

Санкт-Петербургский государственный университет

В.В. Витязев

**СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ  
АНАЛИЗ РАВНОМЕРНЫХ  
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Учебное пособие

Издательство С.-Петербургского университета

2001

ББК 22.6  
В54

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Гаген-Торн  
(С.-Петербург. гос. ун-т),  
д-р физ.-мат. наук, проф. К.В. Холшевников  
(С.-Петербург. гос. ун-т)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
С.-Петербургского государственного университета*

**Витязев В.В.**

В54      Спектрально-корреляционный анализ равномерных  
временных рядов: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-  
Петербург. ун-та, 2001. – 48 с.

Учебное пособие посвящено практическим аспектам спектрального анализа равномерных временных рядов. Рассмотрены свойства периодограммы полигармонических функций и статистические критерии выделения сигнала из шума. Приводится программа быстрого преобразования Фурье и излагаются приемы его использования при вычислении периодограмм и корреляционных функций. Изложены алгоритмы спектрально-корреляционного анализа одного ряда и взаимного анализа двух временных рядов. Примеры применения этих алгоритмов к временным рядам искусственного и астрономического происхождения иллюстрируются графически. Даны вопросы и упражнения.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и научных сотрудников, занимающихся обработкой экспериментальных данных.

**ББК 22.6**

© В.В.Витязев, 2001  
© Издательство  
С.-Петербургского  
университета, 2001



## Содержание

<b>Основные определения</b>	<b>4</b>
Периодограмма и коррелограмма . . . . .	6
Периодограмма гармонического колебания . . . . .	8
Периодограмма дискретного белого шума . . . . .	10
Сглаживание периодограммы . . . . .	12
Взаимные характеристики двух временных рядов . . . . .	14
<b>Вычислительные процедуры</b>	<b>19</b>
Дискретное преобразование Фурье . . . . .	19
Быстрое преобразование Фурье . . . . .	21
Дополнение ряда нулями . . . . .	24
Вычисление коррелограмм с помощью БПФ . . . . .	25
<b>Алгоритмы</b>	<b>26</b>
Спектрально-Корреляционный Анализ Временных Рядов ( СКАВРя) . . . . .	26
Взаимный Анализ Временных Рядов (ВАВРя) . . . . .	32
Упражнения . . . . .	40
<b>Приложение</b>	<b>42</b>
Вариации продолжительности суток . . . . .	43
Движение полюса в теле Земли . . . . .	45
<b>Литература</b>	<b>47</b>

## Основные определения

Спектральный анализ временных рядов – это один из методов обработки результатов экспериментов и, в частности, данных астрономических наблюдений. Теория спектрального анализа основана на равносильности представления функций во временной и частотной областях с помощью преобразований Фурье. Это обстоятельство позволяет построить эффективные методы получения характеристик исследуемого сигнала в частотной области в тех случаях, когда во временной области это сделать трудно. В настоящее время методы спектрального анализа временных рядов широко применяются в различных областях знаний: в физике, астрономии, биологии, технике, экономике, медицине и т. д.

Сделаем краткий обзор основных положений, лежащих в основе теории и практики *спектрального анализа временных рядов*.

Обычно под *временным рядом* понимают упорядоченную во времени совокупность измерений определенной количественной характеристики какого-либо процесса. По способу записи результатов измерений временные ряды бывают непрерывными, дискретными, *равномерными и неравномерными*. Общим признаком временных рядов, легко распознаваемым при их простом обзоре, является наличие в них крупномасштабных изменений (тренд, периодические колебания) и мелкомасштабных компонентов, в структуре которых, как правило, отсутствуют какие-либо правильные изменения (рис. 1).

Основной задачей анализа временных рядов является интерпретация наблюдательных данных с помощью некоторых моделей. В качестве моделей выбирают функции, свойства которых хорошо известны. Отмеченное выше наличие во временных рядах правильных и неправильных изменений оправдывает широко распространенную модель *"сигнал + шум"*. В рамках этой модели *"сигнал"* интерпретируется с помощью детерминированных функций: периодических, почти периодических (полигармонических) и непериодических, а *"шум"* – с помощью особого вида случайных функций – так называемого *белого шума*. В тех случаях, когда четкая грань между *"сигналом"* и *"шумом"* размыта, в качестве моделей временных рядов используются *случайные процессы*.

Теоретическим фундаментом спектрального анализа временных рядов является *теорема Винера–Хинчина*, которая устанавливает

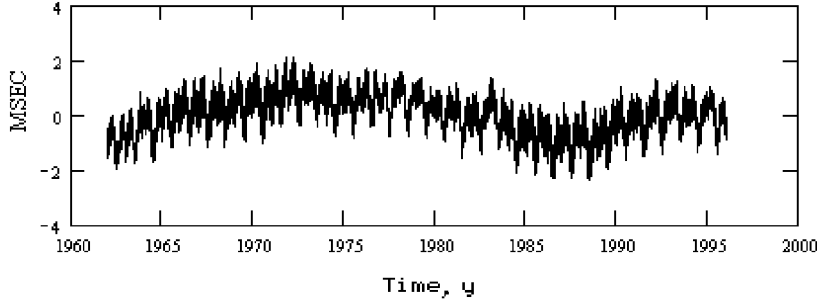


Рис. 1: Временной ряд вариаций периода вращения Земли с 1962 по 1996 г. по данным Международной службы вращения Земли (IERS).

связь между двумя характеристиками случайного процесса – плотностью спектра мощности и корреляционной функцией. Сама теорема формулируется следующим образом:

Если центрированный стационарный случайный процесс задан на промежутке  $0 \leq t \leq T$  множеством реализаций

$$X(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^N,$$

то его корреляционная функция

$$K(t, t') = E[x_j(t)x_j(t')] = C(\tau), \quad \tau = t - t', \quad (1)$$

и плотность спектра мощности (в дальнейшем спектр мощности)

$$S(\omega) = E \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x_j(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right) \quad (2)$$

взаимно обратимы по Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3)$$

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4)$$

В формулах (1) и (2) символом  $E$  обозначена операция нахождения математического ожидания. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в монографии *Дженкинса и Ваттса (1972)*.

Приведем два примера.

1. Для случайной функции  $X(t) = \{A \cos(\omega t + \phi_j)\}_{j=1}^N$ , у которой фазы равномерно распределены в интервале  $[0, 2\pi]$ , корреляционная функция и спектр мощности задаются выражениями

$$C(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau), \quad (5)$$

$$S(\omega) = \frac{A^2}{4} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)], \quad (6)$$

где  $\delta(\omega)$  – дельта-функция Дирака.

2. Для белого шума соответственно имеем

$$C(\tau) = \delta(\tau), \quad (7)$$

$$S(\omega) = \text{const}. \quad (8)$$

## Периодограмма и коррелограмма

В практическом анализе из-за неполноты имеющейся информации мы имеем дело не со строгими характеристиками (спектр мощности, корреляционная функция), а лишь с их оценками (*периодограмма, коррелограмма* соответственно).

В настоящее время теория и практика спектрально-корреляционного анализа с исчерпывающей полнотой развиты для равномерных стационарных временных рядов, т. е. для значений некоторой функции, следующих друг за другом с постоянным временным шагом и не меняющих своих характеристик на интервале измерений. Хотя на практике не всегда удается выдержать постоянство временного шага, тем не менее из-за сравнительной простоты используемых математических методов анализ равномерных рядов играет роль своеобразного стандарта. Принципиальным здесь является и свойство стационарности. В тех случаях, когда параметры детерминированного и шумового компонентов ряда меняются

во времени, приходится применять более сложные методы их исследования.

Предположим, что центрированный эргодический случайный процесс  $x = x(t)$  задан конечным набором вещественных значений  $x_k = x(t_k)$  на равномерной сетке  $t_k = \Delta t k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , где постоянная величина  $\Delta t$  является шагом выборки. В этом случае в качестве оценки спектра мощности обычно берут *периодограмму Шустера*, определенную следующим образом:

$$D(\nu) = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi\nu t_k} \right|^2. \quad (9)$$

Заметим, что при переходе от формулы (2) к формуле (9) мы заменили круговые частоты  $\omega$  обычными частотами  $\nu$ , связанными между собой очевидным соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ . Вычисления по формуле (9) можно производить для любого значения частоты  $\nu$ , однако особый интерес представляют отсчеты периодограммы, отнесенные к так называемой *фундаментальной системе частот (ФСЧ)*:

$$\nu_j = \frac{2\nu_c}{N} j = \frac{j}{N\Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, N/2, \quad (10)$$

где  $\nu_c$  – частота Найквиста, определенная равенством

$$\nu_c = \frac{1}{2\Delta t}. \quad (11)$$

В формуле (10) мы предположили, что  $N$  – четное число. Для нечетных  $N$  конечное значение индекса  $j$  следует заменить числом  $(N + 1)/2$ . С учетом этого замечания в дальнейшем мы везде будем считать, что  $N$  – четное число.

Для оценки корреляционной функции вводят *коррелограмму*

$$c_m \equiv c(\Delta t m) = \frac{1}{N - m} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_k x_{k+m}, \quad (12)$$

$$m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Отметим, что периодограмма и коррелограмма связаны между собой соотношением

$$D(\nu) = \frac{1}{N} \left[ 2\text{Re} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{c}_m e^{-i2\pi\nu m \Delta t} - \bar{c}_0 \right], \quad (13)$$



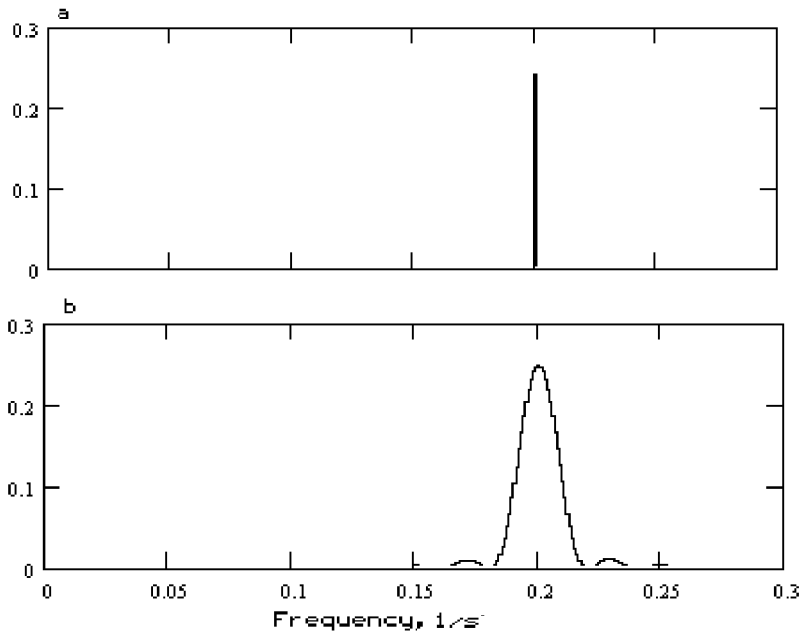


Рис. 2: Различия между спектром мощности и периодограммой. *a* – спектр мощности косинусоиды; *b* – периодограмма косинусоиды.

