

Д.И.Нагирнер

Лекции по космологии

Введение

Главные события и имена в космологии. Теоретические и наблюдательные основы

Над космологическими проблемами человечество задумывалось с самого начала своего существования. О возникновении и строении Вселенной говорят многочисленные мифы различных народов. Научная космология началась с работ астрономов эпохи Возрождения: Николая Коперника (1473–1543), Иоганна Кеплера (1571–1630) и Галилео Галилея (1564–1642). Однако все они не шли дальше сферы неподвижных звезд, то есть интересовались строением Солнечной системы. Математическую основу это направление приобрело после установления закона всемирного тяготения Исааком Ньютоном (1642–1727). Космогонические теории впервые предложили Пьер Симон Лаплас (1749–1827) и Иммануил Кант (1724–1804). Такие теории продолжают развиваться вплоть до настоящего времени на основе самых современных представлений физики, но эта наука называется космогонией, а не космологией.

Намерение построить космологическую модель, то есть модель всей Вселенной, а не только Солнечной системы или Галактики, возникло сразу же у А.Эйнштейна (1917), как только им были сформулированы уравнения общей теории относительности (1916), описывающие гравитационное поле и поведение материи в нем. Он применил уравнения к однородному и изотропному распределению материи (космологический принцип) и пытался найти стационарное решение этих уравнений, чтобы избежать проблемы происхождения и начальных этапов истории Вселенной. Для этого ему пришлось дополнить уравнения так называемым космологическим слагаемым или Λ -членом, который описывает не притяжение, а гравитационное отталкивание. Стационарное решение получалось только для замкнутой Вселенной и к тому же, как показал А.Эддингтон, оказалось неустойчивым.

Первые нестационарные решения уравнений Эйнштейна получил российский математик, гидромеханик и метеоролог А.А.Фридман (1888–1925) для вещества без давления, равномерно распределенного в пространстве, сначала с положительной кривизной (1922), затем с отрицательной (1924). В этих же работах им рассматривались случаи положительных и отрицательных значений космологической постоянной. Сначала Эйнштейн не принял (не понял) решений Фридмана, но потом согласился с ними.

Нестационарные решения получил также бельгийский теоретик Ж.Леметр в 1927 году, не зная о работах Фридмана. Он включил в уравнения влияние излучения.

Наблюдательный базис ее составляют открытое в 1929 году Эдвином Поуэллом Хабблом (1889–1953) явление разбегания галактик от нас со скоростями, пропорциональными расстояниям до них, а также существование и свойства реликтового фонового излучения, обнаруженного в 1964 году. В последнее время было открыто, что именно космологическое слагаемое играет определяющую роль в космологии, приводя к ускоренному расширению пространства.

Глава I. Однородные космологические модели

§ 1. Метрики однородных пространств

1. *Космологический принцип.* В космологии принимается так называемый космологический принцип, согласно которому все, что есть во Вселенной (прежде всего материя), в каждый момент времени распределено однородно и изотропно, а характеризующие Вселенную величины не зависят от места в ней. Если посмотреть вокруг, то бросается в глаза именно неоднородность распределения вещества и излучения. Но считается, что на больших масштабах принцип соблюдается. Космологические масштабы — это мега- и гигапарсеки (1 Мпк равен $3.086 \cdot 10^{24}$ см, 1 Гпк $3.086 \cdot 10^{27}$ см).

2. *Радиус кривизны пространства как его основная характеристика.* Основной величиной, характеризующей геометрические свойства Вселенной, является радиус кривизны R пространства, определяемый в дифференциальной геометрии. Согласно космологическому принципу кривизна пространства также одинакова везде в заданный момент, то есть радиус кривизны может зависеть только от времени.

Постоянная кривизна k/R^2 может быть положительной, тогда $k = 1$, отрицательной при $k = -1$ или нулевой, если $k = 0$.

3. *Метрика трехмерного пространства положительной кривизны.* О пространствах различной кривизны проще рассуждать по аналогии с поверхностями в трехмерном пространстве, так как мы сами трехмерные и кривизну нашего пространства воспринимать не можем. Постоянную положительную кривизну в нашем пространстве имеет сфера. Поэтому и трехмерное пространство положительной кривизны моделируем гиперсферой в четырехмерном евклидовом пространстве.

Введем четыре координаты: три координаты нашего пространства $\vec{r} = (x, y, z)$ и дополнительную координату u . Расстояние между точками такого пространства

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (u_1 - u_2)^2. \quad (1)$$

Удобнее иметь дело с бесконечно малым расстоянием от начала координат. Квадрат дифференциала его

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2. \quad (2)$$

Перепишем расстояние в трехмерном подпространстве в сферических координатах

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + du^2, \quad (3)$$

где квадрат элемента длины на единичной сфере

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4)$$

Здесь r , θ и ϕ — обычные сферические координаты: полярное расстояние, полярный угол и азимут.

Нам надо получить метрику не всего четырехмерного пространства, а метрику гиперсферы, уравнение которой

$$\vec{r}^2 + u^2 = R^2 \text{ или } r^2 + u^2 = R^2. \quad (5)$$

Продифференцировав это уравнение, получим дифференциальное соотношение

$$\vec{r} d\vec{r} + u du = 0 \text{ или } r dr + u du = 0. \quad (6)$$

Замена дифференциала координаты u из этих соотношений

$$du = -\frac{r dr}{u}, \quad du^2 = \frac{r^2 dr^2}{u^2} = \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} \quad (7)$$

в выражении для dl^2 будет означать переход из произвольных точек четырехмерного пространства в физическую гиперсферу. Получится

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} = \frac{R^2}{R^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\omega^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\omega^2. \quad (8)$$

Сделаем подстановку $r = R \sin \chi$. Тогда

$$dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\omega^2). \quad (9)$$

Ясно, что $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq r \leq R$.

4. *Метрика пространств неположительной кривизны.* Случай $k = -1$ не допускает столь наглядной интерпретации. Пространство постоянной отрицательной кривизны можно вложить в четырехмерное пространство, но не евклидово, а Лобачевского. Его описание отличается от приведенного выше заменой некоторых плюсов на минусы. Вместо гиперсферы надо рассматривать другую гиперповерхность: верхнюю часть двуполостного гиперболоида вращения при индефинитной метрике, то есть

$$l^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - (u_1 - u_2)^2, \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 - du^2. \quad (10)$$

Уравнение трехмерного пространства и дифференциал

$$r^2 - u^2 = -R^2, \quad r dr - u du = 0. \quad (11)$$

Переход в трехмерное пространство приводит к его метрике

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 - \frac{r^2 dr^2}{r^2 + R^2} = \frac{R^2 dr^2}{r^2 + R^2} + r^2 d\omega^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2 d\omega^2. \quad (12)$$

Следствием изменения знака будет замена тригонометрической функции на гиперболическую:

$$r = R \operatorname{sh} \chi, \quad dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\omega^2). \quad (13)$$

Случай $k = 0$ соответствует трехмерному евклидову пространству с обычной метрикой и заменой $r = R\chi$:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 = R^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\omega^2). \quad (14)$$

5. *Геометрия пространств.* Если ввести альтернативные обозначения для тригонометрического и гиперболического синуса и их предельного значения:

$$\operatorname{sn}_k \chi = \begin{cases} \sin \chi, & \text{при } k = 1, \\ \chi, & \text{при } k = 0, \\ \operatorname{sh} \chi, & \text{при } k = -1, \end{cases} \quad (15)$$

то многие соотношения можно будет записать для трех случаев единым образом. Например, формулы (9), (13) и (14) предстанут в виде

$$dl^2 = R^2(d\chi^2 + \text{sn}_k^2 \chi d\omega^2). \quad (16)$$

Метрика определяет всю геометрию пространства. Например, можно найти элемент его объема. Очевидно, что dl — это длина диагонали параллелепипеда со сторонами $Rd\chi$, $R \text{sn}_k \chi d\theta$ и $R \text{sn}_k \chi \sin \theta d\phi$. Объем такого параллелепипеда, то есть произведение длин сторон, это и есть элемент объема пространства:

$$d^3r = R^3 \text{sn}_k^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi. \quad (17)$$

Возьмем две точки в пространстве с координатами $\chi = 0$ и $\chi = \chi_0$. Соответствующие координаты r будут 0 и $r_0 = R \text{sn}_k \chi_0$. Пусть в первой точке находится наблюдатель, вторую назовем пробной. Соединим эти точки лучом, исходящим от наблюдателя. Вдоль луча значения углов θ и ϕ постоянны, а элемент расстояния $dl = Rd\chi$, так что расстояние от наблюдателя до пробной точки $l_0 = R\chi_0$. Элемент площади поверхности сферы на этом расстоянии $r_0^2 d^2\omega = R^2 \text{sn}_k^2 \chi_0 \sin \theta d\theta d\phi$. Элемент $d^2\omega$ относится к единичной сфере, поэтому r_0 — это радиус сферы, проходящей через пробную точку. В пространстве постоянной положительной кривизны радиус r_0 меньше расстояния от наблюдателя до поверхности сферы $r_0 = R \sin \chi_0 < l_0 = R\chi_0$, а в пространстве отрицательной кривизны наоборот $r_0 = R \text{sh} \chi_0 > R\chi_0$. В евклидовом пространстве эти величины, естественно, равны. В искривленных пространствах наблюдатель не находится в центре сферы, который вообще не помещается в реальном пространстве, а является точкой четырехмерного пространства. Площадь поверхности сферы радиуса $r = r_0$ вычисляется сразу, так как интеграл по сферическим углам равен 4π : она равна $S(\chi_0) = 4\pi r_0^2 = 4\pi R^2 \text{sn}_k^2 \chi_0$. Легко находится и длина экватора этой сферы, определяемого условиями $r = r_0$, $\theta = \pi/2$: $l_{\text{eq}}(\chi_0) = 2\pi R \text{sn}_k \chi_0$.

При $k = 1$ ($\text{sn}_1 \chi_0 = \sin \chi_0$) величины $S(\chi_0)$ и l_{eq} с ростом χ_0 сначала растут до максимума, а затем убывают и обращаются в нуль при $\chi_0 = \pi$, причем объем, заключенный внутри сферы, с увеличением координаты χ_0 , как и расстояние l_0 , монотонно растет:

$$V_1(\chi_0) = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = 4\pi R^3 \int_0^{\chi_0} \sin^2 \chi d\chi = 2\pi R^3 \left(\chi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\chi_0 \right). \quad (18)$$

Полный объем пространства в данном случае конечен: $V(\pi) = 2\pi^2 R^3$. Поэтому такое пространство называется замкнутым (или закрытым). Оно аналогично поверхности трехмерной сферы, у которой аналогом сфер являются параллели.

В пространствах с $k = -1$ и $k = 0$ элементы на сфере с ростом χ_0 растут неограниченно. Их объем бесконечен.

6. *Метрика четырехмерного пространства—времени.* Все рассуждения предыдущего пункта относились к фиксированному моменту времени. Но Вселенная должна рассматриваться как пространственно-временное многообразие, то есть четырехмерное пространство. Это реальное пространство—время ничего общего не имеет с рассмотренными выше фиктивными (вспомогательными) четырехмерными пространствами. Его геометрия определяется, как и в обычной (специальной) теории относительности, выражением для квадрата элемента интервала, которое для однородного пространства и выбранной системы отсчета имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (19)$$

где dl^2 дается одной из приведенных выше формул. Наиболее удобная форма — (16) (ее частные виды — равенства (9), (13) и (14)).

Поскольку R зависит только от времени, можно сделать замену

$$cdt = R(\eta)d\eta. \quad (20)$$

Тогда метрика пространства—времени примет форму, называемую метрикой Фридмана—Робертсона—Уокера (ФРУ) (именно в таком виде ее записали два последних автора, но, конечно, она была записана и Фридманом, но совсем в других обозначениях):

$$ds^2 = R^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sn}_k^2 \chi d\omega^2]. \quad (21)$$

Безразмерные координаты η и χ называются конформными координатами, первая определяет ход времени и изменение радиуса кривизны, а вторая — расстояние.

§ 2. Основные уравнения однородных космологических моделей

1. *Два основных уравнения космологии.* С принятием метрики (21) из уравнений тяготения Эйнштейна (общей теории относительности, ОТО) выводятся уравнения, определяющие эволюцию радиуса кривизны.

Система уравнений тяготения Эйнштейна записывается через четырехмерные тензоры второго ранга. В левой части стоит тензор кривизны пространства-времени и космологическое слагаемое, а в правой — тензор энергии-импульса всех компонент. В силу симметрии система содержит не 16, а только 10 независимых уравнений. Однако для метрики ФРУ получаются всего два независимых уравнения (остальные либо оказываются тождествами, либо совпадают с одним из этих двух). Два уравнения записываются с производными от радиуса кривизны пространства R в левых частях:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R, \quad (22)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2. \quad (23)$$

Здесь $\Lambda > 0$ — космологическая постоянная, $\rho = \rho_m + \rho_r$ — полная массовая плотность материи (в широком смысле), то есть вещества (m) и излучения (r), $P = P_m + P_r$ — давление. Константа k может принять одно из трех значений: $k = 1, 0, -1$, соответственно для моделей с положительной, нулевой и отрицательной кривизной пространства. В уравнении (23) константа k появилась как следствие соотношения $c s_k^2 \chi + k \operatorname{sn}_k^2 \chi = 1$, где $c s_k \chi = \operatorname{sn}'_k \chi$ — общее обозначение для тригонометрического и гиперболического косинусов, а также их предельного случая $c s_0(\chi) = 1$.

2. *Преобразование уравнений.* Космологические слагаемые в правых частях уравнений стоят отдельно от других слагаемых. Присоединим слагаемые с космологической постоянной в уравнениях (22)–(23) к первым слагаемым, записав их в том же виде, то есть положив

$$\frac{\Lambda c^2}{3} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_\Lambda + 3\frac{P_\Lambda}{c^2} \right), \quad \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda. \quad (24)$$

Чтобы удовлетворить этим соотношениям, надо определить

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (25)$$

Будем для краткости называть носитель этих величин, поскольку это не вещество и не излучение, вакуумом. В последнее время этот носитель называют темной энергией по аналогии с темным веществом (материей). С учетом определений (25) уравнения (22)–(23) запишутся короче:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} \right) R, \quad (26)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_t R^2 - kc^2, \quad (27)$$

где полные плотность и давление трех компонент

$$\rho_t = \rho + \rho_\Lambda = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad P_t = P + P_\Lambda = P_m + P_r + P_\Lambda. \quad (28)$$

Как явствует из уравнения (26), в создании гравитационного воздействия участвует не только плотность, но и давление, которое появляется как элемент тензора энергии-импульса. Сумма, входящая в это уравнение и обозначаемая ρ_g , называется гравитирующей или гравитационной плотностью:

$$\rho_g = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}. \quad (29)$$

Отметим еще, что если формально ввести определение полной массы трех гравитационных компонент

$$M_g = \frac{4\pi}{3} \rho_g R^3, \quad (30)$$

то уравнение (26) записывается в виде, полностью совпадающем с видом ньютоновского уравнения:

$$\ddot{R} = -G \frac{M_g}{R^2}. \quad (31)$$

Иногда и последнее слагаемое в уравнении (27) присоединяют к предпоследнему, вводя так называемые плотность и давление кривизны

$$\rho_k = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R^2}, \quad P_k = \frac{1}{8\pi G} \frac{kc^2}{R^2}. \quad (32)$$

Это определение позволяет записать второе уравнение еще короче (вид первого уже не упрощается, но перепишем и его):

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_g R, \quad (33)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_u R^2, \quad (34)$$

где (кривизна не вносит вклада в гравитационную плотность)

$$\rho_g = \rho_u + 3\frac{P_u}{c^2}, \quad \rho_u = \rho_t + \rho_k = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_k, \quad P_u = P_t + P_k = P_m + P_r + P_\Lambda + P_k. \quad (35)$$

Такое преобразование уравнений носит совершенно формальный характер, но все же в дальнейшем мы используем уравнения в такой компактной форме.

3. *Совместность уравнений.* Просто из вида уравнений следует, что для их совместности нужно потребовать выполнения какого-то дополнительного условия. Действительно, в первое уравнение входит давление, которое создает гравитацию вместе с плотностью. Во втором уравнении давления нет. Найдем указанное условие.

Продифференцируем уравнение (27) по времени. Получим

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}_t R^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho_t 2R\dot{R}, \quad \ddot{R} = \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}_t \frac{R^2}{\dot{R}} + \frac{8\pi G}{3}\rho_t R. \quad (36)$$

Приравняем полученное выражение для второй производной от радиуса кривизны его выражению из уравнения (26). Сократив на $4\pi GR$, найдем

$$\frac{1}{3}\dot{\rho}_t \frac{R}{\dot{R}} + \frac{2}{3}\rho_t = -\frac{1}{3}\rho_t - \frac{P_t}{c^2}, \quad \frac{1}{3}\dot{\rho}_t \frac{R}{\dot{R}} + \rho_t + \frac{P_t}{c^2} = 0, \quad \dot{\rho}_t = -3\left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right)H, \quad (37)$$

где появилась новая переменная H , которую будем называть функцией Хаббла. Она постоянна во всем пространстве в каждый момент времени, так как равна отношению

$$H = \frac{\dot{R}}{R}. \quad (38)$$

Из уравнения (26) выводится и уравнение, которому подчиняется функция Хаббла:

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_g. \quad (39)$$

4. *Физический смысл дополнительного условия.* Возьмем объем V и найдем полную энергию, то есть энергию всех компонент, заключенную в этом объеме. Так как ρ — это плотность массы, то для получения энергии ее надо умножить на c^2 . Найдем дифференциал полной энергии и подставим дифференциал плотности из (37). С учетом трехмерности объема ($dV/V = 3dR/R$) получится

$$d(\rho_t c^2 V) = c^2(V d\rho_t + \rho_t dV) = -3c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right) \frac{dR}{R} + c^2 \rho_t dV = -c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right) \frac{dV}{V} + c^2 \rho_t dV = -P_t dV. \quad (40)$$

Получилось, что изменение энергии равно работе силы давления, что в термодинамике означает адиабатичность процесса. Следовательно, космологическое расширение (или сжатие, если оно наступит) можно интерпретировать как адиабатический процесс.

5. *Невзаимодействующие компоненты.* Из изложенного ясно, что для полного определения эволюции космологической модели необходимо как-то установить уравнение состояния космологической смеси. В различные эпохи уравнение, связывающее вещество и излучение, может иметь различную форму, например, в него может входить температура T , для определения которой придется исследовать физические процессы взаимодействия этих гравитирующих компонент.

Однако, на протяжении большей части эволюции Вселенной вплоть до настоящего времени космологические компоненты между собой не взаимодействуют. Кривизна и вакуум вообще ни с чем взаимодействовать не могут. Две другие компоненты, то есть вещество и излучение, также могут считаться невзаимодействующими.

К веществу относятся нейтрино. Их существует три типа (электронные, мюонные и тау-нейтрино), нейтрино и антинейтрино, всего 6 компонент. Из-за малой массы покоя нейтрино всех типов оказываются ультрарелятивистскими также почти на всем протяжении эволюции Вселенной. Таким образом, вещество можно подразделить на холодную (или пылевидную) и горячую (то есть нейтрино) составляющие: $\rho_m = \rho_d + \rho_\nu$.

6. *Уравнения состояния компонент.* Для каждой из этих компонент выполняется свое уравнение состояния. Энергия холодного вещества заключена в его энергии покоя, то есть в массе, а давлением можно пренебречь и считать вещество пылевидным, то есть для ρ_d давление $P_d = 0$ (d — dust). Для равновесного (теплового) излучения и для нейтрино выполняется известное соотношение между давлением и плотностью массы, как для всяких ультрарелятивистских частиц: $P = (c^2/3)\rho$.

