

УДК 524.6-327, 524.6-34

## КИНЕМАТИКА ЗВЕЗД СЕВЕРНОГО И ЮЖНОГО ГАЛАКТИЧЕСКИХ ПОЛУШАРИЙ

© 2012 г. В. В. Витязев\*, А. С. Цветков\*\*

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 12.11.2011 г.

Статья посвящена использованию векторных сферических функций для кинематического анализа собственных движений звезд каталогов HIPPARCOS, TYCHO-2 и UCAC3 в северном и южном полушариях Галактики. Мы обнаружили, что статистически надежные значения параметров  $M_{32}^+$  и  $M_{32}^-$  модели Огородникова—Милна имеют разные знаки в разных полушариях. Этот факт является следствием замедления скорости вращения Галактики по мере возрастания расстояния от ее основной плоскости. По различным выборкам звезд из указанных каталогов была получена следующая оценка модуля вертикального градиента скорости вращения Галактики в окрестностях Солнца:  $(20.1 \pm \pm 2.9) < |\partial V_{\odot} / \partial z| < (49.2 \pm 0.8)$  км/с кпк<sup>-1</sup>. Еще одним результатом, который обнаруживается из анализа параметров  $M_{13}^-$  и  $M_{13}^+$  в разных галактических полушариях, является то, что вертикальный градиент скорости расширения звездной системы  $\partial V_R / \partial z$  имеет положительное значение в северном, и отрицательное значение в южном полушарии, что говорит о том, что при удалении от плоскости Галактики скорость расширения  $V_R$  увеличивается. Показано, что оба указанных градиента приводят к появлению кажущегося ускорения движения Солнца вдоль осей  $x$  и  $y$  прямоугольной галактической системы координат. Анализ параметров  $M_{21}^-$  и  $M_{12}^+$  не показал значимых различий в обоих полушариях и позволил определить значения параметров Оорта, сделать оценки скорости и периода вращения Галактики в окрестности Солнца, а также вычислить отношение эпициклической частоты к угловой скорости вращения Галактики в окрестности Солнца. Диагональные элементы тензора деформации поля скоростей, полученные нами, свидетельствуют о том, что ориентация в пространстве прямоугольной Галактической системы координат должна определяться с учетом не только геометрических, но и динамических факторов. Все эти результаты хорошо согласуются с оценками этих величин, полученных по полной сфере различными авторами.

*Ключевые слова:* массовые звездные каталоги, собственные движения звезд, кинематика Галактики, векторные сферические функции.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование движения звезд в окосолнечном пространстве является важным инструментом изучения Галактики. Оно основано на анализе собственных движений и лучевых скоростей звезд в рамках различных кинематических моделей. Успех кинематического анализа поля скоростей во многом определяется качеством и количеством наблюдательного материала. Последние два десятилетия ознаменовались бурными успехами в астрометрии, в частности, в создании массовых высокоточных звездных каталогов положений и собственных движений звезд. В 1997 г. выходит в свет каталог HIPPARCOS (Перриман и др., 1997), содержащий свыше 100 тыс. звезд, через три года — TYCHO-2 (Хег и др., 2000), который содержит высоко-

точные собственные движения для 2.5 млн. звезд. Затем появляется каталог USNO-B (Моне, 2003), в котором уже свыше 1 млрд. объектов, но точность положений звезд этого каталога невысока, а собственные движения (весьма посредственного качества) есть только у трети звезд. В 2009 г. в Военно-морской обсерватории США заканчивается работа над каталогом UCAC3 (Захариас и др., 2009). Каталог содержит положения, точные собственные движения, фотометрические данные для 100 млн. звезд до 17<sup>m</sup>. Для большинства звезд приведена также ближняя инфракрасная фотометрия из проекта 2MASS (Скрутски и др., 2006). Несмотря на дефекты построения каталога в северном полушарии (Резер и др., 2010), он является богатейшим материалом для изучения кинематики Галактики.

Появление указанных массовых звездных каталогов, а также перспективы измерения высо-

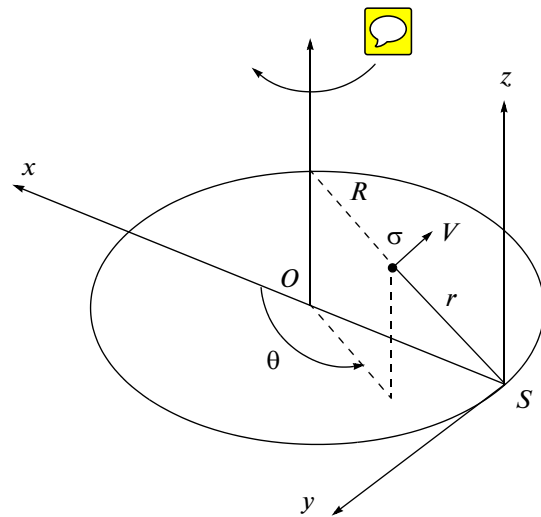
\* Электронный адрес: vityazev@list.ru

\*\* Электронный адрес: a.s.tsvetkov@inbox.ru

коточных параллакс, собственных движения и лучевых скоростей для многих сотен миллионов звезд, запланированные в проекте GAIA (Бэйлер-Джонс, 2004), являются побудительным мотивом для разработки новых методов кинематического анализа звезд. Этому требованию отвечают статьи Витязев, Шуксто (2004), Витязев, Цветков (2009, 2011), посвященные применению векторных сферических функций (ВСФ) к задачам звездной кинематики. Использование ВСФ позволяет выявить все систематические составляющие в поле скоростей звезд, не привязываясь к конкретной физической модели. Сопоставление коэффициентов разложения определенной кинематической модели с наблюдательными данными может выявить наличие систематических компонент, не описываемых данной моделью. Метод векторных сферических функций был использован и другими авторами (см., например, Макаров, Мерфи, 2007; Бобылев и др., 2011).

Отметим, что метод ВСФ был разработан для астрометрических каталогов, в которых звезды расположены равномерно по всей небесной сфере. В работе Витязев, Цветков (2011) метод ВСФ был адаптирован к решению задачи о проведении кинематического анализа собственных движений звезд каталога ГУСНО-2 Spectral Types, расположенных только в южном экваториальном полушарии, поскольку этот каталог содержит информацию о двумерной спектральной классификации звезд преимущественно для звезд южной полусферы экваториальной системы координат.

Целью настоящей статьи является использование векторных сферических функций для изучения звездной кинематики по звездам, распределенных не по всей сфере, как это было раньше, а сосредоточенных в северном и южном галактических полушариях. Постановка такой задачи оправдана с физической точки зрения, так как возможно существующие различные кинематические различия в разных полушариях могут не выявляться при глобальном анализе, компенсируя друг друга частично или полностью. С этой целью нами построены системы векторных сферических функций, обладающих свойством полноты и ортогональности в северном и южном галактических полушариях. После этого были получены формулы, позволяющие оценить значения параметров кинематической модели Огородникова–Милна через полученные коэффициенты разложения собственных движений по системе зонных сферических функций. Было показано, что наш подход позволяет получить оценки параметров, как минимум, основным и альтернативным способами. Сравнений основного и альтернативного решений позволяют проводить тестирование соответствия стандартной кинематической модели наблюдательным данным. Разрабо-



Прямоугольная галактическая система координат  $(x, y, z)$  и галактоцентрическая цилиндрическая система координат  $(R, \theta, z)$ .  $O$  — центр Галактики,  $\sigma$  — положение звезды,  $S$  — положение Солнца.

танный метод был проверен на основе численных экспериментов, после чего был применен к исследованию различных выборок звезд из каталогов HIPPARCOS, ГУСНО-2 и UCAC3. Анализ вычислений показал, что некоторые параметры модели Огородникова–Милна оказались существенно различными в разных полушариях, другие, наоборот, не испытывают ~~существенных изменений~~ при переходе из одного полушария в другое.

## КЛАССИЧЕСКИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

При исследовании кинематики звезд часто используют уравнения модели Огородникова–Милна (Огородников, 1965; Дю Монт, 1977). В этой модели поле скоростей звезд представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + M\mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  — общая скорость звезды,  $\mathbf{V}_0$  — скорость центра наблюдателя,  $M$  — матрица смещения,  $\mathbf{r}$  — гелиоцентрический радиус-вектор звезды. Введем прямоугольную галактическую систему координат  $x, y, z$ , начало отсчета которой совпадает с положением Солнца, ось  $x$  направлена в центр Галактики, ось  $y$  — по направлению вращения Галактики, а ось  $z$  — перпендикулярно к плоскости Галактики (см. рисунок). Рассмотрим матрицу перевода ортов  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  прямоугольной галактической системы координат в орты  $\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_r$ , направленные соответственно в сторону возрастания галактических долгот и широт, а также

в сторону луча зрения:

$$A(l, b) = \begin{bmatrix} -\sin l & \cos l & 0 \\ -\cos l \sin b & -\sin l \sin b & \cos b \\ \cos l \cos b & \sin l \cos b & \sin b \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Проектируя вектор  $\mathbf{V}$  на орты  $\mathbf{e}_l$ ,  $\mathbf{e}_b$ ,  $\mathbf{e}_r$ , получим:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}\mu_l \cos b \\ \mathcal{K}\mu_b \\ V/r \end{bmatrix} = A(l, b) \begin{bmatrix} U/r \\ V/r \\ W/r \end{bmatrix} + \quad (3)$$

$$+ A(l, b)M \begin{bmatrix} \cos b \cos l \\ \cos b \sin l \\ \sin b \end{bmatrix}.$$

В методе Огородникова–Милна матрица смещения обычно представляется в следующем виде:

$$M = M^+ + M^-, \quad (4)$$

где  $M^+$  — симметричная матрица локальной деформации поля скоростей

$$M^+ = \begin{bmatrix} M_{11}^+ & M_{12}^+ & M_{13}^+ \\ M_{21}^+ & M_{22}^+ & M_{23}^+ \\ M_{31}^+ & M_{32}^+ & M_{33}^+ \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$M^-$  — антисимметричная матрица локального вращения

$$M^- = \begin{bmatrix} M_{11}^- & M_{12}^- & M_{13}^- \\ M_{21}^- & M_{22}^- & M_{23}^- \\ M_{31}^- & M_{32}^- & M_{33}^- \end{bmatrix} = \quad (6)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, вектор  $\mathbf{V}_0$  обычно интерпретируют как эффект движения Солнца относительно выбранного центроида звезд с компонентами  $U$ ,  $V$ ,  $W$ :

$$\mathbf{V}_0 = -U\mathbf{e}_x - V\mathbf{e}_y - W\mathbf{e}_z. \quad (7)$$

Таким образом, модель Огородникова–Милна содержит 12 параметров:  $U$ ,  $V$ ,  $W$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}_0$  движения Солнца относительно центроида звезд;  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  — компоненты вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  твердотельного вращения центроида

звезд;  $M_{11}^+$ ,  $M_{22}^+$ ,  $M_{33}^+$  — параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие сжатие–растяжение поля скоростей вдоль главных осей системы координат;  $M_{12}^+ = M_{21}^+$ ,  $M_{13}^+ = M_{31}^+$ ,  $M_{23}^+ = M_{32}^+$  — параметры тензора  $M^+$ , описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

Приведем явный вид уравнений модели Огородникова–Милна в галактической системе координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_l \cos b &= U/r \sin l - V/r \cos l - \quad (8) \\ &- \Omega_1 \sin b \cos l - \Omega_2 \sin b \sin l + \Omega_3 \cos b - \\ &- M_{13}^+ \sin b \sin l + M_{23}^+ \sin b \cos l + \\ &+ M_{12}^+ \cos b \cos 2l - \frac{1}{2}M_{11}^+ \cos b \sin 2l + \\ &+ \frac{1}{2}M_{22}^+ \cos b \sin 2l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_b &= U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - \quad (9) \\ &- W/r \cos b + \Omega_1 \sin l - \Omega_2 \cos l - \\ &- \frac{1}{2}M_{12}^+ \sin 2b \sin 2l + M_{13}^+ \cos 2b \cos l + \\ &+ M_{23}^+ \cos 2b \sin l - \frac{1}{2}M_{11}^+ \sin 2b \cos^2 l - \\ &- \frac{1}{2}M_{22}^+ \sin 2b \sin^2 l + \frac{1}{2}M_{33}^+ \sin 2b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r/r &= -U/r \cos l \cos b - V/r \sin l \cos b - \quad (10) \\ &- W/r \sin b + M_{13}^+ \sin 2b \cos l + M_{23}^+ \sin 2b \sin l + \\ &+ M_{12}^+ \cos^2 b \sin 2l + M_{11}^+ \cos^2 b \cos^2 l + \\ &+ M_{22}^+ \cos^2 b \sin^2 l + M_{33}^+ \sin^2 b. \end{aligned}$$

В формулах (8) и (9) имеется линейная зависимость между коэффициентами  $M_{11}^+$ ,  $M_{22}^+$ ,  $M_{33}^+$ , поэтому при анализе собственных движений звезд обычно вводят замены  $M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+$  и  $M_{33}^* = M_{33}^+ - M_{22}^+$ , а параметр  $M_{22}^+$  опускают.

Свяжем элементы тензоров вращения и деформации с компонентами поля скоростей  $V_R$ ,  $V_\theta$  и  $V_z$  в галактоцентрической цилиндрической системе координат  $(R, \theta, z)$ , где  $R$  — радиус-вектор,  $\theta$  — азимутальный угол, отсчитываемый от оси  $x$  против часовой стрелки, а  $z$  — расстояние от плоскости Галактики (см. рисунок). Для недиагональных параметров матриц  $M^+$  и  $M^-$  модели Огородникова–Милна в этой системе координат имеем (Миямото и др., 1993)

$$\begin{aligned} 2M_{12}^+ &= \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta}; \quad (11) \\ 2M_{21}^- &= \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

$$2M_{13}^+ = -\frac{\partial V_R}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial R}; \quad (12)$$

$$2M_{13}^- = -\frac{\partial V_R}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial R};$$

$$2M_{32}^+ = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}; \quad (13)$$

$$2M_{32}^- = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z}.$$

В свою очередь, диагональные элементы матриц  $M^+$  представляются следующим образом:

$$M_{11}^+ = \frac{\partial V_z}{\partial R}; \quad M_{22}^+ = \frac{V_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}; \quad (14)$$

$$M_{33}^+ = -\frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Обычно анализ поля скоростей производится с помощью решения основных кинематических уравнений (8)–(10) относительно параметром модели Огородникова–Милна в локальной системе координат, движущейся вокруг центра Галактики вместе с Солнцем. Переход в галактоцентрическую цилиндрическую систему координат помогает получить информацию, относящуюся к Галактике в целом.

Иногда трехмерную модель Огородникова–Милна упрощают и, исходя из гипотезы о плоском вращении Галактики, из уравнений для собственных движений, кроме компонент движения Солнца определяют только величины  $A = M_{12}^+$  — деформацию поля скоростей в плоскости Галактики и  $B = \Omega_3$  — вектор вращения всей системы звезд также в плоскости Галактики. Эти величины называют параметрами Оорта, а саму модель — моделью Оорта–Линдблада (Огородников, 1965). Разность  $\omega = A - B$  дает угловую скорости вращения Галактики в окрестности Солнца. Иногда рассматривают уравнения второго порядка, например обобщенную модель Оорта, которые можно найти, ~~например~~ в работах Огородникова (1965), Эдмондсона (1937), Брэхема (2002).