где смещенная оценка корреляционной функции  $\bar{c}_m$  определяется следующим образом:

$$\bar{c}_m = \frac{N-m}{N} c_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_k x_{k+m}, \quad (14)$$

$$m = 0, 1, \dots, N-1.$$

### Периодограмма гармонического колебания

Перечислим сначала свойства периодограммы гармонической функции

$$x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t + \phi). \quad (15)$$

Спектр мощности этой функции представляет собой две бесконечно узкие спектральные линии на частотах  $\nu = \pm\nu_0$ :

$$S(\nu) = \frac{A^2}{4} [\delta(\nu + \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)]. \quad (16)$$

Можно показать, что в случае задания функции (15) на дискретном множестве точек с постоянным шагом  $\Delta t$  ее периодограмма будет иметь следующее представление:

$$D(\nu) \simeq \frac{A^2}{4} [W(\nu + \nu_0) + W(\nu - \nu_0)], \quad (17)$$

где *спектральное окно*  $W(\nu)$  задается выражением

$$W(\nu) = \frac{\sin^2 N\pi\nu\Delta t}{N^2 \sin^2 \pi\nu\Delta t}. \quad (18)$$

Сопоставление спектра мощности и периодограммы косинусоидальной функции показано на рис. 2.

Отметим некоторые свойства спектрального окна. Во-первых, эта функция периодична с основным периодом  $2\nu_c$ , где  $\nu_c$  – частота Найквиста, задаваемая выражением (11). Из периодичности окна следует, что периодограмма дискретного ряда является периодической функцией с тем же основным периодом. По этой причине значения периодограммы имеет смысл вычислять только на основном периоде  $[-\nu_c, \nu_c]$ . К тому же периодограмма вещественной функции обладает свойством четности, поэтому обычно значения периодограммы вычисляют только в интервале  $[0, \nu_c]$ .

Можно показать, что ширина главного лепестка спектрального окна (18) обратно пропорциональна длине ряда

$$\Delta\nu = \frac{2}{N\Delta t}. \quad (19)$$

Следует иметь в виду, что на равномерной сетке с постоянным шагом  $\Delta t$  имеет место соотношение

$$\cos(2\pi\nu_0 \Delta t + \phi) = \cos[2\pi(\nu_0 + 2p\nu_c) \Delta t + \phi], \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

в силу которого периодограмма в основном диапазоне частот будет иметь один и тот же пик на частоте  $\nu_0$  для всех гармонических колебаний с частотами  $\nu_0 + 2p\nu_c$ . В специальной литературе явление неразличимости указанных частот называют *элайзингом* (от английского слова *alias* – кличка преступника).

Таким образом, ограниченная продолжительность ряда размывает бесконечно узкие линии теоретического спектра мощности и приводит к потере разрешающей способности. Так, две спектральные линии, соответствующие двум гармоническим колебаниям с частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , могут быть полностью разрешены, если выполняется соотношение

$$|\nu_1 - \nu_2| \geq \Delta\nu.$$

Кроме того, из-за дискретности задания ряда с постоянным шагом выборки диапазон спектральных оценок ограничивается частотой Найквиста. Неразличимость частот является также прямым следствием равномерности выборки.

## Периодограмма дискретного белого шума

Будем теперь считать, что временной ряд

$$x_k = x(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (20)$$

представляет собой выборку некоррелированных значений случайной величины, распределенной по нормальному закону, с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (дискретный белый шум).

Вычислим для такого ряда периодограмму

$$D_j = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i \frac{2\pi}{N} k j} \right|^2, \quad (21)$$

отсчеты которой соответствуют фундаментальной системе частот (10), и введем теперь в рассмотрение нормированную периодограмму  $d_j = N D_j$ .

**Теорема (Шустер).** *Отсчеты  $d_j$  нормированной периодограммы представляют собой случайную величину с плотностью распределения*

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & j = 1, 2, \dots, N/2 - 1, \\ e^{-x/2}/\sqrt{2\pi x}, & j = 0; \quad j = N/2, \quad 0 < x < \infty. \end{cases} \quad (22)$$

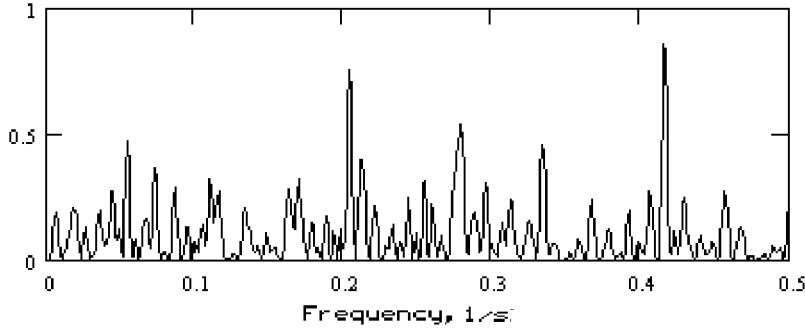


Рис. 3: *Периодограмма шума.*

Эта теорема является основой построения критериев выделения сигнала из шума. Шумовой компонент, имеющийся в измерениях, проявляет себя в периодограмме в виде многочисленных пиков (рис. 3). При сильной зашумленности ряда возникают ситуации, когда пики детерминированного компонента очень трудно отличить от пиков шумовой составляющей. В таких случаях применяют статистические критерии разделения сигнального и шумового компонентов.

В общем случае, когда центрированный дискретный белый шум имеет не единичную, а произвольную дисперсию  $\sigma_0^2$ , критерий распознавания сигнала в шуме используют следующим образом. Задают положительное число  $q \ll 1$ , которое определяет вероятность (уровень значимости) очень редкого события – появления сильного пика в периодограмме белого шума. При этом имеют место две ситуации.

1. Частота периодического компонента заранее не известна. В этом случае вполне естественно предположить, что наибольший отсчет периодограммы  $D_{\max}$  соответствует искомому периодическому компоненту. Если выполняется неравенство

$$D_{\max} \geq \frac{\sigma_0^2}{N} X_1, \quad (23)$$

где

$$X_1 = -\ln(1 - (1 - q)^{\frac{2}{N-2}}), \quad (24)$$

то с вероятностью  $p = 1 - q$  принимается утверждение, что отсчет  $D_{\max}$  принадлежит сигналу, а не шуму.

2. Если частота искомого сигнала заранее известна и соответствует отсчету периодограммы  $D_l$ , то при выполнении неравенства

$$D_l \geq \frac{\sigma_0^2}{N} X_2, \quad (25)$$

где

$$X_2 = -\ln q, \quad (26)$$

с вероятностью  $p = 1 - q$  полагают, что отсчет  $D_l$  тоже принадлежит сигналу, а не шуму.

Следует отметить, что теорема об экспоненциальном распределении отсчетов периодограммы центрированного дискретного белого шума справедлива для того случая, когда дисперсия ряда известна точно. На практике ее приходится оценивать по формуле

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k)^2. \quad (27)$$

В этом случае предельные отсчеты (24) следует заменить величинами, приведенными в табл. 1 (*Теребиж, 1992*). Следует, однако, заметить, что при  $N \geq 100$  табличные значения весьма мало отличаются от величин, получаемых по формуле (24).

## Сглаживание периодограммы

Из теоремы Шустера следует, что периодограмма как оценка спектра мощности дискретного белого шума не удовлетворяет критерию эффективности. Этим объясняется изрезанность периодограммы, не уменьшающаяся с увеличением длины ряда. Тем не менее, осреднение периодограммы дискретного белого шума в узких диапазонах частот приводит к получению вполне разумной гладкой оценки. На этом свойстве основан метод сглаживания периодограммы, известный как метод Блэкмана-Тьюки (*Блэкман и Тьюки, 1959*).

Таблица 1: *Отсчеты нормированной периодограммы центрированного дискретного белого шума в зависимости от  $N$  и  $q$ .*

$N$	$q = 0.05$	$q = 0.01$	$N$	$q = 0.05$	$q = 0.01$
6	1.950	1.990	142	6.967	8.428
8	2.613	2.827	162	7.122	8.601
10	3.072	3.457	182	7.258	8.750
12	3.419	3.943	202	7.378	8.882
14	3.697	4.331	302	7.832	9.372
16	3.928	4.651	402	8.147	9.707
18	4.125	4.921	502	8.389	9.960
20	4.297	5.154	602	8.584	10.164
22	4.450	5.358	702	8.748	10.334
32	5.019	6.103	802	8.889	10.480
42	5.408	6.594	1002	9.123	10.721
52	5.701	6.955	1202	9.313	10.916
62	5.935	7.237	1402	9.473	11.079
82	6.295	7.663	1602	9.612	11.220
102	6.567	7.977	1802	9.733	11.344
122	6.758	8.225	2002	9.842	11.454

В этом методе на первом шаге вычисляются  $N^* \leq N$  значений коррелограммы

$$\bar{c}_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_k x_{k+m}, \quad m = 0, 1, \dots, N^* - 1. \quad (28)$$

Для получения сглаженной периодограммы коррелограмму умножают на некоторую функцию, называемую *корреляционным окном*. В практике спектрального анализа получила распространение весовая функция

$$W_m = (1 - 2a) + 2a \cos \frac{\pi m}{N^*}, \quad (29)$$

получившая название "окно Тьюки". Эта функция содержит два управляющих параметра  $0 \leq a \leq 0.25$  и  $N^* \leq N$ , смысл которых будет объяснен ниже. Взвешенная коррелограмма вычисляется сле-

дующим образом:

$$\tilde{c}_m = \bar{c}_m W_m, \quad m = 0, 1, \dots, N^* - 1. \quad (30)$$

Теперь вычисление сглаженной периодограммы производят по формуле

$$\tilde{D}_j = \frac{1}{N^*} \left[ 2\text{Re} \sum_{m=0}^{N^*-1} \tilde{c}_m e^{-i \frac{2\pi}{N^*} j m} - \tilde{c}_0 \right]. \quad (31)$$

Значения сглаженной периодограммы относятся к системе частот

$$\nu_j = \frac{2\nu_c}{N^*} j = \frac{j}{N^* \Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, N^*/2, \quad (32)$$

которая, как это видно из сравнения с (10), уже не является фундаментальной системой частот. В соответствии с замечанием, сделанным на с. 7, в формуле (32) предельное значение индекса  $j$  назначается равным  $(N^* + 1)/2$ , если  $N^*$  – число нечетное.

