

Санкт-Петербургский государственный университет

К.В. Холшевников, И.И. Никифоров

**СВОЙСТВА
ГРАВИТАЦИОННОГО
ПОТЕНЦИАЛА В ПРИМЕРАХ
И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2008

ББК 22.6

X74

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук Ю.Д.Медведев
(Институт прикладной астрономии РАН),
доктор физ.-мат. наук, проф. А.С.Шмыров
(С.-Петербургский гос. ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Холшевников К.В., Никифоров И.И.

X74 Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах: Учебное пособие. – СПб., 2008. – 72 с.

В книге изложены базовые элементы теории гравитационного (и формально совпадающего с ним электростатического) потенциала и изучены простейшие случаи явного его выражения через элементарные функции и эллиптические интегралы. Описаны важнейшие свойства гравитационного потенциала и его градиента для компактных тел в трехмерном пространстве; рассмотрены одномерные, двумерные и трехмерные тела. Отдельная глава посвящена потенциалу неограниченных тел. Многочисленные примеры иллюстрируют общую теорию. В задачах предлагается вычислить потенциал не рассмотренных в основном тексте тел или убедиться в справедливости общих свойств на рассмотренных примерах. В качестве метода вычисления гравитационного потенциала используется только прямое интегрирование, доступное студенту III курса технических вузов или естественных факультетов университетов. Изощренные обходные приемы, требующие более основательной математической подготовки, не применяются.

Книга может использоваться в качестве учебного пособия студентами и аспирантами при изучении теории тяготения, гравиметрии, геодезии, небесной механики и звездной динамики, электростатики, а также может быть полезной и служить справочником для специалистов соответствующего профиля.

ББК 22.6

© К.В.Холшевников, И.И.Никифоров, 2008

© С.-Петербургский гос. университет, 2008

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Потенциал точки и его основные свойства	8
Глава 2. Потенциал протяженного тела	16
Глава 3. Потенциал одномерных тел	21
Глава 4. Потенциал двумерных тел	29
Глава 5. Потенциал трехмерных тел	42
Глава 6. Потенциал некоторых неограниченных тел	52
Глава 7. Вспомогательные математические формулы	60
Литература	65
Именной указатель	68
Предметный указатель	69

Введение

Настоящее пособие посвящено теории тяготения, важнейшей частью которой является теория гравитационного потенциала.

В основе теории притяжения лежит закон всемирного тяготения, открытый Исааком Ньютоном (1643–1727) и опубликованный в его знаменитых *Philosophiae naturalis principia mathematica* в 1687 г. Понятие потенциала введено позже Адриеном Мари Лежандром (1752–1833) и Жозефом Луи Лагранжем (1736–1813). По своему смыслу потенциал — это работа, которую надо затратить для удаления частицы единичной массы из гравитационного поля произвольных неподвижных масс на бесконечность. Для электростатического поля говорят о работе, необходимой для ухода единичного отрицательного заряда из поля, создаваемого произвольными положительными зарядами. Такое определение подразумевает, что работа не зависит от формы пути. Это эквивалентно тому факту, что гравитационная или электростатическая сила как вектор образует поле градиента некоторой скалярной функции, которая и есть потенциал (с точностью до массы или заряда частицы). Установление потенциальности гравитационных полей очень помогло систематизации и упрощению выкладок, бывших громоздкими и не совсем надежными. Не менее важно, что понятие потенциала послужило ступенькой к обоснованию в более позднюю эпоху закона сохранения энергии.

Наиболее яркие применения понятия потенциала относятся к небесной механике, особенно к той ее части, которая занимается фигурами равновесия гравитирующих небесных тел, а также к гравиметрии. Красота теории, ее важные приложения, казавшиеся вначале непреодолимыми математические трудности привлекли к ней внимание выдающихся ученых. Назовем лишь А.Клеро,

П.С.Лапласа, С.Д.Пуассона, Дж.Грина, К.Ф.Гаусса, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова. И в наше время теория продолжает развиваться. В качестве иллюстрации нетривиальности не только самой теории, но и ее приложений заметим, что вычисление потенциала однородного трехосного эллипсоида потребовало усилий трех поколений ученых. Желающим ознакомиться с темой подробнее мы рекомендуем приведенные в списке литературы монографии и руководства (*Антонов и др., 1989*), (*Антонов и др., 2008*), (*Брело, 1974*), (*Владимиров, 2003*), (*Гюнтер, 1953*), (*Жуковский, 1950*), (*Кондратьев, 2007*), (*Ландкоф, 1966*), (*Михлин, 1977*), (*Сретенский, 1946*), (*Субботин, 1949*), (*Тиман, Трофимов, 1968*), (*Уэрмер, 1980*), (*Холшевников и др., 2005*), (*Шкодров, 1989*), (*Winney, Tremaine, 2008*), (*Poincaré, 1899*). История вопроса подробнейшим образом описана в монографии (*Тодхантер, 2002*).

В настоящем пособии основное внимание уделено примерам, в которых вычисляется в конечном виде потенциал просто устроенных тел. Эти примеры подробно исследуются. Формулируются общие свойства потенциала в зависимости от размерности притягивающих тел и дифференциальных свойств плотности. Доказательства этих свойств иногда приведены в книге, а в трудных случаях читатель отсылается к подробным руководствам по теории потенциала. Под «плотностью» может пониматься как плотность гравитирующих масс, так и плотность зарядов статического электрического поля — математически это безразлично. Необходимость представлять себе общие свойства потенциала вытекает из того, что не всегда удается выписать конкретные выражения для потенциалов, численное же интегрирование (или вообще численное решение уравнения Пуассона) часто требует большой затраты времени и страдает недостатком наглядности и общности. Знание теории потенциала иногда позволяет почти мгновенно отвечать на вопросы, которые иначе потребовали бы длительных выкладок.

Все примеры мы тщательно проверили во избежание ошибок при переписывании формул из одного руководства в другое. Расчеты приведены в «открытую», т.е. их может детально проверить каждый, владеющий техникой дифференцирования и знакомый с таблицей основных интегралов. Более сложные интегралы от элементарных функций, встречающиеся в промежуточных выкладках, выделены в самостоятельную главу. Опять-таки неопределенные

интегралы каждый желающий может проверить дифференцированием.

Предполагается знакомство читателя с курсами математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физики. К каждой главе приложен список задач.

Схема изложения материала выглядит следующим образом.

В главе 1 определяется сила притяжения материальной точки в пространстве \mathbb{R}^3 согласно закону Ньютона. Затем потенциал материальной точки Q' в \mathbb{R}^3 определяется как гравитационная энергия пробной точки Q в силовом поле, подчиненном закону обратных квадратов. Далее доказывается, что вне притягивающей точки потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, что означает гармоничность потенциала в \mathbb{R}^3 вне притягивающей точки. Наконец, выводится формула Остроградского–Гаусса для потока градиента потенциала через замкнутую поверхность.

В главе 2 определяется потенциал $V(Q)$ протяженного тела T размерности n , $n = 1, 2, 3$. Устанавливаются дифференциальные свойства V в \mathbb{R}^3 и асимптотика V при $Q \rightarrow T$ и $Q \rightarrow \infty$. Приводятся формулы Остроградского–Гаусса и Пуассона. Обсуждаются свойства симметрии потенциала.

В главах 3–5 находятся потенциалы в \mathbb{R}^3 конкретных компактных одномерных, двумерных и трехмерных тел, соответственно.

В главе 6 вычисляются потенциалы в \mathbb{R}^3 конкретных неограниченных одномерных и двумерных тел.

В главу 7 вынесены вспомогательные математические формулы.

За редкими исключениями в книге принята единая система обозначений. Векторы выделяются жирным шрифтом. Их модули обозначаются теми же буквами обычным шрифтом. Матрицы изображаются «рукописными» буквами. Притягивающее тело всегда предполагается замкнутым и обозначается буквой T . Точки пространства \mathbb{R}^N обозначаются через Q ; точки притягивающего тела $T - Q'$, а его масса — M ; потенциал — V ; оператор Лапласа — Δ ; элементы длины, площади и объема — ds , $d\sigma$ и $d\tau$.

Плотность одномерной кривой обозначается буквой α , двумерной поверхности — β , трехмерного тела — ρ .

Через φ , θ обозначаются различные угловые переменные. Часто встречаются цилиндрические R , φ , z и сферические r , θ , φ координаты. Расстояние между двумя точками обозначаем буквой s ; иногда, если одна из точек выделена, то через r (в двумерном слу-

чае — R). Переменная интегрирования часто обозначается через t .
Формулы и рисунки нумеруются двумя числами, первое соответствует номеру главы.

Мы благодарим рецензентов книги, внимательно прочитавших рукопись и сделавших ценные замечания, которые мы постарались учесть, отчего книга, как нам представляется, несомненно выиграла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-02-00361), гранта Президента РФ для государственной поддержки коллективов ведущих научных школ РФ (грант НШ-1323.2008.2) и Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 годы)» Федерального агентства по образованию Министерства образования и науки РФ (грант РНП 3.1.1.11054).

Глава 1

Потенциал точки и его основные свойства

По закону всемирного тяготения Ньютона любые две материальные точки притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Как видим, обе точки равноправны. Но для развития теории притяжения протяженных тел выгоднее нарушить эту симметрию. Считаем одну точку Q' массы m' притягивающей, а другую точку Q притягиваемой. Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета точки Q и Q' определяются радиус-векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Согласно сформулированному закону точка Q вне зависимости от ее массы испытывает ускорение

$$\mathbf{w}(Q) = -\frac{Gm'}{s^3} \mathbf{s}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $s = |\mathbf{s}|$, G — постоянная тяготения (см. рис. 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Значение постоянной тяготения зависит от принятой системы единиц. В системе СИ

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

согласно (*Mohr, Taylor, 1999*). Как видим, точность определения G не слишком велика. Точность же определения произведения постоянной тяготения на массу для многих тел Солнечной системы значительно выше. Например, для Солнца и Земли

$$Gm_{\odot} = 1.32712442076 \cdot 10^{20} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}, \quad Gm_{\oplus} = 3.986004418 \cdot 10^{14} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$$

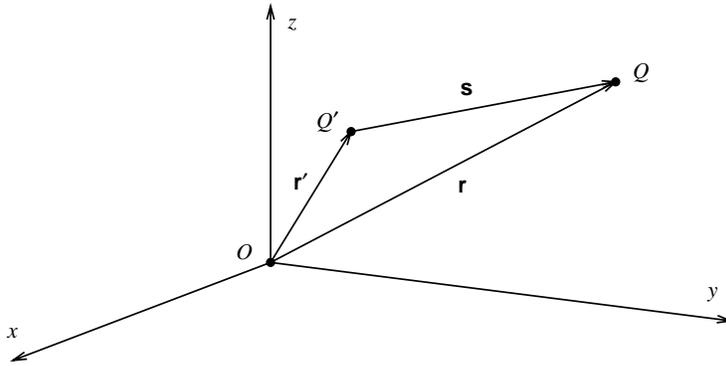


Рис. 1.1. К потенциалу материальной точки: Q — притягиваемая точка, Q' — притягивающая точка.

согласно (*Fukushima, 2000; Fukushima, 2002*). Следуя принятому в руководствах по теории ньютоновского потенциала правилу, мы полагаем $G = 1$, что возможно за счет выбора системы единиц измерения. Это не вполне корректно (возникает проблема физической размерности), но допустимо: в окончательное выражение для силы притяжения, гравитационного ускорения и потенциала G всегда входит множителем.

Уникальное свойство гравитационного взаимодействия: *ускорение* (т.е. напряженность векторного гравитационного поля, создаваемого точкой Q') *не зависит от массы притягиваемой точки*.

Определим теперь гравитационный потенциал $V(Q)$, индуцируемый материальной точкой Q' , как скалярную функцию, градиент которой равен ускорению $\mathbf{w}(Q)$. Легко проверить дифференцированием, что

$$V(Q) = \frac{m'}{s}. \quad (1.2)$$

Выберем привилегированную систему отсчета с началом в мате-

риальной точке Q' (направления осей безразличны). В этом случае формула (1.2) упрощается:

$$V(Q) = \frac{m'}{r}. \quad (1.3)$$

В декартовой системе точки и векторы имеют координаты

$$\begin{aligned} Q(x, y, z), \quad Q'(x', y', z'), \\ \mathbf{r}(x, y, z), \quad \mathbf{r}'(x', y', z'), \quad \mathbf{s}(x - x', y - y', z - z'), \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \\ s &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \end{aligned}$$

Напомним, что физический смысл имеет лишь разность потенциалов. Иными словами, потенциал определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Разность $V(Q) - V(Q_0)$, от этого слагаемого не зависящая, представляет собой работу, которую надо совершить против гравитационных сил, чтобы переместить пробную точку единичной массы из Q в Q_0 . Фиксация аддитивной постоянной равносильна фиксации $V(Q_0)$:

$$V(Q) = \frac{m'}{r} + V(Q_0).$$

Какую точку разумно выбрать за Q_0 ? В пространстве \mathbb{R}^3 есть лишь одна выделенная точка — Q' . Но она не годится, т.к. в ней потенциал обращается в бесконечность. За редкими исключениями за Q_0 выбирают бесконечно удаленную точку, полагая там потенциал нулевым. В дальнейшем мы будем считать

$$V(Q) = \frac{m'}{s}, \quad (1.4)$$

а в привилегированной системе отсчета с началом в материальной точке Q'

$$V(Q) = V(r) = \frac{m'}{r}. \quad (1.5)$$

Потенциал (1.5) имеет физический смысл работы, требуемой для удаления пробной точки Q единичной массы на бесконечность. Его

принимают за гравитационную потенциальную энергию (со знаком минус) единицы массы Q в поле притягивающего центра Q' . Он же определяет вторую космическую скорость $v_2(r)$, которую надо сообщить точке Q для удаления ее с расстояния r от Q' до бесконечного расстояния. По закону сохранения энергии

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{m'}{r} = 0,$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m'}{r}}. \quad (1.6)$$

Установим основные свойства потенциала (1.5).

1. Потенциал $V(r)$ представляет собой функцию, вещественно-аналитическую в $\mathbb{R}^3 \setminus \{Q'\}$, т.е. во всем пространстве \mathbb{R}^3 за исключением притягивающего центра Q' .
2. Потенциал сингулярен в притягивающем центре Q' :

$$\lim V(r) = \infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0.$$

Физически это означает, что отрыв от притягивающей точки требует бесконечной работы, что обеспечивает существование (теоретическое!) «черных дыр» ньютоновской гравитации.