Таким образом,

$$P_d = 0, \quad P_r = \frac{c^2}{3}\rho_r, \quad P_\nu = \frac{c^2}{3}\rho_\nu, \quad P_{r\nu} = \frac{c^2}{3}\rho_{r\nu}, \quad P_\Lambda = -c^2\rho_\Lambda, \quad P_k = -\frac{c^2}{3}\rho_k. \quad (41)$$

Последнее уравнение вытекает из определений (32). Ультрарелятивистские нейтрино объединим с излучением.

7. *Эволюция плотностей компонент.* Из уравнения (37), записанного для каждой компоненты отдельно, и уравнений состояния (41) следуют выражения для производных:

$$\dot{\rho}_d = -3\rho_d H, \quad \dot{\rho}_{r\nu} = -3\left(\rho_{r\nu} + \frac{1}{3}\rho_{r\nu}\right) = -4\rho_{r\nu} H, \quad \dot{\rho}_\Lambda = 0. \quad (42)$$

Так как функция Хаббла является производной от логарифма радиуса кривизны, то уравнения (42) легко интегрируются:

$$\rho_d = \rho_d^0 \frac{R_0^3}{R^3}, \quad \rho_{r\nu} = \rho_{r\nu}^0 \frac{R_0^4}{R^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0. \quad (43)$$

Здесь и в дальнейшем индексом 0 отмечаются величины, относящиеся к современной эпохе.

Для определения связи плотности кривизны с радиусом кривизны интегрирования не требуется, так как она задается определением (32):

$$\rho_k = \rho_k^0 \frac{R_0^2}{R^2}, \quad \rho_k^0 = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (44)$$

Безразмерное отношение $a = R/R_0$ называют масштабным множителем (или фактором). Он связан с особой космологической величиной, определяемой из наблюдений, называемой красным смещением и обозначаемой z . Точное определение красного смещения будет дано в следующей главе, но уже здесь приведем указанную связь:

$$a = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (45)$$

Через масштабный множитель плотности выражаются проще:

$$\rho_d = \frac{\rho_d^0}{a^3}, \quad \rho_{r\nu} = \frac{\rho_{r\nu}^0}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0, \quad \rho_k = \frac{\rho_k^0}{a^2}. \quad (46)$$

С учетом уравнений состояния (41) гравитирующая плотность равна

$$\rho_g = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} = \rho_d + 2\rho_{r\nu} - 2\rho_\Lambda. \quad (47)$$

8. *Критические величины.* В космологической теории вводится несколько стандартных обозначений для величин, определяющих геометрические свойства пространства. Перенесем в уравнении (27) первое слагаемое в правой части в левую и вынесем множитель при плотности в этом слагаемом за скобки:

$$\frac{8\pi G}{3} R^2 (\rho_c - \rho_t) = -kc^2. \quad (48)$$

Первое слагаемое в скобках — так называемая критическая плотность

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (49)$$

Знак параметра k совпадает со знаком разности $\rho_t - \rho_c$: они положительны, отрицательны или равны нулю соответственно для моделей с положительной, отрицательной и нулевой кривизной.

Из уравнения (48) и определений (49) и (28) вытекает, что $\rho_c = \rho_u$.

Другими критическими параметрами (или параметрами критичности) называют отношения

$$\Omega_d = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad \Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c}, \quad \Omega_{r\nu} = \frac{\rho_{r\nu}}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_t = \frac{\rho_t}{\rho_c}, \quad \Omega_u = \frac{\rho_u}{\rho_c}, \quad \Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c} = -\frac{kc^2}{R^2}. \quad (50)$$

Очевидны соотношения

$$\Omega_t = \Omega_d + \Omega_{r\nu} + \Omega_\Lambda, \quad \Omega_u = \Omega_t + \Omega_k = \Omega_d + \Omega_{r\nu} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (51)$$

Эти параметры суть доли различных составляющих в критической плотности. Через них уравнение (48) записывается в виде

$$\dot{R}^2(1 - \Omega_t) = -kc^2, \quad k = \text{sgn}(\Omega_t - 1) = \text{sgn}(\Omega_t^0 - 1), \quad (52)$$

так что при $\Omega_t > 1$ пространство замкнуто, при $\Omega_t < 1$ — открыто, при $\Omega_t = 1$ — плоское.

9. *Общее решение основных уравнений в квадратурах.* В рассмотренном выше случае, когда три компоненты Вселенной: пылевидное вещество, излучение с нейтрино и вакуум, между собой не взаимодействуют, возможно получить решение космологических уравнений в квадратурах.

Перепишем соотношения (46) через современные значения параметров критичности:

$$\rho_d = \rho_c^0 \frac{\Omega_d^0}{a^3}, \quad \rho_{r\nu} = \rho_c^0 \frac{\Omega_{r\nu}^0}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_c^0 \Omega_\Lambda^0, \quad \rho_k = \rho_c^0 \frac{\Omega_k^0}{a^2}, \quad \Omega_\Lambda^0 = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k^0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}. \quad (53)$$

Сюда входят современные значения критической плотности $\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ и функции Хаббла H_0 (то есть постоянная Хаббла). Подставим эти выражения в формулы (35) для полной плотности и (47) для гравитационной плотности через их составляющие:

$$\rho_u = \frac{\rho_c^0}{a^4} (\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4), \quad \rho_g = \frac{\rho_c^0}{a^4} (2\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a - 2\Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (54)$$

Затем подставим полную плотность в уравнение (34):

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{H_0^2}{a^4} (\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (55)$$

В качестве параметров в это уравнение входят только величины, относящиеся к данному моменту. При этом нефизическую величину Ω_k^0 можно исключить, воспользовавшись соотношением (51) при $t = t_0$.

Разделение переменных после извлечения корня дает

$$\frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 dt. \quad (56)$$

Пределы интегрирования в интеграле по a могут быть различными, так как в общем случае подкоренное выражение, представляющее многочлен четвертой степени, может обращаться в нуль. Если этого не происходит, то эволюция масштабного множителя определяется уравнением, неявное решение которого представляется интегралом

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 t. \quad (57)$$

Радиус кривизны R или масштабный множитель a можно находить как функции времени t или в параметрическом виде, например, как функции $R(\eta)$ и $t(\eta)$ от параметра η , связанного со временем соотношением (20) и называемого конформным временем. Уравнения, связывающие a и η выглядят так:

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{H_0 R_0}{c} d\eta, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{H_0 R_0}{c} \eta. \quad (58)$$

С помощью формулы для гравитационной плотности (54) перепишем также уравнение (33):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{H_0^2}{a^4} (2\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a - 2\Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (59)$$

10. *Случай плоских моделей.* В случае плоских моделей в (57) и (58) надо просто подставить $\Omega_k^0 = 0$. Однако тогда величина R_0 неопределенна и не должна входить в величины, имеющие прямой смысл. Эту трудность можно преодолеть, просто положив $R_0 = c/H_0$. Тогда элемент размерного метрического расстояния выразится формулой

$$dl^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\chi^2 + \chi^2 d\omega^2], \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (60)$$

Метрика плоского пространства-времени тогда запишется в виде

$$ds^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2]. \quad (61)$$

Для вновь определенной метрики из (58) находим

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = d\eta, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \eta. \quad (62)$$

Так как $\Omega_{r\nu}^0 > 0$ и $\Omega_d^0 > 0$, то нули у многочлена, стоящего под корнем в знаменателе подинтегральной функции, возможны только при $\Omega_\Lambda^0 < 0$. Но отрицательные значения космологической постоянной означали бы не отталкивание, а дополнительное притяжение, что не представляет интереса для теории. Поэтому интеграл в (62) можно написать всегда.

Рассмотрим подробнее частные случаи общих уравнений, для которых получаются достаточно простые решения.

§ 3. Однокомпонентные модели

1. *Пылевидное вещество.* Получим решение, исходя из общего решения (57) и положив в нем $\Omega_r^0 = \Omega_\Lambda^0 = 0$. При таких параметрах выражение под корнем в нуль не обращается, так что указанным решением можно воспользоваться.

Вид интеграла зависит от знака $\Omega_d^0 - 1 = -\Omega_k^0$, совпадающего со знаком k :

$$H_0 t = \int_0^a \sqrt{\frac{a}{\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a}} da = \begin{cases} \frac{\sqrt{a[\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a]}}{1 - \Omega_d^0} - \frac{\Omega_d^0}{(1 - \Omega_d^0)^{3/2}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_d^0}{\Omega_d^0} a}, & k = -1, \\ \frac{2}{3} a^{3/2}, & k = 0, \\ \frac{\Omega_d^0}{(\Omega_d^0 - 1)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_d^0 - 1}{\Omega_d^0} a} - \frac{\sqrt{a[\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a]}}{\Omega_d^0 - 1}, & k = 1, \end{cases} \quad (63)$$

где $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. Формула для $k = 0$ получается как предельный случай двух других формул при $\Omega_d^0 \rightarrow 1$.

В частности, при $a = 1$, что соответствует современной эпохе, находим возраст Вселенной согласно этой модели:

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \sqrt{\frac{a}{\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a}} da = \begin{cases} \frac{1}{1 - \Omega_d^0} - \frac{\Omega_d^0}{(1 - \Omega_d^0)^{3/2}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_d^0}{\Omega_d^0}}, & k = -1, \\ \frac{2}{3}, & k = 0, \\ \frac{\Omega_d^0}{(\Omega_d^0 - 1)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_d^0 - 1}{\Omega_d^0}} - \frac{1}{\Omega_d^0 - 1}, & k = 1. \end{cases} \quad (64)$$

Для записи параметрического решения введем обозначение

$$R_m = \frac{c}{2H_0} \frac{\Omega_d^0}{|\Omega_d^0 - 1|^{3/2}} = \frac{R_0^3 H_0^2}{2c^2}. \quad (65)$$

Зависимости величин, характеризующих модель, приведены в Табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1. Эволюция радиуса кривизны в модели пылевидного вещества.

k	Время t	Радиус кривизны R	Скорость \dot{R}
1	$\frac{R_m}{c}(\eta - \sin \eta)$	$2R_m \sin^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}$
0	$\frac{R_m}{c} \frac{\eta^3}{6}$	$\frac{R_m \eta^2}{2} = \left(\frac{9R_m c^2 t^2}{2} \right)^{1/3}$	$\frac{2c}{\eta}$
-1	$\frac{R_m}{c}(\operatorname{sh} \eta - \eta)$	$2R_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{cth} \frac{\eta}{2}$

Т а б л и ц а 2. Эволюция плотности и функции Хаббла в модели пылевидного вещества.

k	H	Плотность ρ_d	$\Omega_d = \rho_d/\rho_c$
1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\cos(\eta/2)}{\sin^3(\eta/2)}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{1}{\sin^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\cos^2(\eta/2)}$
0	$\frac{c}{R_m} \frac{4}{\eta^3} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{64}{\eta^6}$	1
-1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\text{ch}(\eta/2)}{\text{sh}^3(\eta/2)}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{1}{\text{sh}^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\text{ch}^2(\eta/2)}$

Физический смысл постоянной R_m вытекает из того, что масса пыли в шаре радиусом R не зависит от времени:

$$M_d = \frac{4\pi}{3} \rho_d R^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} 2^3 R_m^3 = \frac{c^2}{G} R_m. \quad (66)$$

Из этого выражения следует, что потенциальная энергия тела массой m в гравитационном поле массы M_d на расстоянии R_m

$$G \frac{mM_d}{R_m} = mc^2 \quad (67)$$

равна ее энергии покоя. Заметим, что удвоенное значение этого расстояния $R_g = 2R_m$ называется гравитационным радиусом. На расстоянии гравитационного радиуса скорость убегания от тела (вторая космическая) равна скорости света.

2. *Ультрарелятивистское вещество.* Поскольку пространство Вселенной расширяется, то раньше плотность материи была значительно выше, чем сейчас. Кроме того, на ранних стадиях расширения вещество было горячим. Поэтому имеет особый смысл рассмотреть ультрарелятивистский предел. Ультрарелятивистским всегда является излучение, поэтому рассмотрим эволюцию при $\rho_d = \rho_\Lambda = 0$ и $P_r = \rho_r c^2/3$.

Из общего решения для случая $\Omega_d^0 = 0$, $\Omega_\Lambda^0 = 0$, $\Omega_k^0 = 1 - \Omega_r^0$ получаем связь времени с масштабным множителем. При $\Omega_r^0 \neq 0$ можно написать единую формулу

$$H_0 t = \int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_r^0 + (1 - \Omega_r^0)a^2}} = \frac{\sqrt{\Omega_r^0 + (1 - \Omega_r^0)a^2} - \sqrt{\Omega_r^0}}{1 - \Omega_r^0}. \quad (68)$$

При изменении знака разности $1 - \Omega_r^0$ меняются знаки числителя и знаменателя. Неявную зависимость можно превратить в явную

$$a = \sqrt{H_0 t} \sqrt{2\sqrt{\Omega_r^0 + (1 - \Omega_r^0)H_0 t}}. \quad (69)$$

Для $\Omega_r^0 \rightarrow 1$ предельным переходом получается

$$H_0 t = \frac{a^2}{2}, \quad a = \sqrt{2H_0 t}. \quad (70)$$

И здесь можно написать параметрическое решение. Для этого определим

$$R_m = 2 \frac{c}{H_0} \frac{\sqrt{\Omega_r^0}}{|1 - \Omega_r^0|} = R_0 \sqrt{\frac{\sqrt{\Omega_r^0}}{|1 - \Omega_r^0|}}. \quad (71)$$

Параметрические зависимости тех же величин, что и в Табл. 1 и 2, для излучения приведены в Табл. 3 и 4.

Т а б л и ц а 3. Эволюция радиуса кривизны при ультрарелятивистском веществе.

k	Время t	Радиус кривизны R	Скорость \dot{R}
1	$\frac{2R_m}{c} (1 - \cos \eta)$	$2R_m \sin \eta$	$c \text{ctg} \eta$
0	$\frac{2R_m}{c} \frac{\eta^2}{2}$	$2R_m \eta = (4R_m c t)^{1/2}$	$\frac{c}{\eta}$
-1	$\frac{2R_m}{c} (\text{ch} \eta - 1)$	$2R_m \text{sh} \eta$	$c \text{cth} \eta$

Т а б л и ц а 4. Эволюция плотности и постоянной Хаббла при ультрарелятивистском веществе.

k	H	ρ_r	$\Omega_r = \rho_r/\rho_c$
1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\cos \eta}{\sin^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\sin^4 \eta}$	$\frac{1}{\cos^2 \eta}$
0	$\frac{c}{2R_m} \frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{2t}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\eta^4}$	1
-1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\text{ch } \eta}{\text{sh}^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\text{sh}^4 \eta}$	$\frac{1}{\text{ch}^2 \eta}$

Заметим, что сохраняющейся величиной является

$$W = 4\pi\rho_r R^4. \quad (72)$$

3. *Сравнение моделей пылевидного вещества и излучения.* На рис. 1 приведены графики зависимостей радиуса кривизны (а), постоянной Хаббла (б), плотности (в) и отношения ее к критической (г) от времени t при трех типах моделей для пылевидного вещества. Все величины даны в относительных единицах, то есть приводятся $R(\eta)/R_m$, $2R_m H/c$ и логарифмы $\lg \tilde{\rho} = \lg[(8\pi G/3)(4R_m^2/c^2)\rho_d]$, $\lg \Omega_d$. Время измеряется в единицах R_m/c . Кривая зависимости R от t при $k = 1$ — это циклоида, которую описывают точки обода колеса при его качении по прямой.

На рис. 2 приведены те же величины, что и на рис. 1, но для ультрарелятивистского вещества, то есть соответственно отношения $R(\eta)/R_m$, $2R_m H/c$ и логарифмы $\lg \tilde{\rho} = \lg[(16\pi G/3)(4R_m^2/c^2)\rho_r]$, $\lg \Omega_r$ как функции времени t , измеряемого в единицах $2R_m/c$. Напомним, что значения R_m для моделей с пылевидным и релятивистским веществом различаются.

Качественно решения для ультрарелятивистского и пылевидного вещества ведут себя одинаково, однако в закрытых моделях параметр η изменяется в разных пределах. Различаются и масштабы изменения времени.

Отметим, что закрытые модели выделяются своим поведением. Согласно этим моделям при достижении максимума радиуса кривизны постоянная Хаббла и критическая плотность обращаются в нуль (H меняет знак), а параметр Ω в бесконечность. Кривые, относящиеся к открытым и плоским моделям, не являются периодическими и могут быть продолжены по времени сколь угодно далеко. Однако на ранних этапах расширения, то есть на малых временах t , ход изменения радиуса кривизны и плотности материи у моделей с разными значениями Ω у обеих рассмотренных групп моделей очень близок.

4. *Модели с космологическим слагаемым.* Как говорилось во Введении, это слагаемое первоначально было введено А. Эйнштейном для того, чтобы привести уравнения к виду, допускающему стационарные решения. При этом оно было помещено в левую часть его тензорного уравнения совершенно формально как средство противопоставить притяжению некоторое отталкивание. Потом, после открытия расширения Вселенной и тем самым ее нестационарности, А. Эйнштейн отказался от этого слагаемого, назвав его введение самой большой своей ошибкой. Действительно, компенсация достигается только при определенном значении R и вообще не нужна. В разные периоды развития космологии космологическое слагаемое добавляли и отбрасывали, так что вопрос о нем оставался открытым.

Можно получить решения космологических уравнений, не приписывая определенного значения параметру Λ , а пытаясь найти его из наблюдений. В последнее время наблюдения с определенностью указывают на то, что эта постоянная отлична от 0. К этому мы еще вернемся.

Рассмотрим модель, если нет ни вещества, ни излучения, а есть только один вакуум, то есть в уравнении (22) справа присутствует одно космологическое слагаемое. Тогда это уравнение предстанет в виде

$$\ddot{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} R \text{ или } \ddot{R} = H_\Lambda^2 R, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c. \quad (73)$$

Заметим, что физический вакуум — это не просто пустота. Например, в квантовой электродинамике, описывающей процессы взаимодействия излучения с электронами, вакуум — это живая среда, реально проявляющаяся в теории и эксперименте. Его воздействием объясняется, например, так называемый лембовский сдвиг (1058 МГц), то есть увеличение энергии уровня $2S_{1/2}$ атома водорода на 1041 МГц и уменьшение энергии уровня $2P_{1/2}$ на 17 МГц по сравнению с их энергиями, определяемыми по теории тонкой структуры Дирака.

