle = \frac{c^4}{32\pi k} \langle h^{n,i}_q h^{q,k}_n \rangle. \tag{372}$$

С той же точностью $\langle t^{i(2)}_i \rangle = 0$.

Обладая определенной энергией, гравитационная волна сама является источником некоторого дополнительного гравитационного поля. Вместе с создающей его энергией это поле – эффект 2-го порядка по h_{ik}. Но в случае выскочастотных волн эффект существенно усиливается, псевдотензор t^{ik} квадратичен по производным от λ^{-2}. В таком случае можно сказать, что сами волны создают поле, на котором они распространяются. Для вывода уравнения, определяющего эту метрику, надо учесть в разложении R_{ik} не только линейные, но и квадратичные по h_{ik} члены: $R_{ik} = R_{ik}^{(0)} + R_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(2)}$. Усредненные уравнения поля $\langle R_{ik} \rangle = 0$ принимают вид (усреднение уничтожает лишь линейные члены):

$$R_{ik}^{(0)} = -R_{ik}^{(2)}, \tag{373}$$

причем в $R_{ik}^{(2)}$ надо сохранить лишь члены второго порядка по q/λ. При усреднении остается

$$\left\langle \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right)^{(2)} \right\rangle = -\frac{8\pi k}{c^4} \langle t^{ik(2)} \rangle,$$

поскольку $\langle t_i^{i(2)} \rangle = 0$, с той же точностью:

$$\langle R_{ik}^{(2)} \rangle = -\frac{8\pi k}{c^4} \langle t_{ik}^{(2)} \rangle,$$

используя (372), получим окончательно уравнение (373) в виде

$$R_{ik}^{(0)} = \frac{1}{4} \langle h_{q,i}^{n} h_{n,k}^{q} \rangle. \tag{374}$$

Если фон создается самими волнами, уравнения (374) и (370) должны решаться совместно. Оценка выражений в обеих частях уравнения (374) показывает, что радиус кривизны фоновой метрики по своему порядку L связан с длиной волны и порядком величины ее поля h согласно $\lambda/L \sim h$.

34 Излучение гравитационных волн

Рассмотри слабое гравитационное поле, создаваемое телами, движущимися с малыми скоростями. Благодаря наличию материи уравнения гравитационного поля будут отличаться от простого волнового уравнения (360) наличием в правой части членов, происходящих от тензора энергии-импульса материи:

$$\frac{1}{2} \Box \psi^k = \frac{8\pi k}{c^4} \tau_i^k, \tag{375}$$

где $\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h$, а τ_i^k условно обозначает дополнительные выражения, получающиеся в при переходе от точных уравнений тяготения к случаю слабых полей. Можно убедиться, что τ_0^0 и τ_α^0 получаются из соответствующих компонент T_i^k путем выделения из них величин нужного порядка малости. Величины τ_β^α содержат также и члены второго порядка малости из $R_i^k - \delta_i^k R/2$. Величины ψ_i^k удовлетворяют условию (357) $\partial\psi_i^k/\partial x^k = 0$. Из (375) следует, что такое же уравнение имеет место и для τ_i^k:

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{376}$$

Это уравнение заменяет общее соотношение $T_{i;k}^k = 0$. Уравнение (375) по форме совпадают с уравнением запаздывающих потенциалов, их общее решение

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4}\int (\tau_i^k)_{t-R/c}\frac{dV}{R}. \tag{377}$$

Поскольку скорости всех тел в системе малы, то для поля на больших расстояниях можно написать

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0}\int (\tau_i^k)_{t-R_0/c}\, dV, \tag{378}$$

где R_0 – расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы. Индекс $t - R_0/c$, показывающий что значение τ надо брать в этот момент времени, в дальнейшем будем опускать.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся уравнениями (376), опуская индексы у τ_i^k и выделяя пространственные и временные компоненты, пишем (376) в виде

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \tag{379}$$

Умножив первое уравнение на x^β, проинтегрируем по всему пространству

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\int \tau_{\alpha 0} x^\beta\, dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta\, dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma} x^\beta}{\partial x^\gamma}\, dV - \int \tau_{\alpha\beta}\, dV.$$

Поскольку на бесконечности $\tau_{ik} = 0$, то первый интеграл, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает. Полусумма оставшегося равенства и его же с переставленными индексами дает:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int (\tau_{\alpha\beta} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