3. В бесконечно удаленной точке потенциал обращается в нуль, точнее

$$\lim V(r) = 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

4. В пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus \{Q'\}$ потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0, \quad (1.7)$$

где Δ — оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.8)$$

Для доказательства вычислим последовательно

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial x^2} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}.$$

Складывая последнее соотношение с аналогичными формулами при дифференцировании по y и z , убедимся в справедливости уравнения (1.7) для функции (1.5) в случае $m' = 1$. Справедливость (1.7) при произвольном m' следует из линейности оператора Лапласа. Справедливость (1.7) для функции (1.4) следует из инвариантности оператора Лапласа относительно сдвигов и вращений (*Тиман, Трофимов, 1968*). Впрочем, это нетрудно доказать и непосредственным дифференцированием.

Напомним, что удовлетворяющие уравнению Лапласа функции называются *гармоническими*. Тем самым потенциал гармоничен во всем пространстве, за исключением точки Q' .

5. В теоретической физике важную роль играет понятие потока \mathcal{W} векторного поля \mathbf{u} через заданную поверхность S . Поток определяется поверхностным интегралом

$$\mathcal{W} = \iint_S u_n d\sigma. \quad (1.9)$$

Здесь u_n — составляющая вектора \mathbf{u} , ортогональная поверхности S ; $d\sigma$ — элемент площади. Предполагается, что S — кусочно-гладкая поверхность, а векторное поле \mathbf{u} — кусочно-непрерывно.

Обратимся к векторному полю, образованному градиентом потенциала \mathbf{w} . Соответствующий поток \mathcal{W} через *замкнутую* поверхность S определяется формулой Остроградского–Гаусса

$$\mathcal{W} = \begin{cases} -4\pi m', & \text{если } Q' \text{ находится внутри } S, \\ 0, & \text{если } Q' \text{ находится вне } S. \end{cases} \quad (1.10)$$

Докажем формулу (1.10) сначала для простейшего случая, когда S является сферой $S(a)$, где a — ее радиус.

Если центр сферы совпадает с Q' , то доказательство совсем просто. По определению

$$\mathcal{W} = \iint_{S(a)} w_n d\sigma, \quad (1.11)$$

где w_n — компонента вектора \mathbf{w} , нормальная к поверхности сферы. Согласно (1.1) компонента $w_n = -m'/a^2$ постоянна, площадь сферы равна $4\pi a^2$, откуда и следует (1.10).

В случае произвольного положения точки Q' введем систему отсчета с началом в центре сферы и осью z , проходящей через Q' . Точка Q' получает координаты $(0, 0, b)$. Можно считать, что $b > 0$. Вектор \mathbf{r} , пробегающий поверхность сферы, вектор нормали \mathbf{n} к поверхности сферы, а также векторы \mathbf{s} и \mathbf{w} имеют в этой системе координаты

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{a}(x, y, z), \quad \mathbf{s} = (x, y, z - b), \quad \mathbf{w} = -\frac{m'\mathbf{s}}{s^3}.$$

Отсюда

$$w_n = -\frac{m'}{s^3} \mathbf{s}\mathbf{n} = -\frac{m'(a^2 - bz)}{a(a^2 - 2bz + b^2)^{3/2}}.$$

Интегрировать по сфере удобнее в сферических координатах

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta, \\ d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Формула (1.11) принимает вид

$$\mathcal{W} = -m' \int_0^\pi \frac{(1 - c \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(1 - 2c \cos \theta + c^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad (1.12)$$

где $c = b/a$. Внутренний интеграл равен 2π , а во внешнем делаем подстановку $t = 1 - 2c \cos \theta + c^2$:

$$\mathcal{W} = -\frac{\pi m'}{2c} \int_{(1-c)^2}^{(1+c)^2} \frac{(t + 1 - c^2) dt}{t^{3/2}} = \\ = -\frac{\pi m'}{c} \left\{ [(1+c) - |1-c|] - (1-c^2) \left[\frac{1}{1+c} - \frac{1}{|1-c|} \right] \right\}.$$

Если притягивающая точка Q' находится внутри сферы $S(a)$, то $0 < c < 1$, а если вне сферы, то $c > 1$. Раскрывая модули, приходим к формуле (1.10).

Перейдем к общему случаю произвольной замкнутой кусочно-гладкой поверхности S . Если S не содержит Q' внутри себя,

то можно применить формулу Остроградского–Гаусса (*Фихтенгольц, 1997б*, п. 654)

$$\iint_S (\text{grad } V)_n d\sigma = \iiint_D \Delta V d\tau. \quad (1.13)$$

Здесь D — область, ограниченная поверхностью S , $d\tau$ — элемент объема. Поскольку в D потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, тройной интеграл в (1.13) обращается в нуль.

Пусть S содержит точку Q' внутри себя. Окружим Q' сферой $S(a)$ столь малого радиуса, чтобы $S(a)$ лежала внутри S . Применим формулу (1.13) к области, заключенной между S и $S(a)$. Справа получим нуль. Поскольку границей области D служит объединение S и $S(a)$, причем нормаль к $S(a)$ направлена вне D , т.е. внутрь сферы, приходим к равенству

$$\iint_S (\text{grad } V)_n d\sigma = \iint_{S(a)} (\text{grad } V)_n d\sigma,$$

где теперь нормали к обеим поверхностям S и $S(a)$ считаются направленными наружу. Осталось только заметить, что $(\text{grad } V)_n = w_n$.

Задачи к главе 1

Задача 1.1. Доказать инвариантность оператора Лапласа относительно сдвигов.

Указание. Обозначим старые декартовы координаты через x_1, x_2, x_3 , а новые через x'_1, x'_2, x'_3 . В данной задаче $x_i = a_i + x'_i$ при постоянных a_i . Требуется доказать, что

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x'_i{}^2}.$$

Задача 1.2. Совершим линейное преобразование координат

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x'_j,$$

где a_{ij} — элементы невырожденной матрицы \mathcal{A} . Обозначим через b_{ij} элементы обратной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

Доказать, что в новых переменных оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}.$$

Здесь g_{ij} — элемент матрицы $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}\mathcal{B}^*$, где \mathcal{B}^* — сопряженная с \mathcal{B} матрица.

Задача 1.3. Доказать инвариантность оператора Лапласа относительно ортогональных преобразований координат.

Задача 1.4. Доказать формулу (1.10), не прибегая к вычислению интеграла (1.12).

Глава 2

Потенциал протяженного тела

Приближение тела материальной точкой не всегда адекватно. Рассмотрим протяженное тело T . Стандартный способ определения потенциала T состоит в следующем. Разобьем T на большое число маленьких кусочков ΔT массой Δm и заменим ΔT одной из его точек Q' . Потенциал ΔT и градиент потенциала ΔT в точке Q приближенно равны

$$\Delta V \approx V_0(Q, Q') \Delta m, \quad \Delta \mathbf{w} \approx \mathbf{w}_0(Q, Q') \Delta m,$$

где V_0 — потенциал в точке Q , индуцированный притяжением материальной точки Q' единичной массы. Символ Δ , разумеется, означает здесь приращение, а не оператор Лапласа. Аналогично определяется \mathbf{w}_0 . Суммируем вклад кусочков ΔT и перейдем к пределу, устремляя к нулю диаметр наибольшего из ΔT . Приходим к определению потенциала и его градиента в виде

$$V(Q) = \int_T V_0(Q, Q') dm, \quad \mathbf{w}(Q) = \int_T \mathbf{w}_0(Q, Q') dm. \quad (2.1)$$

Здесь dm — элемент массы тела T .

Подставляя (1.1) и (1.2) в (2.1), получим

$$V(Q) = \int_T \frac{dm}{s}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{w}(Q) = - \int_T \frac{\mathbf{s}}{s^3} dm, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad s = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Тело T будем считать компактным (за исключением главы 6). Однако его размерность $n = \dim T$ может принимать любые значения от 1 до 3.

Если точка Q лежит внутри T , то интегралы (2.2) и (2.3) — несобственные, и многие их свойства существенно зависят от размерности n тела T . Напротив, при $Q \notin T$ собственные интегралы (2.2) и (2.3) обладают рядом общих свойств.

Несколько слов о терминологии. Потенциал при $Q \notin T$ принято называть внешним, а при $Q \in T$ — внутренним. Обратим внимание, что речь идет об одном и том же потенциале в разных областях его определения.

Установим важнейшие свойства потенциала протяженного тела.

1. Внешний потенциал V является вещественно-аналитической функцией точки Q во всем пространстве $\mathbb{R}^3 \setminus T$.

Действительно, подынтегральные функции s , $(x - x')s^{-3}$, $(y - y')s^{-3}$, $(z - z')s^{-3}$ аналитически зависят от x , y , z . Они имеют особенность лишь при $Q = Q'$, что невозможно при положении Q вне T .

2. Внешний потенциал V обладает частными производными всех порядков, причем допустимо дифференцирование под знаком интеграла (2.2).

Это свойство является непосредственным следствием предыдущего. Из него вытекает

$$\mathbf{w}(Q) = \text{grad } V(Q), \quad (2.4)$$

что оправдывает определение (2.1).

3. Внешний потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (1.7).

Действительно, подынтегральное выражение как функция от Q удовлетворяет уравнению Лапласа, и остается только сослаться на возможность дифференцирования под знаком интеграла.

Можно ли назвать внешний потенциал гармонической функцией? Конечно, если внешнее по отношению к T пространство связно. В противном случае он представляет собой несколько гармонических функций, определенных в разных областях.

Например, если T — шар с полостью, то в полости и во внешней области, содержащей сколь угодно далекие точки, потенциал представляют разные гармонические функции.

4. Исследуем асимптотику потенциала на бесконечности. Воспользуемся представлением

$$s^2 = r^2 - 2rr' \cos H + r'^2,$$

где r , r' , s — расстояния $|OQ|$, $|OQ'|$, $|QQ'|$; O — начало координат; H — угол между векторами \overrightarrow{OQ} , $\overrightarrow{OQ'}$ (см. рис. 1.1). Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos H + \mathcal{O}((r'/r)^2) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2} + \mathcal{O}((r'/r)^2) \right], \end{aligned}$$

то

$$V = \frac{1}{r} \int_T dm + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int_T \mathbf{r}' dm + \mathcal{O}((1/r)^3). \quad (2.5)$$

Как известно из курса механики (*Поляхов и др., 2000*), интегралы в (2.5) определяют массу и положение центра масс

$$\int_T dm = M, \quad \int_T \mathbf{r}' dm = M\mathbf{r}_c,$$

где M — масса T , \mathbf{r}_c — радиус-вектор центра масс T .

Окончательно,

$$V = \frac{M}{r} \left[1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_c}{r^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right], \quad (2.6)$$

где $\varepsilon = r_0/r$, r_0 — характерный размер тела T .

Таким образом, гравитационный потенциал любого тела в далеких точках равен потенциалу материальной точки той же массы, расположенной в произвольной фиксированной точке пространства, с погрешностью порядка ε^2 . Погрешность уменьшается до ε^3 , если материальную точку поместить в центр масс тела, обеспечив $\mathbf{r}_c = 0$.

Асимптотика градиента потенциала выводится аналогично

$$\mathbf{w} = -\frac{M}{r^3} \mathbf{r} + \frac{M}{r^3} \mathbf{r}_c - \frac{3M\mathbf{r}\mathbf{r}_c}{r^5} \mathbf{r} + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (2.7)$$

Таким образом, любое тело притягивает далекие точки как материальная точка той же массы, расположенная в произвольной фиксированной точке пространства, с погрешностью порядка ε^3 . Погрешность уменьшается до ε^4 , если материальную точку поместить в центр масс тела, обеспечив $\mathbf{r}_c = 0$.

Обратим внимание на естественный характер асимптотических формул (2.6) и (2.7): с большого расстояния любое тело видится точкой.

5. Поток \mathcal{W} вектора \mathbf{w} через произвольную замкнутую кусочно-гладкую поверхность S определяется формулой Остроградского–Гаусса

$$\mathcal{W} = -4\pi M(S), \quad (2.8)$$

где $M(S)$ — часть массы тела T , заключенная внутри S .

Доказательство несложно. Для каждого элемента массы dm справедлива формула (1.10), и нужно лишь просуммировать по всем элементам. Заметим только, что масса T , лежащая непосредственно на двумерной поверхности S , принимается равной нулю. Если T одномерно, то достаточно потребовать, чтобы T и S имели конечное число общих точек, ни в одной из которых не была бы сосредоточена ненулевая масса. Если T двумерно, то достаточно потребовать, чтобы T и S пересекались бы по конечному числу кусочно-гладких кривых, ни в одной из которых не была бы сосредоточена ненулевая масса. Если T трехмерно, то достаточно потребовать, чтобы в общей с T части поверхности S не была бы сосредоточена ненулевая масса.

6. Потенциал симметричного тела симметричен. Если тело T переходит в себя после некоторого преобразования пространства, то в себя перейдет и его потенциал. Точнее, потенциал (и его производные) инвариантны относительно указанного преобразования.

Задачи к главе 2

Задача 2.1. Доказать формулу (2.4), отправляясь от (2.2) и (2.3).

Задача 2.2. Доказать формулу (2.7).

Задача 2.3. Представить формулу (2.7) в виде

$$\mathbf{w} = - \left[\frac{M}{r^3} + \frac{3M\mathbf{r}\mathbf{r}_c}{r^5} \right] (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Задача 2.4. Доказать, что поток \mathcal{W} вектора \mathbf{w} через произвольную замкнутую кусочно-гладкую поверхность, содержащую T внутри себя, равен $-4\pi M$.

Задача 2.5. Доказать, что поток \mathcal{W} вектора \mathbf{w} через произвольную замкнутую кусочно-гладкую поверхность, вне которой находится T , равен нулю.

Задача 2.6. Доказать свойство ϕ потенциала.

Глава 3

Потенциал одномерных тел

Потенциал материальной кривой T с линейной плотностью α в \mathbb{R}^3 в силу (2.2) определяется криволинейным интегралом

$$V(Q) = V(x, y, z) = \int_T \frac{\alpha(x', y', z') ds}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}, \quad (3.1)$$

где ds — элемент длины T , см. рис. 3.1. От кривой T достаточно потребовать лишь спрямляемости, хотя в приложениях встречаются почти исключительно кусочно-гладкие кривые. От плотности α достаточно потребовать интегрируемости, хотя на практике α оказывается кусочно-гладкой с возможным обращением в бесконечность в конечном числе точек. Физическая размерность линейной плотности α в системе СИ — кг/м.