Общее решение уравнения (73)

$$R = R_+ e^{H_\Lambda t} + R_- e^{-H_\Lambda t}. \quad (74)$$

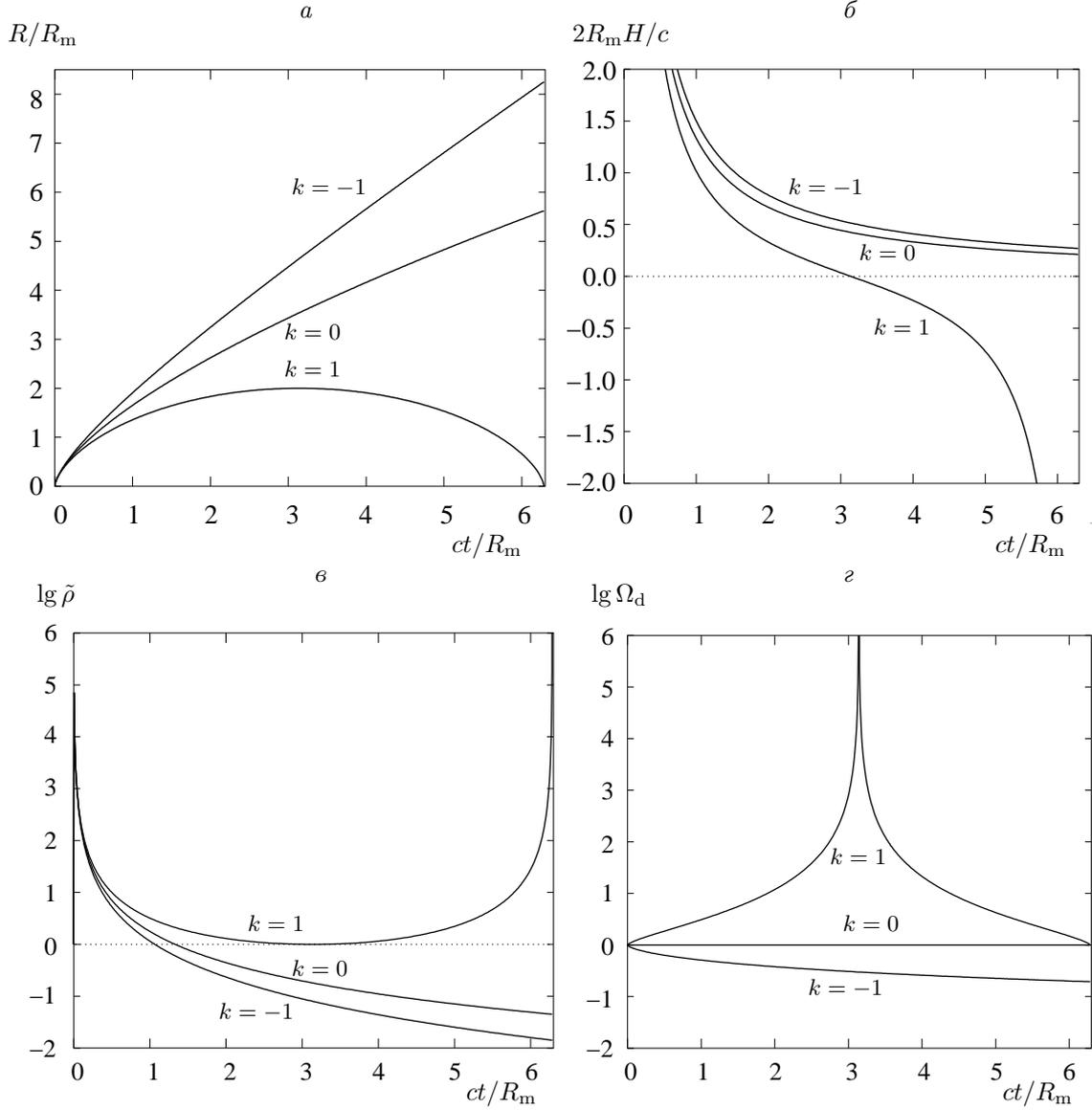


Рис. 1: Эволюция радиуса кривизны R (а), функции H (б), плотности ρ_d (в) и отношения Ω_d (г) для моделей пылевидного вещества.

Такое решение позволило в конце 70-х и начале 80-х годов двадцатого века построить теорию космологической инфляции, согласно которой сразу после начала расширения происходило экспоненциальное расширение пространства, а в самом конце этого века было открыто, что и сейчас расширение происходит с ускорением.

Глава II. Излучение в космологии

§ 1. Распространение излучения

1. *Движение излучения в пространстве и понятие горизонта.* Рассмотрим эффекты, связанные с распространением излучения в искривленном и расширяющемся пространстве.

Траектория фотона в трехмерном пространстве определяется, как и в обычной теории относительности, тем, что вдоль нее $ds = 0$ (ds берем в виде (21)).

Пусть фотон в трехмерном пространстве летит по лучу, исходящему из точки, где находится наблюдатель. Поместим в нее начало координат. Луч задается тем, что вдоль него постоянны углы θ и ϕ , то есть $\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$, так что $d\theta = d\phi = 0$. Следовательно, для такого фотона

$$d\eta^2 = d\chi^2, \quad d\chi = \pm d\eta, \quad (75)$$

так что уравнения его траектории в принятых координатах

$$\theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0, \quad \chi = \pm \eta + \text{const}. \quad (76)$$

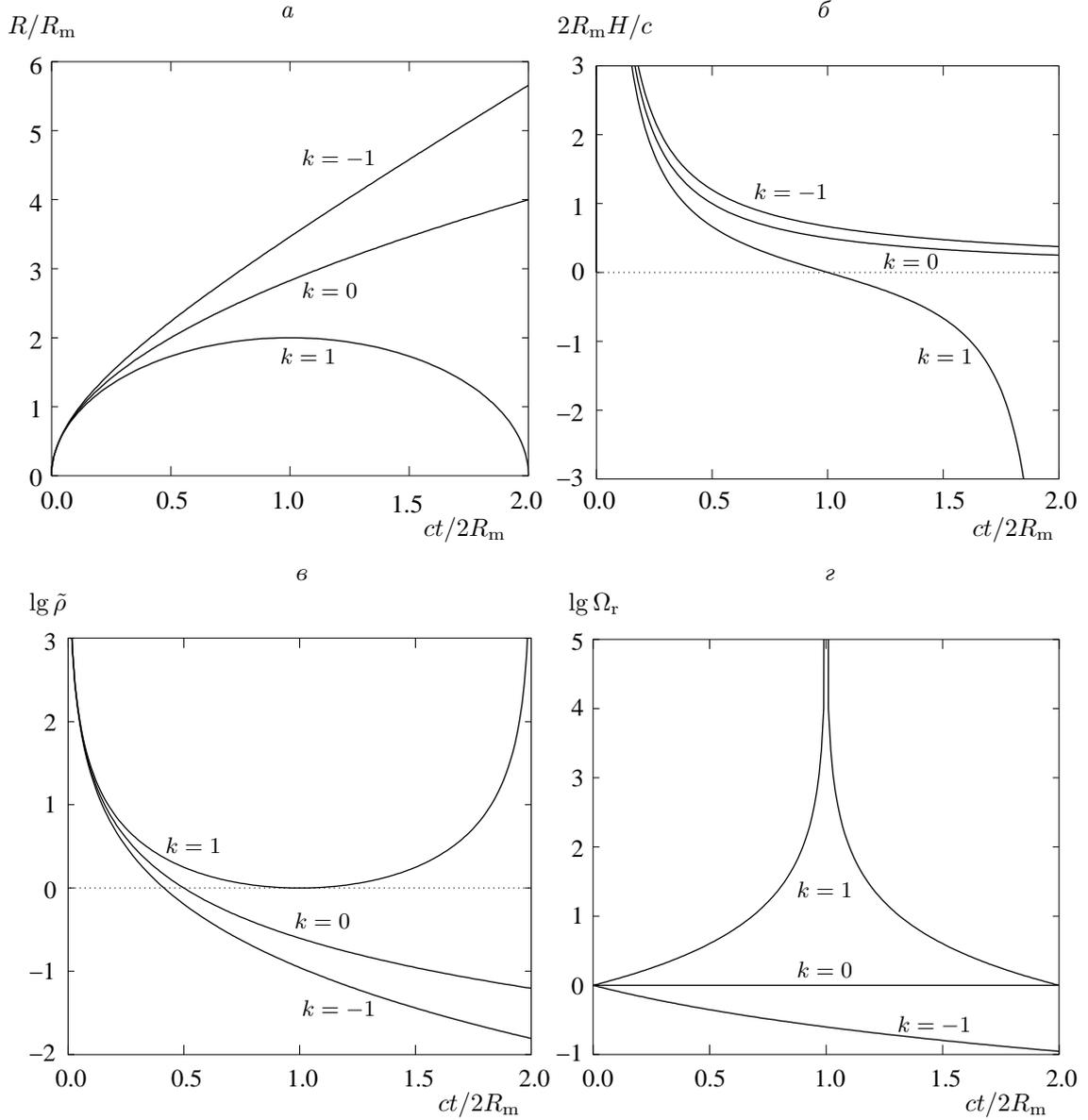


Рис. 2: Эволюция радиуса кривизны R (а), функции H (б), плотности ρ_r (в) и отношения Ω_r (г) для моделей с излучением.

Знак плюс отвечает фотону, удаляющемуся от начала координат, так как с ростом времени растет и координата, а минус — движущемуся к началу.

Если фотон доходит до наблюдателя, где $r = 0$, $\chi = 0$, в момент $t_0 = t(\eta_0)$, то распространение такого фотона определяется уравнением $\chi = \eta_0 - \eta$. Этот фотон был испущен в некоторый момент η_e , где $0 \leq \eta_e \leq \eta_0$, в точке пространства, имеющей координату $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$. Рассуждение не изменится, если считать, что фотон не излучился, а пришел в указанную точку в указанное время в направлении на наблюдателя.

Мы видим прошлое Вселенной, тем более отдаленное по времени от настоящего момента, чем более далекие области Вселенной мы наблюдаем.

Ясно, что в соотношении $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$ величина $\chi_e \leq \eta_0$ и расстояние от места возникновения фотона не может отстоять от точки наблюдения сколь угодно далеко. Фотон, излученный в начальный момент $\eta = \eta_e = 0$ в сторону наблюдателя, находящегося в точке $\chi = 0$, может дойти до него в момент $t_0 = t(\eta_0)$ только с поверхности сферы, точки которой имели (в тот же начальный момент) координату $\chi_0 = \eta_0$. Поскольку координата χ точек пространства при его расширении не изменяется, то в каждый момент времени $t(\eta_0)$ существует сфера, ограничивающая область пространства, из которой доходит излучение в данную точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от точек этой сферы. Эта сфера называется в космологии горизонтом. Вся остальная часть Вселенной наблюдениям принципиально недоступна.

Вывод о существовании горизонта не зависит от вида метрики пространства, то есть от типа кривизны. Видимая в данный момент часть пространства всегда имеет конечный объем (см. подробнее ниже). Так как параметр η_0 с течением времени увеличивается, то горизонт расширяется, аналогично горизонту на Земле с

увеличением высоты наблюдателя над поверхностью Земли.

2. *Красное смещение в космологии.* Радиус кривизны, расстояние до горизонта и связанные с ними величины не могут быть непосредственно наблюдаемы. Поэтому особенный интерес представляют величины, доступные наблюдениям.

Одна из таких величин — красное смещение. Фотон, излученный в момент $t_e = t(\eta_e)$ в точке с координатой χ_e , согласно (76) дойдет до наблюдателя в точке $\chi = 0$ в момент $t_0 = t(\eta_0)$, где

$$\eta_0 = \eta_e + \chi_e. \quad (77)$$

Свяжем с моментом t_e произвольный гребень излучаемой электромагнитной волны. Пусть следующий гребень покидает точку излучения в момент $t_e + \tau_e$ и приходит к наблюдателю в момент $t_0 + \tau_0$, то есть через периоды колебаний волны, соответствующие точкам излучения и наблюдения. Эти периоды на много порядков меньше характерного времени расширения пространства. Поэтому можно считать, что периоды бесконечно малы, а радиус кривизны за время, равное периоду волны, не меняется, так что $t_e + \tau_e = t(\eta_e + d\eta_e) = t_e + R(\eta_e)d\eta_e/c$ и $t_0 + \tau_0 = t(\eta_0 + d\eta_0) = t_0 + R(\eta_0)d\eta_0/c$. Так как точки излучения и наблюдения фиксированы, то $\chi_e = \text{const}$ и согласно (77) $d\eta_0 = d\eta_e$. Поэтому

$$\frac{\tau_0}{\tau_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(\eta_0)}{R(\eta_e)} = \frac{R_0}{R_e} = 1 + z. \quad (78)$$

Здесь наряду с соотношением для периодов написаны соотношения для частот (ν_e и ν_0) и длин волн (λ_e и λ_0) фотона, испущенного в точке с координатой χ_e и наблюдаемого в начале координат. Введена также величина $z \geq 0$, называемая красным смещением, так как в настоящее время происходит уменьшение частоты вследствие расширения пространства. Конечно, строго говоря, в красную сторону смещается только излучение с исходным спектром, имеющим частоты, большие, чем красный конец спектра, однако термин, исторически возникший по отношению к оптическому диапазону, применяется ко всему спектру.

3. *Различные типы расстояний в космологии.* Понятие расстояния, очевидное в случае евклидовой геометрии пространства, допускает неоднозначное толкование в искривленном и расширяющемся пространстве. Приведем несколько типов расстояний, различно определяемых.

1) Самое простое понятие — это расстояние между двумя точками на одном луче зрения ($\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$) с координатами χ_1 и $\chi_2 > \chi_1$ в один и тот же момент времени $t = t(\eta)$. Его естественно назвать метрическим расстоянием, так как его выражение непосредственно следует из метрики (21):

$$l = R(\eta) \int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi = R(\eta)(\chi_2 - \chi_1). \quad (79)$$

Если одна точка совмещена с наблюдателем, а координата другой χ , то метрическое расстояние точки от наблюдателя

$$l = R(\eta)\chi. \quad (80)$$

Это расстояние уже было использовано. Заметим также, что расстояние до горизонта в момент $t = t(\eta)$ равно

$$l_{\text{Hor}} = R(\eta)\eta. \quad (81)$$

Конечен и радиус горизонта и объем пространства, которое доступно наблюдению.

Метрическое расстояние — основное, но не единственное понятие расстояния. Остальные расстояния определяются так: находится выражение для некоторой зависящей от расстояния величины в условиях расширяющегося и искривленного пространства. Это выражение приравнивается к тому выражению, которое бы имела та же величина в стационарном плоском пространстве.

2) Расстояние по видимому размеру. Пусть к наблюдателю (в точку $r = 0$ с координатой $\chi = 0$, рис. 3а) приходят одновременно (в момент t_0) два фотона, испущенных в одно и то же время $t = t(\eta)$ из бесконечно близких точек с одинаковыми координатами χ . Расстояния до этих точек также одинаковы. Для обоих фотонов выполняется уравнение $\chi = \eta_0 - \eta$. Квадрат элемента линейного расстояния между точками согласно формуле (16) при $d\chi = 0$

$$dD_{\text{ad}}^2 = R^2(\eta) \text{sn}_k^2(\chi) d\omega^2. \quad (82)$$

При движении фотонов по лучу зрения их координаты θ и ϕ не меняются, так что не меняется видимое угловое расстояние между точками испускания $d\omega$. Например, это может быть угловой размер некоторого объекта. В обычном пространстве линейный размер объекта, находящегося на расстоянии l_{ad} , был бы $dD^2 = l_{\text{ad}}^2 d\omega^2$. Таким образом, расстояние по видимому размеру (или угловому диаметру) определяется так:

$$l_{\text{ad}} = R(\eta) \text{sn}_k(\chi) = R(\eta_0 - \chi) \text{sn}_k(\chi). \quad (83)$$

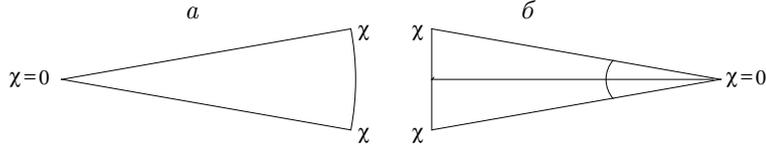


Рис. 3: Расстояния а) по угловому размеру, б) по параллаксу.

3) Расстояние по параллаксу. Пусть теперь начало координат помещено в точку, из которой исходят два фотона, принимаемые на концах другого объекта (удвоенного базиса), также расположенных по отношению к точке испускания с одной координатой χ (рис. 3б). Половина угла между направлениями указанных фотонов называется параллаксом исходной точки. Например, суточный параллакс — это угол, под которым из данной точки виден базис — радиус Земли, а годичный — радиус земной орбиты. Средняя линия между линиями наблюдения перпендикулярна базису.

Фотоны будут зарегистрированы в момент $t_0 = t(\eta_0)$. Рассуждая так же, как и выше, найдем, что

$$l_{\text{pl}} = R(\eta_0) \operatorname{sn}_k(\chi) = R_0 \operatorname{sn}_k(\chi). \quad (84)$$

Это просто радиус сферы, на которую расходятся вышедшие из одной точки фотоны.

4) Расстояние по числу фотонов. Параллаксом определяется телесный угол, под которым фотоны испускаются точечным источником. Поэтому параллактическое расстояние определяет площадь сферы с центром в точке испускания, проходящей через точку наблюдения. Если число фотонов, испускаемых некоторым изотропным источником в единицу времени, равно N_{ph} , то количество фотонов, приходящих на единицу поверхности в единицу времени к наблюдателю, будет (время источника и время наблюдателя текут по-разному, так что и их единицы различны)

$$\tilde{N}_{\text{nb}} = \frac{N_{\text{nb}}}{4\pi l_{\text{pl}}^2 [R_0/R]} = \frac{N_{\text{nb}}}{4\pi l_{\text{nb}}^2}. \quad (85)$$

Множитель в квадратных скобках в знаменателе первой дроби учитывает различие хода времени наблюдателя и источника dt_0/dt , что согласно соотношению (20) равно отношению соответствующих радиусов кривизны. Таким образом, расстояние по числу фотонов

$$l_{\text{nb}} = l_{\text{pl}} \sqrt{\frac{R_0}{R}}. \quad (86)$$

5) Расстояние по болометрической яркости или фотометрическое. При распространении в расширяющемся пространстве все фотоны изменяют свои частоты: частоты принимаемых фотонов в $R(\eta_0)/R(\eta)$ раз меньше, чем у исходных. Поэтому регистрируемая в точке наблюдения яркость объекта, то есть часть его полной (болометрической) энергии, дошедшая до наблюдателя, окажется уменьшенной в $(dt_0/dt)^2$ раз, так что соответствующее расстояние

$$l_{\text{bb}} = l_{\text{nb}} \sqrt{\frac{R_0}{R}}. \quad (87)$$

Все масштабы в трехмерном пространстве в определенный момент времени пропорциональны радиусу кривизны в тот же момент.

Каждое из введенных здесь расстояний изменяется в соответствии с величиной, по которой оно определяется. Поскольку эти величины изменяются по-разному, соответствующие расстояния также различаются. Легко заметить, что они связаны равенствами

$$l_{\text{bb}} = l_{\text{nb}} \sqrt{\frac{R_0}{R}} = l_{\text{pl}} \frac{R_0}{R} = l_{\text{ad}} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = R_0 \frac{R_0}{R} \operatorname{sn}_k(\chi). \quad (88)$$

В этой цепочке равенств каждое следующее расстояние меньше предыдущего. Так как отношение $R_0/R = 1 + z$, то все введенные расстояния можно выразить через красное смещение.

Отдельного обсуждения требует расстояние по видимому размеру. Очевидно, что при $\chi = 0$ второй, а при $\chi = \eta_0$ первый множители обращаются в нуль, то есть в месте наблюдения и на горизонте это расстояние равно нулю. Так как в промежуточных точках оно положительно, должен существовать максимум этого расстояния. Расстояние сначала увеличивается, а после максимума уменьшается. Парадоксальное на первый взгляд обстоятельство, следующее из приведенных рассуждений, означает, что угловой размер объектов одинакового линейного размера с удалением от наблюдателя сначала уменьшается, а затем начинает увеличиваться. Понять это можно, исходя из аналогии с передвижением дуги большого круга одного линейного размера вдоль меридиана на сфере. Действительно, пусть дуга размером $2R\phi_0$ (с небольшим ϕ_0) передвигается на сфере радиуса

R . Тогда, как нетрудно вывести, она при расположении ее середины в точке $(R \sin \theta_0, 0, R \cos \theta_0)$ с полюса будет видна под углом

$$\Theta_{\text{ad}} = 2 \arcsin \frac{\sin \phi_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0 \cos^2 \phi_0}}. \quad (89)$$

При $\theta_0 = 0$ этот угол равен π , затем он уменьшается, при $\theta_0 = \pi/2$ достигает минимума $2\phi_0$, а потом снова растет до исходного значения. Причина здесь заключается в том, что к полюсам меридианы сближаются.