Всем этим моделям присуще два недостатка. Во-первых, всегда остается вопрос об адекватности модели наблюдениям, т.е. полна ли она, и не приписывает ли она реальному полю скоростей звезд несуществующих свойств. Эта проблема уже рассматривалась ранее в ~~Витязевым~~, Шуксто (2004) и Витязевым, Цветковым (2009). Однако существует вторая проблема, ускользавшая от исследователей. Все модели неявно предполагают, что поле скоростей звезд в околосолнечной окрестности является изотропным, в том смысле, что компоненты тензора вращения–деформации (4) являются одинаковыми для всех направлений небесной сферы. При определении параметров моделей

обычно использовались как можно более однородные и равномерно покрывающие небесную сферу выборки звезд. Как мы увидим, такой подход не позволял обнаруживать существующую асимметрию в собственных движениях звезд.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Традиционный способ получения параметров поля скоростей состоит в записи условных уравнений выбранной модели, например, (8)–(10) и решения их методом наименьших квадратов (далее МНК), который дает наиболее вероятные значения искомых параметров и их среднеквадратичные ошибки. Решение уравнения проводят иногда раздельно, иногда совместно. Уравнениям также могут приписываться разные веса. Этот метод широко применяется на практике, однако, ему присущ, как уже говорилось, тот недостаток, что мы навязываем собственным движениям заранее выбранную нами модель. В собственных движениях могут быть систематические компоненты, не описываемые моделью. Здесь могут быть две ситуации. МНК “не заметит” их, и информация, содержащаяся в них, уйдет в увеличение среднеквадратичных ошибок. Вторая ситуация хуже: неизвестные систематические компоненты могут проникнуть в параметры модели, исказив их. Возможна даже ситуация, когда в поле скоростей отсутствует эффект, описываемый моделью, а неизвестная составляющая, тем не менее, приведет к появлению значимой величины одного или нескольких параметров модели. В результате мы получим оценки параметров тех явлений, которых в действительности нет в наблюдательных данных. Разумеется, метод наименьших квадратов можно применять для изучения поля скоростей не только на всей сфере, но и на ее отдельных частях, в частности и на полусфере. Однако на практике это приводит к значительным корреляциям между параметрами (до 0.9), что ставит под сомнение получаемые результаты. Как было показано в работе Витязева, Цветкова (2011), устранить этот недостаток можно с помощью зонных векторных сферических функций.

Использовать сферические функции (скалярные) для анализа систематических разностей положений и собственных движений звезд впервые было предложено в работе (Броше, 1966). Непосредственно для анализа самих собственных движений сферические функции были впервые применены, по-видимому, в работе Витязева, Цветкова (1989). Так как собственные движения звезд имеют векторный характер, то разумно использовать для анализа собственных движений звезд **векторные сферические функции** (далее ВСФ). Способ построения системы этих функций описан в Арфкена

(1970). Применение ВСФ для анализа локальной кинематики звезд впервые было сделано в работе Витязева, Шуксто (2004). Подробное описание аппарата ВСФ и использование его в общем анализе собственных движений и лучевых скоростей звезд изложено в Витязева, Цветкова (2009). В этих работах с помощью ВСФ было выявлено наличие сильных систематических компонент, не описываемых стандартными моделями.

Однако, несмотря на то, что ВСФ обладают полнотой на сфере и выделяют в собственных движениях звезд все систематические компоненты, они не могут применяться в тех случаях, когда мы хотим исследовать кинематику только части небесной сферы. Для решения задач такого рода мы предлагаем использовать специально построенное множество векторных сферических функций.

### Зонные векторные сферические функции

Зонные векторные сферические функции (далее ЗВСФ) определены для некоторой зоны галактической широты (склонения) и могут использоваться в северном или южном полушариях небесной сферы. Они получаются небольшой модификацией обычных векторных сферических функций, определенных на полной сфере.

Пусть мы имеем каталог, данные которого принадлежат следующей области небесной сферы:

$$Z = \begin{cases} 0 \leq l \leq 2\pi, \\ b_{\min} \leq b \leq b_{\max}. \end{cases} \quad (15)$$

Введем преобразование

$$\hat{b} = \arcsin(P \sin b + Q), \quad (16)$$

которое при

$$P = \frac{2}{s_2 - s_1}, \quad Q = -\frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1}, \quad (17)$$

$$s_1 = \sin b_{\min}, \quad s_2 = \sin b_{\max}, \quad (18)$$

переводит всю сферу на область  $Z$ .

Рассмотрим в касательной плоскости к сфере систему взаимно ортогональных ортов  $\mathbf{e}_l$ ,  $\mathbf{e}_b$  соответственно в направлениях изменения долготы, широты. Введем **радиальные** тороидальные  $\mathbf{T}_{nks}$  и сфероидальные  $\mathbf{S}_{nks}$  векторные сферические функции посредством следующих соотношений:

$$\mathbf{T}_{nks} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \times \left( \frac{\partial K_{nks}(l, \hat{b})}{\partial \hat{b}} \mathbf{e}_l - \frac{1}{\cos b} \frac{\partial K_{nks}(l, \hat{b})}{\partial l} \mathbf{e}_b \right), \quad (19)$$

$$\mathbf{S}_{nks} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \times \left( \frac{1}{\cos b} \frac{\partial K_{nks}(l, \hat{b})}{\partial l} \mathbf{e}_l + \frac{\partial K_{nks}(l, \hat{b})}{\partial \hat{b}} \mathbf{e}_b \right). \quad (20)$$

Для краткости обозначим компоненты при единичном векторе  $\mathbf{e}_l$  как  $T_{nks}^l$  и  $S_{nks}^l$ , а при единичном векторе  $\mathbf{e}_b$  — соответственно  $T_{nks}^b$  и  $S_{nks}^b$ :

$$\mathbf{T}_{nks} = T_{nks}^l \mathbf{e}_l + T_{nks}^b \mathbf{e}_b, \quad (21)$$

$$\mathbf{S}_{nks} = S_{nks}^l \mathbf{e}_l + S_{nks}^b \mathbf{e}_b. \quad (22)$$

В формулах (19) и (20) через  $K_{nks}(l, \hat{b})$  обозначены скалярные сферические функции:

$$K_{nks}(l, \hat{b}) = \begin{cases} P_{n,0}(\hat{b}), & k = 0, \quad s = 1, \\ P_{nk}(\hat{b}) \sin kl, & k \neq 0, \quad s = 0, \\ P_{nk}(\hat{b}) \cos kl, & k \neq 0, \quad s = 1, \end{cases} \quad (23)$$

где  $P_{nk}(\hat{b})$  — полиномы Лежандра (при  $k = 0$ ) и присоединенные функции Лежандра (при  $k > 0$ ).

Легко показать, что если нормировочный множитель в формуле (23) задать с помощью выражения

$$R_{nk} = \sqrt{P \frac{2n+1}{4\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k > 0, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad (24)$$

то наши векторные сферические функции будут удовлетворять следующим соотношениям:

$$\iint_Z (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = \iint_Z (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (25)$$

$$\iint_Z (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = 0, \quad \forall i, j. \quad (26)$$

Другими словами, функции  $\mathbf{T}_{nkp}(l, \hat{b})$ ,  $\mathbf{S}_{nkp}(l, \hat{b})$  образуют на множестве  $Z$  ортонормированную систему функций. Отметим также, что часто вводят линейную нумерацию функций  $\mathbf{T}_{nks}$  и  $\mathbf{S}_{nks}$  одним индексом  $j$ , где

$$j = n^2 + 2k + s - 1. \quad (27)$$

Явные формулы для вычисления полиномов Лежандра  $P_{nk}(b)$  и компонентов  $T_{nks}^l$ ,  $T_{nks}^b$ ,  $S_{nks}^l$ ,  $S_{nks}^b$  приводятся в статьях Витязева, Цветкова (2009, 2011).