Далее умножим второе из уравнений (379) на $x^\alpha x^\beta$ и тоже проинтегрируем по всему пространству. Аналогичное преобразование приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{00} x^\alpha x^\beta\, dV = -\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

Сравнивая оба полученных результата, находим

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta\, dV. \tag{380}$$

Таким образом, интегралы от всех $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются выраженными через интегралы, содержащие только компоненту τ_{00}, а она с достаточной точностью совпадает с компонентой T_{00} и, соответственно

$$\tau_{00} = \mu c^2. \tag{381}$$

Подставляя это в (380) и вводя время $t = x^0/c$, переписываем (378) в виде

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta \, dV. \tag{382}$$

На больших расстояниях от тел в небольших участках пространства можно рассматривать волну как плоскую Вычислим поток энергии, излучаемый системой в направлении, например, x^1, воспользовавшись формулой (364). В эту формулу входят только компоненты $h_{23} = \psi_{23}$ и $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$. Из (382) находим для них выражения

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}\ddot{D}_{23}, \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}) \tag{383}$$

(точка означает дифференцирование по времени), где введен тензор квадрупольного момента масс

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu(3x^\alpha x^\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, dV. \tag{384}$$

В результате находим плотность потока энергии в направлении оси x^1 в виде

$$ct^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right) + \dddot{D}_{33}^{\,2}\right]. \tag{385}$$

Поток энергии в элемент телесного угла в данном направлении получится отсюда умножением на $R_0^2\, do$. Два члена в этом выражении отвечают излучению волн двух независимых поляризаций. Для записи в инвариантном виде (независящем от направления излучения) введем трехмерный единичный тензор поляризации плоской гравитационной волны $e_{\alpha\beta}$, определяющий, какие именно из компонент $h_{\alpha\beta}$ отличны от 0 (в калибровке $h_i k$, в которой $h_{0\alpha} = h_{00} = h = 0$). Тензор поляризации симметричен и удовлетворяет условиям

$$e_{\alpha\alpha} = 0, \quad e_{\alpha\beta}n_\beta = 0, e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = 1, \tag{386}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны; первые два условия выражают тензорность и поперечность волны. С помощью этого тензора интенсивность излучения заданной поляризации в телесный угол do запишется в виде

$$dI = \frac{k}{72\pi c^5}(\dddot{D}_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})^2 do. \tag{387}$$

Это выражение зависит от направления $\mathbf{n}$ неявным образом – через условие поперечности $e_{\alpha\beta}n_\beta = 0$. Суммарное угловое распределение излучения всех поляризаций получается суммированием (387) по поляризациям или, что то же, усреднением по поляризациям и умножением результата на 2 (число независимых поляризаций).

Усреднение осуществляется формулой

$$\overline{e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}} = \frac{1}{4}\left\{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta + (n_\alpha n_\beta \delta_{\gamma\delta} + n_\gamma n_\delta \delta_{\alpha\beta}) - \right.$$

$$\left. -(n_\alpha n_\gamma \delta_{\beta\delta} + n_\beta n_\gamma \delta_{\alpha\delta} + n_\alpha n_\delta \delta_{\beta\gamma} + n_\beta n_\delta \delta_{\alpha\gamma}) - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta})\right\}. \tag{388}$$

Выражение справа – тензор, составленный из единичного тензора и компонент вектора **n**, обладающей требуемой симметрией по своим индексам, дающий единицу при упрощении па парам индексов α, γ и β, δ, и обращающийся в нуль при скалярном умножении на **n**. В результате находим:

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} - \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma\right] do. \tag{389}$$

Полное излучение по всем направлениям (потеря энергии, $(d\mathcal{E}/dt)$, можно найти усреднив dI/do по направлениям **n** и умножив результат на 4π:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\gamma}. \tag{390}$$

Отметим, что излучение гравитационных волн оказывается эффектом пятого порядка по $1/c$. Это обстоятельство, вместе с малостью гравитационной постоянной k, приводит к чрезвычайной малости эффекта.