Смена первоначального уменьшения угла, под которым виден объект одного линейного размера, ростом в космологии объясняется тем, что отдаленным областям пространства соответствуют более ранние эпохи расширения Вселенной, когда ее масштабы были меньше, так что лучи, между которыми заключен угол, располагались ближе друг к другу.

Не все расстояния используются одинаково часто. Наиболее употребительны помещенные здесь под номерами 2), 3) и 5) наряду с метрическим расстоянием, определенным равенством (79).

§ 2. Наблюдаемое расширение Вселенной

1. *Три формулировки соотношений Хаббла.* Как уже говорилось выше, в 1929 году Э. Хаббл опубликовал свое открытие, заключающееся в том, что скорости внегалактических туманностей, на самом деле являющихся галактиками, пропорциональны расстоянию до них, то есть

$$v = H_0 l. \quad (90)$$

Фактически, измерялись красные смещения линий в спектрах этих галактик. Наряду с собственными наблюдениями на 2.5-метровом телескопе обсерватории Маунт Вилсон Хаббл использовал измерения z других наблюдателей. Наибольшее значение красного смещения в его данных было $z = 0.004$. Красные смещения линий Хаббл перевел в скорости, как это обычно делается до сих пор по отношению, например, к звездным спектрам, исходя из соотношения

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{v}{c} = \tilde{v}. \quad (91)$$

Отсюда с учетом определения (78) следует, что

$$\frac{v}{c} = \tilde{v} = z. \quad (92)$$

Принятые во внимание Хабблом галактики имели скорости, не превосходящие 1200 км/с.

Конечно, из приведенных соотношений вытекает, что

$$z = \frac{H_0}{c} l. \quad (93)$$

Расстояния до галактик Хаббл определил в несколько этапов. До ближайших галактик расстояния Хабблу удалось найти, обнаружив в них несколько цефеид. В этих же ближайших галактиках были определены светимости других, более ярких объектов — шаровых скоплений, которые видны также в галактиках близкого к нам скопления Девы. Относительные расстояния до далеких (по понятиям тех времен) скоплений Хаббл определял, считая, что пятые по яркости галактики в скоплении имеют одинаковую светимость. Тем самым удалось построить шкалу расстояний. В результате было найдено, что $H_0 \approx 500$ км/(с Мпк), где 1 Мпк (мегапарсек) = $3.086 \cdot 10^{24}$ см.

Сам Хаббл и все космологи сразу же интерпретировали скорость в соотношении (90) как скорость разбегания галактик. Это следовало из толкования красного смещения как следствия эффекта Доплера.

Таким образом, имеется три формулировки закона Хаббла. Две из них независимы, третья — их следствие.

Заметим, что Хаббл завысил значение постоянной H_0 . Он принял за звезды объекты гораздо большей светимости, которые впоследствии были обнаружены методами радиоастрономии и получили название областей НП (ионизованного водорода). Завышение светимости привело к занижению расстояния и тем самым к завышению H_0 . Только в 50-е годы ошибка была обнаружена и исправлена.

2. *Интерпретация связи скорости с расстоянием.* Проще всего объясняется соотношение (90). В произвольный момент это соотношение следует записать так:

$$v = Hl. \quad (94)$$

Скорость интерпретируем как изменение со временем метрического расстояния, формула для которого (80) была приведена выше. Дифференцируем ее по времени. При этом координата χ жестко скреплена с объектом и не меняется со временем. Получается

$$\dot{l} = \dot{R}(\eta)\chi. \quad (95)$$

Исключив из двух равенств координату χ и вспомнив определение функции Хаббла (38), получим (94).

Скорость, вычисленная как произведение Hl согласно формуле (94), начиная с некоторого расстояния превосходит скорость света. Расстояние, на котором она равна скорости света, называется хаббловским расстоянием. В произвольный момент и в настоящую эпоху это расстояние

$$l_H = \frac{c}{H}, \quad l_H^0 = \frac{c}{H_0}. \quad (96)$$

Через него современный закон Хаббла записывается в виде

$$v = c \frac{l}{l_H^0}. \quad (97)$$

Что касается сверхсветовых скоростей — это скорости расширения пространства, а не скорости движения тел в пространстве. Поэтому нет ничего страшного в сверхсветовых скоростях этого расширения и нет противоречия с теорией относительности. Никакие сигналы с такими скоростями при этом не передаются.

В отличие от точного соотношения (94) два других являются приближенными.

3. *Связь скорости с красным смещением.* В отличие от своего следствия (94) равенство (93) не является точным. Действительно, будем исходить из той же формулы (94), связывающей скорость расширения с расстоянием до сопутствующего тела. Для упрощения выкладки для всех величин кроме красного смещения, относящихся к моменту наблюдения $t_0 = t(\eta_0)$, будем использовать обозначения с ноликом, а для относящихся к моменту выхода фотона $t_e = t(\eta_e)$ из источника используем индекс e . Без индекса обозначаются переменные, по которым ведется дифференцирование и интегрирование (для красного смещения приходится ставить штрих). Соответственно имеем ряд переменных со следующими связями:

$$\chi = \eta_0 - \eta, \quad \chi_e = \eta_0 - \eta_e, \quad d\chi = -d\eta, \quad d\eta = c \frac{dt}{R(\eta)} = c \frac{dR}{R} \frac{dt}{dR}. \quad (98)$$

Интеграл, который входит в формулу (79), определяющую расстояние l , не зависит от времени. Его можно преобразовать следующим образом:

$$\chi_e = \int_0^{\chi_e} d\chi = \int_{\eta_e}^{\eta_0} d\eta = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(\eta(t))} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{HR^2} = \frac{c}{R_0} \int_{R_0}^{R_e} \frac{d(R_0/R)}{H} = \frac{c}{R_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (99)$$

Здесь $\eta(t)$ — функция, обратная по отношению к $t(\eta)$. Использовано также соотношение (78) между радиусами кривизны и красным смещением. В результате получаем связь скорости с красным смещением

$$v = \dot{R}_0 \int_0^{\chi_0} d\chi = cH_0 \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (100)$$

Подставив эту связь в формулу (94), найдем соотношение между расстоянием и z :

$$l = c \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (101)$$

Вычисление интеграла надо производить после принятия конкретной модели.

4. *Интерпретация соотношения (100).* Во многих руководствах по космологии, не говоря уже о популярных изданиях, равенство (93) связывают с продольным эффектом Доплера, так как этот эффект всем известен. Согласно этому эффекту частота фотона при излучении его удаляющимся со скоростью v источником уменьшается на множитель

$$1 + z = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (102)$$

откуда

$$\tilde{v} = \frac{v}{c} = z \frac{2 + z}{2 + 2z + z^2}. \quad (103)$$

Как показывает вывод равенства (100), в космологии дело обстоит по-другому. Действительно, эффект Доплера описывает изменение частоты при движении излучающего источника в пространстве-времени Минковского с евклидовым трехмерным пространством. Частота фотона (или волн) изменяется одномоментно, непосредственно при излучении, затем фотон движется без изменения частоты. Космологические же модели

соответствуют расширяющемуся пространству, так что частота фотона уменьшается в каждой точке его пути от источника до наблюдателя. Поэтому классический эффект Доплера зависит только от относительной скорости источника и наблюдателя, а космологическое красное смещение — от расстояния, пройденного фотоном, а через него и от скорости удаления источника.

Различие формул (100) и (103) проявляется в следующем. Во-первых, согласно формуле эффекта Доплера скорость не может превосходить скорость света, а в космологии это осуществляется. Во-вторых, формула (103) универсальна, то есть скорость и красное смещение связаны однозначно. Соотношение же (100), как говорят, модельно зависимо, так как для вычисления интеграла необходимо знать функцию $H(t(z))$, которая определяется только после принятия определенной космологической модели. Летящий фотон относительно каждой точки, в которой он в данный момент находится, летит со скоростью света, а точка удаляется от наблюдателя, при этом скорость ее удаления определяется моделью. Конечно, при желании и это явление можно назвать каким-то обобщенным или кумулятивным эффектом Доплера (хотя непонятно, как можно эту кумулятивность продемонстрировать), но не классическим.

Однако если z мало и зависимость H от z можно пренебречь, то соотношение (100) переходит в равенство (91), которое при малых z тождественно равенству (103), а формула (101) совпадает с исходным законом (93), так что в приближении малых (по космологическим масштабам) расстояний закон (93) выполняется и интерпретация красного смещения как эффекта Доплера возможна.

Глава 3. Наиболее адекватная (Стандартная) космологическая модель

§ 1. Проблема выбора модели

1. *О космологических тестах.* Для выбора модели, наиболее близкой к реальной Вселенной, необходимо работать и применять методы, которые называются космологическими тестами. Отметим некоторые возможные варианты.

Казалось бы выбрать наиболее подходящую модель довольно просто. Надо измерить на некотором расстоянии l от наблюдателя длину окружности $2\pi r$ или площадь сферы $4\pi r^2$ с центрами в точке наблюдения и сравнить результаты с теми, которые справедливы для плоского пространства $2\pi l$ и $4\pi l^2$. Если окажется, что $l > r$, значит пространство замкнутое, если $l < r$ — открытое, ну а если $l = r$, то плоское. Именно измерения длин на поверхности Земли методом триангуляции позволили в XVII–XIX веках окончательно убедиться в том, что Земля очень близка к шару, и уточнить ее форму.

Однако, такой способ не дает никаких результатов по отношению к космосу, так как радиус кривизны, даже если он конечен, настолько велик, что пространство с большой степенью точности можно считать плоским. Ведь даже земная поверхность долгое время человечеству представлялась плоской. Для выяснения геометрии космического пространства приходится привлекать не столь прямые (геометрические) методы.

Другой прямой метод заключается в измерении плотности массы и сравнении ее с критической плотностью.

Долгое время астрономы, да и вообще человечество, думали, что основная масса Вселенной заключена в звездах, так как массы планет, спутников, комет и других тел Солнечной системы, а следовательно, и подобных тел в звездных системах, значительно меньше. Уже в XX веке выяснилось, что кроме звезд в Галактике имеется диффузное вещество, образующее светлые и темные туманности, газовые и пылевые, и его массу также надо учитывать.

Массы близких галактик определяют по кинематике звезд, основываясь на моделях звездной динамики. По ним устанавливаются средние значения для разных типов галактик, по ним рассчитывают общую массу видимых галактик и среднюю плотность их массы.

Если принимать во внимание только видимые части галактик, то есть светящееся вещество, то получается $\Omega_{\text{vis}}^0 = 0.012$. Однако, это вещество не может объяснить кривые вращения нашей Галактики и других галактик. Скорости вращения должны были бы быстро уменьшаться с приближением к краям галактик, чего не наблюдается. Это истолковывается так, что в периферийных областях галактик имеется несветящаяся, темная материя (dark matter) и тем самым скрытая масса. Добавление темного вещества, обеспечивающего правильную кривую вращения, увеличивает критический параметр до $\Omega_{\text{gal}}^0 = 0.04 \div 0.05$.

Следующий шаг — оценка масс скоплений галактик. Если допустить, что скопления галактик являются гравитационно связанными и для них выполняется теорема вириала, то оказывается, что масса скоплений также превышает массу составляющих его галактик. Добавление этой вириальной массы приводит к значению $\Omega_{\text{cls}}^0 = 0.25$. Очевидно, до замкнутой или даже плоской модели все это не дотягивает.

В настоящее время принято, что барионная составляющая Вселенной, то есть фактически нуклоны, вносит в плотность массы $\rho_b^0 = 2 \cdot 10^{-31}$ г/см³, что соответствует плотности числа нуклонов $\rho_b^0/m_n = 1.2 \cdot 10^{-7}$ 1/см³ и $\Omega_b = 0.025$. (Напомним, что барионами называются адроны с полуцелым спином: нуклоны, гипероны и так называемые резонансы. Адроны — общее название семейства частиц, участвующих в сильном взаимодействии. Наряду с барионами это семейство содержит пи-мезоны.)

В связи с вопросами об устойчивости галактик и скоплений галактик, а также замкнутости или открытости Вселенной возникает проблема скрытой массы, то есть наличия во Вселенной темного вещества, которое не

светится и мы его не видим. Обсуждались многие возможности. Это могла бы быть барионная материя, то есть многочисленные слабые и недоступные наблюдениям нейтронные звезды и потухшие звезды (коричневые или бурые карлики), тела типа планет и др. Такая возможность не подтверждается. Это могли бы быть нейтрино с ненулевой массой, однако их масса, даже если она не равна 0, столь мала, что почти не влияет на среднюю плотность. Предполагаются также особые элементарные частицы (аксионы, нейтралино, фотино и др.), пока не наблюдавшиеся ни в лаборатории, ни в космосе, или первичные черные дыры малых масс. Проблема остается нерешенной, ей посвящается много работ физиков и астрофизиков. Попытки обнаружить присутствие темного вещества в пределах Солнечной системы результатов не дали.

2. *Классические тесты.* К ним относится прежде всего тест видимая звездная величина - красное смещение.

Пусть галактика имеет координату χ по отношению к нам и светимость (то есть полную мощность излучения) L . Мы ее наблюдаем в момент $t_0 = t(\eta_0)$. Тогда площадь сферы, на которую растекается излучение этой галактики, равна $4\pi R_0^2 \text{sn}_k^2(\chi)$. Энергия излучения, испускаемого источником, в данном случае галактикой, как указывалось выше, ослабляется за счет уменьшения энергий (частот) всех фотонов в результате красного смещения в $1+z$ раз и на тот же множитель за счет того, что отдельные фотоны реже приходят к наблюдателю, так как время наблюдателя и время источника текут по-разному.

Таким образом, видимая полная светимость галактики с единицы площади неба

$$\tilde{L} = \frac{L}{4\pi R_0^2 \text{sn}_k^2(\chi)(1+z)^2}. \quad (104)$$

Эта величина и есть видимая болометрическая яркость, о которой говорилось выше.

Наблюдая далекие галактики и измеряя их видимые звездные величины, а затем переводя их в светимости (хотя бы относительные), а также определяя их красные смещения, строят наблюдаемую зависимость. Рассчитав эту зависимость согласно выбранной модели и сравнив ее с наблюдаемой можно оценить пригодность модели.

Однако для этого опять надо знать настоящую светимость галактики, то есть выбрать стандартную свечу. На практике в качестве стандартной свечи выбирались либо вторая, либо пятая по яркости галактика в скоплении. Однако на этом пути оказываются значительные трудности. Одна из них — это неопределенности в теории, описывающей эволюцию галактик и, в частности, их светимости. Другая трудность заключается в том, что при выборе стандартной свечи в удаленном скоплении галактик легко ошибиться. Сама идея, что галактики определенного номера по порядку светимости светят одинаково, не имеет глубокого основания.

Согласно двум исследованиям этого теста либо $\Omega_0 = 2 \pm 2$, либо $\Omega_0 = 0.66 \pm 1.36$. Улучшить результаты удалось в последние годы, но не по галактикам, о чем скажем ниже.

Второй классический тест заключается в измерении угловых диаметров источников в зависимости от их красных смещений.

Если источники имеют одинаковый размер D , то их видимый угловой диаметр

$$\vartheta = \frac{D}{l_{\text{ад}}}, \quad (105)$$

где расстояние $l_{\text{ад}}$ дается формулой (83). И эту зависимость можно рассчитать, например, пользуясь связью между расстояниями (87).

В качестве источников одного размера брали ядра богатых скоплений галактик. Этот тест мог бы предоставить независимую возможность выбрать модель, причем с использованием более удаленных объектов: не галактик, а их скоплений. Однако и здесь возникают трудности, аналогичные уже упомянутым, и улучшить результат не удается.

3. *Современная диаграмма Хаббла.* В последнее время в связи с технологическим прогрессом появилась возможность наблюдать более слабые, а следовательно, более далекие объекты, чем ранее. В качестве стандартной свечи были выбраны сверхновые звезды типа Ia. Эти звезды вспыхивают в двойных системах, состоящих из белого карлика и обычной звезды. На белый карлик натекает вещество звезды и, когда его масса вместе с натекающим веществом превосходит предел Чандрасекара, происходит взрыв. Из-за близости исходной при взрыве массы кривые блеска и, что более важно, светимости в максимуме блеска сверхновой очень близки. Точнее, светимость в максимуме и скорость спада блеска довольно жестко связаны. Даже если пропускается момент максимума, скорость спада светимости определяется надежно. Следовательно, оказывается возможным довольно уверенно оценить светимость в максимуме и построить абсолютную кривую блеска. Светимость этих сверхновых не зависит от возраста галактики. Впрочем, работы по уточнению деталей взрывов и кривых блеска продолжаются.

Привлечение новой стандартной свечи позволило не только приблизиться к определению геометрии пространства, но и обнаружило новое обстоятельство.

На самых больших расстояниях, которые были доступны наблюдениям на 2-метровом зеркальном космическом телескопе им. Хаббла (около сотни сверхновых в галактиках с красными смещениями $z \sim 1 \div 2$), наблюдается отклонение от моделей при $\Lambda = 0$. Наблюдения указывают на то, что эта постоянная отлична от 0. Две группы наблюдателей в 1998-1999 годах пришли к одинаковым заключениям.

Современная диаграмма Хаббла представлена на рис. 4а. По осям отложены $\lg z$ и величина $D_{\text{bb}} = 44.832 + 5 \lg(2H_0 q_0^2 l_{\text{bb}}/c)$, где l_{bb} — расстояние по болометрической светимости. Величина D_{bb} равна разности наблюдаемой и абсолютной болометрических звездных величин, применяемых в астрономии.

Три кривые построены для моделей, содержащих пылевидное вещество и то, что мы называем вакуумом, с различными значениями Ω_{d}^0 и $\Omega_{\Lambda}^0 = c^2 \Lambda / 3H_0^2$. Нижняя и верхняя кривые соответствуют плоскому пространству, а средняя — открытому, причем средняя и нижняя построены без учета влияния вакуума, то есть для $\Omega_{\Lambda}^0 = 0$ и, соответственно, $\Omega_{\text{d}}^0 = 0.20$ и 1.00 (модель чисто пылевидного вещества). При расчете верхней кривой принято, что $\Omega_{\text{d}}^0 = 0.24$, $\Omega_{\Lambda}^0 = 0.76$.

На рис. 4б диаграмма дана в увеличенном и нормализованном по отношению к средней кривой виде. Там же указаны точки, соответствующие наблюдениям, и средние ошибки (усы или error boxes). В самой правой части диаграммы наблюдаемые точки, полученные по сверхновым, поднимаются над двумя нижними кривыми и больше соответствуют верхней кривой, что дает основания к выводу о большом влиянии космологического слагаемого и, следовательно, вакуума.

Напомним, что построенная Э. Хабблом в 1929 году первоначальная диаграмма составляет самую левую и нижнюю часть современной диаграммы до $z \approx 0.004$ ($\lg z \approx -2.7$) и не поместилась на рисунке. К 1936 году диаграмма была продолжена до $z = 0.1$.

Дальнейшие уточнения привели к построению Стандартной космологической модели, то есть принимаемой в качестве наиболее адекватной реальной Вселенной.