Внутренний потенциал в одномерном случае обращается в бесконечность. Действительно, фиксируем точку $Q \in T$, в которой плотность положительна и непрерывна. Параметризуем кривую длиной дуги s , отсчитываемой от Q . Как обычно, кривую считаем ориентированной, так что $s > 0$ при Q' правее Q , и $s < 0$ при Q' левее Q . Евклидово расстояние между Q и Q' не превосходит расстояния $|s|$ вдоль кривой. Фиксируем малую окрестность $[-s_0, s_0]$ точки Q на кривой T , в которой плотность $\alpha \geq \alpha_0$ при $\alpha_0 > 0$. Тогда

$$V(Q) \geq \alpha_0 \int_{-s_0}^{s_0} \frac{ds}{|s|} = \infty.$$

Физически обращение потенциала в бесконечность означает, что для отрыва частицы от материальной кривой необходима бесконечная работа. Разумеется, отрыв пылинки от проволоки большой

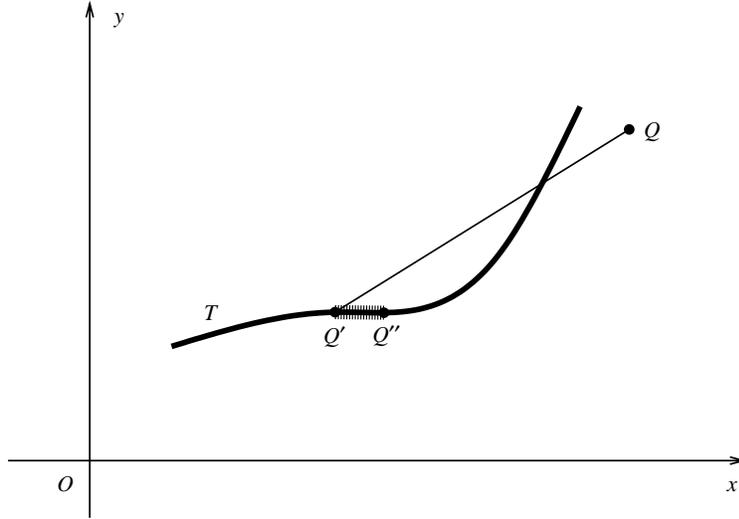


Рис. 3.1. К потенциалу кривой T в точке $Q(x, y, z)$. Притягивающий элемент $Q'Q''$ обладает массой $dm = \alpha(Q') ds$, $ds = |Q'Q''|$; точка Q' имеет координаты (x', y', z') ; $|Q'Q| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$.

работы не требует. Кажущееся противоречие означает, что вблизи реального тела его представление одномерной кривой перестает работать.

В нескольких рассмотренных ниже примерах показано, что при стремлении Q к внутреннему гладкому отрезку кривой T , на котором плотность непрерывна и положительна, потенциал имеет логарифмическую сингулярность

$$V \sim \alpha \ln \frac{1}{s^2} = -2\alpha \ln s, \quad (3.2)$$

где s — расстояние от Q до T . В руководствах по теории потенциала доказывается, что это верно в общем случае при сформулированных условиях.

При стремлении к концевой точке кривой, точке излома или к точке скачка плотности асимптотическое поведение потенциала может быть более сложным.

Пример 3.1. Отрезок.

Пусть T — отрезок оси z , расположенный между точками $Q_1(0, 0, a)$ и $Q_2(0, 0, b)$, $a < b$. Линейная плотность отрезка равна $\alpha(z)$, а масса

$$M = \int_a^b \alpha(z) dz.$$

По симметрии потенциал в цилиндрических координатах R, φ, z зависит только от R, z и согласно (3.1) равен

$$V(Q) = V(R, z) = \int_a^b \frac{\alpha(t) dt}{\sqrt{R^2 + (t - z)^2}}. \quad (3.3)$$

Переменную интегрирования z' мы для удобства обозначили через t .

Интеграл (3.3) элементарен для широкого класса плотностей. В частности, если α — многочлен. Мы вычислим его в трех случаях, представляющих наибольший интерес.

Пример 3.2. Однородный отрезок.

Пусть плотность постоянна. Интеграл (3.3) — табличный. Окончательно,

$$V(R, z) = \alpha \ln \frac{b - z + \sqrt{R^2 + (b - z)^2}}{a - z + \sqrt{R^2 + (a - z)^2}}, \quad R \neq 0. \quad (3.4)$$

В точках отрезка ($R = 0, a \leq z \leq b$) в согласии с общей теорией потенциал (3.4) обращается в бесконечность (логарифмическая сингулярность). На оси z вне отрезка особенностей, естественно, нет:

$$V(0, z) = \begin{cases} \alpha \ln \frac{b - z}{a - z}, & \text{если } z < a, \\ \alpha \ln \frac{z - a}{z - b}, & \text{если } z > b. \end{cases} \quad (3.5)$$

Первая из формул (3.5) — результат подстановки $R = 0$ в (3.4), вторая — предельного перехода $R \rightarrow 0$.

В согласии с общей теорией потенциал аналитически зависит от R, z вне отрезка T .

Исследуем поведение потенциала вблизи T . Пусть Q приближается к одной из внутренних точек $Q(0, 0, z)$ отрезка T . Считаем z фиксированным, $a < z < b$, $R \rightarrow 0$. Преобразуем формулу (3.4)

$$\begin{aligned} & \frac{b-z + \sqrt{R^2 + (b-z)^2}}{a-z + \sqrt{R^2 + (a-z)^2}} = \\ &= \frac{2(b-z) + 2^{-1}(b-z)^{-1}R^2 + \mathcal{O}(R^4)}{2^{-1}(z-a)^{-1}R^2 - 8^{-1}(z-a)^{-3}R^4 + \mathcal{O}(R^6)} = \\ &= \frac{4(z-a)(b-z)}{R^2} \left[1 + \frac{R^2}{4(z-a)^2} + \frac{R^2}{4(b-z)^2} + \mathcal{O}(R^4) \right], \\ V &= \alpha \left[\ln \frac{4(z-a)(b-z)}{R^2} + \frac{(z-a)^2 + (b-z)^2}{4(z-a)^2(b-z)^2} R^2 + \mathcal{O}(R^4) \right]. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Заметим, что в (3.6) $R = s$, где s — расстояние от Q до T . Поэтому главный член асимптотики при Q , стремящейся к внутренней точке T , совпадает с определяемым формулой (3.2).

Пусть теперь Q приближается к одному из концов отрезка, например, к точке Q_1 . Малыми величинами будут $\zeta = z - a$, $s = \sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} b-z + \sqrt{R^2 + (b-z)^2} &= 2(b-a) \left[1 - \frac{\zeta}{b-a} + \frac{s^2 - \zeta^2}{4(b-a)^2} + \mathcal{O}(s^3) \right], \\ a-z + \sqrt{R^2 + (a-z)^2} &= s - \zeta, \\ V &= \alpha \left[\ln \frac{2(b-a)}{s - \zeta} - \frac{\zeta}{b-a} + \frac{s^2 - 3\zeta^2}{4(b-a)^2} + \mathcal{O}(s^3) \right]. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Обратим внимание, что $s \geq \zeta$, причем $s = \zeta$ только при $R = 0$, $z > a$. В этом случае (3.7) показывает, что $V = \infty$, как и должно быть для внутренней точки отрезка. При $\zeta = -s$ формула (3.7) согласуется с первой из формул (3.5).

Пример 3.3. Отрезок оси z между точками $\pm a$, где $a > 0$, с исчезающей на концах линейной плотностью

$$\alpha(z) = A \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right).$$

В определяющем интеграле

$$V(R, z) = \frac{A}{a^2} \int_{-a}^a \frac{a^2 - z'^2}{\sqrt{(z' - z)^2 + R^2}} dz'$$

сделаем подстановку $z' - z = t$ и представим его в форме

$$V(R, z) = \frac{A}{a^2} \int_{-a-z}^{a-z} \left[\frac{a^2 + R^2 - z^2}{\sqrt{t^2 + R^2}} - \frac{2zt}{\sqrt{t^2 + R^2}} - \sqrt{t^2 + R^2} \right] dt.$$

С учетом (7.1)

$$V = \frac{A}{2a^2} \left[(3z - a)\sqrt{(z + a)^2 + R^2} - (3z + a)\sqrt{(z - a)^2 + R^2} + (2a^2 + R^2 - 2z^2) \ln \frac{\sqrt{(a - z)^2 + R^2} + a - z}{\sqrt{(a + z)^2 + R^2} - a - z} \right].$$

На оси z вне T логарифмический член надо преобразовать по типу (3.5).

Пример 3.4. Отрезок оси z между точками $\pm a$, где $a > 0$, с интегрируемой сингулярностью на концах

$$\alpha(z) = A \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1/2}.$$

В соответствующем определяющем интеграле сделаем стандартную замену $z' = a \cos t$:

$$V(R, z) = Aa \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{(z - a \cos t)^2 + R^2}}. \quad (3.8)$$

Интеграл (3.8) с точностью до обозначений совпадает с (7.8), так что можно воспользоваться формулой (7.13)

$$V(R, z) = BK(k). \quad (3.9)$$

Здесь

$$k = \sqrt{\frac{\gamma(a - z\gamma)}{z(1 - \gamma^2)}}, \quad B = 2A \sqrt{\frac{a\gamma}{z(1 - \gamma^2)}}, \quad (3.10)$$

где

$$\gamma = \frac{R^2 + z^2 + a^2 - \sqrt{(R^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2z^2}}{2az}. \quad (3.11)$$

Модуль k полного эллиптического интеграла первого рода $K(k)$ всегда меньше единицы. При малых z в (3.10), (3.11) следует исключить сингулярность. Достаточно представить (3.11) в форме

$$\gamma = \frac{2az}{R^2 + z^2 + a^2 + \sqrt{(R^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2z^2}}. \quad (3.12)$$

На оси z потенциал элементарен

$$V(0, z) = \frac{Aa\pi}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (3.13)$$

В горизонтальной плоскости

$$V(R, 0) = \frac{2Aa}{\sqrt{R^2 + a^2}} K\left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right). \quad (3.14)$$

Пример 3.5. Окружность.

Рассмотрим окружность $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = 0$ с линейной плотностью $\alpha(\varphi)$. В цилиндрических координатах элемент массы $dm = a \alpha(\varphi) d\varphi$,

$$V(R, \varphi, z) = a \int_0^{2\pi} \frac{\alpha(\varphi') d\varphi'}{\sqrt{a^2 - 2aR \cos(\varphi' - \varphi) + R^2 + z^2}}. \quad (3.15)$$

Совершим замену переменных

$$t = (\varphi' - \varphi - \pi)/2, \quad \varphi' = 2t + \varphi + \pi.$$

В результате

$$V = \frac{2a}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha(2t + \varphi + \pi) dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad (3.16)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{4aR}{(a+R)^2 + z^2}}, \quad t_1 = -\frac{\pi + \varphi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad t_2 - t_1 = \pi.$$

Очевидно, $0 \leq k \leq 1$, причем $k = 0$ на оси z (при $R = 0$), $k = 1$ на самой окружности T ($R = a$, $z = 0$).

Пример 3.6. Однородная окружность.

Пусть α постоянна. Интеграл (3.16) распространен на промежутки длины π , равной периоду подынтегральной функции. Его можно заменить на промежуток $[-\pi/2, \pi/2]$. Окончательно,

$$V(R, z) = \frac{4a\alpha}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} K(k). \quad (3.17)$$

На окружности $k = 1$, что приводит к логарифмической сингулярности. При малом расстоянии $s = \sqrt{(R-a)^2 + z^2}$ точки Q от окружности

$$k^2 = 1 - \frac{s^2}{4a^2} + \dots, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{s^2}{4a^2} + \dots$$

Используем разложение (Бейтмен, Эрдейи, 1967), (Градиштейн, Рыжик, 1971), пригодное в окрестности особой точки $k = 1$, $k' = 0$

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + \dots \quad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.17), найдем асимптотику потенциала в окрестности притягивающей окружности

$$V(R, z) \sim 2\alpha \ln \frac{8a}{s}. \quad (3.19)$$

На оси z потенциал элементарен

$$V(0, z) = \frac{2\pi a\alpha}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (3.20)$$

Пример 3.7. Дуга однородной окружности.

Рассмотрим дугу однородной окружности с плотностью α , расположенную между точками с азимутами φ_1, φ_2 , причем $\varphi_1 < \varphi_2$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi$. Интеграл (3.15) берется по дуге $\varphi_1 \leq \varphi' \leq \varphi_2$, а (3.16) — по дуге $t_1 \leq t \leq t_2$ при

$$t_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi - \pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi - \pi}{2}, \quad t_2 - t_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

так что

$$V = \frac{2a\alpha}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}. \quad (3.21)$$

Окончательно,

$$V(R, \varphi, z) = \frac{2a\alpha}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} [F(t_2, k) - F(t_1, k)], \quad (3.22)$$

где F — неполный эллиптический интеграл первого рода в форме Якоби (7.6).

Напомним, что $k = 0$ на оси z . Поэтому интеграл (3.21) тривиален:

$$V(0, \varphi, z) = \frac{a\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (3.23)$$

Для полной окружности

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \implies t_2 - t_1 = \pi,$$

так что (3.22) переходит в (3.17).

Задачи к главе 3

Задача 3.1. Найти потенциал отрезка примера 3.1 для случая плотности α , линейно зависящей от z .

Задача 3.2. Доказать формулы (3.13) и (3.14).

Задача 3.3. Найти асимптотику потенциала отрезка в примерах 3.3 и 3.4 при стремлении Q к внутренней точке отрезка.

Задача 3.4. Найти асимптотику потенциала отрезка в примерах 3.3 и 3.4 при стремлении Q к концевой точке отрезка.

Задача 3.5. Убедиться, что во всех примерах, рассмотренных в этой главе, асимптотика на бесконечности совпадает с (2.6).

Глава 4

Потенциал двумерных тел

Потенциал материальной поверхности T с поверхностной плотностью β в \mathbb{R}^3 в силу (2.2) определяется поверхностным интегралом

$$V(Q) = V(x, y, z) = \iint_T \frac{\beta(x', y', z') d\sigma}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}, \quad (4.1)$$

где $d\sigma$ — элемент площади T . Граница ∂T (не обязательно связная) фигуры T (не обязательно односвязной) считается кусочно-гладкой кривой, а плотность β — кусочно-непрерывной. Физическая размерность поверхностной плотности β в системе СИ — кг/м².