Два тела, притягивающиеся по закону Ньютона, движутся по круговым орбитам вокруг общего центра инерции. Для них

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{32k\mu^2\omega^6 r^4}{5c^5} = \frac{32k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^3}.$$

Это приводит к вековому сближению тел:

$$\dot{r} = \frac{2r^2}{km_1m_2}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{64k^3 m_1 m_2(m_1+m_2)}{5c^5r^3}.$$

35 Изотропное пространство

35.1 Космологическая постоянная

Ньютоновская механика не применима к плоскому бесконечному пространству (бесконечный потенциал в каждой точке). Сделаем замечание по поводу определения действия для гравитационного поля. Требования для действия будут по-прежнему удовлетворены, если к скаляру G добавить постоянный член:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int (G + 2\Lambda)\sqrt{-g}d\Omega, \tag{391}$$

где Λ – новая постоянная с размерностью см$^{-2}$. Такое изменение приведет к появлению в уравнениях Эйнштейна дополнительного члена Λg_{ik}:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik} + \Lambda g_{ik}. \tag{392}$$

Если приписать «космологической постоянной» очень малое значение, то наличие этого члена не будет существенно сказываться на гравитационных полях в не слишком больших областях пространства-времени, но приведет к новым типам «космологических решений»[15]. Достаточно убедительных оснований (теоретических и наблюдательных) для введения такого видоизменения уравнений нет, а это изменение несет глубокий физический смысл – наличие неустранимой кривизны пространства-времени, не связанной с материей.

На больших участках Вселенная однородна и изотропна (это приближение) по данным о распределении галактик и реликтового излучения. Мы увидим, что основным свойством такой Вселенной - нестационарность.

35.2 Метрика изотропного пространства

Введем трехмерный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{393}$$

Кривизна пространства полностью определяется его трехмерным тензором кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, который в случае полной изотропии должен выражаться только через метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$, а поэтому в силу своих свойств симметрии должен иметь вид

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}), \tag{394}$$

где λ – постоянная. Тензор Риччи $P_{\alpha\beta} = P^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$ равен

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \tag{395}$$

[15] В частности появляются стационарные решения

а скалярная кривизна

$$P = 6\lambda. \tag{396}$$

Таким образом, свойства кривизны изотропного пространства определяются лишь одной постоянной. Возможны три случая:

1. Пространство постоянной положительной кривизны ($\lambda>0$)
2. Пространство постоянной отрицательной кривизны ($\lambda<0$)
3. Плоское пространство ($\lambda=0$)

35.3 Пространство с положительной кривизной

Проведем геометрическую аналогию с гиперсферой. Уравнение гиперсферы в четырехмерном пространстве

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \tag{397}$$

элемент длины выражается как

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \tag{398}$$

Рассматривая теперь координаты x_1, x_2, x_3 как три пространственных и исключая из dl^2 фиктивную координату x_4 с помощью (397), получаем

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \tag{399}$$

Из этого выражения легко вычислить постоянную λ. Поскольку заранее известно, что тензор $P_{\alpha\beta}$ одинаковый вид во всем пространстве, то достаточно вычислить его только для точек, находящихся вблизи начала координат, где

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha}{x_\beta} a^2.$$

Так как первые производные от $\gamma_{\alpha\beta}$ и трехмерные символы Кристоффеля $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ в начале координат обращаются в нуль, что вычисление по общей формуле (159) оказывается очень простым и дает в результате

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \tag{400}$$

Величину a можно назвать «радиусом кривизны» пространства. Введем вместо x_1, x_2, x_3 соответствующие им «сферические» координаты r, θ, φ. Тогда элемент длины примет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{401}$$

Начало координат может быть выбрано в любой точке пространства. Длина окружности в этих координатах $2\pi r$, а поверхность сферы $4\pi r^2$. Длина же «радиуса» окружности (или сферы) равна

$$\int\limits_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/a^2}} = a \arcsin \frac{r}{a}, \tag{402}$$

т.е. больше r. Отношение длины окружности к радиусу в таком пространстве меньше 2π. Другую удобную форму dl^2 имеет в «четырехмерных сферических координатах», получающихся, если вместо r ввести «угол» χ согласно $r = a \sin \chi$ (χ меняется в пределах от 0 до π).

$$dl^2 = a^2 \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2) \right]. \tag{403}$$