Таблица 1. Теоретические значения начальных коэффициентов разложения  $T_j, S_j$  по ЗВСФ

$j$	$n$	$k$	$l$	$T_j$	$S_j$
1	1	0	1	$+1.949\Omega_3$	$-1.949W/\langle r \rangle \pm 0.873M_X$
2	1	1	0	$\mp 0.768U/\langle r \rangle + 1.791\Omega_2 - 0.256M_{13}^+$	$-1.791V/\langle r \rangle \mp 0.768\Omega_1 \pm 1.279M_{23}^+$
3	1	1	1	$\pm 0.768V/\langle r \rangle + 1.791\Omega_1 + 0.256M_{23}^+$	$-1.791U/\langle r \rangle \mp 0.768\Omega_2 \pm 1.279M_{13}^+$
4	2	0	1	$\mp 0.453\Omega_3$	$\pm 0.453W + 0.274M_X$
5	2	1	0	$+0.332U/\langle r \rangle \mp 0.332\Omega_2 \pm 0.332M_{13}^+$	$\pm 0.332V/\langle r \rangle + 0.332\Omega_1 + 0.728M_{23}^+$
6	2	1	1	$-0.332V/\langle r \rangle \mp 0.332\Omega_1 \mp 0.332M_{23}^+$	$\pm 0.332U/\langle r \rangle - 0.332\Omega_2 + 0.728M_{13}^+$
7	2	2	0	$\pm 0.216M_{11}^*$	$+1.338M_{12}^+$
8	2	2	1	$\mp 0.433M_{12}^+$	$+0.669M_{11}^*$
9	3	0	1	$+0.270\Omega_3$	$-0.270W/\langle r \rangle \mp 0.017M_X$
10	3	1	0	$\mp 0.199U/\langle r \rangle + 0.199\Omega_2 - 0.199M_{13}^+$	$-0.199V/\langle r \rangle \mp 0.199\Omega_1 \mp 0.199M_{23}^+$
11	3	1	1	$\pm 0.199V/\langle r \rangle + 0.199\Omega_1 + 0.199M_{23}^+$	$-0.199U/\langle r \rangle \pm 0.199\Omega_2 \mp 0.199M_{13}^+$
12	3	2	0	$-0.109M_{11}^*$	$\mp 0.463M_{12}^+$
13	3	2	1	$+0.219M_{12}^+$	$\mp 0.231M_{11}^*$
14	3	3	0	0	0
15	3	3	1	0	0

Примечание. Верхние знаки соответствуют северному полушарию, нижние — южному; если знак один, то знаки коэффициента одинаковые для северного и южного полушария. В таблице использованы следующие обозначения  $M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+$ ,  $M_X = M_{33}^+ - \frac{1}{2}(M_{11}^+ + M_{22}^+)$ . Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

### РАЗЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ ОГОРОДНИКОВА—МИЛНА ПО СИСТЕМЕ ЗВСФ

Как и в случае ВСФ на всей сфере, для системы ЗВСФ можно получить теоретическое разложение уравнений (8), (9). В этой статье мы ограничимся рассмотрением всего двух зон: северного ( $b > 0$ ) и южного ( $b \leq 0$ ) галактических полушарий. Начальные коэффициенты разложения представлены в табл. 1 в виде формул, проясняющих физический смысл тороидальных и сфероидальных коэффициентов в рамках модели Огородникова—Милна.

Так как ЗВСФ ортогональны на заданной части небесной сферы, то корреляции между определяемыми коэффициентами, в отличие от непосредственного определения параметров модели с

помощью МНК, будут близки к нулю. Следует отметить весьма важное обстоятельство. Если разложение уравнений (8), (9) по ВСФ является конечным (Витязев, Цветков, 2009), то разложение этих же уравнений по ЗВСФ является бесконечным. Каждый параметр (или их линейная комбинация) порождает целую серию убывающих коэффициентов. Эта особенность разложения открывает замечательную возможность определять значения параметров модели по нескольким наборам коэффициентов. Сравнение полученных значений позволит судить об адекватности (в случае близких значений) модели наблюдениям. На практике, мы использовали всего два набора коэффициентов, через которые получали два набора параметров модели Огородникова—Милна. Мы назвали эти решения основным и альтернативным.

Основное и альтернативное решения по собственным движениям можно представить следующими выражениями:

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{c}
 U/\langle r \rangle \\
 V/\langle r \rangle \\
 W/\langle r \rangle \\
 \Omega_1 \\
 \Omega_2 \\
 \Omega_3 \\
 M_{13}^+ \\
 M_{23}^+ \\
 M_{12}^+ \\
 M_{11}^* \\
 M_{33}^*
 \end{array} \right] = \mathbf{A} \cdot \left[ \begin{array}{c}
 ls_{101} \\
 s_{110} \\
 s_{111} \\
 s_{201} \\
 s_{210} \\
 s_{211} \\
 s_{220} \\
 s_{221} \\
 t_{101} \\
 t_{110} \\
 t_{111}
 \end{array} \right], \quad (28) \\
 \\
 \left[ \begin{array}{c}
 U/\langle r \rangle \\
 V/\langle r \rangle \\
 W/\langle r \rangle \\
 \Omega_1 \\
 \Omega_2 \\
 \Omega_3 \\
 M_{13}^+ \\
 M_{23}^+ \\
 M_{12}^+ \\
 M_{11}^* \\
 M_{33}^*
 \end{array} \right] = \mathbf{B} \cdot \left[ \begin{array}{c}
 s_{101} \\
 s_{110} \\
 s_{111} \\
 s_{301} \\
 t_{201} \\
 t_{110} \\
 t_{111} \\
 t_{210} \\
 t_{211} \\
 t_{220} \\
 t_{221}
 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Численные значения элементов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  для северного и южного полушарий приведены в табл. 2 и 3.

Следует иметь в виду то, что компоненты движения Солнца входят в формулы (28) с множителем  $1/\langle r \rangle$ . Это означает, что при использовании ЗВСФ эффекты движения Солнца должны быть либо исключены, либо решение имеет смысл проводить лишь для звезд, находящихся на приблизительно одинаковом расстоянии от Солнца, при этом мы сможем определить параметры движения Солнца лишь с точностью до множителя  $1/\langle r \rangle$ .

Таким образом, использование ЗВСФ позволяет: 1) получить решение на полусфере, избежав сильных корреляций между определяемыми параметрами; 2) использовать полученные коэффициенты разложения для расчета параметров любой кинематической модели, 3) произвести тест на адекватность модели наблюдениям посредством сравнения основного и альтернативного решений, 4) обнаружить коэффициенты разложения, которые не предсказываются выбранной моделью.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЗВСФ НА ПРАКТИКЕ

Объем обрабатываемых данных из каждого массового астрометрического каталога (особенно UCAC3) очень велик. Действительно, в этом каталоге плотность звезд  $14^m-15^m$  в полярных областях составляет около 100 звезд на квадратный градус, а, начиная с широт  $|b| < 20^\circ$ , превосходит 1000 звезд на квадратный градус. Имеется лишь небольшая аномально низкая по плотности узкая область, расположенная вдоль небесного экватора. Это связано, видимо, с техническими особенностями построения каталога. Все это приводит к тому, что непосредственное определение коэффициентов сферического разложения наталкивается на определенные технические трудности. Преодолеть эти трудности можно проведением предварительной пикселизации данных на сфере. Применительно к нашей задаче схема пикселизации должна удовлетворять требованию равномерного следования центров пикселей как по широте, так и по долготе. Этому требованию удовлетворяют две схемы. Одна из них — схема HEALPix (Горски, 2005), вторая — так называемая равномерная цилиндрическая проекция (ECP — Equidistant Cylindrical Projection). Подробное обсуждение алгоритмов пикселизации проведено нами в статье [Витязева, Цветкова \(2009\)](#). В данной работе мы остановились на равномерной цилиндрической проекции, в которой производится осреднение собственных движений звезд по сферическим трапециям, полученных равномерным делением экватора и круга широты соответственно на  $M$  и  $N$  частей.