Если T — область в плоскости xy , то поверхностный интеграл превращается в двойной

$$V(Q) = V(x, y, z) = \iint_T \frac{\beta(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}}. \quad (4.2)$$

В нескольких рассмотренных ниже примерах установлены следующие свойства потенциала (4.1) двумерной материальной поверхности (называемой еще простым слоем).

1. Потенциал $V(Q)$ непрерывен во всем пространстве \mathbb{R}^3 .
2. В окрестности гладкого участка T (но, возможно, не границы T), на котором плотность $\beta(Q)$ непрерывна,

$$V(Q) \sim V(Q_0) - 2\pi\varrho s. \quad (4.3)$$

Здесь Q_0 — точка поверхности T , служащая основанием перпендикуляра, опущенного из Q на T , s — расстояние от Q_0 до Q .

При стремлении к границе T или к линии разрыва плотности асимптотическое поведение потенциала может быть более сложным.

3. В окрестности гладкого участка T (но, возможно, не границы T), на котором плотность $\beta(Q)$ непрерывна, касательные производные потенциала непрерывны.
4. В окрестности гладкого участка T (но, возможно, не границы T), на котором плотность $\beta(Q)$ непрерывна, нормальная производная потенциала терпит скачок

$$\frac{\partial V^+}{\partial n} - \frac{\partial V^-}{\partial n} = -4\pi\beta. \quad (4.4)$$

В руководствах по теории потенциала доказывается, что это верно в общем случае при сформулированных условиях.

Пример 4.1. Однородный прямоугольник.

Пусть T — однородный прямоугольник поверхностной плотности β с вершинами $Q_{ik}(a_i, b_k, 0)$, где $i, k = 1, 2$; $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. По общей теории в согласии с (4.2)

$$V = \beta \int_{b_1}^{b_2} dy' \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}}.$$

Внутренний интеграл совпадает с потенциалом (3.4) однородного отрезка, ориентированного параллельно оси x

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}} = \sum_{i=1}^2 (-1)^i V_i,$$

где

$$V_i = \ln \left[c_i + \sqrt{(y' - y)^2 + e_i^2} \right], \quad c_i = a_i - x, \quad e_i = \sqrt{c_i^2 + z^2}.$$

Таким образом,

$$V = \beta \sum_{i=1}^2 (-1)^i \int_{b_1 - y}^{b_2 - y} \ln \left(c_i + \sqrt{t^2 + e_i^2} \right) dt.$$

Остается воспользоваться формулой (7.3)

$$V = \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} (F_{ik} + 2zG_{ik}). \quad (4.5)$$

Здесь

$$F_{ik} = (a_i - x) \ln(b_k - y + s_{ik}) + (b_k - y) \ln(a_i - x + s_{ik}),$$

$$G_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{z(b_k - y)}{\left(\sqrt{(a_i - x)^2 + z^2} + a_i - x\right) \left(\sqrt{(a_i - x)^2 + z^2} + s_{ik}\right)},$$

где $s_{ik} = \sqrt{(a_i - x)^2 + (b_k - y)^2 + z^2}$.

Определим еще градиент потенциала. По симметрии достаточно ограничиться компонентами по осям y и z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} = \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k+1} \left[\ln(a_i - x + s_{ik}) + \frac{a_i - x}{s_{ik}} + \right. \\ \left. + \frac{(b_k - y)^2}{(a_i - x + s_{ik})s_{ik}} + \frac{z^2}{(a_i - x + s_{ik})s_{ik}} \right]. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Здесь последнее слагаемое отвечает производной от последнего слагаемого (4.5).

Сумма трех последних слагаемых в квадратных скобках в (4.6) равна единице. С учетом множителя $(-1)^{i+k+1}$ они взаимно уничтожаются при суммировании по i, k . Окончательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k+1} \ln(a_i - x + s_{ik}) = \\ &= \beta \ln \frac{(a_2 - x + s_{21})(a_1 - x + s_{12})}{(a_1 - x + s_{11})(a_2 - x + s_{22})}. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Перейдем к вертикальной производной

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} \left[\frac{z(a_i - x)}{(a_i - x)^2 + z^2} + 2G_{ik} \right].$$

Первое слагаемое (вне арктангенса) пропадает при суммировании по k . Окончательно,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} G_{ik}. \quad (4.8)$$

Очевидно, потенциал V непрерывен во всем пространстве \mathbb{R}^3 . Производная $\partial V/\partial y$ непрерывна всюду за исключением сторон $Q_{11}Q_{21}$ и $Q_{12}Q_{22}$. Пусть, например, $Q(x, y, z)$ лежит в окрестности неконцевой точки отрезка $Q_{11}Q_{21}$

$$x = a + u, \quad y = b_1 + v,$$

где $a_1 < a < a_2$, а u, v, z бесконечно малы. Под знаком логарифма в (4.7) лишь один множитель становится бесконечно малым

$$a_1 - x + s_{11} \sim \frac{v^2 + z^2}{2(a_2 - a_1)}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial V(a + u, b_1 + v, z)}{\partial y} = -\beta \ln(v^2 + z^2) + W. \quad (4.9)$$

Через W мы обозначаем различные аналитические функции координат.

Исследуем теперь поведение $\partial V/\partial y$ в окрестности вершин, например, в окрестности Q_{11}

$$x = a_1 + u, \quad y = b_1 + v.$$

По-прежнему особенность вносит лишь величина

$$a_1 - x + s_{11} \sim -u + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial V(a_1 + u, b_1 + v, z)}{\partial y} = -\beta \ln \left(-u + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2} \right) + W. \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) делаем вывод, что $\partial V/\partial y$ непрерывна всюду в \mathbb{R}^3 , за исключением сторон $Q_{11}Q_{22}$ и $Q_{12}Q_{22}$, где она обращается в плюс бесконечность.

Поведение $\partial V/\partial x$ аналогично. Обе касательные производные непрерывны внутри прямоугольника T .

Переходим к вертикальной производной $\partial V/\partial z$. Исследуем сначала окрестность внутренней точки $Q(a, b, 0)$ прямоугольника

$$x = a + u, \quad y = b + v, \quad a_1 < a < a_2, \quad b_1 < b < b_2.$$

Сингулярность в формуле (4.8) содержат лишь слагаемые при $i = 1$ и $k = 1, 2$. Поскольку

$$\sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + a_1 - x \sim \frac{z^2}{2(a - a_1)},$$

то

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_1}{z} - 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_2}{z} + W, \quad (4.11)$$

где здесь и ниже A_k — положительные константы.

Таким образом, при пересечении T производная $\partial V/\partial z$ терпит скачок

$$\frac{\partial V^+}{\partial z} - \frac{\partial V^-}{\partial z} = -4\pi\beta.$$

В окрестности точки внутри отрезка $Q_{11}Q_{21}$

$$x = a + u, \quad y = b_1 + v, \quad a_1 < a < a_2,$$

сингулярны те же слагаемые. Поскольку

$$\sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + a_1 - x \sim \frac{z^2}{2(a - a_1)},$$

то

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_3 v}{z} - 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_4}{z} + W.$$

Таким образом, $\partial V/\partial z$ ограничена, но не имеет предела при независимом стремлении v, z к нулю.

Наконец, в окрестности вершины Q_{11}

$$\begin{aligned} x = a_1 + u, \quad y = b_1 + v, \quad b_1 - y = -v, \quad s_{11} = \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}, \\ (a_1 - x)^2 + z^2 = u^2 + z^2, \quad \sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + a_1 - x = \sqrt{u^2 + z^2} - u, \\ \sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + s_{11} = \sqrt{u^2 + z^2} + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\beta \operatorname{arctg} \frac{zv}{(\sqrt{u^2 + z^2} - u)(\sqrt{u^2 + z^2} + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2})} -$$

$$- 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_5 z}{(\sqrt{u^2 + z^2} - u)}.$$

По-прежнему $\partial V/\partial z$ ограничена, но не имеет предела при $Q \rightarrow Q_{11}$.

Переходим к потенциалу однородного треугольника. Начнем с частного случая вычисления потенциала в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости треугольника, проведенном через одну из его вершин. Введем систему отсчета, в которой выделенная вершина совпадает с началом координат, а ось y параллельна противоположной стороне.

Пример 4.2. Однородный треугольник; потенциал над вершиной.

Задан однородный треугольник OQ_1Q_2 с вершинами $O(0, 0, 0)$, $Q_1(a, b_1, 0)$, $Q_2(a, b_2, 0)$ и поверхностной плотностью β , причем $a > 0$, $b_2 > b_1$, так что обход контура T происходит в положительном направлении (рис. 4.1). Найдем потенциал T в точке $Q(0, 0, z)$.

Применим формулу (4.2) в полярных координатах

$$V(Q) = \beta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{a/\cos \varphi} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

где $\varphi_i = \operatorname{arctg}(b_i/a)$. Внутренний интеграл равен

$$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + z^2} - |z|,$$

так что

$$V = \beta V_1 - \beta |z| (\varphi_2 - \varphi_1),$$

где

$$V_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + z^2} d\varphi.$$

Интеграл берется подстановкой

$$t = \operatorname{tg} \varphi, \quad \cos^{-2} \varphi = 1 + t^2, \quad dt = (1 + t^2) d\varphi:$$

$$V_1 = \int_{b_1/a}^{b_2/a} \frac{\sqrt{a^2 + z^2 + a^2 t^2}}{1 + t^2} dt.$$

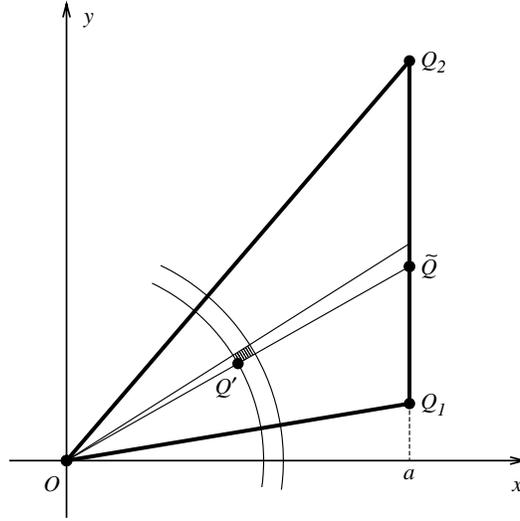


Рис. 4.1. К примеру 4.2. Элементарный криволинейный прямоугольник (заштрихован) имеет длины сторон dr и $r d\varphi$. Точка Q' имеет полярные координаты (r, φ) , точка $\tilde{Q} - (a/\cos \varphi, \varphi)$. Точка Q находится на оси z , в общем случае вне плоскости чертежа. Для обеспечения непрерывности считаем $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

Остается воспользоваться формулой (7.2)

$$V = -\beta |z| (\varphi_2 - \varphi_1) + a\beta \ln \frac{b_2 + \sqrt{a^2 + b_2^2 + z^2}}{b_1 + \sqrt{a^2 + b_1^2 + z^2}} + \beta z \left(\operatorname{arctg} \frac{b_2 z}{a\sqrt{a^2 + b_2^2 + z^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b_1 z}{a\sqrt{a^2 + b_1^2 + z^2}} \right). \quad (4.12)$$

Правая часть (4.12) координатно-зависима. Перейдем к инвариантным величинам, не зависящим от системы координат. Пусть $|OQ_i| = r_i$, $|Q_1Q_2| = s$ — длины сторон треугольника; $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ — угол при вершине O .

Удвоенная площадь треугольника равна $as = r_1 r_2 \sin \varphi_0$, поэтому

$$a = \frac{r_1 r_2}{s} \sin \varphi_0. \quad (4.13)$$

По теореме Пифагора $a^2 + b_i^2 = r_i^2$. Отсюда следует $b_2^2 - b_1^2 = r_2^2 - r_1^2$. Поскольку $b_2 - b_1 = s$, то $b_2 + b_1 = (r_2^2 - r_1^2)/s$. Мы знаем сумму и разность b_k , что дает

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{r_2^2 - r_1^2 - s^2}{2s}, \\ b_2 &= \frac{r_2^2 - r_1^2 + s^2}{2s}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Соотношение (4.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{V}{\beta} &= -|z|\varphi_0 + \frac{r_1 r_2 \sin \varphi_0}{s} \times \\ &\quad \times \ln \frac{r_2^2 - r_1^2 + s^2 + 2s\sqrt{r_2^2 + z^2}}{r_2^2 - r_1^2 - s^2 + 2s\sqrt{r_1^2 + z^2}} + \\ &\quad + z \left[\operatorname{arctg} \frac{(r_2^2 - r_1^2 + s^2)z}{2r_1 r_2 \sin \varphi_0 \sqrt{r_2^2 + z^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \frac{(r_2^2 - r_1^2 - s^2)z}{2r_1 r_2 \sin \varphi_0 \sqrt{r_1^2 + z^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Пример 4.3. Однородный треугольник.

Обратимся к случаю общего положения точки $Q(x, y, z)$.

Пусть проекция $Q_0(x, y, 0)$ точки Q попадает внутрь треугольника $Q_1 Q_2 Q_3$. Разобьем его на три вспомогательных треугольника $T_i = Q Q_i Q_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$, см. рис. 4.2. Как обычно, индекс i понимается по модулю 3: $Q_{i+3} = Q_i$.

Очевидно, потенциал T в Q равен сумме потенциалов треуголь-

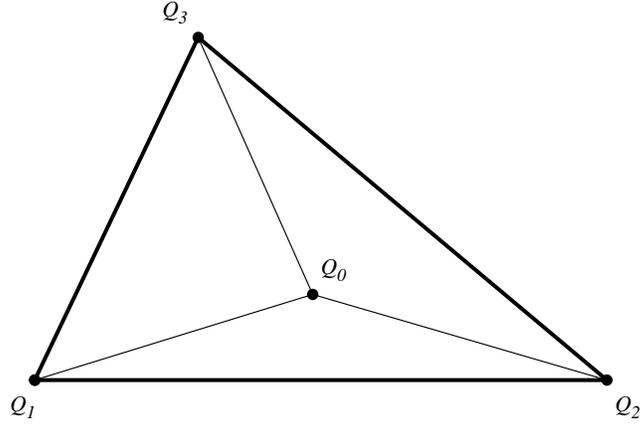


Рис. 4.2. К потенциалу треугольника. Случай положения проекции Q_0 точки Q внутри треугольника.