Координата χ измеряет расстояние от начала координат, равное $a\chi$. Поверхность сферы в этих координатах равна $4\pi a^2 \sin^2 \chi$. Мы видим, что по мере удаления от начала координат величина поверхности сферы сначала сначала увеличивается, по не достигнет на расстоянии $\pi a/2$ максимального значения $4\pi a^2$. Вслед за этим она начинает уменьшаться пока не превратится в точку на «противоположном полюсе» пространства на расстоянии πa – наибольшем расстоянии, которое может существовать в таком пространстве. Объем пространства с положительной кривизной равен

$$V = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi} a^3 \sin^2 \chi \sin \theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi,$$

откуда

$$V = 2\pi^2 a^3. \tag{404}$$

Пространство положительной кривизны оказывается «замкнутым само в себе», конечным по объему, но не имеющим границ. Интересно отметить, что в таком пространстве суммарный электрический заряд должен быть равен 0. А также P^i обращается в 0 для всего пространства.

35.4 Пространство с отрицательной кривизной

Постоянная λ становится отрицательной, если a мнимо. Во всех предыдущих формулах надо заменить a на ia. Геометрия на четырехмерной псевдосфере с мнимым радиусом.

$$\lambda = -\frac{1}{a^2} \tag{405}$$

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/a^2} + r^2 (\sin^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2), \tag{406}$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞. Отношение длины окружности к радиусу теперь больше, чем 2π. Выражение, аналогичное

(403), получится, если ввести координату χ согласно $r = a\,\mathrm{sh}\,\chi$ (χ меняется здесь от 0 до ∞):

$$dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\,\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\right]. \tag{407}$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2\,\mathrm{sh}^2\,\chi$ и при увеличении χ возрастает неограниченно. Объем пространства – бесконечен.

36 Закрытая изотропная модель

Наиболее удобна – «сопутсвующая» СО, движущаяся в каждой точке с веществом. СО – сама материя. В виду полной эквивалентности всех направлений – $g_{0\alpha} = 0$. $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$. Компонента g_{00} – функция только от x^0, поэтому всегда можно выбрать временную координату так, чтобы $g_{00} = 1$:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2. \tag{408}$$

t – синхронное собственное время в каждой точке пространства.

В закрытом пространстве (с положительной кривизной) радиус кривизны a зависит от времени:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\right] \tag{409}$$

Функция $a(t)$ определяется уравнениями Эйнштейна. Для их решения введем величину η:

$$c\,dt = a\,d\eta. \tag{410}$$

Тогда

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\right]. \tag{411}$$

Вычислим компоненты R_{ik} (координатами x^0, x^1, x^2, x^3 являются $\eta, \chi, \theta, \varphi$). Компоненты метрического тензора:

$$g_{00} = a^2,\ g_{11} = -a^2,\ g_{22} = -a^2\sin^2\chi,\ g_{33} = -a^2\sin^2\chi\sin^2\theta$$

Величины Γ^i_{kl}:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a},\ \Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{a'}{a^3}g_{\alpha\beta},\ \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{a'}{a}\delta^\alpha_\beta,\ \Gamma^0_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{00} = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по η (компоненты $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ нет надобности вычислять в явном виде). По общей формуле (159) получим

$$R^0_0 = \frac{3}{a^4}(a'^2 - aa'').$$

Из соображений симметрии, заранее очевидно, что $R_{0\alpha} = 0$. Для компонент R^β_α замечаем, что если выделить в них члены, содержащие только $g_{\alpha\beta}$ (т.е.

$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$), то эти члены должны составить компоненты трехмерного тензора P^{β}_{α} (395, 400):

$$R^{\beta}_{\alpha} = -P^{\beta}_{\alpha} + \ldots = -\frac{2}{a^2}\delta^{\beta}_{\alpha} + \ldots,$$

где многоточие подразумевает члены, содержащие также и g_{00}. В результате вычисления последних получим

$$R^{\beta}_{\alpha} = -\frac{1}{a^4}(2a^2 + a'^2 + aa'')\delta^{\beta}_{\alpha},$$

и затем

$$R = R^0_0 + R^{\alpha}_{\alpha} = -\frac{6}{a^3}(a + a'').$$

Поскольку в выбранной СО материя неподвижна, то $u^{\alpha} = 0$, $u^0 = 1/a$ и из (191) имеем $T^0_0 = \varepsilon$, где ε – плотность энергии материи. Подставляя полученные выражения в уравнение