Величина параметра  $N^*$  управляет степенью сглаживания периодограммы. Если исходный временной ряд представляет собой широкополосный шум, то рекомендуемое оптимальное сглаживание происходит при  $N^* = 0.1N$ . Для временного ряда, содержащего гармонические компоненты и шум, значение этого параметра выбирается из диапазона  $0.1N \leq N^* \leq N$ . С помощью второго параметра окна Тьюки производят изменение контура спектральной линии гармонических компонентов исходного ряда с целью устранения боковых лепестков. При этом происходит расширение контура линии и уменьшение ее интенсивности. Рекомендуемые значения таковы:  $a = 0.23$  – окно Хэмминга,  $a = 0.25$  – так называемое окно "Хэннинг".

Выбор значений параметров  $N^*$  и  $a$  производится из расчета удовлетворения двум противоречивым требованиям: получению статистически состоятельной периодограммы и достижению разумной разрешающей способности. Обычно этот компромисс достигается на основе физических соображений или априорной информации.

## Взаимные характеристики двух временных рядов

При изучении общих характеристик двух временных рядов используются понятия *взаимного спектра мощности* и *взаимной корреляционной функции* (Дженкинс и Ваттс, 1972). В области оценок

этим понятиям соответствуют *взаимная периодограмма* и *взаимная коррелограмма*.

Пусть имеются две дискретные центрированные последовательности действительных чисел

$$x_k = x(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (33)$$

$$y_k = y(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (34)$$

Обозначая символом  $*$  операцию комплексного сопряжения, определим взаимную периодограмму рядов  $x_k$  и  $y_k$  с помощью соотношения

$$D_{xy}(\nu) = \frac{1}{N^2} X^*(\nu) Y(\nu), \quad (35)$$

где

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi\nu t_k}, \quad (36)$$

$$Y(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-i2\pi\nu t_k}. \quad (37)$$

В свою очередь взаимная коррелограмма наших рядов (смещенная оценка) определяется следующим образом:

$$\bar{c}_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-m-1} x_k y_{k+m}, \quad (38)$$

$$m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

При этом имеет место свойство

$$\bar{c}_{xy}[-m] = \bar{c}_{yx}[m]. \quad (39)$$

Взаимные периодограмма и коррелограмма связаны между собой соотношением

$$D_{xy}(\nu) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} \bar{c}_{xy}[m] e^{-i2\pi\nu m \Delta t} + \sum_{m=0}^{N-1} \bar{c}_{yx}[m] e^{i2\pi\nu m \Delta t} - \bar{c}_0 \right]. \quad (40)$$

Очевидно, что в том случае, когда наши два ряда  $x_k$  и  $y_k$  тождественны, выражения (35) и (38) переходят в (9) и (14), т. е. взаимные



периодограмма и коррелограмма соответствуют обычным понятиям периодограммы и коррелограммы. При этом выражение (40) переходит в (13).

В отличие от обычной периодограммы взаимная периодограмма представляет собой комплекснозначную функцию

$$D_{xy}(\nu) = P_{xy}(\nu) - iQ_{xy}(\nu), \quad (41)$$

где

$$P_{xy}(\nu) = \operatorname{Re} X(\nu) \operatorname{Re} Y(\nu) + \operatorname{Im} X(\nu) \operatorname{Im} Y(\nu), \quad (42)$$

$$Q_{xy}(\nu) = \operatorname{Re} X(\nu) \operatorname{Im} Y(\nu) - \operatorname{Re} Y(\nu) \operatorname{Im} X(\nu). \quad (43)$$

Соотношение (42) определяется суммой произведений одноименных компонентов, т. е. произведениями действительной на действительную и мнимой на мнимую части функций  $X(\nu)$  и  $Y(\nu)$ , в то время как соотношение (43) определяется суммой произведений разноименных компонентов, т. е. произведениями действительной на мнимую часть тех же функций. Поскольку на комплексной плоскости одноименные компоненты направлены вдоль одной оси, а разноименные компоненты направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей, функцию  $P_{xy}(\nu)$  называют *коспектром*, а функцию  $Q_{xy}(\nu)$  — *квадратурным спектром*.

Для получения конкретной информации об общих свойствах исследуемых рядов вводятся в рассмотрение *модуль взаимной периодограммы*

$$A_{xy}(\nu) = \sqrt{P_{xy}^2(\nu) + Q_{xy}^2(\nu)} \quad (44)$$

и *фазовый спектр*

$$\Phi_{xy}(\nu) = -\operatorname{arctg} \frac{Q_{xy}(\nu)}{P_{xy}(\nu)}. \quad (45)$$

Модуль взаимной периодограммы используется для обнаружения частот общих гармоник, а фазовый спектр показывает разность фаз общих гармоник на данной частоте.

Рассмотрим для примера случай, когда два исследуемых ряда являются гармоническими функциями

$$x_k = A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k + \phi_1), \quad (46)$$

$$y_k = A_2 \cos(2\pi\nu_2 t_k + \phi_2), \quad (47)$$

$$t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Нетрудно показать, что при  $N \rightarrow \infty$  взаимная коррелограмма функций (46) и (47) равна нулю в том случае, когда  $\nu_1 \neq \nu_2$  независимо от фаз этих гармоник. Иначе говоря, две гармонические функции с различными частотами некоррелированы. Предположим теперь, что выполняются соотношения  $\nu_1 = \nu_2$  и  $\phi_1 \neq \phi_2$ . В этом случае

$$\bar{c}_{xy}[m] = \frac{A_1 A_2}{2} \cos(2\pi\nu_1 \Delta t m + \Delta\phi), \quad (48)$$

где

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1. \quad (49)$$

На основании равенства (40) для значения взаимной периодограммы на частоте  $\nu_1 = \nu_2$  получаем

$$D_{xy}(\nu_1) = \frac{A_1 A_2}{4} e^{i\Delta\phi}, \quad (50)$$

откуда для значений модуля взаимной периодограммы и фазового спектра на этой же частоте имеем

$$A_{xy}(\nu_1) = \frac{A_1 A_2}{4}, \quad (51)$$

$$\Phi_{xy}(\nu_1) = \Delta\phi. \quad (52)$$

Теперь предположим, что наши временные ряды (36) и (37) представляют собой выборки центрированных некоррелированных случайных величин, распределенных по нормальному закону с единичной дисперсией. Используя формулу (35), вычислим взаимную коррелограмму  $D_{xy}(\nu_j)$  двух наших дискретных белых шумов на множестве фундаментальных частот (10), после чего найдем значения квадрата нормированного модуля взаимной периодограммы

$$a_{xy}(\nu_j) = N^2 A_{xy}^2(\nu_j). \quad (53)$$

**Теорема.** Числа  $a_{xy}(\nu_j)$  представляют собой значения случайной величины с плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 2K_0(2\sqrt{x}), & j = 1, 2, \dots, N/2 - 1, \\ K_0(\sqrt{x})/\pi\sqrt{x}, & j = 0; \quad j = N/2, \quad 0 < x < \infty, \end{cases} \quad (54)$$

где  $K_0(z)$  – функция Бесселя мнимого аргумента:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \exp(-t - z^2/4t) t^{-\nu-1} dt, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (55)$$

Эта теорема подобно теореме Шустера (54) для обычной периодограммы позволяет построить статистические критерии обнаружения общих гармоник двух исследуемых рядов с дисперсиями  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$ . Новые критерии вполне аналогичны тем, которые используются при выделении сигнального компонента периодограммы. Действительно, зададим уровень значимости  $q \ll 1$ , который определяет вероятность очень редкого события – появления сильного пика среди отсчетов  $a_{xy}(\nu_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ . При этом имеют место две ситуации.

1. Частота, на которой два ряда имеют общий гармонический компонент, заранее не известна. В этом случае принимается, что число  $a = \text{Sup}\{a_{xy}(\nu_j)\}$  соответствует искомому общему периодическому компоненту. Если выполняется неравенство

$$a \geq \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{N^2} Z_1, \quad (56)$$

где величина  $Z_1$  является корнем уравнения

$$1 - \left(1 - 2\sqrt{Z_1} K_1(2\sqrt{Z_1})\right)^{N/2-1} = q, \quad (57)$$

то с вероятностью  $p = 1 - q$  принимается утверждение, что отсчет  $a_{\max}$  порождается общим гармоническим компонентом обоих рядов, а не генерируется шумами.

2. Если частота искомого общего сигнала заранее известна и среди множества значений  $\{a_{xy}(\nu_j)\}$  ей соответствует отсчет  $a_l$ , то при выполнении неравенства

$$a_l \geq \frac{\sigma_x^2 \sigma_x^2}{N^2} Z_2, \quad (58)$$

где величина  $Z_2$  является корнем уравнения

$$2\sqrt{Z_2} K_1(2\sqrt{Z_2}) = q, \quad (59)$$

с вероятностью  $p = 1 - q$  полагают, что отсчет  $a_l$  тоже порождается общими сигналами, а не шумами.

Отметим, что порог обнаружения сигнала  $Z_2$  не зависит от длины ряда. Для наиболее часто применяющихся уровней значимости  $q = 0.001$ ;  $q = 0.01$  и  $q = 0.05$  соответствующие значения порога  $Z_2$  равны 15.5; 8.2 и 4.0. В противоположность этому значения порога  $Z_1$  зависят как от принятого уровня значимости, так и от длины ряда. В табл. 2 приведены значения порога  $Z_1$  как функции числа точек ряда при  $q = 0.05$  и  $q = 0.01$ .

Подобно обычной периодограмме взаимную периодограмму можно сгладить. Для этого нужно воспользоваться формулой (40), подставив в нее взвешенные значения взаимной коррелограммы

$$\tilde{c}_{xy}[m] = \bar{c}_{xy}[m] W_m, \quad m = 0, 1, \dots, N^* - 1, \quad (60)$$

где значения коэффициентов  $W_m$  определяются формулой (29).

## Вычислительные процедуры

### Дискретное преобразование Фурье

Для получения численных значений спектральных и корреляционных характеристик равномерных временных рядов пользуются

Таблица 2: Значения  $Z_1$  в зависимости от  $N$  и  $q$ .