§ 2. Состояние материи во Вселенной в разные эпохи

1. *Реликтовое излучение.* Несмотря на открытия квазаров, пульсаров и других интересных объектов, представления о формах вещества в современную эпоху в науке до конца последнего столетия коренным образом не изменились. Между тем, как оказалось, основной формой излучения в смысле, о котором скажем ниже, является не то излучение, которое испускают видимые объекты, а тепловое радиоизлучение с температурой около 3 К, называемое по-русски реликтовым излучением (РИ), а по-английски космическим микроволновым фоновым (cosmic microwave background radiation — CMBR).

РИ было открыто случайно (serendipitously, то есть его открытие не планировалось) в 1964 году двумя американскими радиоастрономами Арно Пензиасом и Робертом Вилсоном. К 1972 году свойства РИ были подтверждены наблюдениями более 15 групп наблюдателей на длинах волн от 0.27 до 73.5 см. В 1975 году наблюдения были продолжены до области длин волн около 0.1 мм, которая лежит ниже частоты максимума РИ $\nu_{\text{max}} = 1.6 \cdot 10^{11}$ 1/с, что соответствует длине волны 1.87 мм.

Это излучение действительно заполняет все пространство и идет равномерно со всех сторон. Оно имеет чисто чернотельный спектр, то есть описывается функцией Планка с температурой $T_0 = 2.7277 \pm 0.002$ К и подчиняется всем его законам. В соответствии с законом смещения Вина располагается ее максимум, в 1 см^3 находится $0.244(T_0 k_{\text{B}}/c\hbar)^3 = 411$ реликтовых фотонов с общей энергией $(8\pi^5 k_{\text{B}}/15h^3 c^3)T_0^4 = 4.187 \cdot 10^{-13}$ эрг (или 0.25 эВ) и массой $\rho_{\text{r}}^0 = 4.659 \cdot 10^{-34}$ г.

Поскольку современный спектр РИ с огромной точностью чисто чернотельный, этот спектр должен был быть когда-то сформирован. Согласно теории горячей Вселенной на ранних стадиях эволюции все компоненты Вселенной взаимодействовали между собой и находились в состоянии термодинамического равновесия (ТДР) с единой температурой. В определенный период излучение оторвалось от вещества, то есть перестало с ним взаимодействовать и стало распространяться свободно.

За счет расширения пространства концентрация фотонов убывает пропорционально a^{-3} , то есть $n_{\text{r}} = n_{\text{r}}^0/a^3$, а плотность массы — пропорционально a^{-4} , то есть $\rho_{\text{r}} = \rho_{\text{r}}^0/a^4$ (вторая формула в (46)). В настоящую эпоху эти величины определяются формулами

$$n_{\text{r}}^0 = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{e^{h\nu_0/(k_{\text{B}}T_0)} - 1} = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_{\text{B}}}{ch}\right)^3 T_0^3, \quad \rho_{\text{r}}^0 = \frac{8\pi h}{c^5} \int_0^{\infty} \frac{\nu_0^3 d\nu_0}{e^{h\nu_0/(k_{\text{B}}T_0)} - 1} = \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} T_0^4, \quad (106)$$

где $\zeta(3) = 1.202$ — значение дзета-функции, а $a_{\text{SB}} = \pi^2 k_{\text{B}}^4 / (15c^3 \hbar^3) = 7.5657 \cdot 10^{-15}$ эрг/(см³К⁴) — постоянная Стефана. Согласно формуле красного смещения $\nu_0 = a\nu$, так что

$$n_{\text{r}}^0 = \frac{8\pi}{c^3} a^3 \int_0^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{a h\nu/(k_{\text{B}}T_0)} - 1} = a^3 n_{\text{r}}, \quad n_{\text{r}} = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/(k_{\text{B}}T)} - 1} = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_{\text{B}}}{ch}\right)^3 T^3, \quad T = \frac{T_0}{a}. \quad (107)$$

Таким образом, в течение всего периода расширения пространства излучение оставалось чернотельным, а его температура уменьшалась так же, как и частота. Тот же вывод следует и из рассмотрения плотности массы.

По значениям температуры можно построить схему развития состояния материи во Вселенной. Эту схему можно разбить на несколько стадий.

2. *Стадии истории горячей Вселенной.* Перечислим эти стадии в ретроспективном порядке.

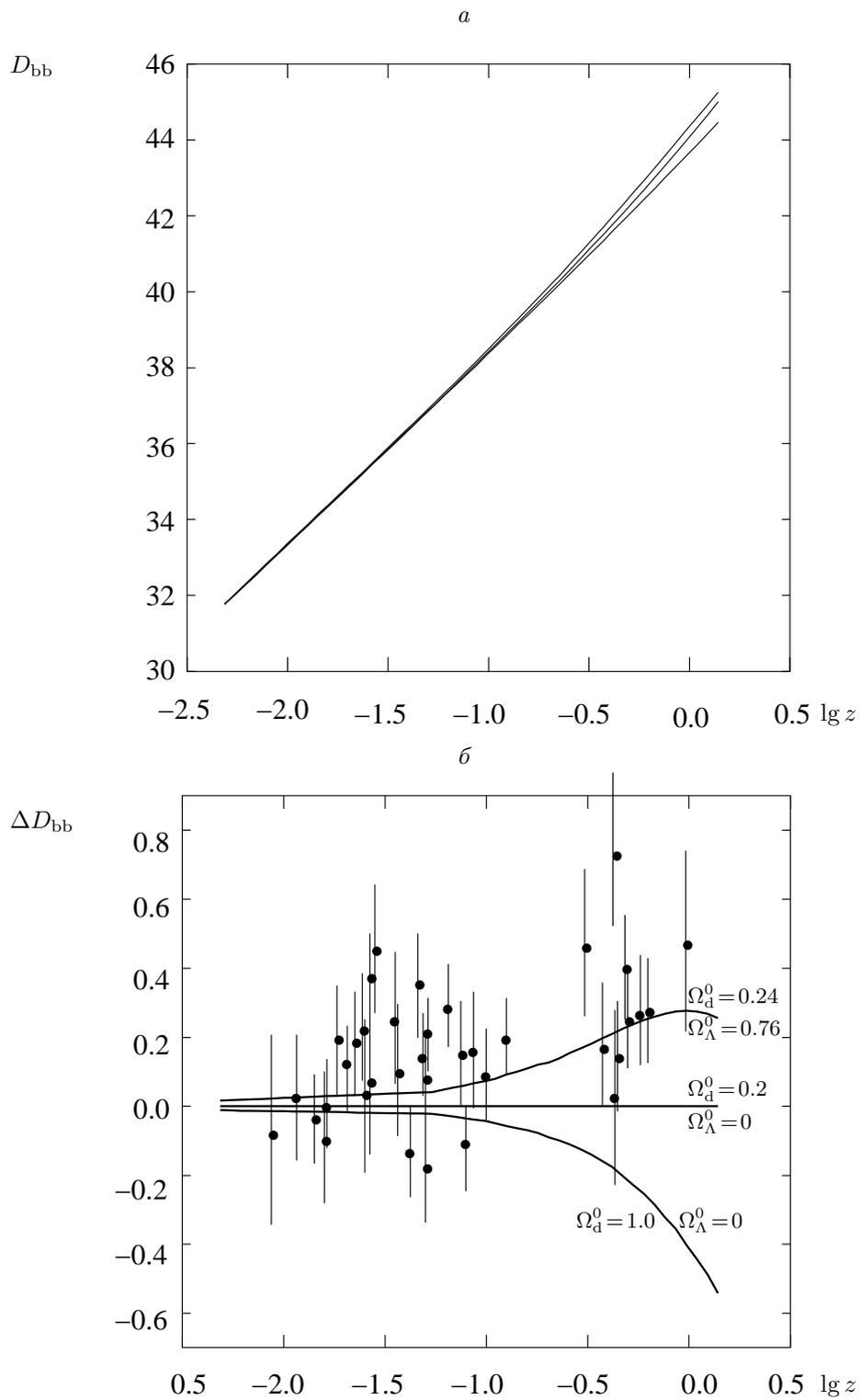


Рис. 4: Диаграмма Хаббла по современным данным.

1) Современная стадия. Она характеризуется низкой температурой основной составляющей излучения — реликтового — от нескольких градусов до $3 \div 4$ тысяч градусов. В этот период вещество нейтрально, прозрачно для РИ, и они расширяются независимо.

2) Стадия частичной ионизации.

3) Стадия полной ионизации. При температурах, превышающих $\sim 10^4$ К, водород почти полностью ионизован, а при $4 \cdot 10^3$ К — почти полностью нейтрален. Соответствующие значения красного смещения $z = 3600$ и $z = 1500$. Последнее значение z называется эпохой рекомбинации. При $T > 50000$ К ($z > 6000$) полностью ионизован гелий. Космологическая рекомбинация оказывается затянутой по времени и ее температурные границы более широки, чем у звезд.

4) Эра радиационно доминированной плазмы (РДП). Границы этой стадии широки: она начинается с температур, соответствующих энергии покоя электрона, когда еще возможны рождения пар электрон-позитрон, а заканчивается перед эпохой рекомбинации.

5) Лептонная стадия (лептоны — частицы, не участвующие в сильном взаимодействии). Температура еще более высокая, вплоть до соответствующей массе покоя пи-мезонов.

6) Адронная стадия. Здесь происходят рождения и аннигиляции нуклонов, электронов и позитронов, мезонов, нейтрино и других частиц. При $z = 5 \cdot 10^{10}$ плотность вещества достигает ядерной $2.8 \cdot 10^{14}$ г/см³.

7) Эпоха квантовой хромодинамики (КХД). Доминирует сильное взаимодействие.

8) Эпоха электро-слабого объединения. Здесь энергии достаточны для того, чтобы не различать лептоны.

9) Эпоха великого объединения — всех квантовых взаимодействий. Лептоны и другие частицы приобретают энергии, характерные для сильного взаимодействия.

10) Эпоха сверхобъединения. Объединяются все четыре типа мировых взаимодействий: электромагнитное, слабое, сильное и гравитационное.

Названия эпох по видам объединений объясняется тем, что константы связи физических взаимодействий слабо, но зависят от энергий взаимодействующих частиц и при энергиях, характерных для указанных эпох, уравниваются.

Т а б л и ц а 5. Эпохи эволюции горячей Вселенной

T (К)	$\rho_c \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$k_B T$	z	t (с)	№	Эпохи
2.7	$8.7 \cdot 10^{-30}$	$4 \cdot 10^{-16}$ эрг	0	$3 \cdot 10^{17}$	1.	Современная
$4 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{-20}$	$5.5 \cdot 10^{-13}$ эрг	1500	$5 \cdot 10^{12}$	2.	Частич. иониз.
$4 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-12}$ эрг	15000	$1.7 \cdot 10^{11}$	3.	Полная иониз.
$7 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^{-16}$	10^{-11} эрг	25000	$4.6 \cdot 10^{10}$	4.	РДП
$6 \cdot 10^9$	$1.1 \cdot 10^4$	511 кэВ	$2 \cdot 10^9$	10	5.	Лептонная
10^{12}	$8 \cdot 10^{13}$	0.1 ГэВ	$4 \cdot 10^{11}$	10^{-3}	6.	Адронная
$5 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{20}$	260 ГэВ	$2 \cdot 10^{13}$	10^{-7}	7.	КХД
$3 \cdot 10^{15}$	$5 \cdot 10^{27}$	10^3 ГэВ	$1 \cdot 10^{14}$	10^{-11}	8.	Электр.-слаб.
10^{29}	$5 \cdot 10^{79}$	10^{16} ГэВ	$4 \cdot 10^{27}$	10^{-37}	9.	Великое объедин.
10^{32}	$5 \cdot 10^{93}$	10^{19} ГэВ	$4 \cdot 10^{31}$	10^{-43}	10.	Сверхобъед.

Границами между стадиями являются характерные значения температуры T (и энергии $k_B T$). Некоторые из них получаются как комбинации размерных величин, играющих существенную роль в каждой из стадий. Соответствующие значения t и z вычисляются согласно модели. Ориентировочные их значения приведены в табл. 5.

Граница между стадиями 4) и 5) определяется энергией покоя электрона $mc^2 = 0.511$ МэВ. Ей соответствует температура $6 \cdot 10^9$ К. Между 5) и 6) основная величина — энергия покоя пи-мезона, в 264 раз большая электронной у нейтрального и в 273 раза — у заряженных мезонов: 0.13 ГэВ = 10^{13} К. Далее, между 6) и 7) пограничная энергия составляет 5 ГэВ, а между 7) и 8) — 1000 ГэВ, соответствующие температуры — $5 \cdot 10^{13}$ и $3 \cdot 10^{15}$ К. Стадия 9) начинается на значительно больших энергиях — 10^{14} ГэВ. Наконец стадии 10) отвечают фантастические значения величин, называемые планковскими. Они получаются комбинациями, включающими постоянную тяготения: энергия $E_{\text{Pl}} = \sqrt{c^5 \hbar / G} = 1.956 \cdot 10^{16}$ эрг = $1.956 \cdot 10^{11}$ Дж = $1.221 \cdot 10^{19}$ ГэВ, соответствующая массе $m_{\text{Pl}} = 2.177 \cdot 10^{-5}$ г, температура $T_{\text{Pl}} = 1.417 \cdot 10^{32}$ К, длина $l_{\text{Pl}} = \sqrt{G \hbar / c^3} = 1.616 \cdot 10^{-33}$ см, время $t_{\text{Pl}} = 5.390 \cdot 10^{-44}$ с. Планковская энергия равна 543 киловаттчасам, и такой энергией обладает элементарная частица!

3. *Физические процессы в различные периоды.* Теория физических процессов в ранней Вселенной тесно связана с физикой элементарных частиц и физикой высоких энергий. Эти три ветви физической науки развивались и развиваются параллельно.

Во все периоды расширения от самого начала до 4) включительно совокупность частиц и излучения находилась в состоянии ТДР. В период 10) (теория сверхобъединения еще не создана), ближайший к Большому Взрыву, все частицы имеют настолько большие энергии, что фактически не различаются. Все они участвуют во взаимных превращениях, причем не существенно, гравитон это или фотон, фермион или бозон. Первоначально все они имеют массу покоя, равную нулю, и подчиняются высокой степени симметрии. Постепенно, для некоторых из них условие симметрии нарушается, происходит, как говорят, спонтанное нарушение симметрии. Частицы приобретают массу и обособляются.

Первыми отрываются от общего взаимодействия частицы, связанные с гравитацией (гравитоны), с переходом к стадии 9). Они перестают участвовать в общем обмене. Выжившая их часть отрывается от остальных и в дальнейшем распространяется свободно. Остаются все “квантовомеханические” частицы.

Большинство элементарных частиц существуют парами частица-античастица (в это число не входят фотон, нейтральный пи-мезон и некоторые другие). Кроме того, согласно теории должно существовать множество тяжелых (в обычных условиях, то есть с большой массой покоя) частиц: фотино, гравитино, нейтралино, хиггсино и др.

По-видимому, уже на этой стадии, при энергиях порядка 10^{15} ГэВ, проявляется некоторая положительная разность между числом протонов и антипротонов, что впоследствии приводит к асимметрии нашего мира относительно вещества и антивещества. Доля этой нескомпенсированной части может быть всего 10^{-9} от общего числа нуклонов в ту эпоху.

Характерная энергия эпохи квантовой хромодинамики $\approx 10^{14}$ ГэВ. Чтобы разогнать заряженную частицу до таких энергий, имея в виду, что на наибольшем современном ускорителе длиной в 2 мили получают энергии в 50 ГэВ, нужно было бы построить линейный ускоритель длиной в 2 пк, то есть в 6.5 световых лет. Это расстояние больше, чем до ближайшей звезды — 1.3 пк. Поэтому единственная лаборатория для исследования таких частиц — Вселенная в ее горячей стадии. Дело осложняется тем, что такие частицы в большом количестве были давно, а потом почти полностью исчезли, так что для их обнаружения сейчас нужно затрачивать очень большие средства. Тем не менее физики и астрофизики надеются найти их реликтовые количества.

В течение этой эпохи, согласно теории того же названия, кварки, имеющие дробный заряд ($1/3$ и $2/3$), объединяются в частицы с целым зарядом.

Постепенно, в течение стадий 8), 7) и 6), обособляются все новые частицы, сначала адроны, потом лептоны, обнаруживаются их характерные признаки. Многие из них перестают существовать в заметных количествах.

С понижением температуры вымирают и другие частицы. В течение стадии 6), адронной, сначала исчезают пи-мезоны, в конце аннигилируют протоны и антипротоны, нейтроны и антинейтроны. Если бы числа протонов и антипротонов, а также других частиц и античастиц были абсолютно одинаковы, то сейчас привычного для нас вещества не было бы совсем. Все частицы аннигилировали бы и создали мощное поле излучения.

Лептонная эпоха 5) содержит события, связанные с легкими частицами. При энергии 10^{-2} ГэВ аннигилируют мю-мезоны, при 10^{-3} ГэВ от вещества отрываются нейтрино и антинейтрино, которые в дальнейшем летят свободно, не взаимодействуя ни с чем. Зарегистрировать их очень трудно и пока не удается. К исходу стадии 5) аннигилируют электроны и позитроны, их энергия превращается в энергию фотонов, как и энергия аннигилировавших ранее протонов и антипротонов. Термодинамические соображения показывают, что температура реликтового излучения за счет произошедшей аннигиляции частиц и античастиц должна быть выше, чем температура реликтовых нейтрино, оторвавшихся от остального вещества раньше (сейчас примерно 2 К). На этой же стадии, при температурах $T = 10^{11} \div 10^9$ К, происходит первичный нуклеосинтез, который обсудим в следующем пункте.

В конце стадии 4) излучение также отрывается от вещества, и плотность его становится ниже плотности вещества. А с эпохи рекомбинации излучение распространяется свободно, так как вещество прозрачно для этого излучения. Наступает время, когда излученные фотоны становятся доступны наблюдениям в неизменном виде, подвергаясь только красному смещению. До этого все они испытывали взаимодействие с веществом посредством, в основном, томсоновского рассеяния, а также тормозных процессов. Фотоны изменяли свои импульсы, а значит направление и (в меньшей степени) энергию, так что информация, которую они несли, в значительной мере замывалась. Этим взаимодействием определяется тот физический горизонт, о котором упоминалось в связи с геометрическим горизонтом. Сфера радиусом, равным расстоянию до физического горизонта, называется также сферой последнего рассеяния.

Все же некоторые сведения о Вселенной до эпохи рекомбинации могут быть получены из данных о первичном нуклеосинтезе, из флуктуаций РИ, из реликтовых нейтрино и гравитационных волн. Первые два источника уже дали такие сведения (см. ниже), произведены также первые регистрации гравволн.

Тогда же начинают образовываться атомы водорода. Незадолго до этого развиваются неоднородности, приводящие в дальнейшем к образованию галактик и их скоплений.

4. *Эволюция космологических нейтрино.* В некоторый момент расширения Вселенной нейтрино перестают

взаимодействовать с другими частицами и между собой и распространяются свободно. Хотя процесс их перехода к свободному полету занимает какой-то период времени, примем, что это произошло мгновенно. Разные типы нейтрино отделяются в разные периоды, но для простоты объединим их все.