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0,$$

получим

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(a^2 + a'^2). \tag{412}$$

Сюда входят две неизвестные функции ε и a, поэтому необходимо получить еще одно уравнение. Удобно выбрать уравнение $T^i_{0;i} = 0$ (одно из четырех уравнений (190) , содержащихся в уравнениях поля). Пользуясь (191) для тензора энергии-импульса, мы тем самым пренебрегаем всеми процессами диссипации энергии, приводящими к возрастанию энтропии. Можно считать энтропию постоянной. Воспользуемся термодинамическим соотношением $\mathcal{E} = T\,dS - p\,dV$. При постоянной энтропии имеем просто $\mathcal{E} = -p\,dV$ (p – давление). Вводя плотность энергии $\varepsilon = \mathcal{E}/V$ находим

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p)\frac{dV}{V}.$$

Объем пространства пропорционален кубу радиуса кривизны, поэтому $dV/V = 3da/a = 3d\ln a$, можем записать

$$-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = 3\,d\ln a,$$

или, интегрируя,

$$3\ln a = -\int\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \mathrm{const} \tag{413}$$

Если связь между ε и p известна (состояние материи), то уравнение (413) определяет ε как функцию от a. Тогда из (412) мы можем определить η в виде

$$\eta = \pm\int\frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}(\varepsilon a^2 - 1)}}. \tag{414}$$

Уравнения (413), (414) решают в общем виде задачу об определении метрики в изотропной закрытой модели.

Если материя распределена в пространстве в виде отдельных тел, считая их скорости малыми, можно просто положить $\varepsilon = \mu c^2$, давление «газа», состоящего из этих тел крайне мало, им можно пренебречь. Уравнения состояния «пылевидной» материи:

$$\varepsilon = \mu c^2, \quad p = 0.$$

Интегрирование в (413) дает $\mu a^3 = \mathrm{const}$ – сохранение суммы M масс тел (без учета их гравитационного взаимодействия) во всем пространстве. Поскольку объем пространства в замкнутой модели $V = 2\pi^2 a^3$, то $\mathrm{const} = M/2\pi^2$.

$$\mu a^3 = \frac{M}{2\pi^2} \tag{415}$$

Подставив (415) в (414) и произведя интегрирование, получим

$$a = a_0(1 - \cos\eta), \tag{416}$$

где постоянная

$$a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}.$$

Для связи t и η находим из (410)

$$t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta). \tag{417}$$

Уравнения (416) и (417) определяют зависимость в параметрическом виде $a(t)$. Функция возрастает от 0 при $t = 0 (\eta = 0)$ до максимального значения $a = 2a_0$, достигаемого при $t = \pi a_0/c (\eta = \pi)$, затем снова убывает до 0 при $t = 2\pi a_0/c (\eta = 2\pi)$. При $\eta \ll 1$, имеем приближенно $a = a_0\eta^2/2$, $t = a_0\eta^3/6c$, так что

$$a \approx \left(\frac{9a_0c^2}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}. \tag{418}$$

При этом плотность вещества

$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2} = 8 \cdot 10^5 t^2. \tag{419}$$

В этом пределе зависимость $\mu(t)$ носит универсальный характер и не зависит от a_0.

При $a \to 0$ плотность обращается в бесконечность, но при $\mu \to \infty$ давление тоже становится большим, поэтому можно рассматривать второй предельный случай состояния материи

$$p = \varepsilon/3.$$

Из формулы (413) получим

$$\varepsilon a^4 = \mathrm{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k} \tag{420}$$

(a_1 – новая постоянная), после чего уравнения (414) и (410) приводят к зависимости

$$a = a_1 \sin\eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(1-\cos\eta).$$

Так как это решение имеет смысл при очень больших значениях ε (малых a), то положим $\eta \ll 1$. Тогда $a \approx a_1\eta$, $t \approx a_1\eta^2/2c$, так что

$$a = \sqrt{2a_1ct}. \tag{421}$$

При этом

$$\frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi k t^2} = \frac{4.5\cdot 10^5}{t^2}. \tag{422}$$

Эта зависимость снова не содержит никаких параметров.

Таким образом у модели есть две особые точки ($a = 0$). Нет и физического смысла продолжать метрику за особую точку (при $t < 0$ величина $a(t)$ становится мнимой).