$N$	$q = 0.05$	$q = 0.01$	$N$	$q = 0.05$	$q = 0.01$
50	13.8	20.8	600	25.4	34.6
100	16.7	24.4	700	26.2	35.5
150	18.6	26.2	800	26.9	36.3
200	19.9	28.1	900	27.5	36.9
250	21.0	29.2	1000	28.2	37.5
300	21.8	30.5	1200	29.2	39.0
350	22.6	31.3	1400	30.1	40.0
400	23.3	32.0	1600	30.8	40.8
450	23.9	32.6	1800	31.5	41.6
500	24.4	33.2	2000	32.1	42.2

дискретными преобразованиями Фурье (ДФТ), которые мы введем следующим образом. Пусть имеются две последовательности комплексных величин

$$\begin{aligned} \{x_k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ \{X_j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Назовем *прямым дискретным преобразованием Фурье (ДФТ)* следующее выражение:

$$\begin{aligned} X_j = DFT_j \{x_k\}_{k=0}^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i \frac{2\pi}{N} kj}, \quad (61) \\ j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

При этом *обратное дискретное преобразование (ДФТ<sup>-1</sup>)* Фурье вводится посредством соотношения

$$\begin{aligned} x_k = DFT_k^{-1} \{X_j\}_{j=0}^{N-1} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_j e^{i \frac{2\pi}{N} kj}, \quad (62) \\ k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Мы не будем останавливаться здесь на свойствах дискретных преобразований Фурье, поскольку они хорошо описаны в многочисленных руководствах (*Дженкинс Г., Ваттс Д., 1972; Отнес и Эноксон, 1982 и др.*). Отметим только то, что с помощью дискретного преобразования Фурье вычисление периодограмм на фундаментальной системе частот (10) можно производить по следующим формулам

$$D_j = \frac{1}{N^2} |DFT_j \{x_k\}_{k=0}^{N-1}|^2, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} D_{xy}[j] = \frac{1}{N^2} [DFT_j^* \{x_k\}_{k=0}^{N-1}] [DFT_j \{y_k\}_{k=0}^{N-1}], \quad (64) \\ j = 0, 1, 2, \dots, N/2. \end{aligned}$$

## Быстрое преобразование Фурье

Для вычисления преобразований (61) и (62) требуется выполнить  $N^2$  основных операций. Это обстоятельство делает вычисление дискретного преобразования Фурье очень трудоемкой операцией, и поэтому в прошлом старались строить алгоритмы анализа данных таким образом, чтобы по возможности избежать вычисления ДПФ. Положение существенно изменилось после изобретения специфических вычислительных процедур (*быстрых преобразований Фурье, БПФ или FFT*), которые позволили увеличить скорость вычислений в десятки и сотни раз. Один из самых распространенных алгоритмов быстрого преобразования Фурье (*Кули и Тьюки, 1965*) предполагает, что число точек ряда  $N$  представимо следующим образом:

$$N = 2^p, \quad (65)$$

где  $p$  – целое положительное число. Этот алгоритм требует для своей реализации всего  $2N \log_2 N$  операций, что при больших  $N$  существенно меньше, чем  $N^2$ . Подчеркнем, однако, что быстрое преобразование Фурье не является каким-либо новым типом преобразования, а представляет собой лишь один из вариантов вычисления дискретных преобразований Фурье (61) и (62).

Ниже приведена процедура быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье для рядов, число точек которых представимо формулой  $N = 2^p$ , где  $p$  – целое положительное число (*Ефимов и др., 1980*). Текст программы соответствует  $p = 9$  и  $N = 512$ . При желании значения этих параметров можно изменить. Для этого нужно внести вполне понятные исправления в операторах программы, отмеченных знаком  $\{*\}$ .

```

unit fft; interface {Type arr = array[1..512];} {*}.
procedure fft (kind:longint;var a,b,aa,bb:arr);
{ Процедура Быстрого Преобразования Фурье
a,b - массивы преобразуемой функции;
aa,bb - массивы преобразованной функции;
kind - вид преобразования:
kind = 0 - прямое преобразование;
kind = 1 - обратное преобразование; }
implementation

```

```

procedure fft(kind:longint;var a,b,aa,bb:arr);
const n=9; n1=512; {*}
var aaa,bbb: arr;
var v,m,k,j,i,ni,jm:longint;
var c,si,co,ass,bob:double;

```

```

function f(m:longint):longint;
{ Вычисляет  $2^m$  }
var y,k:longint;
begin
y:=1;
if m=0 then y:=1 else
for k:=1 to m do y:=2*y;
f:=y
end; {f}

```

```

begin
{Сохранение входных массивов}
for i:=1 to 512 do {*}
begin aaa[i]:=a[i]; bbb[i]:=b[i] end;

  m:=1;
  repeat
  k:=0;
  repeat
  v:=0;
  repeat
  j:=f(m)*k+v+1; i:=f(m-1)*k+v+1;
  c:=3.141593*v/f(m-1);
  co:=cos(c);
  if kind=0 then si:=sin(c) else si:=-sin(c);

  ni:=f(n-1)+i; jm:=f(m-1)+j;
  ass:=a[ni]; bob:=b[ni];
  aa[j]:=a[i]+ass*co+bob*si; bb[j]:=b[i]-ass*si+bob*co;
  aa[jm]:=a[i]-ass*co-bob*si; bb[jm]:=b[i]+ass*si-bob*co;
  v:=v+1; until v-f(m-1)≥0;
  k:=k+1; until k-f(n-m)≥0;
  m:=m+1;
  for i:=1 to n1 do
  begin a[i]:=aa[i]; b[i]:=bb[i]; end;
  until m-n>0;
  if kind>0 then
  for i:=1 to n1 do begin aa[i]:=aa[i]/n1; bb[i]:=bb[i]/n1; end;

{Восстановление входных массивов}
for i:=1 to 512 do {*}
begin a[i]:=aaa[i]; b[i]:=bbb[i] end;
end;
end.

```



## Дополнение ряда нулями

Поскольку в общем случае трудно ожидать выполнения равенства (65), обычно для применения быстрого преобразования Фурье исходный ряд дополняют нулями таким образом, чтобы длина нового ряда стала равной  $N_1 = 2^p \geq N$ . Часто длину нового ряда делают даже равной  $N_2 = 2N_1$ . Добавление нулей является единственным методическим новшеством, вытекающим из специфики алгоритма быстрого преобразования Фурье. Другими словами, после добавления нулей наши исходные данные будут иметь следующую структуру:

$$x_k = \begin{cases} x(t_k), & k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, & k = N, \dots, N_1-1, \dots, N_2-1. \end{cases} \quad (66)$$

Вычислим значения периодограммы

$$D_j = \frac{1}{N_2} |FFT_j \{x_k\}_{k=0}^{N_2-1}|^2 \quad (67)$$

для дискретного набора частот

$$\nu_j^* = \frac{2\nu_c}{N_2} j, \quad j = 0, 1, \dots, N_2/2, \quad (68)$$

следующих друг за другом с шагом

$$\Delta\nu^* = 2\nu_c/N_2. \quad (69)$$

Если в формуле (67) использовать дискретное преобразование Фурье и вычислять его непосредственно (без добавления нулей), то отсчеты периодограммы будут отнесены к фундаментальной системе частот

$$\nu_j = \frac{2\nu_c}{N} j, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (70)$$

отстоящих друг от друга на шаг

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_c}{N}. \quad (71)$$

Из сравнения (69) и (71) находим

$$\frac{\Delta\nu^*}{\Delta\nu} = \frac{N}{N_2} < 1. \quad (72)$$

Другими словами, добавление нулей позволяет более тщательно прописать структуру деталей спектра за счет вычисления периодограммы с меньшим шагом по частоте. Этот эффект часто называют интерполяцией в области частот. Вполне понятно, что этот прием не увеличивает *реальную* разрешающую способность дискретного преобразования Фурье в частотной области. Известно также, что значения периодограммы на сетке фундаментальных частот представляют собой независимые величины, в то время как все промежуточные отсчеты являются коррелированными (*Дженкинс и Ваттс, 1972*).

## Вычисление коррелограмм с помощью БПФ

Отметим также, что для вычисления коррелограмм можно использовать не только соотношения (14) и (38), но и процедуру обратного дискретного преобразования Фурье. Рабочие формулы выглядят следующим образом:

$$\bar{c}_m = N \operatorname{Re} FFT_m^{-1} \{D_j\}_{j=0}^{N_2-1}, \quad (73)$$

$$\bar{c}_{xy}[m] = N \operatorname{Re} FFT_m^{-1} \{D_{xy}[j]\}_{j=0}^{N_2-1}, \quad (74)$$

$$\bar{c}_{yx}[m] = N \operatorname{Re} FFT_m^{-1} \{D_{xy}^*[j]\}_{j=0}^{N_2-1}, \quad (75)$$

$$m = 0, 1, \dots, N - 1.$$

При выполнении этих операций следует иметь в виду, что с целью исключения так называемого кругового эффекта ("The wrap-around problem", *Отнес и Энноксон, 1982*) дополнение ряда нулями до значения  $N_2$  должно быть сделано обязательно, даже если соответствующие преобразования Фурье выполняются без использования алгоритма быстрого преобразования Фурье.

## Алгоритмы

### Спектрально-Корреляционный Анализ Временных Рядов (СКАВРя)

Исходные данные:

1) Равномерный временной ряд

$$x_k = x(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

составленный из действительных чисел. Для использования процедур быстрого преобразования Фурье элементам массива мнимых частей наших данных следует присвоить нулевые значения;

2)  $X_1$  или  $X_2$  – критические значения для разделения шумового и детерминированного компонентов временного ряда, отвечающие уровню значимости  $q$  (см. с. 10–13);

3)  $a, N^*$  – параметры корреляционного окна Тьюки (см. с. 12–14).

*Ниже мы опишем основные шаги алгоритма и проиллюстрируем их исполнение для модельного временного ряда*

$$x_k = \alpha + \beta t_k + A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1) + \sigma_x \xi_k, \quad (76)$$

$$t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

где  $\Delta t$  – постоянный шаг выборки;  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры линейного тренда;  $A_1, \nu_1, \phi_1$  – амплитуда, частота и фаза гармонического компонента;  $\xi_k, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , – значения случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенной по нормальному закону (шумовой компонент ряда);  $\sigma_x$  – среднеквадратическое отклонение шумового компонента  $\xi_k$ , задаваемое с помощью соотношения

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{A_1^2}{2\gamma}}, \quad (77)$$

где  $\gamma$  – отношение "сигнал к шуму".

*Заданные параметры:*

$\Delta t = 1$  с;  $N = 230$ ;  $q = 0.01$ ;  $X_1 = 9.0$ ;

$A_1 = 1$ ;  $\nu_1 = 0.1$  Гц;  $\phi_1 = 0$ ;

$\gamma = 0.50$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = 0.05$ .

Алгоритм спектрального анализа состоит из следующих шагов.

### 1. Графическое представление исходного ряда во временной области

Очень часто визуальное изучение графика исходного ряда позволяет обнаружить либо присутствие в данных постоянного слагаемого, либо низкочастотный компонент (тренд). Обе эти составляющие полезно исключить из данных, поскольку они могут привести к большим погрешностям периодограммы в ее высокочастотной области.