Температура отделения нейтрино T_ν^* достаточно высока, так что все компоненты вещества были ультрарелятивистскими и их энтропии были пропорциональны третьей степени температуры. Нас интересуют электроны, позитроны, нейтрино и фотоны. Энтропии трех газов фермионов в момент отделения нейтрино были одинаковы, а энтропия фотонного (бозонного) газа отличалась множителем. Указанные энтропии в объеме V_* тогда были

$$S_{e^\pm}^* = S_\nu^* = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3, \quad S_\gamma^* = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3. \quad (108)$$

Космологическое расширение происходит как адиабатический процесс, при котором энтропия определенного объема не меняется. Следовательно, температура всех ультрарелятивистских газов изменяется обратно пропорционально масштабному множителю.

После отделения нейтрино разлетались свободно, а электроны и позитроны продолжали взаимодействовать. Когда температура стала существенно ниже $6 \cdot 10^9$ К, все позитроны аннигилировали с электронами, и аннигилировавшие пары передали свою энергию, включая энергию покоя, фотонному газу. В результате этого и энтропия электрон-позитронных пар перешла к фотонам. Фотоны продолжали взаимодействовать с оставшимися электронами и газ фотонов пришел к равновесному состоянию, повысив свою температуру, которая впоследствии уменьшалась в соответствии с общим расширением пространства. Энтропия после повышения сохранялась:

$$S_\gamma = \left(\frac{4}{3} + 2 \frac{7}{6} \right) a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{11}{3} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V T^3. \quad (109)$$

Энтропия нейтринного газа не изменялась, а вследствие космологического расширения объема в моменты, которым соответствуют значения масштабного множителя a_ν^* и a , связаны соотношением $V_*(a_\nu^*)^3 = V a^3$, так что

$$S_\nu = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* \left(\frac{a}{a_\nu^*} \right)^3 T_\nu^3 = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V T_\nu^3. \quad (110)$$

Подставив в (109) произведение $V_*(T_\nu^*)^3$ из (110), получим связь между температурами фотонного и нейтринного газов после аннигиляции электрон-позитронных пар:

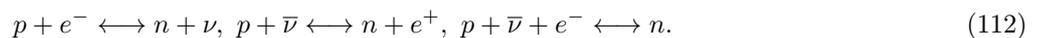
$$\frac{11}{3} a_{\text{SB}} V T_\nu^3 = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V T^3, \quad T^3 = \frac{11}{4} T_\nu^3, \quad T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T = 0.7138 T. \quad (111)$$

Температура безмассовых нейтрино строго пропорциональна температуре излучения и одинаково с ней зависит от масштабного множителя: $T_\nu = T_\nu^0/a$. Современная температура безмассовых нейтрино $T_\nu^0 = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T_0 = 1.95$ К.

5. *Образование химических элементов.* Химические элементы с порядковыми номерами, большими 2, образуются, в основном, в звездах в ходе термоядерных реакций. Процесс же образования самых распространенных в природе элементов — водорода и гелия — начинается до создания звезд.

После аннигиляции протонов и антипротонов вещество становится обычным по ассортименту частиц. Однако состояние его еще очень специфично. Не только нейтральные атомы, но даже ядра при температурах, превышающих десять миллиардов кельвинов, не могут существовать, они разбиваются окружающими частицами. Основными частицами в таком веществе являются электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино и антинейтрино.

Равновесие между протонами и нейтронами устанавливается за счет реакций слабого взаимодействия



При температуре $T \gg 10^{10}$ К ($E \gg 0.8$ МэВ) числа протонов и нейтронов приблизительно равны. При меньших температурах доля протонов возрастает, так как равновесное отношение их концентраций $n/p = \exp(-Q/k_B T)$, где $Q = 1.293$ МэВ, а Q/c^2 — разность масс нейтрона и протона. По мере расширения и охлаждения Вселенной активность реакций (112) падает, равновесие нарушается и отношение n/p стабилизируется, немного уменьшившись за счет распада нейтронов. Доля нейтронов остается на уровне 0.15.

При уменьшении температуры ниже десяти миллиардов кельвинов ($E < 0.8$ МэВ) начинают образовываться простейшие ядра. В дальнейшем все нейтроны соединяются с протонами. В результате образуются ядра ${}^4\text{He}$, небольшие доли ${}^3\text{He}$, дейтерия и лития. Более сложные ядра также образуются, но в количествах, меньших на несколько порядков. Эти процессы заканчиваются через ≈ 300 с после начала расширения. После этого температура уже недостаточна для протекания ядерных реакций.

Так как почти все нейтроны попали в ядра изотопа гелия ${}^4\text{He}$, причем каждый нейтрон там соединился с протоном, то на гелий пошла доля $2 \cdot 0.15 = 0.3$ от всего остального вещества. Точнее говоря, эта доля заключена между 0.26 и 0.32. Остальное, в основном, протоны и небольшая добавка дейтерия.

Впоследствии дейтерий идет на образование гелия, так что остается его очень мало. Количество оставшегося дейтерия зависит от плотности и, следовательно, жестко связано с плотностью в современную эпоху.

На рис. 5 представлены относительные (по отношению к водороду) содержания первичных гелия $Y_p = {}^4\text{He}/\text{H}$ (индекс p означает primordial), дейтерия вместе с более легким изотопом гелия $(\text{D}+{}^3\text{He})/\text{H}$ и лития ${}^7\text{Li}/\text{H}$, рассчитанные в зависимости от современных значений плотности вещества и отношения чисел нуклонов и фотонов $\eta_{10} = 10^{10}\eta_{\text{nc}}/n_{\text{ph}}$ (точнее, от $\lg \eta_{10}$). Все величины даны с указанием доверительных интервалов в два стандартных отклонения. Две вертикальные прямые показывают границы допустимых значений аргумента η_{10} , согласующихся с данными наблюдений.

§ 3. Геометрические свойства Стандартной модели

1. *Плоская трехкомпонентная модель.* Современная космология стала наукой, основанной на данных наблюдений, которые теперь имеют достаточную точность для построения модели, наиболее адекватной настоящей Вселенной.

Самым существенным является обстоятельство, что пространство весьма близко к плоскому, поэтому принимается, что $k = 0$. В этом случае радиус кривизны бесконечно большой и не должен входить в выражения для величин, имеющих физический смысл. Поэтому, как это часто делается, за современное его значение примем хаббловское расстояние: $R_0 = l_{\text{H}}^0 = c/H_0$. Тогда метрика переписывается в виде (61)

$$ds^2 = (l_{\text{H}}^0)^2 a^2(\eta) [d\eta^2 - dx^2 - \chi^2 d\omega^2]. \quad (113)$$

Связь времени и временной координаты (с использованием соотношения $cdt = l_{\text{H}}^0 a(\eta) d\eta$) с масштабным множителем a получается из (62):

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{\text{rv}}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_{\Lambda}^0 a^4}} = H_0 t, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{\text{rv}}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_{\Lambda}^0 a^4}} = \eta. \quad (114)$$

Если ввести обозначения ($\Omega_{\text{rv}}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 + \Omega_{\Lambda}^0 = \Omega_{\text{t}} = 1$)

$$H_{\Lambda} = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda}^0}, \quad x_0 = \left(\frac{\Omega_{\Lambda}^0}{\Omega_{\text{rv}}^0} \right)^{1/4}, \quad \beta = \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(\Omega_{\text{rv}}^0)^{3/4} (\Omega_{\Lambda}^0)^{1/4}}, \quad \eta_* = (\Omega_{\text{rv}}^0 \Omega_{\Lambda}^0)^{-1/4}, \quad (115)$$

и сделать замену переменной $a = x/x_0$, то уравнение (55) перейдет в

$$H = \frac{\dot{x}}{x} = H_{\Lambda} \frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x^2}, \quad (116)$$

а связи между переменными примут вид

$$H_{\Lambda} t = I_1(x, \beta), \quad \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad I_j(x, \beta) = \int_0^x \frac{x^j dx}{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}. \quad (117)$$

2. *Плотности четырех космологических компонент и их доли в критической плотности.* Единственной космической компонентой, плотность которой известна с большой точностью, является излучение. Современному значению температуры теплового реликтового фона $T_{\text{r}}^0 = 2.7277 \pm 0.002$ К отвечает согласно закону Стефана—Больцмана плотность энергии $4.187 \cdot 10^{-13}$ эрг/см³ и массовая плотность $\rho_{\text{r}}^0 = 4.659 \cdot 10^{-34}$ г/см³.

Значение современной критической плотности известно менее точно. В последнее время интервал возможных значений H_0 сузился, считается, что она известна с погрешностью несколько % : $H_0 = 70 \pm 3$ км/с/Мпк. Поставлена задача в недалеком будущем довести точность определения этой постоянной до 1 %.

Среднее и наиболее приемлемое значение постоянной $H_0 \approx 70$ км/с/Мпк = $2.268 \cdot 10^{-18}$ 1/с, для которого и будут производиться все оценки. Все остальные величины будут приводиться для этого значения H_0 .

Современные критическая плотность и хаббловское расстояние составляют

$$\rho_{\text{c}}^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9.2 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3, \quad (118)$$

$$l_{\text{H}}^0 = \frac{c}{H_0} = 1.32 \cdot 10^{28} \text{ см} = 14.2 \text{ Г св. лет} = 4.28 \text{ Гпк}.$$

Современная доля излучения весьма мала, а именно

$$\Omega_{\text{r}}^0 = 5.06 \cdot 10^{-5}. \quad (119)$$

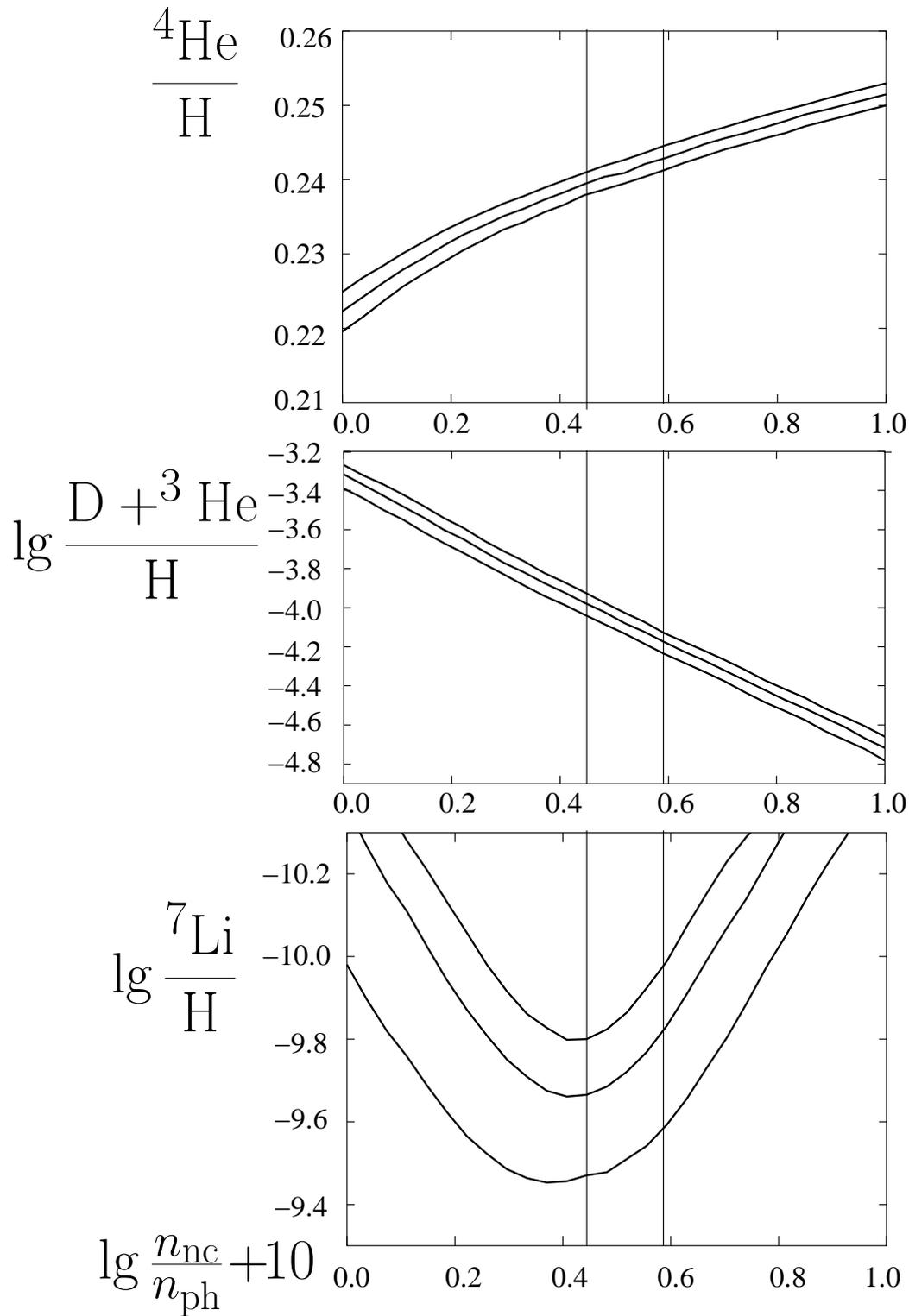


Рис. 5: Содержания первичных гелия, дейтерия и лития в зависимости от значения η_{10} .

Немного больше приходится на 6 типов нейтрино. Плотность их массы (всех типов вместе) и доля в критической плотности

$$6\rho_\nu^0 = 6a_\rho(T_\nu^0)^4 = 6.35 \cdot 10^{-34} \frac{\Gamma}{\text{см}^3}, \quad \Omega_\nu^0 = 6\frac{\rho_\nu^0}{\rho_c^0} = 6.90 \cdot 10^{-5}. \quad (120)$$

Ввиду одинаковой зависимости от температуры плотностей излучения и безмассовых нейтрино их объединяют. Совместный вклад излучения и таких нейтрино в критическую плотность:

$$\rho_{\text{rv}}^0 = \rho_r^0 + 6\rho_\nu^0 = 1.10 \cdot 10^{-33} \frac{\Gamma}{\text{см}^3}, \quad \Omega_{\text{rv}}^0 = \Omega_r^0 + \Omega_\nu^0 = 1.2 \cdot 10^{-4}. \quad (121)$$

Следующий параметр, известный примерно с такой же относительной точностью, — это значение доли вакуума $\Omega_\Lambda^0 \approx 0.72$. На долю вещества остается

$$\Omega_d^0 = 1 - \Omega_{\text{rv}}^0 - \Omega_\Lambda^0 = 0.27988 \approx 0.28. \quad (122)$$

Плотности вакуума и вещества следовательно

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda^0 \rho_c^0 = 6.63 \cdot 10^{-30} \Gamma/\text{см}^3, \quad \rho_d = (1 - \Omega_r^0 - \Omega_\Lambda^0) \rho_c^0 \approx 2.58 \cdot 10^{-30} \Gamma/\text{см}^3. \quad (123)$$

По плотностям можно рассчитать, какому числу атомов водорода (протонов) в одном кубическом метре сейчас они соответствуют. Получается, что критической плотности отвечает число 5.5, плотности вакуума около 4, плотности пылевого вещества 1.5, а плотности барионов всего 0.14. Эти значения во много раз меньше тех, которые характерны для астрономических объектов: на Земле при нормальных условиях $2.7 \cdot 10^{19}$ (число Ломмидта), в атмосфере Солнца на его поверхности $\approx 10^{12}$, в планетарных туманностях 10^4 , в разреженной межзвездной среде ≈ 1 , но все это в одном кубическом сантиметре, а не метре. Из этих чисел следует, что большую часть космического пространства занимают пустоты, где плотность материи почти нулевая.

Параметр интегралов с переменным верхним пределом $\beta = 265.69$. Значения других постоянных $H_\Lambda = 59.397 \text{ км/с/Мпк} = 1.9249 \cdot 10^{-18} \text{ 1/с}$, $x_0 = 8.8088$, $\eta_* = 10.381$. Два интеграла (117) вычисляются численно. Возраст Вселенной согласно Стандартной модели с принятыми значениями параметров составляет $t_0 = I_1(x_0, \beta)/H_\Lambda = 4.33 \cdot 10^{17} \text{ с} = 13.72 \text{ Г лет}$.

3. *Расстояния, скорости, ускорения: в прошлом, современные и в будущем.* В плоской модели $\text{sn}_0(\chi) = \chi$, так что расстояние по параллаксу и радиус сферы совпадают с метрическим расстоянием: $l_{\text{pl}} = r = l$. В Стандартной модели с выражением для l/l_H^0 совпадает и выражение для безразмерной скорости расширения v/c . Действительно, в произвольный момент

$$\frac{v}{c} = \frac{\dot{l}}{c} = \frac{H}{c} l = \frac{l}{l_H}. \quad (124)$$

Метрическое расстояние от современного наблюдателя до места с координатой χ в Стандартной модели определяется формулой, следующей из (94) и (117):

$$l^0 = R(\eta_0)\chi = R_0\chi = l_H^0(\eta_0 - \eta) = l_H^0\eta_*[I_0(x_0, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (125)$$

Равенства (88) переписываются в виде

$$l_{\text{bb}}^0 = l_{\text{nb}}^0 \sqrt{1+z} = l_{\text{pl}}^0(1+z) = l_{\text{ad}}^0(1+z)^2 = R_0\chi(1+z) = l^0(1+z). \quad (126)$$

В дальнейшем говорим, в основном, о современных значениях и используем безразмерные расстояния, измеряя их в хаббловском по схеме $\tilde{l} = l^0/l_H^0$. Таким образом, все расстояния и v/c выражаются через метрическое:

$$\tilde{l}_{\text{pl}} = \frac{v}{c} = \tilde{l} = \eta_*[I_0(x_0, \beta) - I_0(x, \beta)], \quad \tilde{l}_{\text{ad}} = \tilde{l}a, \quad \tilde{l}_{\text{nb}} = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{a}}, \quad \tilde{l}_{\text{bb}} = \frac{\tilde{l}}{a}, \quad a = \frac{x}{x_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (127)$$

На рис. 6 помещены графики расстояний в зависимости от параметра x (6a) и красного смещения z (6b).

Отметим два момента, связанных с расстояниями. Первый момент, когда расстояние по видимому размеру принимает максимальное значение ($z = 1.6302$), а второй — когда метрическое расстояние оказывается равным хаббловскому ($z = 1.4233$).

Ускорение космологического расширения находится с помощью уравнения (33):

$$\dot{v} = \ddot{l} = \frac{d^2}{dt^2} l_H^0 a \chi = l_H^0 \ddot{a} \chi = \frac{\ddot{a}}{a} l = \frac{\ddot{R}}{R} l = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g l = H_\Lambda^2 \frac{x^4 - \beta x/2 - 1}{x^4} l. \quad (128)$$

Как уже говорилось, в гравитационной плотности $\rho_g = \rho_d + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda$ плотности ρ_d и ρ_r с ростом возраста Вселенной убывают, а $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0$. Поэтому в числителе последней дроби в (128) роль первого слагаемого со

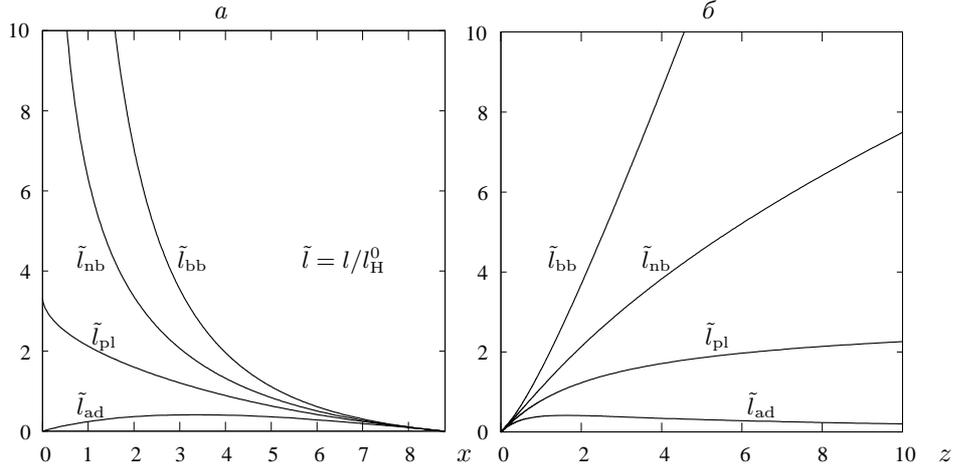


Рис. 6: Расстояния в зависимости от x и z .