ников T_i . Достаточно поэтому просуммировать правые части (4.15) в слегка измененных обозначениях

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\beta} = & -2\pi|z| + \\
& + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2}}{s_{i+2}} \ln \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}}{r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} + \right. \\
& + z \left[\operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2) z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}} - \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2) z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} \right] \right\}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
r_i &= Q_0 Q_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \\
s_i &= Q_{i+1} Q_{i+2} = \sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2},
\end{aligned}$$

а φ_i — угол между векторами $\overrightarrow{Q_0Q_{i+1}}$ и $\overrightarrow{Q_0Q_{i+2}}$:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_i &= \frac{(x_{i+1} - x)(x_{i+2} - x) + (y_{i+1} - y)(y_{i+2} - y)}{r_{i+1}r_{i+2}}, \\ \sin \varphi_i &= \frac{(x_{i+1} - x)(y_{i+2} - y) - (y_{i+1} - y)(x_{i+2} - x)}{r_i r_{i+1}}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Напомним, что треугольник $Q_1Q_2Q_3$ обладает правой ориентацией, а индекс i считается по модулю 3.

Пусть проекция Q_0 лежит вне треугольника $Q_1Q_2Q_3$. Построим треугольники $T_i = Q_0Q_iQ_{i+1}$. Легко убедиться (см. рис. 4.3), что потенциал T в Q равен сумме потенциалов T_i с коэффициентами ± 1 .

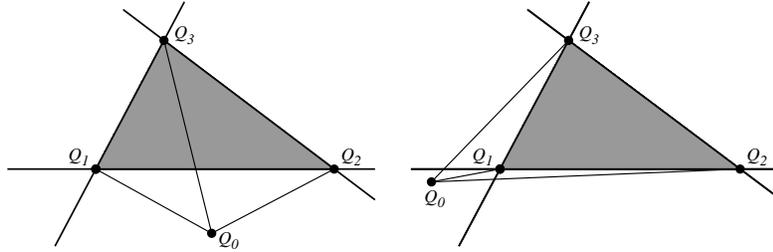


Рис. 4.3. К потенциалу треугольника. Случаи положения проекции Q_0 точки Q вне треугольника.

Коэффициенты зависят от положения Q_0 в одной из 6 областей, на которые плоскость разбивается продолжениями сторон треугольника.

Пусть Q лежит, как на рис. 4.3 слева. В понятных обозначениях

$$V(Q) = V(QQ_2Q_3) + V(QQ_3Q_1) - V(QQ_2Q_1).$$

При положении Q , как на рис. 4.3 справа

$$V(Q) = V(QQ_2Q_3) - V(QQ_2Q_1) - V(QQ_1Q_3).$$

Условимся считать, что потенциал меняет знак при перемене ориен-

тации треугольника. Тогда обе вышеприведенные формулы можно записать в виде

$$V(Q) = V(QQ_1Q_2) + V(QQ_2Q_3) + V(QQ_3Q_1).$$

То же верно во всех шести областях.

Резюмируем. Формулы (4.17) считаем справедливыми, допуская $-\pi < \varphi_i \leq \pi$ и считая φ_i положительным при вращении $\overrightarrow{QQ_{i+1}}$ к $\overrightarrow{QQ_{i+2}}$ против часовой стрелки и отрицательным в противном случае. Угол φ_i можно определить аналитически, рассматривая скалярное и векторное приведение векторов $\overrightarrow{QQ_{i+1}}$, $\overrightarrow{QQ_{i+2}}$.

Формулы (4.16) остаются верными, если отбросить первое слагаемое в правой части. Для большей общности можно заменить его на

$$-|z|(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \quad (4.18)$$

так что сумма углов будет равна 2π при внутреннем положении точки Q_0 и равна 0 при внешнем.

При пересечении точкой Q_0 границы треугольника некоторые слагаемые (4.16), содержащие арктангенс, терпят разрыв. Пусть, например, $z > 0$ остается постоянной, а Q_0 пересекает сторону Q_1Q_2 . При движении изнутри треугольника наружу $\sin \varphi_3 \rightarrow +0$, а при движении снаружи внутрь $\sin \varphi_3 \rightarrow -0$. Выражение в квадратных скобках (4.16) стремится соответственно к $+\pi$ и $-\pi$, а после умножения на z — к $+z\pi$ и $-z\pi$. В сумме с величиной (4.18) получаем в пределе $-z\pi$ независимо от направления движения.

Аналогичны рассуждения при движении Q_0 наружу через вершину — например, Q_1 . В этом случае $r_1 \rightarrow 0$,

$$s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = (s_3 - r_2)(s_3 + r_2) + r_1^2 < Cr_1,$$

поскольку модуль разности двух сторон треугольника меньше третьей стороны. Поэтому при $i = 1$ сингулярно лишь первое слагаемое в квадратных скобках, и оно меняется скачком от $+\pi/2$ к $-\pi/2$. Таково же поведение члена при $i = 3$. В результате сумма (4.16) непрерывна.

При $z = 0$ слагаемое (4.18) исчезает, а в (4.16) остаются лишь логарифмические члены.

Пример 4.4. Однородный многоугольник.

Пусть T — лежащий в плоскости xy однородный n -угольник $Q_1Q_2 \dots Q_n$; ограничивающая его ломаная не имеет самопересече-

ний и обходит T в положительном направлении. Выпуклость T не обязательна.

Представим потенциал T в точке Q суммой потенциалов ориентированных треугольников $T_i = Q_0Q_iQ_{i+1}$. Здесь Q_0 — проекция Q на плоскость xy , индекс i понимается по модулю n , $i + n \equiv i$. Легко убедиться по индукции, что учет ориентации оставляет в конце концов вклад в потенциал только от T .

Таким образом, для потенциала многоугольника справедлива формула (4.16) при суммировании по i от 1 до n . Первое слагаемое в правой части в общем случае следует заменить на

$$-|z|(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n). \quad (4.19)$$

Пример 4.5. Однородная сфера.

Пусть T — однородная сфера радиуса a с постоянной поверхностной плотностью β . Масса сферы равна

$$M = 4\pi a^2 \beta.$$

Воспользуемся сферическими координатами с началом в центре сферы

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (4.20)$$

По симметрии потенциал зависит только от r . Можно считать, что пробная точка имеет декартовы координаты $Q(0, 0, r)$. Элемент площади сферы равен $d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, поэтому согласно (4.1)

$$V(Q) = a^2 \beta \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Оба интеграла элементарны

$$V = \frac{2\pi a \beta}{r} \sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2} \Big|_0^\pi = \frac{2\pi a \beta}{r} [(a+r) - |a-r|].$$

Окончательно,

$$V(r) = \begin{cases} M/a, & \text{если } r \leq a, \\ M/r, & \text{если } r \geq a. \end{cases} \quad (4.21)$$

Таким образом, сфера не притягивает внутренних точек, а внешние притягивает, как точка той же массы в центре сферы.

Задачи к главе 4

Задача 4.1. Рассмотрим прямоугольник примера 4.1 в системе координат с началом в центре прямоугольника и с осями, параллельными сторонам прямоугольника. Его вершины получают координаты $Q_{ik}(a_i, b_k, 0)$, где $i, k = 1, 2$; $-a_1 = a_2 = a$, $-b_1 = b_2 = b$, причем $a > 0$, $b > 0$. Доказать зеркальную симметричность потенциала:

$$V(\pm x, \pm y, \pm z) = V(x, y, z).$$

Задача 4.2. В задаче 4.1 рассмотреть случай квадрата $a = b$. Доказать симметричность потенциала относительно поворотов на $\pi/2$

$$V(x, y, z) = V(y, x, z).$$

Задача 4.3. Найти градиент потенциала однородного треугольника примера 4.3.

Задача 4.4. Доказать непрерывность касательных производных потенциала однородного треугольника примера 4.3.

Задача 4.5. Вычислить скачок нормальной производной потенциала при пересечении однородного треугольника примера 4.3.

Задача 4.6. Доказать непрерывность потенциала однородной сферы примера 4.5.

Задача 4.7. Доказать непрерывность касательных производных потенциала однородной сферы примера 4.5.

Задача 4.8. Вычислить скачок нормальной производной потенциала при пересечении однородной сферы примера 4.5.

Задача 4.9. Убедиться, что во всех примерах, рассмотренных в этой главе, асимптотика на бесконечности совпадает с (2.6).

Глава 5

Потенциал трехмерных тел

Потенциал трехмерного тела T с плотностью ρ в \mathbb{R}^3 определяется объемным интегралом

$$V(Q) = \iiint_T \frac{\rho(x', y', z') d\tau}{s}, \quad (5.1)$$

где $s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$, $d\tau$ — элемент объема. Граница ∂T (не обязательно связная) фигуры T (не обязательно односвязной) считается кусочно-гладкой поверхностью, а плотность ρ — кусочно-непрерывной. Физическая размерность плотности ρ в системе СИ — $\text{кг}/\text{м}^3$.

В рассмотренных ниже примерах установлены следующие свойства потенциала объемного тела.

1. Потенциал $V(Q)$ непрерывен во всем пространстве \mathbb{R}^3 .
2. Градиент потенциала $\mathbf{w}(Q)$ непрерывен во всем пространстве \mathbb{R}^3 .
3. При пересечении границы T или поверхностей разрыва плотности вторые производные потенциала терпят разрыв.
4. В тех точках Q тела T , в которых плотность непрерывна и удовлетворяет условию Лишица с произвольным показателем, внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho. \quad (5.2)$$

5. Если плотность является аналитической функцией координат, то и внутренний потенциал — аналитическая функция.

В руководствах по теории потенциала доказывается, что это верно в общем случае при сформулированных условиях.

Пример 5.1. Однородный тетраэдр; потенциал в вершине.

Пусть T — однородный тетраэдр $Q_1Q_2Q_3Q_4$, изображенный на рис. 5.1. Примем, что он обладает правой ориентацией. Именно,

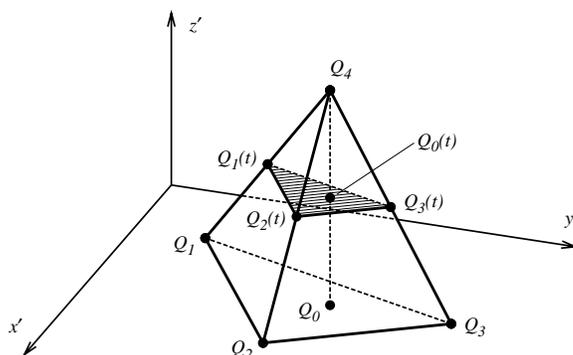


Рис. 5.1. Правоориентированный тетраэдр. Вершина $Q_4(x, y, z)$ лежит в верхнем полупространстве, так что $z > 0$. Вершины $Q_i(x_i, y_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$, лежат в плоскости $z' = 0$. Обход $Q_1Q_2Q_3$ происходит против часовой стрелки, если смотреть с вершины Q_4 . Заштриховано сечение $Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$ тетраэдра плоскостью $z' = z(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$. Значение $t = 0$ отвечает вершине Q_4 , $t = 1$ — основанию $Q_1Q_2Q_3$. Изображен также перпендикуляр $Q_4Q_0(t)Q_0$, опущенный из Q_4 на основание (если двугранный угол у одного из ребер Q_1Q_2 , Q_2Q_3 или Q_3Q_1 — тупой, то Q_0 лежит вне треугольника $Q_1Q_2Q_3$). Длины отрезков перпендикуляра: $|Q_0Q_0(t)| = (1 - t)z$, $|Q_0(t)Q_4| = tz$, $|Q_0Q_4| = z$.

выберем содержащую точки $Q_1Q_2Q_3$ плоскость за ориентированную плоскость $x'y'$ (нам удобнее обозначать оси координат буквами со штрихами). Считаем, что треугольник $Q_1Q_2Q_3$ обладает правой ориентацией, а точка Q_4 лежит в верхнем полупространстве $z' > 0$. Этому условию всегда можно добиться, нумеруя вершины надлежащим образом.

Обозначим координаты Q_i через $(x_i, y_i, 0)$ для $i = 1, 2, 3$ и через (x, y, z) , $z > 0$, для $i = 4$.

Разобьем тетраэдр на бесконечно тонкие слои толщиной $z dt$ плоскостями $z' = (1-t)z$ (рис. 5.1).

Потенциал слоя равен потенциалу треугольника $Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$ с поверхностной плотностью $\rho z dt$. Потенциал же треугольника в точке Q_4 определен формулой (4.16) с модификацией (4.18). Только вместо треугольника $Q_1Q_2Q_3$ мы должны рассматривать подобный ему $Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$. Точки $Q_0(t)$ и $Q_0 = Q_0(1)$ — пересечения проходящей через Q_4 прямой, параллельной оси z' , с плоскостями $z' = (1-t)z$ и $z' = 0$ — также расположены с сохранением подобия. Поэтому в формуле (4.16) нужно сделать подстановку

$$r_i \mapsto tr_i, \quad s_i \mapsto ts_i, \quad \varphi_i \mapsto \varphi_i, \quad z \mapsto tz.$$

Выражения под знаком логарифма и арктангенса не изменятся.

В результате правую часть (4.16) следует умножить на $\rho z t dt$ и проинтегрировать по t от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \frac{2V(Q_4)}{\rho z} = & -z(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \\ & + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2}}{s_{i+2}} \ln \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}}{r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} + \right. \\ & + z \left[\operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2) z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}} - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2) z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} \right] \right\}. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Пример 5.2. Однородный тетраэдр.

Пусть теперь $Q(x, y, z)$ — произвольная точка внутри T . Потенциал в точке Q будет суммой потенциалов четырех правоориентированных тетраэдров T_n : $T_1 = Q_2Q_4Q_3Q$, $T_2 = Q_3Q_4Q_1Q$, $T_3 = Q_1Q_4Q_2Q$, $T_4 = Q_1Q_2Q_3Q$.