Для каждой площадки ~~вычисляется~~ усредненные значения  $\langle K_{\mu} \cos b \rangle$  и  $\langle K_{\mu} \rangle$  собственных движений звезд, попавших в эту площадку. Для каталога UCAC3 мы выбрали  $M = 180$ ,  $N = 90$ , что позволяло определять значения весьма высоких гармоник, но для нашей цели мы ограничились определением 35 тороидальных и 35 сфероидальных коэффициентов. Их определение производилось решением уравнений

Таблица 2. Матрица **A** для вычисления основного решения (28)

0	0	-0.54	0	0	±1.10	0	0	0	±0.44	0
0	-0.54	0	0	±1.10	0	0	0	0	0	∓0.44
-0.29	0	0	±0.94	0	0	0	0	0	0	0
0	±0.21	0	0	-0.64	0	0	0	0	0	0.77
0	0	∓0.21	0	0	0.64	0	0	0	0.77	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.51	0	0
0	0	±0.15	0	0	1.16	0	0	0	0.15	0
0	±0.15	0	0	1.16	0	0	0	0	0	-0.15
0	0	0	0	0	0	0.75	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1.49	0	0	0
±0.49	0	0	2.10	0	0	0	0.75	0	0	0

Примечание. Верхние знаки соответствуют северному полушарию, нижние — южному; если знак один, то знаки коэффициента одинаковые для северного и южного полушария.

Таблица 3. Матрица **B** для вычисления альтернативного решения (28)

0	0	-0.42	0	0	±0.56	0	2.04	0	0	0
0	-0.42	0	0	0	0	∓0.56	0	-2.04	0	0
-0.06	0	0	-3.25	0	0	0	0	0	0	0
0	±0.14	0	0	0	0	0.84	0	±1.18	0	0
0	0	∓0.14	0	0	0.84	0	±1.18	0	0	0
0	0	0	0	∓2.21	0	0	0	0	0	0
0	0	±0.28	0	0	0.28	0	±2.15	0	0	0
0	±0.28	0	0	0	0	-0.28	0	∓2.15	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∓2.31
0	0	0	0	0	0	0	0	0	±4.63	0
±1.00	0	0	∓7.25	0	0	0	0	0	±2.32	0

Примечание. Верхние знаки соответствуют северному полушарию, нижние — южному; если знак один, то знаки коэффициента одинаковые для северного и южного полушария.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_l \cos b &= & (29) \\ &= \sum_{nkp} t_{nkp} \mathbf{T}_{nkp}^l(l, \hat{b}) + \sum_{nkp} s_{nkp} \mathbf{S}_{nkp}^l(l, \hat{b}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_b &= & (30) \\ &= \sum_{nkp} t_{nkp} \mathbf{T}_{nkp}^b(l, \hat{b}) + \sum_{nkp} s_{nkp} \mathbf{S}_{nkp}^b(l, \hat{b}) \end{aligned}$$

методом наименьших квадратов с назначением веса каждой площадке равным числу звезд, попавших в нее. Площадки, в которые попало менее трех звезд исключались. После определения коэффициентов  $t_{nkp}$ ,  $s_{nkp}$  по формулам (28) проводилось восстановление параметров модели Огородникова–Милна и сравнение между собой основного и альтернативного решения.



**Таблица 4.** Значение тороидальных  $T_j$  и сфероидальных  $S_j$  коэффициентов векторного сферического разложения звезд  $15^m$  каталога UCAC3

$j$	$n$	$k$	$l$	Северное полушарие		Южное полушарие	
				$T_j$	$S_j$	$T_j$	$S_j$
1	1	0	1	$-29.30 \pm 0.63$	$-3.71 \pm 0.63$	$-37.75 \pm 0.64$	$-8.57 \pm 0.64$
2	1	1	0	$-33.36 \pm 0.67$	$-39.10 \pm 0.67$	$6.70 \pm 0.68$	$-52.54 \pm 0.68$
3	1	1	1	$41.50 \pm 0.67$	$-29.45 \pm 0.67$	$-34.26 \pm 0.66$	$-9.61 \pm 0.66$
4	2	0	1	$14.35 \pm 0.68$	$0.95 \pm 0.68$	$-8.78 \pm 0.67$	$0.51 \pm 0.67$
5	2	1	0	$6.14 \pm 0.66$	$5.72 \pm 0.66$	$-10.08 \pm 0.65$	$13.79 \pm 0.65$
6	2	1	1	$-5.94 \pm 0.67$	$1.88 \pm 0.67$	$6.05 \pm 0.68$	$3.28 \pm 0.68$
7	2	2	0	$14.47 \pm 0.64$	$4.83 \pm 0.64$	$8.50 \pm 0.65$	$12.55 \pm 0.65$
8	2	2	1	$11.38 \pm 0.64$	$-3.95 \pm 0.64$	$7.12 \pm 0.64$	$-8.79 \pm 0.64$
9	3	0	1	$1.98 \pm 0.68$	$1.33 \pm 0.68$	$-0.27 \pm 0.67$	$-0.71 \pm 0.67$
10	3	1	0	$0.60 \pm 0.68$	$-2.53 \pm 0.68$	$-0.24 \pm 0.67$	$-0.03 \pm 0.67$
11	3	1	1	$-1.58 \pm 0.67$	$-0.43 \pm 0.67$	$-0.32 \pm 0.67$	$2.66 \pm 0.67$
12	3	2	0	$1.25 \pm 0.66$	$-3.76 \pm 0.66$	$8.49 \pm 0.65$	$6.04 \pm 0.65$
13	3	2	1	$4.35 \pm 0.66$	$2.42 \pm 0.66$	$5.95 \pm 0.66$	$-5.60 \pm 0.66$
14	3	3	0	$-0.75 \pm 0.62$	$2.91 \pm 0.62$	$-0.06 \pm 0.64$	$-1.39 \pm 0.64$
15	3	3	1	$-7.88 \pm 0.62$	$0.81 \pm 0.62$	$-4.51 \pm 0.63$	$1.38 \pm 0.63$
16	4	0	1	$3.20 \pm 0.67$	$2.51 \pm 0.67$	$-1.65 \pm 0.67$	$-0.19 \pm 0.67$
17	4	1	0	$-0.45 \pm 0.67$	$-2.95 \pm 0.67$	$0.27 \pm 0.64$	$0.63 \pm 0.64$
18	4	1	1	$-1.79 \pm 0.67$	$3.67 \pm 0.67$	$0.40 \pm 0.67$	$1.25 \pm 0.67$
19	4	2	0	$4.74 \pm 0.66$	$4.53 \pm 0.66$	$2.63 \pm 0.66$	$2.50 \pm 0.66$
20	4	2	1	$0.77 \pm 0.66$	$4.47 \pm 0.66$	$3.93 \pm 0.65$	$-0.23 \pm 0.65$
21	4	3	0	$-1.71 \pm 0.64$	$-2.86 \pm 0.64$	$0.64 \pm 0.63$	$1.62 \pm 0.63$
22	4	3	1	$0.77 \pm 0.64$	$1.67 \pm 0.64$	$0.76 \pm 0.64$	$-0.79 \pm 0.64$
23	4	4	0	$3.48 \pm 0.61$	$5.64 \pm 0.61$	$-0.37 \pm 0.62$	$-2.21 \pm 0.62$
24	4	4	1	$0.89 \pm 0.61$	$0.36 \pm 0.61$	$-0.07 \pm 0.62$	$-2.60 \pm 0.62$
25	5	0	1	$-1.40 \pm 0.52$	$0.04 \pm 0.52$	$-1.72 \pm 0.49$	$-1.80 \pm 0.49$
26	5	1	0	$-1.06 \pm 0.52$	$-2.15 \pm 0.52$	$0.01 \pm 0.49$	$0.88 \pm 0.49$
27	5	1	1	$1.58 \pm 0.52$	$-1.09 \pm 0.52$	$3.18 \pm 0.50$	$-1.53 \pm 0.50$
28	5	2	0	$-0.12 \pm 0.52$	$-1.31 \pm 0.52$	$5.94 \pm 0.49$	$3.04 \pm 0.49$
29	5	2	1	$2.39 \pm 0.52$	$2.03 \pm 0.52$	$1.75 \pm 0.50$	$-6.73 \pm 0.50$
30	5	3	0	$-2.03 \pm 0.52$	$-1.74 \pm 0.52$	$-0.50 \pm 0.50$	$-1.94 \pm 0.50$
31	5	3	1	$-0.63 \pm 0.52$	$-0.11 \pm 0.52$	$0.64 \pm 0.50$	$-0.42 \pm 0.50$
32	5	4	0	$-2.77 \pm 0.52$	$1.62 \pm 0.52$	$3.19 \pm 0.51$	$-4.26 \pm 0.51$
33	5	4	1	$-0.49 \pm 0.53$	$-1.59 \pm 0.53$	$-1.20 \pm 0.51$	$-0.74 \pm 0.51$
34	5	5	0	$-0.17 \pm 0.54$	$-1.73 \pm 0.54$	$-1.96 \pm 0.53$	$-0.88 \pm 0.53$
35	5	5	1	$1.46 \pm 0.54$	$-5.21 \pm 0.54$	$0.04 \pm 0.52$	$3.72 \pm 0.52$