*Для модельного ряда это представление показано на рис. 4. Мы видим, что наш ряд имеет заметно выраженный линейный тренд и квазипериодическую составляющую.*

### 2. Исключение тренда и центрирование ряда

Для исключения тренда необходимо задать его модель. Если природа тренда имеет теоретическое объяснение, то моделирование тренда производится на основе этой теории. Чаще всего природа тренда не известна. В таких случаях в качестве формальной модели используют аппроксимацию тренда с помощью линейной комбинации каких-нибудь полиномов. При этом в состав такого выражения входит и свободный член. Параметры взятой модели тренда определяются с помощью метода наименьших квадратов, а затем значения тренда вычитаются из исходных данных. В простейшем случае такая операция сводится к исключению постоянного слагаемого (центрированию ряда). При этом среднее значение ряда определяется по формуле

$$m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k,$$

а центрированный ряд получается из исходного следующим образом:

$$x_k^{\circ} = x_k - m, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

### 3. Графическое представление центрированного ряда

*После исключения линейного тренда график центрированного временного ряда (76) представлен на рис. 5.*

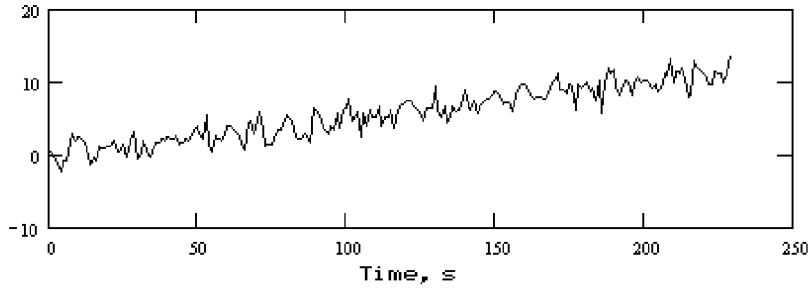


Рис. 4: График модельного ряда (76).

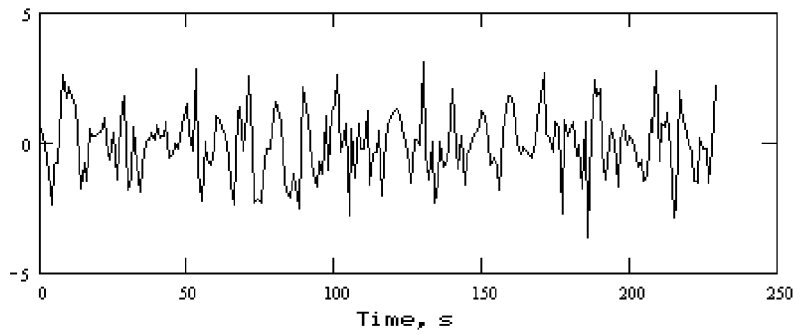


Рис. 5: График центрированного модельного ряда (76).

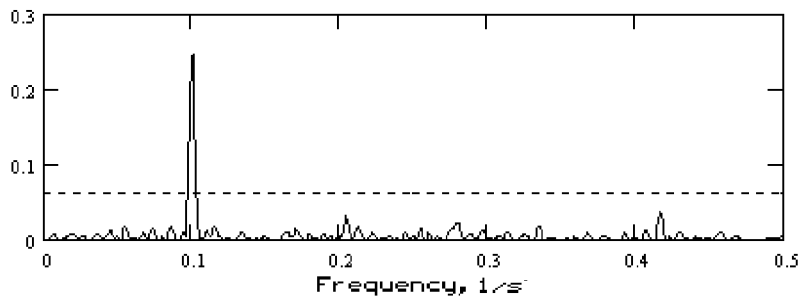


Рис. 6: Периодограмма Шустера модельного ряда (76). Штриховой линией показан 99-процентный порог обнаружения сигнала в шумах.

#### 4. Вычисление периодограммы

Чтобы воспользоваться процедурой БПФ, исходный ряд нужно дополнить нулями таким образом, чтобы длина нового ряда была  $N_1 = 2^p \geq N$ . Для получения коррелограммы длину нового ряда делают равной  $N_2 = 2N_1$ . Для такого ряда с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье (с. 21) получают

$$X_j = FFT_j \{x_k^\circ\}_{k=0}^{N_2-1} = \sum_{k=0}^{N_2-1} x_k^\circ e^{-i \frac{2\pi}{N_2} kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \quad (78)$$

после чего вычисляется периодограмма

$$D_j = \frac{1}{N_2^2} [(\operatorname{Re} X_j)^2 + (\operatorname{Im} X_j)^2], \quad j = 0, 1, \dots, N_2/2.$$

Отсчеты периодограммы соответствуют частотам

$$\nu_j = \Delta\nu j, \quad j = 0, 1, \dots, N_2/2,$$

где

$$\Delta\nu = \frac{1}{N_2 \Delta t}.$$

При обработке модельного ряда (76) были выбраны значения  $N_1 = 512$  и  $N_2 = 1024$ .

#### 5. Оценивание дисперсии ряда:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\circ)^2.$$

#### 6. Графическое представление периодограммы и порога обнаружения сигнала

Этот график позволяет отождествить значимые спектральные линии. Все пики периодограммы, превышающие критический уровень  $\sigma_0^2 X_1/N$ , считаются значимыми, т. е. принадлежат детерминированному компоненту ряда. Вероятность такого утверждения равна  $1 - q$ .

Для модельного ряда эти результаты показаны на рис. 6.

Если не ставится задача получения коррелограммы и сглаженной периодограммы, то на этом выполнение алгоритма можно прекратить.

### 7. Вычисление коррелограммы методом БПФ:

$$\bar{c}_m = \frac{1}{N} \operatorname{Re} FFT_m^{-1} [|X_j|^2]_{j=0}^{N_2-1}, \quad (79)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N^* - 1.$$

### 8. Графическое представление коррелограммы

Для модельного ряда (76) график смещенной оценки корреляционной функции показан на рис. 7.

### 9. Взвешенная коррелограмма

Для получения сглаженной периодограммы коррелограмму умножают на весовую функцию Тьюки

$$W_m = (1 - 2a) + 2a \cos \frac{\pi m}{N^*}. \quad (80)$$

Взвешенная коррелограмма вычисляется следующим образом:

$$\tilde{c}_m = \bar{c}_m W_m, \quad m = 0, 1, \dots, N^* - 1. \quad (81)$$

Для модельного ряда (76) были выбраны значения  $N^* = 0.1N$  и  $a = 0.25$ .

### 10. Вычисление сглаженной периодограммы

Массив значений коррелограммы  $\bar{c}_m$  дополняют нулями и с новым массивом длиной  $N_2$  осуществляют вычисление сглаженной периодограммы по формуле

$$\tilde{D}_j = \frac{1}{N^*} [2 \operatorname{Re} FFT_j \{\tilde{c}_m\}_{m=0}^{N_2-1} - \tilde{c}_0], \quad j = 0, 1, \dots, N_2/2. \quad (82)$$

Отсчеты периодограммы  $\tilde{D}_j$  относятся к той же системе частот, на которой была определена периодограмма  $D_j$ .

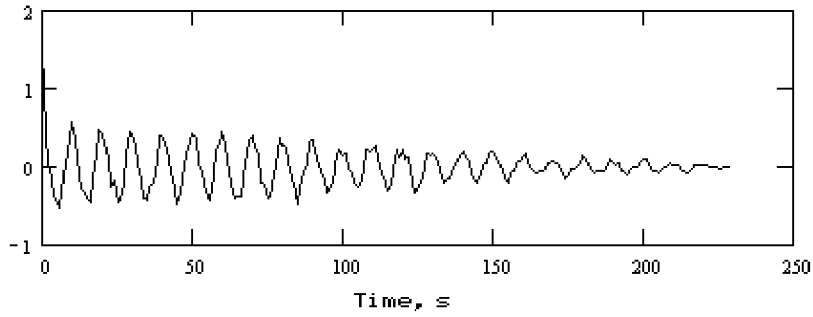


Рис. 7: График смещенной коррелограммы модельного ряда (76).

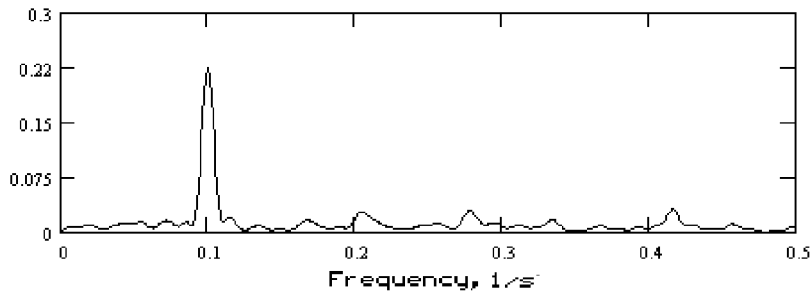


Рис. 8: Сглаженная периодограмма ряда (76). Параметры сглаживания:  $N^* = 0.5N$ ;  $a = 0.25$ .

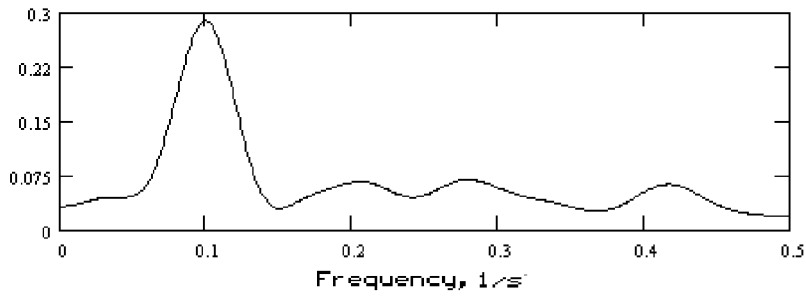


Рис. 9: Сглаженная периодограмма ряда (76). Параметры сглаживания:  $N^* = 0.1N$ ;  $a = 0.25$ .



### 11. Представление сглаженной периодограммы в графическом виде

Для модельного ряда (76) графики сглаженных периодограмм показаны на рис. 8 и 9. Сравнение рис. 6 с рис. 8 и 9 показывает, что по мере уменьшения значения параметра  $N^*$  в сглаженной периодограмме представление шумового компонента становится все более гладким, в то время как контур спектральной линии на частоте 0.1 Гц становится все менее четким.

### 12. Конец алгоритма.

## Взаимный Анализ Временных Рядов (ВАВРя)

Ниже приводится алгоритм взаимного спектрально-корреляционного анализа двух рядов, который является обобщением соответствующего алгоритма анализа одного временного ряда.

Исходные данные:

- $\Delta t$  – временной шаг задания рядов;
- равномерные временные ряды

$$x_k = x(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$y_k = y(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

В дальнейшем мы будем считать, что наши ряды составлены из действительных чисел. Для использования процедур быстрого преобразования Фурье элементам массивов мнимых частей наших данных следует присвоить нулевые значения;

- $Z_1$  или  $Z_2$  – критические значения для выделения полезного сигнала из шума, отвечающие уровню значимости  $q$  (с. 18);
- $a, N^*$  – параметры корреляционного окна Тьюки (с. 12–14).