временем возрастает. В настоящее время ($x = x_0$) гравитационная плотность отрицательна: $\rho_g^0 = \rho_d^0 + 2\rho_r^0 - 2\rho_\Lambda^0 = -1.07 \cdot 10^{-29}$ г/см³, так что расширение происходит с ускорением. Но ускорение на современном хаббловском расстоянии (скорость равна скорости света) составляет всего лишь

$$\dot{v}_H^0 = -\frac{4\pi G}{3}\rho_g^0 l_H^0 = \frac{H_0 c}{2}(2\Omega_\Lambda^0 - \Omega_d^0 - 2\Omega_{rv}^0) = 3.94 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2 \approx 4 \text{ \AA/с}^2. \quad (129)$$

В далеком будущем при $t \rightarrow \infty$

$$a = \frac{1}{1+z} \sim \left(\frac{\Omega_d^0}{4\Omega_\Lambda^0}\right)^{1/3} e^{H_\Lambda t} = 0.460 e^{H_\Lambda t}, \quad z \rightarrow -1, \quad x \sim 4.05 e^{H_\Lambda t}, \quad \eta \sim \eta_\infty - 2.56 e^{-H_\Lambda t}, \quad \eta_\infty = 4.45. \quad (130)$$

Таким образом, масштаб Вселенной будет увеличиваться экспоненциально, то есть осуществится вторая инфляция, о которой скажем подробнее дальше. Однако, согласно (130) реально экспоненциальное расширение начнется лишь при $t \sim t_\Lambda = 1/H_\Lambda$. Масштаб времени $1/H_0 = 4.41 \cdot 10^{17}$ с = 13.97 Гига лет, $t_\Lambda = 1/H_\Lambda = 5.195 \cdot 10^{17}$ с = 16.46 Гига лет. Определим также расстояние $l_\Lambda = c/H_\Lambda = l_H^0/\sqrt{\Omega_\Lambda^0} = 1.557 \cdot 10^{28}$ см = 5.047 Гпк.

Скорость расширения пространства на хаббловском расстоянии по определению равна скорости света. Скорость изменения самого хаббловского расстояния находится с использованием уравнения (39):

$$\dot{l}_H = \frac{d}{dt} \frac{c}{H} = -\frac{c}{H^2} \dot{H} = \frac{c}{H^2} \left(H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_g \right) = c \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_g}{\rho_c} \right) = \frac{c}{2} \frac{4 + 3\beta x}{1 + \beta x + x^4}. \quad (131)$$

Из формулы следует, что в начале расширения эта скорость близка к двум световым, она уменьшается, а в отдаленном будущем устремится к нулю.

Ускорение на хаббловском расстоянии с течением времени возрастает, но остается конечным:

$$\ddot{v}_H = -\frac{4\pi G}{3}\rho_g \dot{l}_H = -\frac{4\pi G}{3}\rho_g \frac{c}{H} = H_\Lambda c \frac{x^4 - \beta x/2 - 1}{x^2 \sqrt{1 + \beta x + x^4}} \rightarrow H_\Lambda c = 5.77 \text{ \AA/с}^2. \quad (132)$$

Ускорение самого расстояния отрицательно:

$$\ddot{l}_H = -\frac{c}{2} \frac{H_\Lambda}{x} \frac{\beta + 16x^3 + 9\beta x^4}{(1 + \beta x + x^4)^{3/2}} \sim -c H_\Lambda \frac{9}{2} \frac{\beta}{x^3}. \quad (133)$$

§ 4. Космологическая инфляция

1. *Успехи моделей Фридмана-Леметра и теории горячей Вселенной.* Открытие реликтового излучения привело к тому, что модель горячей Вселенной является теперь общепризнанной. Последние данные наблюдений, ставшие возможными благодаря современному технологическому прогрессу, позволили выбрать наиболее адекватную модель, которую называют моделью Λ CDM, то есть модель с основной роль холодного темного вещества и космологического слагаемого. Большая роль космологического слагаемого, то есть вакуума или темной энергии, в частности, проявляется в том, что гравитационное воздействие этой субстанции приводит к ускоряющемуся расширению пространства. На основе Стандартной модели были построены количественные теории первичного нуклеосинтеза и образования крупномасштабной структуры.

Космологи утверждают, что они хорошо представляют историю горячей Вселенной, начиная с момента от начала расширения в 10^{-3} секунды, и более или менее определенно, начиная с 10^{-11} с. Более ранние мгновения не

столь определенны вследствие неясностей в теории элементарных частиц, так как выбрать наиболее адекватную теорию не позволяет невозможность достичь таких энергий, которые требуются для этого (см. табл. 5).

Однако, возникают вопросы по отношению к самым ранним этапам эволюции Вселенной, примыкающим к планковской эпохе. Неясности физических условий в эти этапы проявляются в виде проблем классических космологических моделей в современную эпоху.

2. *Проблемы моделей.* Укажем некоторые из них.

а) Проблема плоскостности. В настоящее время кривизна пространства Вселенной оценивается как очень малая. Неясна причина этого.

Оценим зависимость Ω_u от красного смещения. применим соотношение (51). Из него вытекает, что

$$\Omega_k = 1 - \Omega_u = 1 - \Omega_{rv} - \Omega_d - \Omega_\Lambda = -\frac{kc^2}{\dot{H}^2} = -\frac{kc^2}{H^2 R^2}, \quad (134)$$

в частности,

$$\Omega_k^0 = 1 - \Omega_u^0 = 1 - \Omega_{rv}^0 - \Omega_d^0 - \Omega_\Lambda^0 = -\frac{kc^2}{\dot{R}_0^2} = -\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2}. \quad (135)$$

Отношение

$$r = \frac{1 - \Omega_u}{1 - \Omega_u^0} = \frac{H_0^2 R_0^2}{H^2 R^2} = \frac{H_0^2}{H^2} \frac{1}{a^2} = \frac{H_0^2}{H^2} (1+z)^2, \quad (136)$$

а с учетом (55)

$$r = \frac{1 - \Omega_u}{1 - \Omega_u^0} = \frac{1}{1 + \Omega_{rv}^0 z(2+z) + \Omega_d^0 z - \Omega_\Lambda^0 \frac{z(2+z)}{(1+z)^2}}. \quad (137)$$

Это отношение для трех последних значений z в Табл. 5 получается соответственно равным 10^{-26} , $6 \cdot 10^{-48}$ и $6 \cdot 10^{-56}$. То есть, для того, чтобы современная кривизна была бы порядка единиц или даже десятков, ранняя Вселенная должна была быть плоской с фантастической точностью. Каким образом установилось такое начальное значение, в рамках Стандартной модели совершенно непонятно.

б) Проблема горизонта. Было показано, что расстояние до геометрического горизонта определяется формулой

$$l_{\text{Hor}} = R(\eta)\eta = l_{\text{H}}^0 a(\eta)\eta. \quad (138)$$

В частности, для плоской модели пылевидного вещества получается $l_{\text{Hor}} = 3ct$, для плоской же модели ультрарелятивистской материи соответственно $l_{\text{Hor}} = 2ct$.

Расстояние до горизонта (или хаббловское расстояние, отличающееся на множитель) часто называют размером Вселенной. В планковскую эпоху, если считать, что осуществляется плоская модель излучения (ультрарелятивистского вещества), это расстояние было равно двум планковским $l_{\text{Hor}}^{\text{Pl}} = 2ct_{\text{Pl}} = 2l_{\text{Pl}} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-33}$ см. Современное расстояние по Стандартной модели $l_{\text{Hor}}^0 = l_{\text{H}}^0 \eta_0 = 3.32 l_{\text{H}}^0 = 4.4 \cdot 10^{28}$ см = 14.2 Гпк. Если исходить из этого значения, то современный размер Вселенной произошел из размера $l = l_{\text{Hor}}^0 / (1 + z_{\text{Pl}}) = 4.4 \cdot 10^{28} / (5 \cdot 10^{31}) = 10^{-3}$ см. Различие в 29 порядков необъяснимо.

в) Проблема однородности. Она связана с предыдущей. РИ, как показывают наблюдения, исключительно однородно, во всех направлениях температура его одинакова. При этом температура РИ в разные эпохи была разной, но однородность сохранялась всегда, так как ничто не могло ее нарушить. И распределения других компонент Вселенной тоже однородно в масштабах, меньших космологических. Какой-то процесс должен был изначально выравнивать свойства различных объемов.

Области однородности столь велики, что отдельные их части причинно не связаны, то есть они никогда не обменивались энергией, импульсом и вообще информацией. Действительно, современное хаббловское расстояние $l_{\text{H}}^0 = 3 \cdot 10^{10} / (2.27 \cdot 10^{-17}) = 1.3 \cdot 10^{28}$ см. В планковскую эпоху это расстояние было $l_{\text{H}}^0 / z_{\text{Pl}} = 1.3 \cdot 10^{28} / 4 \cdot 10^{31} = 0.32 \cdot 10^{-3}$ см. Планковское же расстояние, на котором возможен был обмен информацией, так как планковскую длину свет проходит за планковское время, составляет $l_{\text{Pl}} = ct_{\text{Pl}} = 1.6 \cdot 10^{-33}$ см. Если не предположить одинаковых начальных условий для каждой из несвязанных частей всего пространства, такая однородность непонятна.

г) Зарядовая асимметрия. Наш мир, как говорят, зарядово асимметричен. Действительно, вещество состоит из протонов, нейтронов и электронов, позитроны образуются в некоторых объектах и даже в значительных количествах, однако, почти сразу же аннигилируют с электронами. Антипротоны наблюдаются только в реакторах и ускорителях.

Как отмечалось выше, в ранней Вселенной частиц и античастиц было почти поровну, преобладание частиц было незначительным, однако, оно как-то должно было образоваться.

д) Другие трудности. Имеются и некоторые другие неясности теории расширяющейся Вселенной. Например, массовая плотность в планковскую эпоху была равна $\rho_{\text{Pl}} = \frac{c^5}{G^2 \hbar} = 5.16 \cdot 10^{92}$ г/см³. Если бы ее эволюция

происходила согласно модели излучения, то современное ее значение было бы $\rho_0 = \rho_{P1}/z_{P1}^3 = 7 \cdot 10^{-34}$, что примерно соответствует плотности РИ. Если же исходить из того, что сохраняется энергия, то получилось бы $\rho_0 = \rho_{P1}(2l_{P1}/(3.8 \cdot 10^{28})^4 = 1.7 \cdot 10^{-152}$ (обе величины в г/см³).

Наконец, неясны причины появления малых возмущений, приводящих впоследствии к образованию галактик и их скоплений, а также вообще причина расширения пространства.

3. *Теория инфляции.* В конце 70-х и начале 80-х годов была создана теория, устраняющая указанные недостатки. Различные ее варианты были разработаны А.А.Старобинским и В.Ф.Мухановым с Г.В.Чибисовым. Название "инфляция" было дано А.Guth, объяснившим основные проблемы. Усовершенствована теория была А.Линде. Здесь излагается простой вариант теории.

Теория инфляции утверждает, что в самом начале расширения решающую роль играл вакуум: расширение происходило так, как это описывается космологическим слагаемым, то есть уравнением (73). Его решение — экспоненциальное: $R = R_* \exp(\sqrt{\Lambda/3}ct)$. Так как при этом $H = H_\Lambda = \frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c$, то закон раздувания можно записать и виде $R = R_* \exp(H_\Lambda t)$. Критическая плотность равна плотности вакуума, так как $\rho_c^{P1} = \frac{3H_\Lambda^2}{8\pi G} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \rho_\Lambda$. Таким образом, в планковскую эпоху равенство вакуумной и критической плотностей выполнялось точно, что объясняет близость плоской модели во все последующее время к реальной Вселенной.

Начальная плотность — это планковская массовая плотность $\rho_{P1} = m_{P1}/l_{P1}^3 = 2.177 \cdot 10^{-5}/(1.616 \cdot 10^{-33})^3 = 5.159 \cdot 10^{93}$ г/см³. Так как это вакуумная плотность, то получаются значения величин:

$$\rho_{P1} = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad \Lambda = 8\pi \frac{c^3}{G\hbar} = \frac{8\pi}{l_{P1}^2} = 9.626 \cdot 10^{66} \text{ см}^{-2}, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{c}{l_{P1}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{t_{P1}} = 5.370 \cdot 10^{43} 1/\text{с}. \quad (139)$$

В то время как плотность (вакуума) при инфляции оставалась практически неизменной, размеры Вселенной быстро увеличивались. Пусть в момент $t = t_{P1}$ радиус $R = l_{P1}$. Тогда в последующие моменты

$$R = l_{P1} \exp(H_\Lambda(t - t_{P1})) = l_{P1} \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{t}{t_{P1}} - 1\right)\right). \quad (140)$$

Раздувание пространства происходит от "планковских" масштабов до "хаббловских". При энергии частицы $E_{P1} = 1.956 \cdot 10^{16}$ эрг, температура должна быть $T_{P1} = E_{P1}/k_B = 1.417 \cdot 10^{32}$ К. Такая температура соответствует красному смещению $1 + z_{P1} = T_{P1}/T_0 = 5.195 \cdot 10^{31}$. При современном значении постоянной Хаббла $H_0 = 70$ (км/с)/Мпк = $2.268 \cdot 10^{-18}$ 1/с современное хаббловское расстояние $l_H^0 = c/H_0 = 1.322 \cdot 10^{28}$ см. Хаббловское расстояние планковской эпохи $l_H^{P1} = l_H^0/(1 + z_{P1}) = 1.322 \cdot 10^{28}/(5.195 \cdot 10^{31}) = 2.544 \cdot 10^{-4}$ см при таком расширении будет достигнуто в момент t_H , определяемый соотношениями

$$l_H^{P1} = l_{P1} \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{t_H}{t_{P1}} - 1\right)\right), \quad \frac{t_H}{t_{P1}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \ln \frac{l_H^{P1}}{l_{P1}} = 49.46, \quad t_H = 2.666 \cdot 10^{-42} \text{ с}. \quad (141)$$

Можно сделать вывод, что для достижения хаббловского (фридмановского) размера Вселенной требуется примерно 50 планковских промежутков времени. Начав с планковского времени $6 \cdot 10^{-44}$ с и прибавив еще 50 таких же промежутков, Вселенная получит возраст $3 \cdot 10^{-42}$ и не достигнет границы 10^{-37} эпохи электрослабого объединения, помещенной в Табл. 5 под номером 8.

Раздувается и горизонт. Расстояние до горизонта в планковскую эпоху

$$l_{GHor} = \eta R = \frac{c}{R_* H_\Lambda} (1 - e^{-H_\Lambda t}) R_* e^{H_\Lambda t} = \frac{c}{H_\Lambda} (e^{H_\Lambda t} - 1) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} l_{P1} \left(\exp\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{t}{t_{P1}}\right) - 1 \right). \quad (142)$$

Первоначальная однородность создавалась именно на планковском масштабе. При планковской температуре даже самые массивные частицы будут ультрарелятивистскими. Действительно, например, протон с массой покоя $m_P = 1.672 \cdot 10^{-24}$ г будет иметь в среднем массу с учетом движения, равную планковской, то есть $m_P \gamma = m_{P1}$. Лоренцевский множитель оказывается при этом равным $\gamma = m_{P1}/m_P = 1.302 \cdot 10^{19}$, так что все частицы движутся со скоростями, очень близкими к скорости света. Планковский объем такая частица пересечет за время $t_{P1} = 5.3898 \cdot 10^{-44}$ с.

Если все же остаются какие-то неоднородности в пределах планковского объема, то они растягиваются экспоненциальным расширением.

В конце инфляционного периода вакуум распадается, а его энергия передается материи, которая тем самым приобретает очень высокую температуру. Распад вакуума является квантовым процессом, так что возникновение неоднородностей плотности и зарядовой асимметрии рассматриваются как проявление обычных квантовых флуктуаций.

Наконец, отрицательное давление вообще объясняет причину начала расширения.

3. *Вторая инфляция и второй горизонт.* Как уже отмечалось, в настоящее время мы живем в эпоху начала второй инфляции. Этот вывод был сделан на основании наблюдений, приведших к построению новой хаббловской диаграммы. Начиная с $z = 0.7260$, $t = 7.2$ млрд лет, происходит ускоренное расширение и, хотя вплоть до настоящего времени ускорение весьма мало, через несколько десятков миллиардов лет наступит экспоненциальное расширение, описываемое формулами (130). Значения параметров этого расширения радикально отличаются от (139). Так как современное $H_\Lambda = 1.925 \cdot 10^{-18}$ 1/с, то современное значение

$$\Lambda = 3 \frac{H_\Lambda^2}{c^2} = 1.24 \cdot 10^{-56} \text{ 1/см}^2. \quad (143)$$

Посмотрим, к какой картине мира приведет экспоненциальное расширение. Проследим за движением излучения в будущие отдаленные эпохи. Для краткости будем говорить о моментах η и местах χ .

Пусть фотон излучен в месте с координатой χ_e в момент $t = t(\eta_e)$, которому соответствует временная координата η_e . Уравнение его движения $\chi = \chi_e + \eta_e - \eta$. Найдем связанные с движением фотона расстояния.

Расстояние от наблюдателя до места излучения фотона $l_e = l_H^0 a(\eta) \chi_e$, а от фотона до наблюдателя $l_{rs} = l_H^0 a(\eta) (\chi_e + \eta_e - \eta)$, так что фотон удалился от места своего излучения на расстояние $l_{mv} = l_e - l_{rs} = l_H^0 a(\eta) (\eta_e - \eta)$. Вспомним еще расстояния: до горизонта $l_{\text{GHor}} = R(\eta) \eta = l_H^0 a(\eta) \eta$, от фотона до горизонта $l_{\text{GHor}}^{\text{ph}} = l_H^0 a(\eta) (2\eta - \chi_e - \eta_e)$ и пройденный фотоном путь $l_{\text{ph}} = c(t - t_e)$.

Казалось бы, ничто не мешает фотону долететь до наблюдателя, когда бы и где бы он ни излучился. Однако, та модель, которая считается наиболее адекватной, приводит к другим заключениям.

Дело в том, что временная координата η ограничена сверху, ее крайнее значение

$$\eta_\infty = \frac{I_0(\infty, \beta)}{(\Omega_{\text{rv}}^0 \Omega_\Lambda^0)^{1/4}} = 4.45. \quad (144)$$

Обращение $l_{rs} = 0$ возможно лишь при $\chi_e + \eta_e < \eta_\infty$. Фотон все же дойдет до наблюдателя, пусть даже почти за бесконечное время, если сумма

$$\chi_e + \eta_e < \eta_\infty. \quad (145)$$

Граница, так сказать, видимости Вселенной определяется уравнением

$$\chi_e + \eta_e = \eta_\infty. \quad (146)$$

Вспомним, что согласно понятию геометрического горизонта должно выполняться условие $\chi_e \leq \eta_0$. Уравнение (146) задает сферу, которую назовем вторым или кинематическим горизонтом.