Примечание. Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

Таблица 5. Основное и альтернативное решение для звезд каталога UCAC3 северного галактического полушария

Параметры	Основное решение				
	12 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	16 <sup>m</sup>
$U/\langle r \rangle$	$11.12 \pm 0.57$	$9.91 \pm 0.64$	$6.73 \pm 0.72$	$3.45 \pm 0.87$	$3.08 \pm 0.94$
$V/\langle r \rangle$	$19.15 \pm 0.57$	$15.03 \pm 0.64$	$10.78 \pm 0.72$	$9.35 \pm 0.87$	$9.85 \pm 0.94$
$W/\langle r \rangle$	$5.23 \pm 0.43$	$4.18 \pm 0.49$	$2.65 \pm 0.55$	$1.99 \pm 0.66$	$1.81 \pm 0.72$
$\Omega_1$	$24.96 \pm 0.44$	$20.12 \pm 0.50$	$20.44 \pm 0.57$	$19.95 \pm 0.68$	$19.51 \pm 0.74$
$\Omega_2$	$-12.95 \pm 0.45$	$-12.73 \pm 0.50$	$-15.04 \pm 0.57$	$-18.19 \pm 0.68$	$-18.02 \pm 0.74$
$\Omega_3$	$-12.62 \pm 0.22$	$-14.02 \pm 0.24$	$-14.18 \pm 0.27$	$-15.03 \pm 0.32$	$-14.89 \pm 0.34$
$M_{13}^+$	$-8.85 \pm 0.51$	$-6.71 \pm 0.58$	$-6.86 \pm 0.65$	$-7.28 \pm 0.79$	$-4.76 \pm 0.85$
$M_{23}^+$	$-20.85 \pm 0.51$	$-11.69 \pm 0.58$	$-8.36 \pm 0.65$	$-5.50 \pm 0.79$	$-6.97 \pm 0.85$
$M_{12}^+$	$11.43 \pm 0.32$	$8.40 \pm 0.36$	$5.49 \pm 0.40$	$3.61 \pm 0.47$	$5.42 \pm 0.51$
$M_{11}^*$	$-4.20 \pm 0.63$	$-4.49 \pm 0.71$	$-4.96 \pm 0.80$	$-5.90 \pm 0.95$	$-3.42 \pm 1.01$
$M_{33}^*$	$-17.95 \pm 0.99$	$-8.21 \pm 1.12$	$-5.41 \pm 1.26$	$-2.77 \pm 1.53$	$-0.04 \pm 1.65$
	Альтернативное решение				
$U/\langle r \rangle$	$14.72 \pm 0.94$	$16.31 \pm 1.06$	$12.38 \pm 1.19$	$6.21 \pm 1.43$	$3.61 \pm 1.55$
$V/\langle r \rangle$	$17.67 \pm 0.94$	$13.95 \pm 1.06$	$8.53 \pm 1.19$	$5.30 \pm 1.44$	$4.70 \pm 1.55$
$W/\langle r \rangle$	$1.10 \pm 1.43$	$-0.94 \pm 1.62$	$-3.38 \pm 1.83$	$-4.09 \pm 2.22$	$-5.33 \pm 2.41$
$\Omega_1$	$25.94 \pm 0.63$	$20.85 \pm 0.72$	$21.84 \pm 0.81$	$22.38 \pm 0.97$	$22.57 \pm 1.05$
$\Omega_2$	$-10.93 \pm 0.63$	$-9.09 \pm 0.72$	$-11.83 \pm 0.81$	$-16.66 \pm 0.97$	$-17.78 \pm 1.05$
$\Omega_3$	$-14.42 \pm 0.97$	$-16.54 \pm 1.09$	$-22.68 \pm 1.23$	$-31.69 \pm 1.49$	$-42.44 \pm 1.62$
$M_{13}^+$	$-5.10 \pm 0.95$	$0.00 \pm 1.07$	$-0.94 \pm 1.21$	$-4.39 \pm 1.45$	$-4.22 \pm 1.57$
$M_{23}^+$	$-22.53 \pm 0.95$	$-12.90 \pm 1.07$	$-10.78 \pm 1.21$	$-9.80 \pm 1.45$	$-12.44 \pm 1.57$
$M_{12}^+$	$4.79 \pm 0.97$	$-7.63 \pm 1.10$	$-18.08 \pm 1.23$	$-26.29 \pm 1.47$	$-29.10 \pm 1.57$
$M_{11}^*$	$10.68 \pm 1.96$	$20.31 \pm 2.20$	$42.19 \pm 2.46$	$67.01 \pm 2.94$	$90.81 \pm 3.15$
$M_{33}^*$	$-19.58 \pm 3.37$	$-7.15 \pm 3.81$	$4.80 \pm 4.30$	$20.23 \pm 5.20$	$31.26 \pm 5.64$

Примечание. Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

Перед проведением анализа реальных ~~усредненных~~ собственных движений были выполнены многочисленные тесты с искусственными собственными движениями с целью определить устойчивость метода векторных сферических функций к случайным ошибкам, а также способность метода обнаруживать различные систематические составляющие. Все тесты показали высокую надежность получаемых результатов, устойчивость к шумам и совпадение в модельных случаях основного и альтернативного решения. Описание таких тестов применительно к проведению кинематического анализа собственных движений звезд по южному экваториальному полушарию дано в работе Витязева, Цветкова (2011).

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы применили ЗВСФ к исследованию собственных движений звезд северного и южного галактических полушарий на материале каталогов

HIPPARCOS, TYCHO-2 и UCAC3. Были сформированы следующие выборки: 1) HIP. R, 250–500 — красные гиганты из каталога HIPPARCOS в диапазоне расстояний от 250 до 500 пк (7280 звезд); 2) TYCHO-2 R, 10–12<sup>m</sup> — красные гиганты из каталога TYCHO-2 в диапазоне звездных величин 10–12<sup>m</sup> (170 560 звезд); 3) UCAC3, 12<sup>m</sup> (1 662 874 звезды); 4) UCAC3, 13<sup>m</sup> (3 117 661 звезда); 5) UCAC3, 14<sup>m</sup> (6 779 891 звезда); 6) UCAC3, 15<sup>m</sup> (13 257 192 звезды); 7) UCAC3, 16<sup>m</sup> (16 200 463 звезды).