Ниже мы опишем основные шаги алгоритма и проиллюстрируем их исполнение для модельных временных рядов

$$x_k = A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k + \phi_1) + \sigma_x \xi_k, \quad (83)$$

$$y_k = \sum_{i=1}^2 B_i \cos(2\pi\nu_i t_k + \phi_i) + \sigma_y \eta_k, \quad (84)$$

$$t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

где

$\Delta t$  – постоянный шаг выборки;

$A_1, \nu_1, \phi_1$ , – амплитуда, частота и фаза ряда  $x_k$ ;

$B_i, \nu_i, \phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , – амплитуды, частоты и фазы ряда  $y_k$ ;

$\xi_k, \eta_k, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , – случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенные по нормальному закону (шумовые компоненты рядов  $x_k$  и  $y_k$ );

$\sigma_x, \sigma_y$ , – среднеквадратические отклонения шумовых компонентов рядов  $x_k$  и  $y_k$ , задаваемые с помощью соотношений

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{A_1^2}{2\gamma_x}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{B_1^2 + B_2^2}{2\gamma_y}}, \quad (85)$$

где  $\gamma_x, \gamma_y$  – отношения "сигнал к шуму" соответственно для первого и второго рядов.

Заданные параметры:

$\Delta t = 1$  с;  $N = 200$ ;  $q = 0.01$ ;  $Z_1 = 28.1$ ;

$A_1 = 1$ ;  $\nu_1 = 0.11$  Гц;  $\phi_1 = 0$ ;

$B_1 = 1$ ;  $\nu_1 = 0.11$  Гц;  $\phi_1 = \pi/3$ ;

$B_2 = 1$ ;  $\nu_2 = 0.18$  Гц;  $\phi_2 = 0$ ;

$\gamma_x = 0.1$ ;  $\gamma_y = 0.1$ ;

Алгоритм спектрального анализа состоит из следующих шагов.

### 1. Графическое представление исходных рядов во временной области

Графики модельных рядов (83) и (84) показаны на рис. 10.

### 2. Центрирование рядов:

$$x_k^\circ = x_k - m_x, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$y_k^\circ = y_k - m_y, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

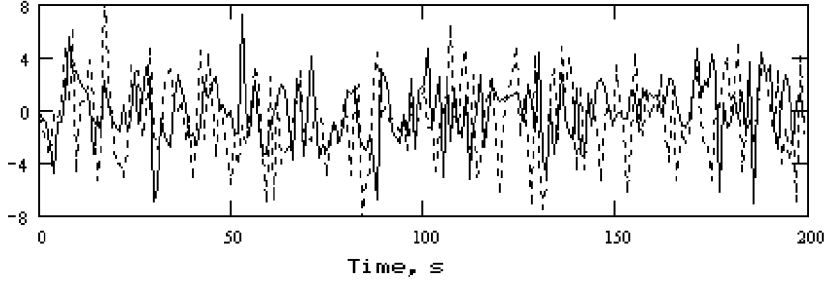


Рис. 10: Модельные ряды: сплошная линия – ряд (83), штриховая линия – ряд (84).

где

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k; \quad m_y = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k.$$

### 3. Графическое представление центрированных рядов

Поскольку модельные ряды (83) и (84) не содержат постоянных составляющих, графики центрированных рядов повторяют графики на рис. 10.

### 4. Дополнение рядов нулями

Для того чтобы воспользоваться процедурой БПФ, исходные ряды дополняют нулями. Выберем числа  $N_1 = 2^p \geq N$  и  $N_2 = 2N_1$ . Дополним каждый из исходных рядов нулями с тем, чтобы в процессе дальнейшей обработки оба ряда состояли бы из  $N_2$  точек.

При обработке модельных рядов (83) и (84) были выбраны значения  $N_1 = 512$  и  $N_2 = 1024$ .

### 5. Вычисление взаимной периодограммы

Сначала вычисляются дискретные преобразования Фурье по формулам

$$X_j = FFT_j \{x_k^\circ\}_{k=0}^{N_2-1} = \sum_{k=0}^{N_2-1} x_k^\circ e^{-i \frac{2\pi}{N_2} kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \quad (86)$$

$$Y_j = FFT_j \{y_k^\circ\}_{k=0}^{N_2-1} = \sum_{k=0}^{N_2-1} y_k^\circ e^{-i \frac{2\pi}{N_2} kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \quad (87)$$

после чего взаимная периодограмма определяется по формуле

$$D_{xy}[j] = \frac{1}{N_2} X_j^* Y_j, \quad j = 0, 1, \dots, N_2/2.$$

Отсчеты взаимной периодограммы соответствуют частотам

$$\nu_j = \Delta\nu j, \quad j = 0, 1, \dots, N_2/2,$$

где

$$\Delta\nu = \frac{1}{N_2 \Delta t}.$$

**6. Вычисление коспектра и квадратурного спектра:**

$$P_{xy}[j] = \operatorname{Re} D_{xy}[j]; \quad Q_{xy}[j] = -\operatorname{Im} D_{xy}[j].$$

**7. Вычисление квадрата амплитуды взаимной периодограммы:**

$$A_{xy}^2[j] = P_{xy}^2[j] + Q_{xy}^2[j].$$

**8. Вычисление фазового спектра:**

$$\Phi_{xy}[j] = -\operatorname{arctg} \frac{Q_{xy}[j]}{P_{xy}[j]}.$$

**9. Оценивание дисперсий рядов:**

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\circ)^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (y_k^\circ)^2.$$

**10. Графическое представление квадрата амплитуды взаимной периодограммы и порога обнаружения сигнала**

Этот график позволяет отождествить значимые спектральные линии, общие для двух рядов. Все пики квадрата амплитуды взаимной периодограммы, превышающие критический

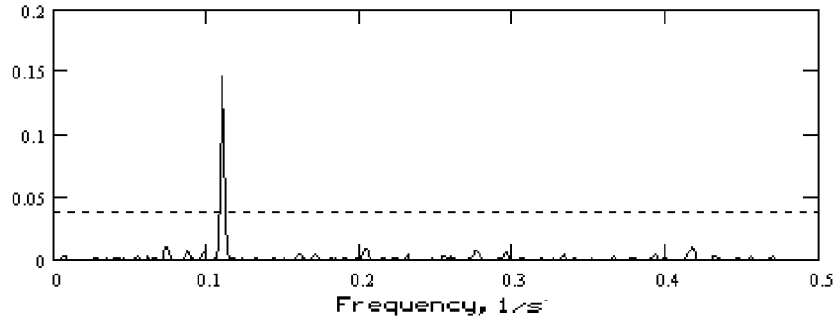


Рис. 11: Квадрат амплитуды взаимной периодограммы рядов (83) и (84). Штриховая линия – 99-процентный порог разделения шумовой и детерминированной составляющих обоих рядов.

уровень  $\sigma_x^2 \sigma_y^2 Z_1 / N^2$ , считаются значимыми, т. е. принадлежащими общему детерминированному компоненту рядов. Вероятность такого утверждения равна  $1 - q$ .

Для модельных рядов эти результаты показаны на рис. 11. Мы видим, что в число значимых пиков с вероятностью 0.99 попадает только один пик на частоте 0.11 Гц. Остальные пики порождаются шумовыми компонентами обоих рядов.

#### 11. Графическое представление фазового спектра

Можно напечатать значения фазового спектра для всех значений  $j$ , однако целесообразно получить фазовый спектр только для тех частот, на которых обнаружены общие значимые гармоники. Другими словами, на печать выводятся только те значения фазового спектра, для которых выполняются соотношения

$$A_{xy}^2[j] \geq \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{N^2} Z_1.$$

Для модельных рядов фазовый спектр показан на рис. 12, где представлен только один пик на частоте 0.11 Гц. Высота этого пика, равная 0.89, хорошо соответствует заданной разности фаз  $\pi/3$ . Заметим, что при увеличении значения  $N_2$  эту оценку можно улучшить за счет увеличения формального разрешения.

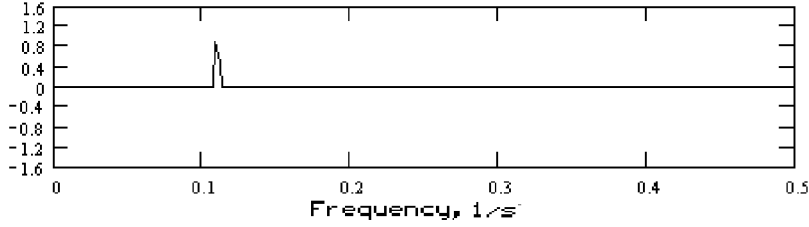


Рис. 12: Фазовый спектр рядов (83) и (84).

Если не ставится задача получения взаимной коррелограммы и сглаженной взаимной периодограммы, то на этом выполнение алгоритма можно прекратить.

#### 12. Вычисление взаимных коррелограмм методом БПФ:

$$\bar{c}_{xy}[m] = \frac{1}{N} \operatorname{Re} FFT_m^{-1} \{X_j^* Y_j\}_{j=0}^{N_2-1}, \quad (88)$$

$$\bar{c}_{yx}[m] = \frac{1}{N} \operatorname{Re} FFT_m^{-1} \{X_j Y_j^*\}_{j=0}^{N_2-1}, \quad (89)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N^* - 1.$$

#### 13. Графическое представление коррелограмм

Графики взаимной коррелограммы  $\bar{c}_{xy}[m]$  и  $\bar{c}_{yx}[m]$  для первых двадцати точек показаны на рис. 13.

#### 14. Взвешенная коррелограмма

Для получения сглаженной периодограммы коррелограммы умножают на весовую функцию Тьюки

$$W_m = (1 - 2a) + 2a \cos \frac{\pi m}{N^*}. \quad (90)$$

Взвешенные коррелограммы вычисляются следующим образом:

$$\tilde{c}_{xy}[m] = \bar{c}_{xy}[m] W_m, \quad m = 0, 1, \dots, N^* - 1, \quad (91)$$

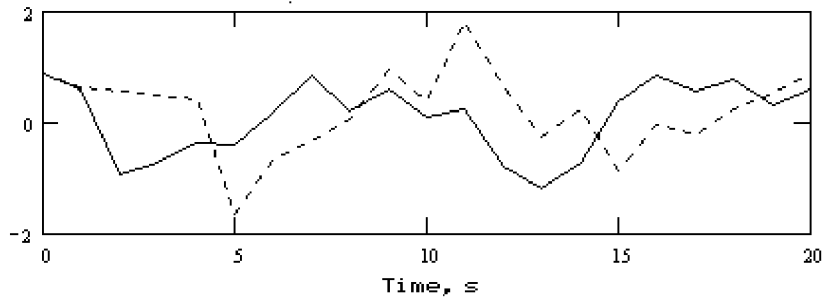


Рис. 13: Взаимные корреллограммы рядов (83) и (84). Сплошная линия -  $\bar{c}_{xy}[m]$ , штриховая -  $\bar{c}_{yx}[m]$ .