37 Открытая изотропная модель

Решение для открытой модели получается аналогично предыдущему. Вместо (409) имеем теперь

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right] \tag{423}$$

Вводим снова вместо t величину η, согласно $c\,dt = a\,d\eta$; тогда получаем

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right]. \tag{424}$$

Это выражение может быть формально получено из (411) заменой η, χ, a на $i\eta, i\chi, ia$, поэтому уравнения поля можно получить просто путем этой же замены из (412), (413). Уравнение (413) сохраняет при этом свой прежний вид:

$$3\ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \text{const}, \tag{425}$$

а вместо (412) имеем

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(a'^2 - a^2). \tag{426}$$

Соответственно этому находим вместо (414)

$$\eta = \pm\int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\varepsilon a^2 + 1}}. \tag{427}$$

Для пылевидной материи получаем отсюда

$$a = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta), \tag{428}$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_0. \tag{429}$$

Отметим, что преобразованием

$$r = Ae^\eta \operatorname{sh}\chi, \quad c\tau = Ae^\eta \operatorname{ch}\chi, \quad Ae^\eta = \sqrt{c^2\tau^2 - r^2}, \quad \operatorname{th}\chi = \frac{r}{c\tau}$$

выражение (424) приводится к «комфорно-галилееву» виду

$$ds^2 = f(r,\tau)[c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

В случае (428) получим (положив $A = a_0/2$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a_0}{2\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}}\right)^4 [c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

При больших значениях $\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}$ (чему соответствуют $\eta \gg 1$) эта метрика стремится к галилеевой, что естественно, ввиду стремления радиуса кривизны к бесконечности. В координатах r, θ, φ, τ материя не неподвижна, а ее распределение не однородно; при этом распределение и движение материи оказываются центрально-симметричными вокруг произвольной точке пространства, выбранной за начало координат r, θ, φ.

Формулы (428) определяют в параметрическом виде зависимость $a(t)$: радиус кривизны меняется монотонно от нуля при $(t = 0)(\eta = 0)$ до бесконечности при $(t = \infty)(\eta = \infty)$. Плотность материи убывает от бесконечного значения при $t = 0$ (при $\eta \ll 1$ закон этого убывания дается той же приближенной формулой (419), что и в закрытой модели).

Для больших плотностей решение (428), (429) неприменимо, и надо снова обратиться к случаю $p = \varepsilon/3$. При этом снова получится соотношение

$$\varepsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k}, \tag{430}$$

а для зависимости $a(t)$ находим

$$a = a_1 \operatorname{sh}\eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1),$$

при $\eta \ll 1$:

$$a = \sqrt{2a_1 ct}. \tag{431}$$

Таким образом открытая модель имеет всего одну особую точку (начало).

Плоское пространство Предельный случай – бесконечный радиус кривизны

$$ds^2 = c^2 dt^2 - b^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{432}$$

зависящий от времени множитель пространственной метрики не меняет, и простым преобразованием координат может быть приведен к единице.

$$\frac{8\pi k}{c^2}\varepsilon = \frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2, \quad 3\ln b = -\int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const}.$$

Для случая малых давлений находим

$$\mu b^3 = \text{const}, \quad b = \text{const} \cdot t^{2/3}. \tag{433}$$

При малых t надо опять рассматривать случай $p = \varepsilon/3$, при котором получаем

$$\varepsilon b^4 = \text{const}, \quad b = \text{const} \cdot \sqrt{t}. \tag{434}$$

Таким образом и в этом случае метрика имеет одну особую точку ($t = 0$).

Отметим, что все найденные изотропные решения существуют лишь при отличной от нуля плотности материи. В математическом отношении они являются случаем более общего класса решений, содержащего три физически различные произвольные функции пространственных координат.

38 Красное смещение

Основная черта всех моделей – нестационарность. Изменение радиуса кривизны приводит к изменению всех вообще расстояний между телами. Это видно из обстоятельства, что элемент пространственного расстояния dl пропорционален a. При увеличении a в таком пространстве тела «разбегаются». С точки зрения наблюдателя пространство будет выглядеть так, как если бы все тела двигались бы в радиальных направлениях, удаляясь от наблюдателя. Скорость разбегания (в данный момент t) пропорциональна расстоянию между телами. Это предсказание теории следует сопоставить с эффектом космологического красного смещения. Истолковав это смещение как доплеровское, мы приходим к заключению о разбегании галактик.