Коэффициенты векторного сферического разложения были вычислены по всем указанным группам звезд этих каталогов. Для примера здесь приводятся лишь результаты, полученные для звезд 15<sup>m</sup> каталога UCAC3. Начальные коэффициенты приведены в табл. 4. Основное и альтернативное решения для нескольких групп звезд 12<sup>m</sup>–16<sup>m</sup> этого же каталога даны в табл. 5 и 6. Решение, выполненное по всей сфере по звездам UCAC3,

**Таблица 6.** Основное и альтернативное решение для звезд каталога UCAS3 южного галактического полушария

Параметры	Основное решение				
	12 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	16 <sup>m</sup>
$U/\langle r \rangle$	$8.08 \pm 0.65$	$6.75 \pm 0.64$	$2.27 \pm 0.72$	$-1.35 \pm 0.88$	$-3.02 \pm 0.96$
$V/\langle r \rangle$	$15.01 \pm 0.64$	$7.54 \pm 0.63$	$2.76 \pm 0.70$	$-1.76 \pm 0.86$	$-2.04 \pm 0.93$
$W/\langle r \rangle$	$5.56 \pm 0.48$	$4.52 \pm 0.48$	$3.45 \pm 0.53$	$2.04 \pm 0.65$	$1.09 \pm 0.72$
$\Omega_1$	$-28.27 \pm 0.50$	$-25.48 \pm 0.49$	$-23.85 \pm 0.55$	$-24.05 \pm 0.67$	$-23.44 \pm 0.73$
$\Omega_2$	$5.16 \pm 0.51$	$4.07 \pm 0.50$	$5.38 \pm 0.56$	$5.22 \pm 0.69$	$4.14 \pm 0.76$
$\Omega_3$	$-11.15 \pm 0.25$	$-14.68 \pm 0.25$	$-17.05 \pm 0.27$	$-19.37 \pm 0.33$	$-19.08 \pm 0.36$
$M_{13}^+$	$9.08 \pm 0.60$	$5.81 \pm 0.58$	$6.72 \pm 0.65$	$6.27 \pm 0.80$	$6.48 \pm 0.88$
$M_{23}^+$	$29.39 \pm 0.58$	$29.32 \pm 0.57$	$29.07 \pm 0.63$	$29.11 \pm 0.77$	$26.85 \pm 0.84$
$M_{12}^+$	$14.06 \pm 0.37$	$10.31 \pm 0.36$	$9.31 \pm 0.40$	$9.38 \pm 0.49$	$11.21 \pm 0.53$
$M_{11}^*$	$-3.58 \pm 0.72$	$-8.21 \pm 0.70$	$-10.95 \pm 0.79$	$-13.14 \pm 0.95$	$-9.84 \pm 1.04$
$M_{33}^*$	$17.17 \pm 1.12$	$6.27 \pm 1.10$	$0.67 \pm 1.23$	$-1.32 \pm 1.51$	$1.68 \pm 1.66$
	Альтернативное решение				
$U/\langle r \rangle$	$6.79 \pm 1.05$	$-3.26 \pm 1.03$	$-12.88 \pm 1.16$	$-20.29 \pm 1.41$	$-22.49 \pm 1.53$
$V/\langle r \rangle$	$14.10 \pm 1.09$	$4.42 \pm 1.06$	$-1.74 \pm 1.19$	$-9.46 \pm 1.46$	$-12.34 \pm 1.60$
$W/\langle r \rangle$	$4.36 \pm 1.60$	$0.36 \pm 1.58$	$0.10 \pm 1.77$	$2.83 \pm 2.17$	$4.51 \pm 2.38$
$\Omega_1$	$-28.92 \pm 0.73$	$-27.38 \pm 0.71$	$-26.52 \pm 0.80$	$-28.56 \pm 0.98$	$-29.46 \pm 1.07$
$\Omega_2$	$5.94 \pm 0.72$	$9.88 \pm 0.70$	$14.17 \pm 0.79$	$16.18 \pm 0.96$	$15.41 \pm 1.05$
$\Omega_3$	$-13.54 \pm 1.08$	$-10.04 \pm 1.07$	$-11.90 \pm 1.20$	$-19.38 \pm 1.47$	$-29.57 \pm 1.62$
$M_{13}^+$	$10.49 \pm 1.06$	$16.39 \pm 1.05$	$22.71 \pm 1.17$	$26.25 \pm 1.43$	$27.02 \pm 1.55$
$M_{23}^+$	$30.48 \pm 1.10$	$32.72 \pm 1.08$	$33.92 \pm 1.21$	$37.31 \pm 1.48$	$37.79 \pm 1.62$
$M_{12}^+$	$15.04 \pm 1.11$	$15.28 \pm 1.09$	$15.78 \pm 1.21$	$16.45 \pm 1.47$	$15.21 \pm 1.60$
$M_{11}^*$	$-4.82 \pm 2.31$	$-25.63 \pm 2.23$	$-39.85 \pm 2.47$	$-39.35 \pm 3.01$	$-18.47 \pm 3.27$
$M_{33}^*$	$19.09 \pm 3.77$	$6.75 \pm 3.72$	$-6.41 \pm 4.17$	$-16.26 \pm 5.11$	$-10.33 \pm 5.60$

Примечание. Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

приводится в табл. 7. Прокомментируем полученные результаты в соответствии с физическими эффектами, которые описываются различными параметрами модели Огородникова–Милна. Сначала мы опишем те параметры, которые оказались различными в северном и южном галактическом полушарии, а затем остановимся на результатах, которые оказались практически одинаковыми в обоих полушариях.

#### *Анализ параметров $M_{32}^-$ и $M_{32}^+$ . Вертикальный градиент скорости вращения Галактики*

Самым разительным результатом, полученным нами при анализе поля скоростей в разных по-

лушариях, является то, что статистически надежные значения параметров  $M_{32}^+$  и  $M_{32}^-$  имеют разные знаки в разных полушариях. Например, среднее значение  $\Omega_1 = M_{32}^-$ , полученное по звездам 12<sup>m</sup>–16<sup>m</sup> каталога UCAS3 в северном полушарии, составляет  $+21.0 \pm 0.3$ , а в южном полушарии  $-25.0 \pm 0.3$  км/с кпк<sup>-1</sup>. Как видно из табл. 5 и 6, реальность этого параметра подтверждается великолепным согласием между основным и альтернативным решением, где наблюдается практически полное совпадение в пределах ошибок значений этого параметра. При традиционном определении кинематических параметров методом наименьших квадратов по данным всей небесной сферы из-за почти одинакового по модулю, но разного по знаку

**Таблица 7.** Значения параметров модели Огородникова–Милна, определенные по каталогу UCAC3 методом наименьших квадратов по всей небесной сфере

Параметры	12 <sup>m</sup>	13 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	16 <sup>m</sup>
$U/\langle r \rangle$	$15.07 \pm 0.15$	$12.09 \pm 0.15$	$8.72 \pm 0.16$	$5.51 \pm 0.18$	$4.19 \pm 0.19$
$V/\langle r \rangle$	$34.29 \pm 0.16$	$25.06 \pm 0.16$	$19.03 \pm 0.17$	$14.59 \pm 0.19$	$14.05 \pm 0.20$
$W/\langle r \rangle$	$8.99 \pm 0.13$	$5.57 \pm 0.13$	$3.36 \pm 0.14$	$2.01 \pm 0.15$	$1.75 \pm 0.15$
$\Omega_1$	$-0.18 \pm 0.19$	$0.28 \pm 0.19$	$1.48 \pm 0.21$	$2.48 \pm 0.25$	$3.56 \pm 0.26$
$\Omega_2$	$-4.99 \pm 0.19$	$-5.74 \pm 0.19$	$-6.43 \pm 0.22$	$-7.93 \pm 0.25$	$-9.02 \pm 0.27$
$\Omega_3$	$-9.87 \pm 0.13$	$-11.03 \pm 0.13$	$-12.18 \pm 0.13$	$-14.56 \pm 0.15$	$-16.56 \pm 0.15$
$M_{13}^+$	$-1.33 \pm 0.22$	$-2.11 \pm 0.22$	$-3.14 \pm 0.25$	$-4.45 \pm 0.28$	$-4.49 \pm 0.30$
$M_{23}^+$	$2.26 \pm 0.22$	$5.18 \pm 0.22$	$6.26 \pm 0.24$	$6.12 \pm 0.28$	$3.74 \pm 0.29$
$M_{12}^+$	$14.20 \pm 0.18$	$11.78 \pm 0.17$	$10.27 \pm 0.18$	$10.02 \pm 0.19$	$11.66 \pm 0.20$
$M_{11}^*$	$-1.77 \pm 0.34$	$-4.03 \pm 0.33$	$-6.08 \pm 0.36$	$-9.24 \pm 0.39$	$-9.74 \pm 0.39$
$M_{33}^*$	$1.71 \pm 0.46$	$1.87 \pm 0.46$	$1.67 \pm 0.50$	$1.54 \pm 0.56$	$2.32 \pm 0.58$