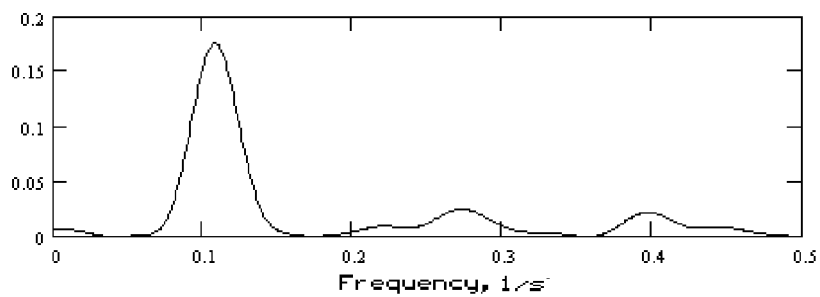


Рис. 14: Квадрат амплитуды сглаженной взаимной периодограммы рядов (83) и (84). Параметры сглаживания:  $N^* = 0.1N$ ;  $a = 0.25$ .

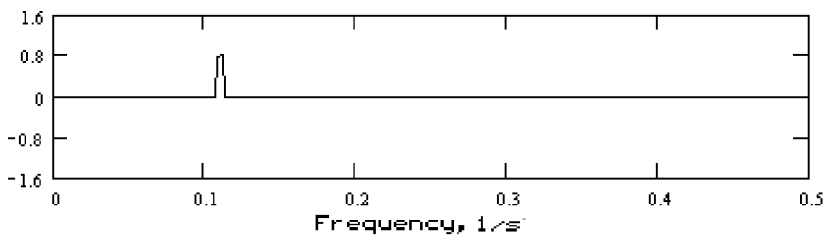


Рис. 15: Сглаженный фазовый спектр рядов (83) и (84).

$$\tilde{c}_{yx}[m] = \bar{c}_{yx}[m]W_m, \quad m = 0, 1, \dots, N^* - 1. \quad (92)$$

Для взвешивания взаимных коррелограмм модельных рядов (83) и (84) были выбраны значения  $N^* = 0.1N$  и  $a = 0.25$ .

#### 15. Вычисление сглаженной периодограммы

Массив значений коррелограмм  $\tilde{c}_{xy}[m]$  и  $\tilde{c}_{yx}[m]$  дополняют нулями и с новыми массивами длиной  $N_2$  осуществляют вычисление сглаженной взаимной периодограммы по формуле

$$\tilde{D}_{xy}[j] = \frac{1}{N^*} \left[ FFT_j \{ \tilde{c}_{xy}[m] \}_{m=0}^{N_2-1} + FFT_j^* \{ \tilde{c}_{yx}[m] \}_{m=0}^{N_2-1} - \bar{c}_0 \right].$$

#### 16. Вычисление сглаженных коспектра и квадратурного спектра:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{xy}[j] &= \text{Re } \tilde{D}_{xy}[j]; \\ \tilde{Q}_{xy}[j] &= -\text{Im } \tilde{D}_{xy}[j]. \end{aligned}$$

#### 17. Вычисление квадрата амплитуды взаимной коррелограммы:

$$\tilde{A}_{xy}^2[j] = \tilde{P}_{xy}^2[j] + \tilde{Q}_{xy}^2[j].$$

#### 18. Вычисление фазового спектра:

$$\tilde{\Phi}_{xy}[j] = -\text{arctg} \frac{\tilde{Q}_{xy}[j]}{\tilde{P}_{xy}[j]}.$$

Отсчеты сглаженных характеристик взаимной периодограммы  $\tilde{D}_{xy}[j]$  относятся к той же системе частот, на которой была определена периодограмма  $D_{xy}[j]$ .

#### 19. Графическое представление сглаженных оценок

Для модельных рядов (83) и (84) график квадрата амплитуды сглаженной взаимной периодограммы показан на рис. 14, а фазовый спектр сглаженной взаимной периодограммы – на рис. 15. Мы видим, что, несмотря на сильную зашумленность обоих рядов, в их составе очень уверенно обнаруживается общая гармоника с частотой 0.1 Гц.

#### 20. Конец алгоритма.



## Упражнения

Составьте программу анализа временных рядов (СКАВРя), пользуясь алгоритмом, приведенным на с. 26–32. Предусмотрите в программе возможность анализа модельного временного ряда

$$x_k = A_1 \cos(2\pi\nu_1 t_k - \phi_1) + A_2 \cos(2\pi\nu_2 t_k - \phi_2) + \sigma_x \xi_k, \quad (93)$$

$$t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (94)$$

где  $\Delta t$  – постоянный шаг выборки;

$A_i, \nu_i, \phi_i, \quad i = 1, 2$ , – амплитуды, частоты и фазы двух гармонических компонентов;

$\xi_k, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , – случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенные по нормальному закону (шумовой компонент ряда);

$\sigma_x$  – среднеквадратическое отклонение шумового компонента  $n_k$ , которое можно вычислить через отношение "сигнал к шуму"  $\gamma$  с помощью соотношения

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2}{2\gamma}}. \quad (95)$$

Задаваемые параметры ряда:

- 1) характеристики гармоник  $A_i, \nu_i, \phi_i, \quad i = 1, 2$ ;
- 2) отношение "сигнал к шуму"  $\gamma$ .

Используя эту программу, выполните следующие упражнения.

- Оцените аналитически длину ряда  $N\Delta t$ , необходимую для полного разрешения в периодограмме двух близких спектральных линий, соответствующих гармоническим компонентам с частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Используя программу СКАВРя, постройте периодограммы рядов с меньшей и большей длинами для того, чтобы увидеть эффекты слияния линий, а также картины их частичного и полного разрешения.
- Почему на рис. 18 контуры линий видны, а на рис. 19 – нет?
- Для заданных амплитуд ряда (93) оцените аналитически минимальное значение отношения "сигнал к шуму", при котором с заданной вероятностью еще удастся выделить сигнал из

шума. С помощью численных экспериментов проверьте Ваш результат. Почему *иногда* результаты программы СКВРя не совпадают с теоретическими?

- Какие изменения нужно ввести в программу СКВРя, чтобы по оцифровке оси ординат периодограммы можно было бы сразу определять численные значения амплитуды гармонических колебаний?
- Добавьте к ряду (76) постоянное слагаемое  $C > A_i$  и постройте с помощью программы СКВРя периодограммы нецентрированного и центрированного рядов. Объясните различный вид периодограмм, написав аналитическое выражение для периодограммы ряда  $x_k = C$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , где  $C = \text{const}$ .
- Дан временной ряд  $x_k = x(\Delta t k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , у которого первое и второе, третье и четвертое и т. д. значения попарно совпадают. Докажите аналитически, что периодограмма такого ряда будет симметрична относительно частоты  $\nu = 0.5\nu_c = 1/4\Delta t$ . Проиллюстрируйте это свойство с помощью программы СКВРя.
- Как определить амплитуды и фазы статистически значимых гармонических компонентов ряда, пользуясь только теми операциями, которые выполняются в программе СКВРя ?
- С помощью программы СКВРя продемонстрируйте эффект неразличимости частот ("элайзинг").
- Вероятность того, что наибольший отсчет периодограммы дискретного белого шума превысит заданный уровень  $X_1$ , определяется уравнением (24). Как с помощью программы СКВРя можно проиллюстрировать этот результат?
- Спектр мощности и коррелограмма суть неотрицательные функции по определению. Почему в методе Блэкмана–Тьюки (особенно хорошо это заметно при  $a = 0$ ) значения периодограммы на некоторых частотах бывают отрицательными?
- Для гармонического компонента с амплитудой  $A$  и частотой  $\nu_0$  точное значение максимального отсчета периодограммы

равно  $A^2/4$ . При использовании программы СКАВРя Вы можете заметить, что это соотношение выполняется не всегда. Как это объяснить?

- Каким образом по коррелограмме временного ряда (76) можно оценить параметр  $\gamma$  (отношение "сигнал к шуму")?
- Докажите соотношение (13).
- Докажите соотношение (40).
- Докажите соотношение (48).
- Докажите соотношение (50).
- Чем различаются фазовые спектры взаимных периодограмм  $D_{xy}(\nu)$  и  $D_{yx}(\nu)$ ?

## Приложение

Приведем теперь примеры спектрально-корреляционного анализа реальных астрономических временных рядов. В качестве таковых мы используем три ряда, с помощью которых описывается вращение Земли: ряд вариаций продолжительности суток  $\Delta LOD(t)$ , т. е. избыток эфемеридных суток, определяемый из формулы

$$LOD(t) = 86400 + \Delta LOD(t),$$

где  $LOD(t)$  (Length Of Day) – период вращения Земли, измеряемый в секундах SI, и координаты полюса  $x(t)$  и  $y(t)$ , которые задают положение мгновенного полюса вращения Земли в системе отсчета, жестко связанной с Землей (ось X направлена по касательной к Гринвичскому меридиану, ось Y – по касательной к меридиану  $90^\circ$  западной долготы).

В настоящее время эти три ряда а также еще два ряда, задающих движение полюса в небесной системе отсчета (так называемые Polar Offsets), определяются различными методами (РСДБ, лазерная локация ИСЗ и Луны, GPS) и обрабатываются в Международной Службе Вращения Земли (IERS). Публикации этих рядов производятся в годовых отчетах IERS. Полные ряды можно найти в Интернете на сайте IERS: <http://hpiers.obspm.fr>.

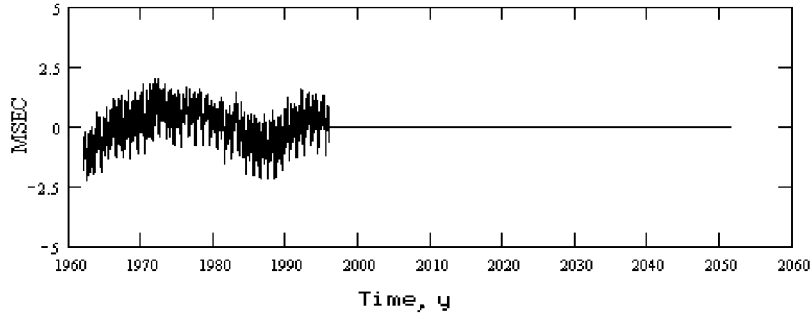


Рис. 16: График ряда вариаций периода вращения Земли (LOD), дополненного нулями.

### Вариации продолжительности суток

Ниже приводятся результаты обработки ряда вариаций периода вращения Земли (LOD) на промежутке 1962–1996 гг. по данным Международной службы вращения Земли (IERS, файл eors04). Шаг выборки  $\Delta t = 1$  сут., число точек ряда  $N = 12462$ . Исходные значения представлены на рис. 1. Дополненный нулями ряд вариаций LOD ( $N_2 = 32 \times 1024$ ) показан на рис. 16.