Рассмотрим распространение лучей света в изотропном пространстве. Уравнение распространения $ds = 0$. Точку, откуда выходит луч света, выберем в качестве начала координат χ, θ, φ. Из соображений симметрии очевидно, что лучи будут распространятся «радиально», т.е. вдоль линии $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Положим в (411) и (424) $d\theta = d\varphi = 0$, получим $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$. Приравнивая нулю, находим $d\eta = \pm d\chi$, или интегрируя:

$$\chi = \pm\eta + \text{const}. \tag{435}$$

Знак плюс соответствует лучу, распространяющемуся из начала координат, а минус – лучу, приходящему в начало координат. Это уравнение справедливо и для закрытой и для открытой модели. В открытой модели луч, вышедший из некоторой точки, неограниченно удаляется от нее. В закрытой модели, вышедший из исходной точки свет в конце концов может дойти до «противоположного полюса» пространства (χ меняется от 0 до π), затем луч начнет приближаться к исходной точке. Обходу луча «вокруг пространства» и возвращению в исходную точку соответствовало бы изменение χ от 0 до 2π. Из (435) следует, что η должно измениться на 2π, но это невозможно (за исключением случая выхода луча в момент $\eta = 0$). Таким образом луч не мог бы успеть возвратиться в исходную точку обойдя «вокруг пространства».

Лучу, приходящему в точку наблюдения соответствует уравнение (435) со знаком минус перед η. Если момент прихода луча в эту точку есть $t(\eta_0)$, то при $\eta = \eta_0$ должно быть $\chi = 0$, так что уравнение распространения таких лучей имеет вид

$$\chi = \eta_0 - \eta. \tag{436}$$

Отсюда видно, что к наблюдателю, находящемуся в точке $\chi = 0$ могут дойти к моменту времени $t(\eta_0)$ лучи, вышедшие из точек, находящихся на «расстояниях», не превышающих $\chi = \eta_0$. Этот результат, относящийся как к открытой, так и к закрытой моделям, весьма существенен. В каждый момент времени физическому наблюдению доступна лишь часть пространства, соответствующая $\chi \ll \eta$. «Видимая область» пространства представляет собой сечение четырехмерного пространства-времени световым конусом. Это сечение оказывается конечным для открытой и закрытой модели. В этом смысле разница между моделями оказывается менее глубокой, чем это могло бы показаться на первый взгляд.

Чем более удалена от наблюдателя наблюдаемая им в данный момент область пространства. тем более ранним моментам времени она соответствует. Представим себе сферическую поверхность, являющуюся геометрическим местом точек, из которых свет вышел в момент времени $t(\eta - \chi)$ и наблюдается в начале координат в момент $t(\eta)$. Площадь этой поверхности равна $4\pi a^2(\eta-\chi)\sin^2\chi$ (в закрытой модели) или $4\pi a^2(\eta-\chi)\operatorname{sh}^2\chi$ (в открытой модели). По мере удаления от наблюдателя площадь «видимой сферы» сначала возрастает от нуля, затем достигает максимума, после чего снова уменьшается, обращаясь в нуль при $\chi = \eta$ (где $a(\eta - \chi) = a(0) = 0$). Это значит, что сечение световым конусом не только конечно, но и замкнуто. Она как бы замыкается в точке «противоположной» наблюдателю. Ее можно увидеть при наблюдении в любом направлении в пространстве. В этой точке $\varepsilon \to \infty$, так что наблюдению доступна, в принципе, материя на всех ступенях ее эволюции.

Полное наблюдаемое количество материи равно в открытой модели

$$M_{obs} = 4\pi \int\limits_0^\eta \mu a^3 \operatorname{sh}^2\chi\, d\chi.$$

Подставив μa^3 из (429), получим

$$M_{obs} = \frac{3c^2 a_0}{2k}(\operatorname{sh}\eta \operatorname{ch}\eta - \eta). \tag{437}$$

Эта величина неограниченно возрастает при $\eta \to \infty$. В закрытой модели возрастание M_{obs} ограничено полной массой M, в этом случае получим

$$M_{obs} = \frac{M}{\pi}(\eta - \sin\eta\cos\eta). \tag{438}$$

По мере возрастания η от 0 до π эта величина возрастает от 0 до M, в дальнейшем же увеличение M_{obs} фиктивно и соответствует тому, что в «сжимающемся» мире удаленные тела наблюдались бы дважды (по свету, «обошедшему пространво» с двух сторон).