В произвольную эпоху η первый и второй горизонты определяются соответственно уравнениями

$$\chi_{\text{GHor}} = \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad \chi_{\text{KHOr}} = \eta_\infty - \eta = \eta_* [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (147)$$

Из-за первого горизонта излучение не успело дойти до наблюдателя, второй отделяет область времени и точек, из которых излучение не может прийти к наблюдателю, так как эти точки удаляются со скоростями, большими скорости света и все время увеличивающимися. Сейчас мы видим Вселенную вплоть до красных смещений $z \approx 10$, но это ее прошлое.

Расстояния до горизонтов в произвольную эпоху η согласно равенствам (147) определяются формулами

$$l_{\text{GHor}} = l_H^0 a(\eta) \eta = l_\Lambda x I_0(x, \beta) = l_\Lambda x I_0(x, \beta), \quad (148)$$

$$l_{\text{KHOr}} = l_H^0 a(\eta) (\eta_\infty - \eta) = l_\Lambda x [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (149)$$

Оба горизонта расширяются. Скорость геометрического горизонта на скорость света больше, чем скорость того места, где горизонт в данный момент находится: $\dot{l}_{\text{GHor}} = l_H^0 \dot{a} \eta + l_H^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{GHor}} + c$. Он расширяется с ускорением. Напротив, скорость кинематического горизонта на скорость света меньше скорости места его расположения: $\dot{l}_{\text{KHOr}} = l_H^0 \dot{a} (\eta_\infty - \eta) - l_H^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{KHOr}} - c$, и его расширение замедляется.

Асимптотики расстояний до горизонтов и их скоростей при $t \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$, $z \rightarrow -1$, находятся с учетом того, что $I_0(\infty, \beta) = 0.42880$ и $I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta) \sim \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{8x^3}\right)$:

$$l_{\text{GHor}} \sim l_H^0 \eta_* I_0(\infty, \beta) a = 5.9 \cdot 10^{28} a \text{ см} \sim 2.7 \cdot 10^{28} e^{H_\Lambda t} \text{ см} \rightarrow \infty, \quad (150)$$

$$l_{\text{KHOr}} \rightarrow \frac{c}{H_\Lambda} = 1.56 \cdot 10^{28} \text{ см} = 5.05 \text{ Гпк}. \quad (151)$$

Современное расстояние до геометрического горизонта $l_{\text{GHor}}^0 = l_H^0 \eta_0 = 3.32 l_H^0 = 4.39 \cdot 10^{28}$ см = 14.2 Гпк. Скорость у горизонта $v_{\text{GHor}}^0 = c \eta_0 = 3.32c$, скорость расширения горизонта $\dot{l}_{\text{GHor}}^0 = 4.32c$. За год горизонт пройдет 4.32 св. года = 1.33 пк, так что к современным 14.2 Гпк добавится еще 1 Гпк через $0.755 \cdot 10^9$ лет, если считать его скорость равной современной, и через $0.741 \cdot 10^9$ лет, если учесть ее увеличение.

Современное расстояние до второго горизонта $l_{\text{KHор}}^0 = l_{\text{H}}^0(\eta_{\infty} - \eta_0) = 1.49 \cdot 10^{28}$ см = 4.84 Гпк, предельное расстояние до него совпадает с пределом хаббловского: $l_{\text{KHор}} \rightarrow \frac{l_{\text{H}}^0}{\sqrt{\Omega_{\Lambda}^0}} = \frac{c}{H_{\Lambda}} = 5.05$ Гпк. Современная скорость расширения места этого горизонта $c(\eta_{\infty} - \eta_0) = 1.13c$, а скорость удаления кинематического горизонта от нас сейчас 0.13с.

Современные значения ускорений горизонтов: $\dot{l}_{\text{KHор}}^0 = 3.45H_{\Lambda}c = 19.9 \cdot 10^{-8}$ см/с², $\ddot{l}_{\text{KHор}}^0 = -1.95H_{\Lambda}c = -11.3 \cdot 10^{-8}$ см/с².

Вначале, пока $\eta_{\infty} - \eta > \eta$, расстояние до второго горизонта больше, чем до первого. Горизонты пересеклись при $\eta_{\text{crs}} = \eta_{\infty}/2 = 2.23$, $x_{\text{crs}} = 4.08$, $z_{\text{crs}} = 1.677$, в эпоху $t_{\text{crs}} = 3.93$ млрд лет от начала, то есть $t_0 - t_{\text{crs}} = 9.80$ млрд лет тому назад (раньше, чем началось ускорение — 6.5 млрд лет назад), когда расстояние до них было 3.58 Гпк. Первый горизонт (фактически не он, а физический горизонт) ограничивает сферическую область пространства, в которую можно смотреть и видеть прошлую историю Вселенной, а второй определяет те области, информация из которых никогда не придет к наблюдателю.

Излучение далеких галактик, которые удаляются от нас со скоростями, большими скорости света, все же может доходить до нас, несмотря на то, что и оно сначала тоже удалялось от нас. Однако это излучение постепенно переходит в слои, скорости которых все меньше, пройдя слой, скорость которого равна скорости света, излучение начинает приближаться к нам, а когда оно достигает нас, его скорость по отношению к нам отрицательна и равна скорости света. Расплатой за преодоление расширения пространства служит очень большое время, которое требуется, чтобы дойти от источника к наблюдателю. Например, галактика, наблюдаемая нами сейчас на красном смещении $z = 3$, удаляется от нас со скоростью 1.51с, а раньше ее скорость была больше. При этом ее излучение шло к нам 11.5 млрд лет, то есть мы видим эту галактику такой, какой она была в далеком прошлом, когда ни Земля, ни даже Солнце еще не существовали (но галактики и звезды предыдущих поколений уже были).

Однако, если галактика находится за вторым горизонтом, ее излучение до нас дойти не сможет никогда, так как она удаляется со все возрастающей скоростью. Все такие галактики в отдаленном будущем убегут из нашего поля зрения. Мы не сможем никогда увидеть, как выглядят сейчас галактики, расположенные на красных смещениях, больших 0.72. Однако, информация об объектах, которые находятся ближе 5 Гпк, рано или поздно сможет до нас дойти.

Заключение

В этом небольшом курсе излагаются основные положения современной космологии как науки о глобальном строении Вселенной. Приводятся и изучаются общие уравнения Фридмана–Леметра, обсуждаются их частные решения, являющиеся моделями Вселенной. Определены основные характеристики моделей. Рассмотрены закономерности распространения излучения в искривленном пространстве, введено понятие геометрического горизонта. Дается интерпретация соотношений Хаббла. Описываются способы выбора модели, соответствующей реальной Вселенной, и представляется модель, наиболее адекватная ей — Стандартная космологическая модель. Приводятся характеристики реликтового излучения и нейтрино. Дается описание основных эпох истории горячей модели Вселенной и основных физических процессов, происходящих в эти эпохи. Дается представление о теории инфляции и первичном нуклеосинтезе. Обсуждаются понятия второй инфляции и второго горизонта. Рассчитаны расстояния до горизонтов, их скорости и ускорения.

Список литературы

- [1] *Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков.* Строение и эволюция Вселенной. М., 1975.
- [2] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Теория поля. М., 1988.
- [3] *F.Hoyle, G.Burbidge, J.V.Narlikar.* A Different Approach to Cosmology. Cambridge University Press. 2000.

Программа

по части курса “Астрофизика” — “Элементы космологии”

8 семестр 4 курса 2019–2020 учебного года физического факультета

9 часов лекций

Лектор проф. кафедры астрофизики Д.И.Нагирнер

Введение

Главные события и имена в космологии. Теоретические и наблюдательные основы.

Глава 1. Однородные космологические модели

§ 1. Метрики однородных пространств

1. Космологический принцип. Однородность и изотропность пространства и распределения в нем материи.
2. Радиус кривизны пространства как его основная характеристика. Три случая кривизны.
3. Метрика трехмерного пространства положительной кривизны. Представление трехмерного пространства постоянной положительной кривизны в виде гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве. Квадрат интервала, его угловая часть. Тригонометрические подстановки. Расстояние от наблюдателя и радиус сферы, все точки которой удалены на это расстояние. Длина экватора и площадь поверхности. Элемент объема. Объем пространства до определенной координаты и полный объем.
4. Метрика пространств неположительной кривизны. Представление пространства отрицательной кривизны в четырехмерном пространстве Лобачевского с неопределенной метрикой. Гиперболические подстановки. Радиус сферы с центром у наблюдателя и расстояние до ее точек. Случай плоского пространства. Единое представление метрик. Элемент объема.
5. Геометрия пространств. Единое представление метрик. Элемент объема и объем пространств. Расстояние и радиус сферы, длина экватора и площадь ее поверхности.
6. Метрика четырехмерного пространства–времени. Метрика Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ).

§ 2. Основные уравнения однородных космологических моделей

1. Два основных уравнения космологии. Компоненты материи: вещество и излучение.
2. Преобразование уравнений. Космологическое слагаемое и его интерпретация, вакуум и темная энергия. Полные массовые плотность и давление. Гравитирующая плотность.
3. Совместность уравнений. Условие совместности. Физический смысл условия. Функция Хаббла.
4. Невзаимодействующие компоненты. Пылевидное вещество, излучение, нейтрино, темная энергия. Уравнения состояния компонент.
5. Эволюция плотностей компонент. Масштабный множитель.
6. Критические величины. Критическая плотность и критические параметры. Доли компонент в критической плотности.
7. Общее решение основных уравнений в квадратурах. Связь масштабного множителя со временем и с конформным временем.
8. Случай плоских моделей. Радиус кривизны. Квадрат интервала,

§ 3. Однокомпонентные модели

1. Пылевидное вещество. Излучение. Их сравнение. Темная энергия.

Глава 2. Излучение в космологии

§ 1. Распространение излучения

1. Уравнения распространения света и два варианта его решений. Понятие геометрического горизонта. Расстояние до горизонта. Физический горизонт.
2. Космологическое красное смещение. Определение красного смещения как отношения периодов волны в местах излучения и наблюдения. Зависимость радиуса кривизны от красного смещения. Изменение частоты и длины волны при красном смещении.
3. Различные типы расстояний: метрическое расстояние между точками на луче в фиксированный момент времени. Расстояния по видимому размеру, по параллаксу, по числу фотонов, по болометрической яркости.

§ 2. Наблюдаемое расширение Вселенной

1. Три формулировки соотношений Хаббла.
2. Интерпретация закона Хаббла. Точный характер связи скорости с расстоянием и его интерпретация. Хаббловское расстояние. Сверхсветовые скорости.
3. Точная связь расстояния с z . Соотношения скорость–красное смещение и его интерпретация. Предел малых z . Эффект Доплера и космологическое красное смещение. Их различие.

Глава 3. Наиболее адекватная (Стандартная) космологическая модель

§ 1. Проблема выбора модели

1. О космологических тестах. Проблема массы во Вселенной. Величины Ω : барионная, по вращению галактики, по теореме вириала для скоплений. Скрытая масса и темное вещество.
2. Космологические тесты видимая яркость — красное смещение и видимый размер — красное смещение.
3. Определение критических параметров по сверхновым. Современная диаграмма Хаббла. Роль космологического слагаемого.

§ 2. Состояние материи во Вселенной в разные эпохи

1. Реликтовое излучение. Его свойства: чернотельность, температура, концентрация числа фотонов, плотность энергии и массы, положение максимума. Спектр в прошлом.
2. Стадии истории горячей Вселенной. Границы между ними. Эпохи объединений, аннигиляции, рекомбинации, радиационно доминированной плазмы, преобладающей роли вещества и излучения.
3. Физические процессы в различные периоды. Постепенное упрощение состава вещества и отрыв легких частиц от взаимодействия с остальным веществом.
4. Нейтрино во Вселенной. Энтропия электрон-позитронных пар и излучения. Температура газа космологических нейтрино.
5. Образование химических элементов. Основной параметр. Первичный и вторичный нуклеосинтез. Первичные водород, гелий, дейтерий и литий. Сравнение с наблюдениями.

§ 3. Геометрические свойства Стандартной модели

1. Плоская трехкомпонентная модель. Зависимость времени от масштабного множителя. Возраст Вселенной.
2. Плотности четырех космологических компонент и их доли в критической плотности.
3. Расстояния, скорости, ускорения: в прошлом, современные и в будущем.

§ 4. Космологическая инфляция

1. Успехи моделей Фридмана-Леметра и теории горячей Вселенной. Предсказание РИ, нуклеосинтез, теория образования крупномасштабной структуры.
2. Трудности Стандартной модели. Проблема плоскостности. Проблема горизонта. Проблема однородности. Проблемы зарядовой асимметрии, первичных неоднородностей и другие.
3. Теория инфляции, ее создатели. Разрешение проблем плоскостности, горизонта и однородности. Распад вакуума.
4. Вторая инфляция и второй горизонт. Расстояния до них, их скорости и ускорения.

Литература

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. Наука, М. Любой год издания.
2. Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Строение и эволюция Вселенной. М., Наука, 1975.
3. Д.И.Нагирнер. Лекции по космологии. www.astro.spbu.ru раздел WWW-ресурсы.
4. Д.И.Нагирнер. Космологические модели. www.astro.spbu.ru раздел WWW-ресурсы.

Вопросы по курсу “Космология”

1. Трехмерная и четырехмерная метрики открытых, замкнутых и плоских моделей расширяющейся Вселенной.
2. Основные уравнения космологии. Условие их совместности и его интерпретация.
3. Космологические компоненты, их плотности, уравнения состояния и эволюция.
4. Уравнения движения фотона, геометрический и физический горизонты.
5. Различные виды расстояний в космологии и космологические тесты.
6. Соотношения Хаббла и их интерпретация.
7. Стадии эволюции горячей Вселенной и физические процессы в них.
8. Плоская четырехкомпонентная модель.
9. Теория инфляции и разрешение проблем Стандартной модели.

Дополнительные вопросы

1. Каково соотношение между расстоянием до сферы в пространстве и ее радиусом при различной кривизне пространства?
2. Как выглядит метрика замкнутого, открытого и плоского пространств? Как выражается элемент объема через пространственные переменные?
3. Как записывается метрика Фридмана—Робертсона—Уокера?
4. Как записываются основные уравнения теории Фридмана?
5. Каково условие совместности основных уравнений стандартной модели и в чем его физический смысл?
6. Как формулируются уравнения состояния пылевидного вещества, излучения и вакуума?
7. Как протекает эволюция пылевидного вещества, излучения и вакуума? Каковы их доли в современной критической плотности?
8. Как выглядит уравнение движения фотона вдоль луча зрения?
9. Что такое геометрический и физический горизонты?
10. В чем различие космологического красного смещения и эффекта Доплера?
11. Как выражается основное космическое расстояние через временную и пространственную координаты?
12. Как выглядит соотношение Хаббла между скоростью удаления объекта вследствие расширения Вселенной и расстоянием до него?
13. Что такое хаббловское расстояние и чему оно равно?
14. Почему мы видим излучение галактики, которая удаляется от нас со скоростью света или быстрее?
15. Чему равен возраст Вселенной по современным данным и какую часть его мы видим, наблюдая галактику на красных смещениях 3 или 8?
16. Какие красные смещения соответствуют геометрическому и физическому горизонтам?
17. Что такое реликтовое излучение и каковы его свойства?
18. Какие эпохи называются эпохами объединений и почему?
19. Почему в планковскую эпоху (сверхобъединение) природа всех частиц безразлична?
20. Что такое теория космологической инфляции и какие проблемы она решает?
21. Какие элементы создаются при первичном нуклеосинтезе?
22. Что такое вторая инфляция и второй горизонт?
23. Чем отличаются горизонты? Когда они пересеклись?

Ответы на дополнительные вопросы

1. В пространстве постоянной положительной кривизны расстояние до точек сферы больше ее радиуса, отрицательной — меньше, в плоском пространстве — равны.
2. $dl^2 = R^2[d\chi^2 + \text{sn}_k^2(\chi)d\omega^2]$, $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, $d^3r = R^3 \text{sn}_k^2(\chi) \sin\theta d\chi d\theta d\varphi$.
3. $ds^2 = R^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sn}_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$.
4. $\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right)R$, $\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_t R^2 - kc^2$, $\rho_t = \rho_d + \rho_r + \rho_\Lambda$, $P_t = P_d + P_r + P_\Lambda$.
5. $\dot{\rho}_t = -3\left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right)H$, расширение адиабатическое.
6. Для пыли, излучения, вакуума и кривизны соответственно: $P_d = 0$, $P_r = \rho_r c^2/3$, $P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$.
7. Уравнения эволюции плотности для пыли, излучения, вакуума и кривизны: $\dot{\rho}_d = -3\rho_d H$, $\dot{\rho}_r = -4\rho_r H$, $\dot{\rho}_\Lambda = 0$, $\dot{\rho}_k = -2\rho_k H$. Их решения $\rho_d = \rho_d^0/a^3$, $\rho_r = \rho_r^0/a^4$, $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0$. Их доли в критической плотности $\Omega_d \approx 0.28$, $\Omega_\Lambda \approx 0.72$, $\Omega_r \approx 10^{-5}$.
8. $\chi = \eta_0 - \eta$ — если к нам, $\chi = \eta - \eta_e$ — от нас.
9. Геометрический горизонт $\chi = \eta_0$ — фотоны пошли в нашу сторону в начальный момент расширения, физический — конец эпохи рекомбинации, сфера последнего рассеяния.
10. Эффект Доплера — это смещение частоты у фотона движущимся источником в стационарном пространстве в момент излучения, космологическое красное смещение — постоянное в ходе движения изменение частоты фотона в расширяющемся пространстве.
11. $l = R(\eta)\chi$.
12. $v = Hl$ — это точное соотношение.
13. На хаббловском расстоянии объект от нас удаляется со скоростью света, согласно стандартной модели $l_H = 1.3 \cdot 10^{28}$ см = 4.28 Гпк = 14 Г св. лет.
14. Фотон, излученный далекой галактикой, которая удаляется от нас со сверхсветовой скоростью, сначала удаляется от нас, но постепенно переходит в слои, удаляющиеся все медленнее, и с некоторого момента начинает приближаться, к нам он доходит со скоростью света, направленной мимо.
15. По последним данным возраст Вселенной — 13.7 миллиардов лет, на $z = 3$ и на $z = 8$ находятся объекты, чей возраст составляет 1/8 и 1/27 от него.
16. z геометрического горизонта равно бесконечности, а физического — примерно 1100–1500.
17. РИ — это излучение, оторвавшееся от вещества в эпоху рекомбинации. Оно чернотельное с температурой около 2.7 кельвинов. Концентрация реликтовых фотонов — 400 в кубическом сантиметре.
18. Эпохи объединений соответствуют средним энергиям частиц различных взаимодействий, при которых сравниваются константы этих взаимодействий, так что частицы перестают различаться.
19. В планковскую эпоху константы всех взаимодействий равны.
20. Инфляция — экспоненциально быстрое расширение пространства в начальные моменты эволюции Вселенной за счет действия квантового вакуума, которое объясняет высокую однородность и изотропность Вселенной, появление флуктуаций и близость средней плотности к критической, а также источник первоначального толчка.
21. 70 % водорода, 30 % гелия и небольшие доли лития и дейтерия.
22. Вторая инфляция произойдет через десятки миллиардов лет из-за абсолютного преобладания космологического слагаемого. Второй горизонт появляется, так как за ним пространство расширяется со скоростью, большей скорости света и все время растущей.
23. Первый горизонт отделяет ту часть пространства, из которой излучение до нас еще не успело дойти. Второй — ту часть, из которой излучение не может дойти из-за экспоненциального ее расширения. Пересеклись горизонты 9.8 миллиарда лет назад.