Результаты вычисления периодограммы Шустера в различных диапазонах частот демонстрируются на рис. 17–19. В низкочастотной части спектра имеется мощный компонент с периодом 22.7 года и амплитудой 0.6 мс. Ее происхождение связано с вековыми колебаниями LOD. На рис. 18 видны два пика на частотах 1 и 2 цикла в год с амплитудами 0.35 мс. Эти пики соответствуют изменениям периода вращения Земли под действием сезонных атмосферных перемещений. На рис. 19 еще две спектральные линии имеют частоты 13.37 и 26.74 цикла в год и амплитуды 0.18 и 0.37 мс. Периоды этих колебаний, происходящих под действием лунных приливов, равны соответственно 27.32 и 13.66 сут.

На рис. 17–19 порог  $X_1$  выделения сигнала из шума, соответствующий уровню значимости  $q = 0.01$ , показан штриховой линией. Мы видим, что максимальные значения имеющихся в периодограмме пиков намного превосходят это значение.

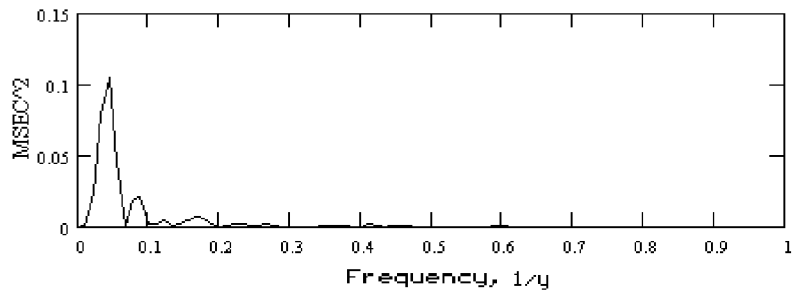


Рис. 17: Низкочастотный компонент в спектре *LOD*.

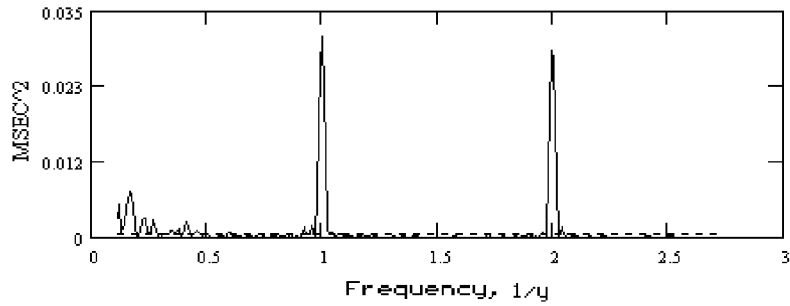


Рис. 18: Сезонные компоненты в спектре *LOD*. Штриховая линия – 99-процентный порог разделения шумовой и детерминированной составляющих ряда.

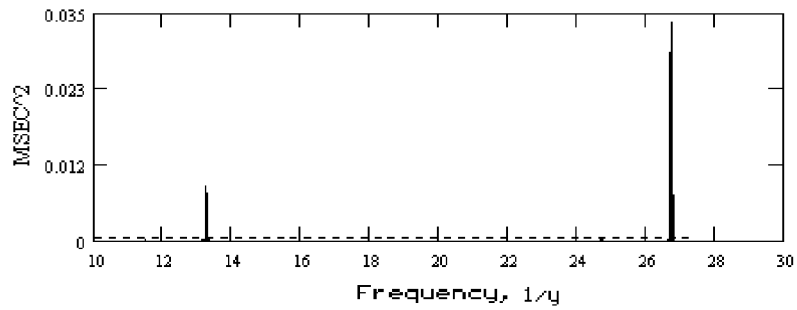


Рис. 19: Приливные компоненты в спектре *LOD*. Штриховая линия – 99-процентный порог разделения шумовой и детерминированной составляющих ряда.

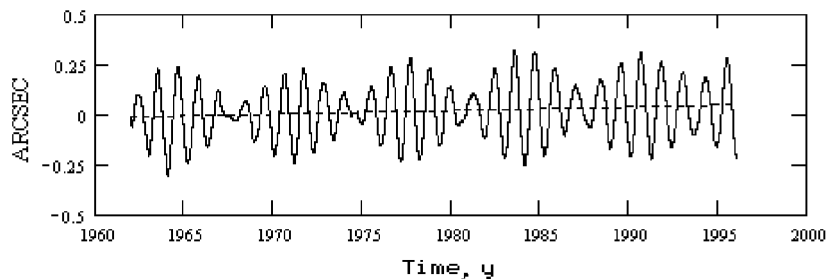


Рис. 20: *X-координата полюса (1962-1996).*

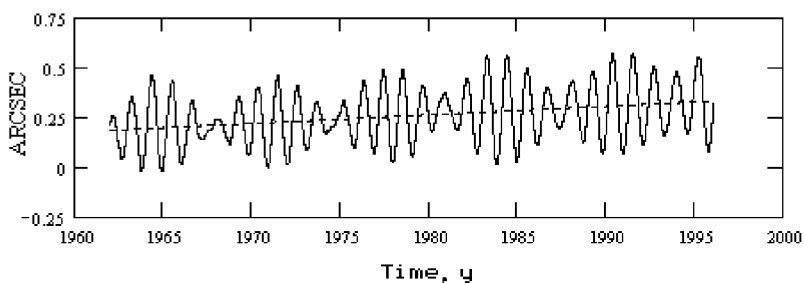


Рис. 21: *Y-координата полюса (1962-1996).*

### Движение полюса в теле Земли

Теперь приведем результаты обработки рядов  $x$ - и  $y$ -координат полюса на промежутке времени 1962–1996 гг. по данным Международной службы вращения Земли (IERS, массив eors04). Шаг выборки  $\Delta t = 1$  сут., число точек ряда  $N = 12462$ . В нашем анализе ряды координат полюса дополнялись нулями ( $N_2 = 32 \times 1024$ ).

Исходные ряды представлены на рис. 20 и 21 сплошными линиями. На этих же графиках штриховыми линиями показаны линейные тренды, являющиеся следствием векового движения полюса. По нашей выборке вековое движение происходит со скоростью  $0''.44$  в столетие в направлении  $65^\circ$  к западу от Гринвича. Заметим, что по более длительным выборкам эти оценки получаются иными. Например, по рядам координат полюса на промежутке 1899.7–1992.0 гг., редуцированным к системе каталога HIPPARCOS, оценка ско-

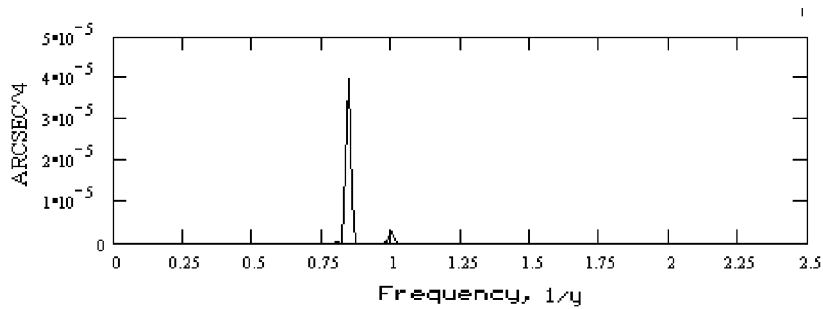


Рис. 22: Квадрат модуля взаимной периодограммы координат полюса. Для уровня значимости  $q = 0.01$  и  $N = 12462$  решение уравнения (57) дает  $Z_1 = 55.5$ , поэтому порог обнаружения значимых пиков составляет величину  $1.1 \times 10^{-10}$  и в масштабе графика не виден.

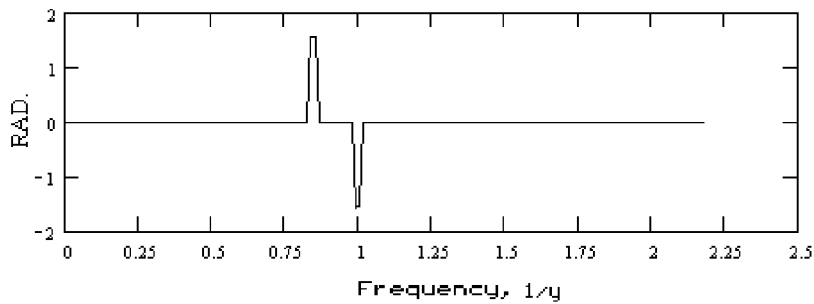


Рис. 23: Фазовый спектр координат полюса.

рости векового движения полюса составляет  $0''.34$  в столетие в направлении  $75.8^\circ$  к западу от Гринвича (Вондрак Я., Рон К., 1995).

Квадрат амплитуды взаимной периодограммы координат полюса показан на рис. 22. Здесь мы видим два пика на частотах Chandlerовской ( $0.85 \text{ год}^{-1}$ ) и годичной составляющей ( $1 \text{ год}^{-1}$ ). Фазовый спектр координат полюса (рис. 23) показывает значительную разность фаз обоих компонентов.

## Литература

*Блэкман и Тюки, 1959.* – Blackman R.B., Tukey J.W. The Measurement of Power Spectra. N.Y.: Dower.

*Вондрак Я., Рон К., 1995.* – Vondrak J., Ron C. Earth Rotation, Reference Systems in Geodynamics and Solar System // Proc. JOURNEES 1995, Warsaw.

*Дженкинс Г., Ваттс Д., 1972.* Спектральный анализ и его приложения. Т. 1, 2. М.: Мир.

*Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М., 1980.* Математический анализ (специальные разделы). Т.1, 2. М.: Высшая школа.

*Кули и Тюки, 1965.* – Cooley J.W., Tukey J.W. // Math. Comput. Vol. 19. P. 297-301.

*Отнес и Эноксон, 1982.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир.

*Теребиж В.Ю., 1992.* Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука.



Учебное издание

*Вениамин Владимирович Витязев*

СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ  
РАВНОМЕРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Учебное пособие

Зав. редакцией Г.И. Чердниченко

Обложка Е.А. Соловьевой

Лицензия ЛР N 040050 от 15.08.1996

Подписано к печати с оригинал-макета 03.05.2001.

Печать офсетная. Ф-т 60 × 84/16. Усл. печ. л. 2,79.

Уч.-изд. л. 2,7.

Тираж 50 экз. Заказ N

Редакция оперативной подготовки учебно-методических  
и научных изданий Издательства С.-Петербургского университета.  
199034, С.Петербург, Университетская наб., 7/9.

ЦОП типографии Издательства СПбГУ.

199034, С.-Петербург, наб. Макарова, 6.