Рассмотрим изменение частоты света при его распространении в изотропном пространстве. Пусть в некоторой точке пространства происходят два события, разделенные промежутком времени $dt = a(\eta)\, d\eta/c$. Если в моменты этих событий отправляются световые сигналы, наблюдаемые в другой точке пространства, то между моментами их наблюдения пройдет промежуток времени тому же изменению $d\eta$ величины η, что и в точке отправления. Это следует из уравнения (435), согласно которому изменение величины η за время распространения луча света из одной точки в другую зависит только от разности координат χ этих точек. Но поскольку за время распространения сигнала радиус кривизны a изменится, то промежутки времени t между моментами отправления двух сигналов и моментами их наблюдения будут различными; отношение этих промежутков равно отношению соответствующих значений a. Отсюда следует, что периоды световых колебаний, измеренные в мировом времени t, меняются вдоль луча пропорционально a, таким образом вдоль распространения луча справедливо

$$\omega a = \text{const}. \tag{439}$$

Предположим, что в момент времени $t(\eta)$ мы наблюдаем свет, испущенный источником на расстоянии, соответствующему χ. Момент его испускания согласно (435) $t(\eta - \chi)$. Если ω_0 частота света в момент его испускания, то наблюдаемая частота

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \tag{440}$$

При монотонно возрастающей $a(\eta)$ имеем $\omega < \omega_0$, т.е. происходит уменьшение частоты света. Это явление *красного смещения* представляет собой, по существу, эффект Доплера от взаимного «разбегания» галактик.

Величина красного смещения ω/ω_0 зависит от расстояния, на котором находится источник. При не слишком больших расстояниях можно разложить $a(\eta - \chi)$ в ряд по степеням χ:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{a'(\eta)}{a(\eta)},$$

штрих означает дифференцирование по η. Произведение $\chi a(\eta)$ является не чем иным, как расстоянием l до наблюдаемого источника. «Радиальный» элемент длины $dl = a\, d\chi$; при интегрировании этого соотношения возникает вопрос, каким способом физического наблюдения определяется расстояние, в зависимости от этого надо брать значения a в разных точках пути интегрирования в разные моменты времени. Но при «малых расстояниях» можно пренебречь изменением a вдоль пути интегрирования и писать просто $l = a\chi$. В результате находим для относительной величины изменения частоты:

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{H}{c} l, \tag{441}$$

где введено обозначение

$$H = c\frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{442}$$

для так называемой *постоянной Хаббла.* Эта величина не зависит при заданном моменте от l. Если рассматривать красное смещение как результат эффекта Доплера, можно определить скорости v галактик, с которыми они удаляются от наблюдателя. Написав $z = v/c$ и сравнив с (441), находим

$$v = Hl \tag{443}$$

Принятое в настоящее время значение[16]

$$H \approx 70.1 \pm 1.3 \text{ км/с} \cdot \text{Мпк}^{-1}, \quad \frac{1}{H} \tag{444}$$

Подставляя в уравнение (426) $\varepsilon = \mu c^2$ и $H = ca'/a^2$, получим для открытой модели

$$\frac{c^2}{a^2} = H^2 - \frac{8\pi k}{3}\mu. \tag{445}$$

Комбинируя это уравнение с равенством

$$H = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{a_0(\operatorname{ch} \eta - 1)^2} = \frac{c}{a} \operatorname{cth} \frac{\eta}{2},$$

получим

$$\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} = H\sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \tag{446}$$

Для закрытой модели аналогично

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi k}{3}\mu - H^2, \tag{447}$$

$$\cos \frac{\eta}{2} = H\sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \tag{448}$$

Сравнивая (445) и (447), мы видим, что кривизна пространства отрицательна или положительна, смотря по тому, отрицательна или положительна разность $8\pi k\mu/3 - H^2$. Эта разность обращается при $\mu = \mu_k$, где μ_k – *критическая плотность*:

$$\mu_k = \frac{3H^2}{8\pi k}. \tag{449}$$

С учетом значения постоянной Хаббла получим $\mu_k \approx 1 \cdot 10^{-29}$ г/см^3.

[16]Данные 2008 г