Запишем полученный результат аналитически. Фиксируем n . Тетраэдру T_n поставим в соответствие набор перестановок $(ijkn)$

из четырех символов (1234). Каждому T_n отвечают 3 (из возможных 6) перестановки (ijk) , а именно те, для которых перестановка $(ijkn)$ — четная. Первое слагаемое справа в (5.3) можно записать как сумму по трем перестановкам, а сумма по i в (5.3) — это фактически сумма по трем допустимым перестановкам (ijk) . К ней надо добавить еще сумму по n . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{2V(Q)}{\varrho} = & - \sum \tilde{z}_n |\tilde{z}_n| \varphi_{nij} + \\ & + \sum \left\{ \frac{\tilde{z}_n r_{ni} r_{nj} \sin \varphi_{nij}}{s_{ij}} \ln \frac{r_{nj}^2 - r_{ni}^2 + s_{ij}^2 + 2s_{ij} R_j}{r_{nj}^2 - r_{ni}^2 - s_{ij}^2 + 2s_{ij} R_j} + \right. \\ & \left. + \tilde{z}_n^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{(r_{nj}^2 - r_{ni}^2 + s_{ij}^2) \tilde{z}_n}{2r_{ni} r_{nj} R_j \sin \varphi_{nij}} - \operatorname{arctg} \frac{(r_{nj}^2 - r_{ni}^2 - s_{ij}^2) \tilde{z}_n}{2r_{ni} r_{nj} R_j \sin \varphi_{nij}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь приняты следующие обозначения. Пусть S_n — плоскость, содержащая грань $Q_i Q_j Q_k$ тетраэдра T_n (она же — грань T); Q_{n0} — проекция Q на S_n . Тогда

$$\tilde{z}_n = |QQ_{n0}|, \quad r_{ni} = |Q_{n0}Q_i|, \quad R_i = |QQ_i|, \quad s_{ij} = |Q_i Q_j|,$$

а φ_{nij} — угол между векторами $\overrightarrow{Q_{n0}Q_i}$ и $\overrightarrow{Q_{n0}Q_j}$. Причина, по которой вместо \tilde{z}_n^2 мы написали $\tilde{z}_n |\tilde{z}_n|$, скоро выяснится.

Каждая сумма содержит 12 слагаемых: по 3 допустимых перестановки (ijk) для каждого из 4 значений n .

Нам осталось лишь выразить параметры $\tilde{z}_n, r_{ni}, \dots$ через координаты точек $Q_n(x_n, y_n, z_n), Q(x, y, z)$ в произвольной системе отсчета.

Обозначим через \mathbf{l}_n орт нормали к S_n , направленный внутрь T . Очевидно,

$$\mathbf{l}_n = \frac{\overrightarrow{Q_i Q_j} \times \overrightarrow{Q_i Q_k}}{\left| \overrightarrow{Q_i Q_j} \times \overrightarrow{Q_i Q_k} \right|}, \quad \tilde{z}_n = \overrightarrow{Q_i Q} \cdot \mathbf{l}_n = \frac{\left(\overrightarrow{Q_i Q_j}, \overrightarrow{Q_i Q_k}, \overrightarrow{Q_i Q} \right)}{\left| \overrightarrow{Q_i Q_j} \times \overrightarrow{Q_i Q_k} \right|},$$

где круглыми скобками обозначено смешанное произведение трех векторов. По определению точки Q_{n0}

$$\overrightarrow{Q_i Q_{n0}} = \overrightarrow{Q_i Q} - \tilde{z}_n \mathbf{l}_n.$$

Вычислим скалярный квадрат, а также скалярное и векторное произведения

$$|Q_i Q_{n0}|^2 = R_i^2 - \tilde{z}_n^2, \quad \overrightarrow{Q_i Q_{n0}} \cdot \overrightarrow{Q_j Q_{n0}} = \overrightarrow{Q_i Q} \cdot \overrightarrow{Q_j Q} - \tilde{z}_n^2,$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_i Q_{n0}} \times \overrightarrow{Q_j Q_{n0}} &= \overrightarrow{Q_i Q} \times \overrightarrow{Q_j Q} + \tilde{z}_n (\overrightarrow{Q_j Q} - \overrightarrow{Q_i Q}) \times \mathbf{l}_n = \\ &= \overrightarrow{Q_i Q} \times \overrightarrow{Q_j Q} - \tilde{z}_n \overrightarrow{Q_i Q_j} \times \mathbf{l}_n. \end{aligned}$$

Векторы $\overrightarrow{Q_i Q_{n0}}$ и $\overrightarrow{Q_j Q_{n0}}$ лежат в ортогональной вектору \mathbf{l}_n плоскости, следовательно, их векторное произведение коллинеарно \mathbf{l}_n :

$$\overrightarrow{Q_i Q_{n0}} \times \overrightarrow{Q_j Q_{n0}} = \Phi \mathbf{l}_n.$$

Умножая это равенство скалярно на \mathbf{l}_n , получим

$$\Phi = (\overrightarrow{Q_i Q}, \overrightarrow{Q_j Q}, \mathbf{l}_n).$$

От координат точки Q величина Φ зависит не квадратично, а линейно. Действительно, представим $\overrightarrow{Q_j Q} = \overrightarrow{Q_i Q} - \overrightarrow{Q_i Q_j}$, откуда

$$\Phi = -(\overrightarrow{Q_i Q}, \overrightarrow{Q_i Q_j}, \mathbf{l}_n).$$

Важно, что мы вычислили не модуль векторного произведения, а его компоненту вдоль вектора \mathbf{l}_n . Теперь однозначно определяются углы:

$$\cos \varphi_{nij} = \frac{\overrightarrow{Q_i Q} \cdot \overrightarrow{Q_j Q} - \tilde{z}_n^2}{\sqrt{(R_i^2 - \tilde{z}_n^2)(R_j^2 - \tilde{z}_n^2)}},$$

$$\sin \varphi_{nij} = \frac{(\overrightarrow{Q_i Q}, \overrightarrow{Q_j Q}, \mathbf{l}_n)}{\sqrt{(R_i^2 - \tilde{z}_n^2)(R_j^2 - \tilde{z}_n^2)}}.$$

Дадим в заключение рабочие формулы, выражающие параметры через исходные координаты:

$$s_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2},$$

$$\begin{aligned}
\xi_{ijk} &= (y_j - y_i)(z_k - z_j) - (y_k - y_i)(z_j - z_i), \\
\eta_{ijk} &= (z_j - z_i)(x_k - x_j) - (z_k - z_i)(x_j - x_i), \\
\zeta_{ijk} &= (x_j - x_i)(y_k - y_j) - (x_k - x_i)(y_j - y_i), \\
\lambda_{ijk} &= \sqrt{\xi_{ijk}^2 + \eta_{ijk}^2 + \zeta_{ijk}^2}, \\
\tilde{z}_n &= \frac{(x - x_i)\xi_{ijk} + (y - y_i)\eta_{ijk} + (z - z_i)\zeta_{ijk}}{\lambda_{ijk}}, \\
r_{ni} &= \sqrt{R_i^2 - \tilde{z}_n^2}, \\
\cos \varphi_{nij} &= \frac{(x - x_i)(x - x_j) + (y - y_i)(y - y_j) + (z - z_i)(z - z_j) - \tilde{z}_n^2}{r_{ni}r_{nj}}, \\
\sin \varphi_{nij} &= -\frac{\Psi_{nij}}{r_{ni}r_{nj}\lambda_{ijk}}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Psi_{nij} &= \left(\overrightarrow{Q_i Q_j}, \overrightarrow{Q_i Q_k}, \overrightarrow{Q_i Q_l} \times \overrightarrow{Q_i Q_m} \right) = \\
&= \left(\overrightarrow{Q_i Q_j} \cdot \overrightarrow{Q_i Q_k} \right) \left(\overrightarrow{Q_i Q_j} \cdot \overrightarrow{Q_i Q_l} \right) - |\overrightarrow{Q_i Q_j}|^2 \left(\overrightarrow{Q_i Q_k} \cdot \overrightarrow{Q_i Q_l} \right) = \\
&= [(x - x_i)(x_j - x_i) + \dots] [(x_j - x_i)(x_k - x_i) + \dots] - \\
&\quad - [(x_j - x_i)^2 + \dots] [(x - x_i)(x_k - x_i) + \dots],
\end{aligned}$$

где точками обозначены аналогичные члены с y, z . При выводе формулы для Ψ_{nij} мы воспользовались тождеством

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{bc}) - (\mathbf{ac})\mathbf{b}^2.$$

Заметим, что $\mathbf{l}_n, \tilde{z}_n$ не зависят от подстановки (ijk) .

Формула (5.4) доказана в предположении, что точка Q лежит внутри тетраэдра.

Пусть это не так. Тем не менее формула (5.4) остается справедливой. Для доказательства рассуждаем так, как в примере 4.3. Трехмерный случай менее нагляден, поэтому мы несколько модифицируем рассмотрение.

Пусть Q лежит на грани (но не ребрах и вершинах) $Q_1 Q_2 Q_3$ (рис. 5.2). Тогда $V(Q)$ будет суммой потенциалов трех правоориентированных тетраэдров $T_1 = Q_2 Q_4 Q_3 Q, T_2 = Q_3 Q_4 Q_1 Q,$

$T_3 = Q_1Q_4Q_2Q$. Тетраэдр $T_4 = Q_1Q_2Q_3Q$ выродился в плоский треугольник, дающий нулевой вклад в потенциал. В формуле (5.4) тетраэдру T_4 отвечают слагаемые при $n = 4$. Очевидно, $\tilde{z}_4 = 0$, так что эти слагаемые вносят нулевой вклад в $V(Q)$.

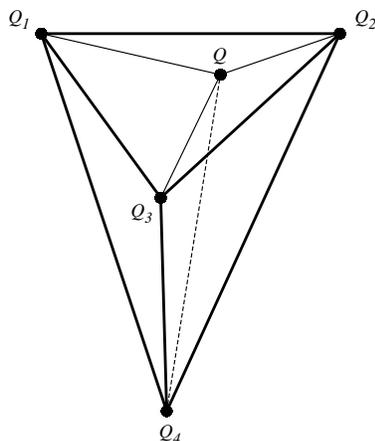


Рис. 5.2. Положение притягиваемой точки Q на грани $Q_1Q_2Q_3$.

Изменим слегка положение точки Q (рис. 5.2), отодвинув ее немного во внешнее по отношению к T пространство. Тогда $V(Q)$ будет суммой потенциалов T_1, T_2, T_3 минус потенциал *левоориентированного* тетраэдра $T_4 = Q_1Q_2Q_3Q$. Очевидно, Ψ_{4ij} при малом шевелении Q знака не меняет, а \tilde{z}_4 становится отрицательным. Формула (5.4) по-прежнему сохраняется. По принципу аналитического продолжения она верна во всем внешнем пространстве, а по непрерывности — на границе T .

Итак, формула (5.4) описывает потенциал T во всем пространстве \mathbb{R}^3 .

Пример 5.3. Однородный многогранник.

Всякий многогранник можно разбить на конечное число тетраэдров. Таким образом, по формулам предыдущих примеров потенциал однородного многогранника выражается через элементарные функции.

Пример 5.4. Тело сферической структуры.

Рассмотрим шар радиуса a , заполненный материей плотности $\varrho(r)$, зависящей лишь от расстояния r . Функцию $\varrho(r)$ считаем кусочно-гладкой. Масса шара равна

$$M = 4\pi \int_0^a r^2 \varrho(r) dr. \quad (5.5)$$

По симметрии V зависит только от r . Действуя, как в примере 4.5, считаем, что пробная точка имеет декартовы координаты $Q(0, 0, r)$. Элемент объема в сферических координатах равен $d\tau = r^2 dr d\sigma$, где $d\sigma$ — элемент площади единичной сферы σ . Поэтому согласно (5.1)

$$V(r) = \int_0^a \varrho(r') dr' \iint_{\sigma} \frac{r'^2 d\sigma}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2}}. \quad (5.6)$$

Внутренний интеграл (5.6) определяет потенциал сферы единичной плотности радиусом r' , найденный ранее, см. формулы (4.21). В результате при $r < a$

$$V(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \varrho(t) t^2 dt + 4\pi \int_r^a \varrho(t) t dt. \quad (5.7)$$

Для внешнего потенциала второй из интегралов исчезает, а первый берется в пределах от 0 до a :

$$V(r) = \frac{M}{r}, \quad \text{если } r \geq a. \quad (5.8)$$

Выражение для градиента содержит лишь один интеграл

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \varrho(t) t^2 dt = -\frac{M(r)}{r^2}, \quad (5.9)$$

где $M(r)$ — масса тела внутри сферы радиусом r . Таким образом, *внешние слои тела сферической структуры не притягивают внутренних точек*. Заметим, что представление (5.9) годится и для внутреннего, и для внешнего потенциала.

Пример 5.5. Гравитационное поле в окрестности тела сферической структуры.

Рассмотрим внешний потенциал (5.8) в окрестности поверхности шара. В силу сферической симметрии можно считать, что пробная

точка имеет декартовы координаты $Q(x, y, a + z)$. Считаем отношения $x/a, y/a, z/a$ малыми, z — положительным. Раскладывая

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (a + z)^2}}$$

в ряд Маклорена, получим

$$V = \frac{M}{a} - \frac{M}{a^2}z + \frac{M}{2a^3}(2z^2 - x^2 - y^2) + \dots$$

Постоянное первое слагаемое можно отбросить. Ускорение свободного падения на уровне границы шара $r = a$ обозначим через $g = M/a^2$. В результате

$$V(Q) = V(x, y, a + z) = -gz + \frac{g}{a} \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \dots \quad (5.10)$$

Для градиента

$$w_x = -\frac{x}{a}g + \dots, \quad w_y = -\frac{y}{a}g + \dots, \quad w_z = -g + \frac{2z}{a}g + \dots \quad (5.11)$$

Если пренебречь малыми величинами первого порядка, получим однородное гравитационное поле.

Потенциал тела сферической структуры элементарен для широкого класса функций. Например, оба интеграла (5.7) элементарны, если ϱ — рациональная функция от r . Если ϱ — многочлен, то и интегралы — многочлены от r .

Пример 5.6. Однородный шар.

Пусть в примере 5.4 плотность постоянна. Внутренний потенциал однородного шара равен

$$V(r) = \frac{2\pi}{3}\varrho(3a^2 - r^2). \quad (5.12)$$

Задачи к главе 5

Задача 5.1. Найти потенциал шара с плотностью

$$\varrho(r) = \sum_{k=0}^n c_k r^k. \quad (5.13)$$

Задача 5.2. Найти градиент потенциала шара примера 5.1.

Задача 5.3. Доказать, что внутренний потенциал и его градиент представляются рядами по степеням r , абсолютно сходящимися при $r \leq a$, для шара с плотностью

$$\varrho(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k, \quad (5.14)$$

если ряд (5.14) абсолютно сходится при $r = a$.

Задача 5.4. Для однородного шара, шара с плотностью (5.13) и шара с плотностью (5.14) доказать непрерывность потенциала в \mathbb{R}^3 .

Задача 5.5. Для однородного шара, шара с плотностью (5.13) и шара с плотностью (5.14) доказать непрерывность градиента потенциала в \mathbb{R}^3 .

Задача 5.6. Для однородного шара, шара с плотностью (5.13) и шара с плотностью (5.14) доказать, что внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (5.2), а внешний — уравнению Лапласа (1.7).

Задача 5.7. Убедиться, что на поверхности однородного шара вторые производные потенциала терпят разрыв.

Задача 5.8. Для однородного шара, шара с плотностью (5.13) и шара с плотностью (5.14) доказать, что внутренний потенциал — аналитическая функция координат.

Задача 5.9. Убедиться, что во всех примерах, рассмотренных в этой главе, асимптотика потенциала на бесконечности совпадает с асимптотикой (2.6).

Глава 6

Потенциал некоторых неограниченных тел

До сих пор мы рассматривали лишь компактные тела. Но на практике используются и неограниченные модели реальных тел. Например, гладкая поверхность притягивает близкие точки почти как однородная плоскость. Мы увидим, что и шар притягивает близкие внешние точки почти как однородная плоскость.

В этой главе рассмотрим несколько важных примеров неограниченных тел. Свойства 1, 2, 3, 6 внешнего потенциала (глава 2) сохраняются. Свойство 5 нарушается. Асимптотика на бесконечности может отличаться от описанной свойством 4.

Пример 6.1. Однородная прямая.

Рассмотрим однородную прямую (ось z) с постоянной линейной плотностью α . Представим ее как предел отрезка $[-b, b]$ оси z . Положим в (3.4) $a = -b$

$$V(R, z) = \alpha \ln \frac{\sqrt{R^2 + (b - z)^2} + (b - z)}{\sqrt{R^2 + (b + z)^2} - (b + z)}, \quad R \neq 0. \quad (6.1)$$

Устремляя b к бесконечности, получим бесконечное значение потенциала. Физически это означает, что для ухода от материальной прямой на бесконечное расстояние требуется бесконечная работа. Иными словами, вторая космическая скорость здесь бесконечна.

Но для расчета действующей на пробную точку силы нужна

лишь разность потенциалов. Вычислим значение (6.1) в фиксированной точке

$$V(R_0, 0) = \alpha \ln \frac{\sqrt{R_0^2 + b^2} + b}{\sqrt{R_0^2 + b^2} - b} \quad (6.2)$$

и образуем разность потенциалов (6.1) и (6.2)

$$V(R, z) - V(R_0, 0) = \alpha \ln \frac{\left[\sqrt{R^2 + (b-z)^2} + b - z \right] \left(\sqrt{R_0^2 + b^2} - b \right)}{\left[\sqrt{R^2 + (b+z)^2} - b - z \right] \left(\sqrt{R_0^2 + b^2} + b \right)}.$$

Перейдем к пределу $b \rightarrow \infty$. Обозначая результат снова через V , получим потенциал бесконечной прямой в виде

$$V(R, z) = V(R) = \alpha \ln \frac{R_0^2}{R^2} = -2\alpha \ln \frac{R}{R_0}. \quad (6.3)$$

Мы получили конечное выражение для потенциала, причем зависимость от z , как и следовало ожидать, исчезла.

Прибавляя к правой части выражения (6.3) несущественную постоянную $-2\alpha \ln R_0$, представим потенциал материальной прямой в виде

$$V(R, z) = V(R) = \alpha \ln \frac{1}{R^2} = -2\alpha \ln R. \quad (6.4)$$

Представление (6.4) проще, чем (6.3), но обладает неприятной особенностью: значения правой части зависят от выбора единицы измерения расстояния. Это не совсем удобно, но допустимо, поскольку физический смысл имеют лишь разность потенциалов и градиент, а они инвариантны относительно указанного выбора.

Установим основные свойства потенциала (6.4). Так как он не зависит от z , то его обычно рассматривают в плоскости xy , называя *логарифмическим потенциалом точки в \mathbb{R}^2* .

1. Потенциал $V(R)$ представляет собой функцию, вещественно-аналитическую в $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, т.е. во всем пространстве \mathbb{R}^2 за исключением начала координат.
2. Потенциал сингулярен в начале координат:

$$\lim V(R) = \infty \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0.$$

Физически это означает, что отрыв от притягивающей прямой требует бесконечной работы. Это общее свойство одномерных притягивающих тел обсуждалось в главе 3.

3. Потенциал сингулярен на бесконечности:

$$\lim V(R) = -\infty \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

Физически это означает, что уход на бесконечное расстояние от притягивающей прямой требует бесконечной работы. Иными словами, вторая космическая скорость бесконечна. Это свойство обсуждалось выше.

4. В пространстве \mathbb{R}^3 с выколотой осью z потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (1.7) и представляет собой гармоническую функцию.

Для доказательства вычислим последовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln R}{\partial x} &= \frac{x}{R^2}, \\ \frac{\partial^2 \ln R}{\partial x^2} &= \frac{R^2 - 2x^2}{R^4}, \quad \frac{\partial^2 \ln R}{\partial y^2} = \frac{R^2 - 2y^2}{R^4}, \quad \frac{\partial^2 \ln R}{\partial z^2} = 0. \end{aligned}$$

Складывая значения вторых производных, убедимся в справедливости (1.7).

5. Поток \mathcal{W} вектора \mathbf{w} через цилиндрическую поверхность, охватывающую ось z , равен $-\infty$. В некотором смысле это согласуется с формулой Остроградского–Гаусса (1.10), т.к. полная масса материальной прямой бесконечна. Если ограничиться плоскостью xy , то получим двумерный аналог (1.10)

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \begin{cases} -4\pi\alpha, & \text{если } O \text{ находится внутри } \widetilde{S}, \\ 0, & \text{если } O \text{ находится вне } \widetilde{S}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Здесь \widetilde{S} — замкнутая кривая в плоскости xy , $\widetilde{\mathcal{W}}$ — поток вектора \mathbf{w} через кривую \widetilde{S} .

Пример 6.2. Цилиндр T с компактной направляющей \widetilde{T} , параллельными оси z образующими и поверхностной плотностью β , не зависящей от z . Предполагаем \widetilde{T} кусочно-гладкой, а β — кусочно-непрерывной.

По симметрии можно считать $z = 0$ в пробной точке Q . По общей теории потенциал определяется формулой

$$V(Q) = V(x, y) = \int_{\tilde{T}} \beta(x', y') ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z'^2}},$$

где ds — элемент длины \tilde{T} . Внутренний интеграл представляет собой потенциал однородной прямой единичной линейной плотности, проходящей через точку $Q'(x', y', 0)$ параллельно оси z . Он дается формулой (6.4) при $\alpha = 1$ с учетом сдвига в точку Q' (рассуждения, связанные с расходимостью и переходом к разности потенциалов, опускаем):

$$V(Q) = V(x, y) = - \int_{\tilde{T}} \beta(x', y') \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] ds. \quad (6.6)$$

В нескольких рассмотренных ниже примерах установлены следующие свойства логарифмического потенциала (6.6).

1. Потенциал $V(x, y)$ непрерывен во всем пространстве \mathbb{R}^2 .
2. В окрестности гладкого участка \tilde{T} (но, возможно, не границы \tilde{T}), на котором плотность $\beta(Q)$ непрерывна, касательные производные потенциала непрерывны.
3. В окрестности гладкого участка \tilde{T} (но, возможно, не границы \tilde{T}), на котором плотность $\beta(Q)$ непрерывна, нормальная производная потенциала терпит скачок

$$\frac{\partial V^+}{\partial n} - \frac{\partial V^-}{\partial n} = -4\pi\beta. \quad (6.7)$$

4. Внешний потенциал $V(x, y)$ представляет собой функцию, вещественно-аналитическую в $\mathbb{R}^2 \setminus \{\tilde{T}\}$.
5. На бесконечности справедлива асимптотика потенциала

$$V = -\tilde{M} \ln R^2 + \mathcal{O}(R_0/R) \quad (6.8)$$

и градиента

$$\mathbf{w} = -2\tilde{M} \frac{\mathbf{R}}{R^2} + \mathcal{O}((R_0/R)^2). \quad (6.9)$$

Здесь R_0 — характерный размер \tilde{T} , \tilde{M} — приведенная масса, т.е. масса материальной кривой \tilde{T} с линейной плотностью β

$$\tilde{M} = \int_{\tilde{T}} \beta ds. \quad (6.10)$$

6. Внешний потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (1.7) и представляет собой гармоническую функцию.
7. Поток \tilde{W} вектора \mathbf{w} через лежащую в плоскости xy замкнутую кривую \tilde{S} равен

$$\tilde{W} = -4\pi \tilde{M}(\tilde{S}), \quad (6.11)$$

где $\tilde{M}(\tilde{S})$ — часть массы материальной кривой \tilde{T} с линейной плотностью β , заключенная внутри \tilde{S} .

В руководствах по теории потенциала доказывается, что это верно в общем случае при сформулированных условиях.

Пример 6.3. Полоса $x = 0$, $a \leq y \leq b$ с постоянной плотностью β . В соответствии с (6.6)

$$V = -\beta \int_a^b \ln [x^2 + (y' - y)^2] dy'.$$

Обозначая $y' - y = t$ и интегрируя по частям, получим

$$V = -\beta t \ln (t^2 + x^2) \Big|_{a-y}^{b-y} + 2\beta \int_{a-y}^{b-y} \frac{t^2 dt}{t^2 + x^2}.$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} \frac{V}{\beta} = & 2(b-a) + (a-y) \ln [x^2 + (a-y)^2] - \\ & - (b-y) \ln [x^2 + (b-y)^2] + \\ & + 2x \left[\operatorname{arctg} \frac{a-y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{b-y}{x} \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Определим компоненты градиента

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= 2\beta \left(\operatorname{arctg} \frac{a-y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{b-y}{x} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \beta \ln \frac{x^2 + (b-y)^2}{x^2 + (a-y)^2}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Пример 6.4. Круговой цилиндр $x^2 + y^2 = a^2$ с постоянной плотностью β .

По симметрии потенциал зависит лишь от расстояния R . Поэтому координаты пробной точки Q можно принять равными $(R, 0)$. По общей формуле (6.6)

$$V(R) = -a\beta \int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2aR \cos \varphi' + R^2) d\varphi'.$$

Обозначим в этом примере

$$\xi = \max\{a, R\}, \quad \eta = \min\left\{\frac{a}{R}, \frac{R}{a}\right\},$$

так что

$$a^2 - 2aR \cos \varphi' + R^2 = \xi^2 (1 - 2\eta \cos \varphi' + \eta^2).$$

С учетом (7.5) получаем окончательный результат

$$-V(R) = \widetilde{M} \ln \xi^2 = \begin{cases} \widetilde{M} \ln a^2, & \text{если } R \leq a, \\ \widetilde{M} \ln R^2, & \text{если } R \geq a. \end{cases}\tag{6.14}$$

Таким образом, цилиндр не притягивает внутренние точки (потенциал постоянен), а внешние точки притягивает, как прямая (ось цилиндра) той же приведенной массы.

Пример 6.5. Однородная плоскость поверхностной плотности β .

Пусть T — материальная плоскость $z = 0$ с постоянной поверхностной плотностью β . Получим потенциал T как предел потенциала прямоугольника при неограниченном увеличении его размеров. По симметрии V зависит лишь от z . Поэтому достаточно рассмотреть потенциал квадрата: прямоугольника из примера (4.1) при

$a_2 = b_2 = -a_1 = -b_1 = a$ в точке $Q(0, 0, z)$. Формула (4.5) существенно упрощается

$$\frac{V}{4\beta} = a \ln \frac{s+a}{s-a} + z \left[\operatorname{arctg} \frac{az}{s_2 s_3} - \operatorname{arctg} \frac{az}{s_1 s_3} \right], \quad (6.15)$$

где $s = \sqrt{2a^2 + z^2}$, $s_1 = \sqrt{a^2 + z^2} - a$, $s_2 = \sqrt{a^2 + z^2} + a$, $s_3 = \sqrt{a^2 + z^2} + s$.

При $a \rightarrow \infty$, очевидно, $V \rightarrow \infty$. Для получения разумного результата вычтем из правой части ее значение при $z = 0$. Первое слагаемое справа в (6.15) перейдет в

$$a \ln \frac{(\sqrt{2}-1) \left[1 + \sqrt{2 \left(1 + \frac{z^2}{2a^2} \right)} \right]}{(\sqrt{2}+1) \left[-1 + \sqrt{2 \left(1 + \frac{z^2}{2a^2} \right)} \right]} \sim a \ln \frac{1 + \frac{z^2(2-\sqrt{2})}{4a^2}}{1 + \frac{z^2(2+\sqrt{2})}{4a^2}},$$

что стремится к нулю при $a \rightarrow \infty$. Первое слагаемое внутри квадратной скобки в (6.15) также исчезает в пределе. Во втором слагаемом

$$\begin{aligned} \frac{az}{s_1 s_3} &= \frac{z}{a \left(\sqrt{1 + z^2/a^2} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + z^2/a^2} + \sqrt{2 + z^2/a^2} \right)} \sim \\ &\sim \frac{2a}{z(1 + \sqrt{2})}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

поэтому

$$\operatorname{arctg} \frac{az}{s_1 s_3} \rightarrow \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} z.$$

Окончательно,

$$V(z) = -2\pi\beta|z|. \quad (6.17)$$

Таким образом, по обе стороны притягивающей плоскости гравитационное поле однородно. Напомним, что в окрестности тела сферической структуры поле однородно в первом приближении.

Задачи к главе 6

Задача 6.1. Доказать свойство 5 потенциала (6.4).

Задача 6.2. Для потенциала полосы примера 6.3 доказать свойства 1–6 логарифмического потенциала (6.6).

Задача 6.3. Для потенциала кругового цилиндра примера 6.4 доказать свойства 1–6 логарифмического потенциала (6.6).

Задача 6.4. Вывести формулу (6.17), отправляясь от потенциала прямой (6.4).

Глава 7

Вспомогательные математические формулы

В этой главе мы приведем несколько формул для неопределенных и определенных интегралов. Справедливость первых из них устанавливается дифференцированием. Параметры a , b , c и независимая переменная t принимают произвольные вещественные значения, если не оговорено противное. Приводится одна из *непрерывных* первообразных (проверьте!).

1°.

$$2 \int \sqrt{t^2 + a^2} dt = t\sqrt{t^2 + a^2} + a^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}). \quad (7.1)$$

2°.

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}{1 + t^2} dt = b \ln(\sqrt{a^2 + b^2 t^2} + bt) + f(t), \quad (7.2)$$

где

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}, & \text{если } b^2 \leq a^2, \\ \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 t^2} - t\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2} + t\sqrt{b^2 - a^2}}, & \text{если } b^2 \geq a^2 > 0. \end{cases}$$

Обе части (7.2) вещественно-аналитичны при всех t .

3°. Следующую первообразную мы разобьем для облегчения контроля на два слагаемых

$$\int \ln(a + \sqrt{t^2 + b^2}) dt = F_1(t) + F_2(t) \quad (7.3)$$

при $b \geq |a| > 0$. Здесь

$$F_1(t) = t \ln(a + \sqrt{t^2 + b^2}) + a \ln(t + \sqrt{t^2 + b^2}) - t,$$

$$F_2(t) = 2\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{b^2 - a^2}}{(b+a)(b + \sqrt{t^2 + b^2})},$$

так что

$$F_1'(t) = \ln(a + \sqrt{t^2 + b^2}) - \frac{b^2 - a^2}{(a + \sqrt{t^2 + b^2})\sqrt{t^2 + b^2}},$$

$$F_2'(t) = \frac{b^2 - a^2}{(a + \sqrt{t^2 + b^2})\sqrt{t^2 + b^2}}.$$

Поскольку арктангенс ограничен, можно положить $F_2(t) \equiv 0$ при $a = \pm b$, так что $F_2(t)$ вещественно-аналитична при всех t . Функция $F_1(t)$ вещественно-аналитична при всех t для $a \neq -b$. Если $a = -b$, то $F_1(t)$ остается непрерывной при всех t , хотя ее производная разрывна в нуле:

$$F_1'(t) \sim \ln \frac{t^2}{2b} \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

4°. Следующий определенный интеграл найден в (*Фихтенгольц, 1997a*, ш. 314, 492)

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2c \cos \theta + c^2) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{если } |c| \leq 1, \\ \pi \ln c^2, & \text{если } |c| \geq 1. \end{cases} \quad (7.4)$$

5°. Формулу (7.4) можно обобщить

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2ab \cos \theta + b^2) d\theta = \pi \ln \xi^2. \quad (7.5)$$

Здесь a, b — вещественные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля;

$$\xi = \max\{|a|, |b|\}.$$

6°. Пусть k — произвольное число из промежутка $0 \leq k < 1$. Ниже-следующая формула определяет эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi, k)$ в форме Якоби:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}. \quad (7.6)$$

7°. При $\varphi = \pi/2$ интеграл (7.6) называется *полным* эллиптическим интегралом первого рода в форме Якоби и обозначается $K(k) = F(\pi/2, k)$. По симметрии

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

8°. Покажем, что интеграл

$$J = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{(a \cos t - b)^2 + c^2}} \quad (7.8)$$

при $c \neq 0$ сводится к полному эллиптическому интегралу первого рода. Для симметризации применим преобразование, переводящее отрезок $[0, \pi]$ в себя

$$\cos t = \frac{\cos \varphi + \gamma}{1 + \gamma \cos \varphi}, \quad \sin t = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2} \sin \varphi}{1 + \gamma \cos \varphi}, \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \gamma \cos \varphi}, \quad (7.9)$$

где параметр γ подчинен условию $|\gamma| < 1$. Подстановка (7.9) известна в небесной механике как связь истинной и эксцентрической аномалии (*Субботин, 1968*).

Приходим к формуле

$$J = B \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{B_1 + 2B_2 \cos \varphi + B_3 \cos^2 \varphi}} \quad (7.10)$$

при

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{1 - \gamma^2}, & B_1 &= (b - a\gamma)^2 + c^2, \\ B_2 &= (b - a\gamma)(b\gamma - a) + c^2\gamma, & B_3 &= (b\gamma - a)^2 + c^2\gamma^2. \end{aligned}$$

Определим γ из условия $B_2 = 0$. Достаточно выбрать меньший по модулю из двух корней соответствующего квадратного уравнения, произведение которых равно единице

$$\gamma = \frac{c^2 + b^2 + a^2 - \sqrt{(c^2 + b^2 + a^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab}. \quad (7.11)$$

При малых и нулевых a, b следует раскрыть неопределенность

$$\gamma = \frac{2ab}{c^2 + b^2 + a^2 + \sqrt{(c^2 + b^2 + a^2)^2 - 4a^2b^2}}. \quad (7.12)$$

По выбору знака перед корнем величина γ по модулю не превосходит единицы. Легко показать, что значение 1 не достигается. Поэтому $0 \leq \gamma < 1$, причем $\gamma = 0$ лишь при $ab = 0$. Отсюда следует $B_1 > 0$, $B_3 \geq 0$, причем $B_3 = 0$ лишь при $a = 0$.

Заменяя c^2 в формулах для B_1, B_3 его выражением, следующим из уравнения $B_2 = 0$, получим

$$B_1 = \frac{a}{\gamma} (1 - \gamma^2) (b - a\gamma), \quad B_3 = a (1 - \gamma^2) (a - b\gamma),$$

$$B_1 + B_3 = \frac{ab(1 - \gamma^2)^2}{\gamma}.$$

Заменяя $\cos^2 \varphi$ на $1 - \sin^2 \varphi$, сведем (7.10) к полному эллиптическому интегралу первого рода (7.7):

$$J = \frac{B}{\sqrt{B_1 + B_3}} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{B_3}{B_1 + B_3} \sin^2 \varphi}}.$$

Окончательно,

$$J = B_4 K(k), \quad (7.13)$$

где

$$B_4 = \frac{2B}{\sqrt{B_1 + B_3}} = 2\sqrt{\frac{\gamma}{ab(1 - \gamma^2)}},$$

$$k^2 = \frac{B_3}{B_1 + B_3} = \frac{\gamma(a - b\gamma)}{b(1 - \gamma^2)}. \quad (7.14)$$

Как было показано выше, $B_1 > 0$, $B_3 \geq 0$. Поэтому $0 \leq k^2 < 1$.

При $ab = 0$ выражения (7.14) содержат неопределенность вида $0/0$. Раскрыв неопределенность с использованием формулы (7.12), получаем для B_4 и k^2 выражения

$$B_4 = \frac{2}{\sqrt{c^2 + b^2 + a^2}}, \quad k^2 = \frac{a^2}{c^2 + b^2 + a^2}, \quad (7.15)$$

что легко вывести непосредственно из (7.8).

Литература

- Антонов и др., 2008.* — Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб.: Изд-во СПбГУ.
- Антонов и др., 1989.* — Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука.
- Бейтмен, Эрдейи, 1967.* — Бейтмен Г., Эрдейи А. Справочная математическая библиотека. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука.
- Брело, 1974.* — Брело М. О топологиях и границах в теории потенциала. М.: Мир.
- Владимиров, 2003.* — Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит.
- Градштейн, Рыжик, 1971.* — Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука.
- Гюнтер, 1953.* — Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ.
- Жуковский, 1950.* — Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ.
- Кондратьев, 2007.* — Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир.

- Ландкоф, 1966.* — Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала М.: Наука.
- Михлин, 1977.* — Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа.
- Поляхов и др., 2000.* — Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика: Учебник для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Под ред. П.Е. Товстика. М.: Высшая школа.
- Сретенский, 1946.* — Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.: ОГИЗ ГИТТЛ.
- Субботин, 1949.* — Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 3. Л.-М.: ГИТТЛ.
- Субботин, 1968.* — Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука.
- Тиман, Трофимов, 1968.* — Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука.
- Тодхантер, 2002.* — Тодхантер И. История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа. М.: УРСС.
- Уэрмер, 1980.* — Уэрмер Дж. Теория потенциала. М.: Мир.
- Фихтенгольц, 1997а.* — Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб: Лань.
- Фихтенгольц, 1997б.* — Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. СПб: Лань.
- Холшевников и др., 2005.* — Холшевников К.В., Питьев Н.П., Титов В.Б. Притяжение небесных тел. СПб.: Изд-во СПбГУ.
- Шкодров, 1989.* — Шкодров В.Г. Планетен потенциал. София: Изд-во на Българската Академия на Науките.
- Binney, Tremaine, 2008.* — Binney J., Tremaine S. Galactic Dynamics: Second Edition. Princeton: Princeton Univ. Press.

- Fukushima, 2000.* — Fukushima T. Report on Astronomical Constants. Towards models and constants for sub-microarcsecond astrometry // Proceedings of IAU Colloquium 180. Washington. P. 417–427.
- Fukushima, 2002.* — Fukushima T. Report on astronomical constants // Highlights of Astronomy. Vol. 12. San Francisco, CA: Astronomical Society of the Pacific. P. 107–112.
- Mohr, Taylor, 1999.* — Mohr P.J., Taylor B.N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998 // J. Phys. and Chem. Rev. Data. Vol. 28, No. 6. P. 1713–1852.
- Poincaré, 1899.* — Poincaré H. Théorie du potentiel Newtonien. Paris: Georges Carré et C. Naud editeurs.

Именной указатель

Га́усс К.Ф. (Gauss C.F.), 5

Грин Дж. (Green G.), 5

Клеро́ А.К. (Clairaut A.C.), 4

Лагранже́ Ж.Л. (Lagrange J.L.), 4

Лаплас П.С. (Laplace P.S.), 5

Лежа́ндр А.М. (Legendre A.M.), 4

Ляпуно́в А.М., 5

Нью́тон И. (Newton I.), 4

Пуанкаре́ Ж.А. (Poincaré J.H.), 5

Пуассо́н С.Д. (Poisson S.D.), 5

Предметный указатель

- Δ , см. Оператор Лапласа
- Аномалии истинная и эксцентрисическая 62
- Векторы 6
- Вторая космическая скорость 11, 52, 54
- Гармонические функции 12
- Гравитационная сила 6, 8, 9
— энергия 6, 11
- Гравитационное ускорение 8, 9
- Закон всемирного тяготения 4, 6, 8
— сохранения энергии 4, 11
- Координаты
декартовы 10
линейное преобразование 14
сферические 6, 13, 40, 49
цилиндрические 6, 23, 26
- Масса 6, 9, 18, 23, 49
приведенная 56
- Матрицы 6
- Небесная механика 4, 62
- Обозначения 6
- Оператор Лапласа 6, 11, 12, 15
инвариантность 12, 14, 15
- Переменная интегрирования 7, 23
- Плотность 5, 6
линейная 21
объемная 42, 43
поверхностная 29, 30
сингулярность 25
- Поле 4, 6
гравитационное 4, 11, 49
напряженность, см. Гравитационное ускорение
однородное 50, 58
электростатическое 4, 5
- Постоянная тяготения 8, 9
произведение на массу 8
- Потенциал 4–6
аддитивная постоянная 10
аналитичность 11, 17, 23, 43, 51, 53, 55
асимптотика 6, 18, 19, 22, 24, 27, 28, 30, 41, 51, 52, 55
в \mathbb{R}^2 53, 55, 59
в \mathbb{R}^3 6, 9
внешний, 17, 49, 51, 52, 55, 56
внутренний 17, 42, 43, 49–51, 57
в одномерном случае 21
гармоничность 6, 12, 17, 18, 54, 56
гравитационный 4, 9

градиент 4, 9, 12, 14, 16, 19, 20, 31, 41, 42, 49, 51, 53, 57
 двумерных тел 6, 29
 дуги 27, 28
 квадрата 41, 57
 компактных тел 6, 17
 кривой 21, 22
 логарифмический, *см.* Потенциал, в \mathbb{R}^2
 многогранника 48
 многоугольника 40
 неограниченных тел 6, 52
 ньютонов, *см.* Потенциал, в \mathbb{R}^3
 общая теория 4, 5, 9, 10, 18, 22, 23, 30, 43, 56
 объемных тел, *см.* Потенциал, трехмерных тел
 одномерных тел 6, 21, 53
 окружности 26
 однородной 27
 отрезка 23–26, 28
 однородного 23, 24
 плоскости 52, 57–59
 поверхности 29, 30, 52
 полосы 56, 59
 поток градиента 6, 12, 19, 20, 54, 56
 производные 17, 19
 вторые 42, 51, 54
 касательные 30, 33, 41, 55
 нормальная 30, 41, 55
 первые 31–34
 простого слоя, *см.* Потенциал, поверхности
 протяженного тела 6, 8, 16–18
 дифференциальные свойства 6, 17, 18
 прямой 52–55, 57, 59
 прямоугольника 31, 32, 41, 57
 реальных тел 22, 52
 симметрия 6, 8, 19, 20, 23, 41
 сингулярность 21, 26, 39, 52–54
 логарифмическая 22, 23, 27
 слоя 44
 сферы 40, 41, 49
 тетраэдра 44, 45, 47, 48
 в вершине 43, 44
 точки 6, 8–11, 14, 16, 18
 треугольника 34, 36–41, 44
 трехмерных тел 6, 42
 цилиндра 55, 56, 59
 кругового однородного 57, 59
 шара 51, 52
 однородного 50
 с полостью 18
 тела сферической структуры 49–51, 58
 эллипсоида однородного 5
 Поток векторного поля 12
 Привилегированная система отсчета 9, 10
 Приращение 16
 Притягиваемая точка 8, 9
 Притягивающая точка 6, 8, 9
 Притягивающее тело 6
 Простой слой 29
 Работа 4, 10, 21, 52, 54
 Разность потенциалов 10, 53, 55
 Расстояние 6
 Ряд Маклорена 50
 Сила притяжения, *см.* Гравитационная сила

Теоретическая физика 12
Теория притяжения 4, 8
Точки пространства 6

Угловые переменные 6
Уравнение Лапласа 6, 11, 12, 14,
17, 51, 54, 56
— Пуассона 5, 6, 42, 51
Ускорение свободного падения
50

Формула Остроградского–Гаус-
са 6, 12, 14, 19, 54

Центр масс 18

Черные дыры ньютоновской
гравитации 11

Элемент массы 16, 19, 22, 26
— объема 6, 49
Элементы длины и площади 6
Эллиптические интегралы I ро-
да в форме Якоби
неполный 27, 28, 62
полный 25, 26, 62, 63