Примечание. Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

**Таблица 8.** Оценки разностей и сумм величин  $M_{32}^-$  и  $M_{32}^+$  по северному (N) и южному (S) галактическим полушариям

Каталог	$(M_{32}^- - M_{32}^+)_N$	$(M_{32}^- - M_{32}^+)_S$	$(M_{32}^- + M_{32}^+)_N$	$(M_{32}^- + M_{32}^+)_S$
UCAC3, 12–13 <sup>m</sup>	$38.8 \pm 0.5$	$-56.2 \pm 0.5$	$-13.1 \pm 0.7$	$2.5 \pm 0.5$
UCAC3, 14–16 <sup>m</sup>	$26.9 \pm 0.6$	$-52.1 \pm 0.6$	$-2.7 \pm 0.9$	$4.6 \pm 0.6$
TYCHO-2 R, 10–12 <sup>m</sup>	$50.5 \pm 1.2$	$-47.8 \pm 1.0$	$-3.9 \pm 1.2$	$4.3 \pm 1.0$
HIPR, 250–500 пк	$22.0 \pm 4.1$	$-18.2 \pm 4.0$	$-5.7 \pm 4.1$	$2.5 \pm 4.0$

Примечание. Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

значений  $M_{32}^+$  и  $M_{32}^-$  в ответе мы получаем почти незначимые оценки этих параметров (табл. 7).

Для интерпретации этого результата воспользуемся галактоцентрической цилиндрической системой координат. Поскольку скорость вращения Галактики и скорость изменения азимутального угла направлены в разные стороны, из формул (13) получаем

$$M_{32}^- - M_{32}^+ = \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -\frac{\partial V_\odot}{\partial z} \quad (31)$$

где  $V_\odot$  — скорость кругового движения локальной системы отсчета вокруг центра Галактики. Эту величину отождествляют со скоростью вращения Галактики в окрестности Солнца.

В табл. 8 приведены численные значения левых частей (31), полученные нами по различным звездным каталогам.

Из этой таблицы мы видим, что значение вертикального градиента скорости вращения Галактики

ки  $\partial V_\odot / \partial z$  имеет различные знаки в северном и южном галактических полушариях, при этом сама скорость уменьшается с удалением от основной плоскости Галактики. Важным обстоятельством является также то, что по всем трем каталогам для звезд до 13<sup>m</sup> модули градиента приблизительно одинаковы. Исключение составляет лишь подмножество слабых (14–17<sup>m</sup>) звезд каталога UCAC3. Осредняя эти результаты по обоим полушариям, можно сказать, что модуль вертикального градиента замедления скорости вращения Галактики для звезд до 13<sup>m</sup> определяется очень надежно и заключен в следующих пределах:

$$(20.1 \pm 2.9) < \left| \frac{\partial V_\odot}{\partial z} \right| < (49.2 \pm 0.8) \text{ км/с кпк}^{-1}. \quad (32)$$

Отметим, что нижняя граница получена по красным гигантам каталога HIPPARCOS, в то время

**Таблица 9.** Оценки разностей и сумм величин  $M_{13}^-$  и  $M_{13}^+$  по северному (N) и южному (S) галактическим полушариям

Каталог	$(M_{13}^- - M_{13}^+)_N$	$(M_{13}^- - M_{13}^+)_S$	$(M_{13}^- + M_{13}^+)_N$	$(M_{13}^- + M_{13}^+)_S$
UCAC3, 11–13 <sup>m</sup>	$-4.3 \pm 0.5$	$-4.6 \pm 0.5$	$-23.3 \pm 0.5$	$14.4 \pm 0.5$
UCAC3, 14–17 <sup>m</sup>	$-11.2 \pm 0.5$	$-2.3 \pm 0.5$	$-22.2 \pm 0.5$	$10.8 \pm 0.5$
TYCHO-2 R, 10–12 <sup>m</sup>	$0.9 \pm 1.2$	$-2.2 \pm 1.0$	$-20.4 \pm 1.2$	$15.0 \pm 1.0$
HIPR, 250–500 пк	$0.2 \pm 4.2$	$2.1 \pm 4.1$	$-12.4 \pm 4.2$	$2.7 \pm 4.1$

Примечание. Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

как верхняя граница практически одинакова для каталогов TYCHO-2 и UCAC3.

Имеется обширная литература, посвященная определению вертикального градиента изменения скорости вращения Галактики (Маевский, 1993; Жирар, 2006). Однако, следует отметить, что первоначальные исследования замедления скорости вращения Галактики производились различными косвенными методами. Так, (Хансон, 1989) исходил из увеличения компоненты  $V_y$  движения Солнца относительно звезд с возрастанием их расстояний от плоскости Галактики и установил, что для толстого диска Галактики (1–4 кпк) величина градиента равна 30 км/с кпк<sup>-1</sup>. Исходя из общей модели потенциала Галактики Жирар (Жирар, 2006) предложил динамическое объяснение факту замедления вращения Галактики. В работе Макарова, Морфи (2007) сделано предположение, что замедление скорости вращения существует и в тонком диске (200–300 пк), и по данным каталога HIPPARCOS эти авторы определили значение градиента равным 20 км/с кпк<sup>-1</sup>, что полностью подтверждается нашими результатами. В отличие от перечисленных методов наш подход можно отнести к классу прямых методов, поскольку мы обнаружили знакопеременность вертикального градиента изменения скорости из анализа параметров модели Огородникова–Милна, примененной раздельно к северному и южному Галактическим полушариям, где этот градиент сохраняет свой знак.

Из формул (13) получаем

$$M_{32}^- + M_{32}^+ = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial \theta}. \quad (33)$$

В работах Миямото, Цзы Чжу (1998); Цзы Чжу (2000) эта величина связывается с кинематическим проявлением локального изгиба плоскости Галактики. По собственным движениям O–B5 звезд каталога HIPPARCOS эти авторы определили следующее значение

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} = 3.79 \pm 1.05 \text{ км/с кпк}^{-1}, \quad (34)$$

которое находится в хорошем согласии со значением, определенным ими ранее (Миямото и др., 1993) по каталогу ACRS (Корбин и др. 1991)

В то же самое время Миньяр (2000), исследуя собственные движения каталога HIPPARCOS, не нашел никаких свидетельств изгиба Галактического диска. Как следует из табл. 8, наши вычисления, сделанные по каталогу HIPPARCOS, подтверждают вывод Миньяра, поскольку дают для искомой величины статистически ненадежные значения. Тем не менее, оценки этой величины, полученные нами по каталогам UCAC3 и TYCHO-2, оказались статистически надежными. При этом они тоже меняют знак при переходе из северного полушария в южное, показывая хорошее согласие друг с другом в каждом полушарии по всем выборкам из указанных каталогов (табл. 8). Отметим, что значение (34) подтверждается только в южном галактическом полушарии, в северном полушарии оно имеет противоположный знак. По этой причине вряд ли можно считать, что поведение суммы параметров  $M_{32}^- + M_{32}^+$  является следствием изгиба диска Галактики.

#### *Анализ параметров $M_{13}^-$ и $M_{13}^+$ . Вертикальный градиент скорости расширения звездной системы*

Как следует из формул (12), в галактоцентрической системе координат эти параметры позволяют определить следующие величины:

$$M_{13}^- - M_{13}^+ = \frac{\partial V_z}{\partial R}, \quad (35)$$

$$M_{13}^- + M_{13}^+ = -\frac{\partial V_R}{\partial z}. \quad (36)$$

Первое из этих соотношений определяет градиент по радиусу-вектору вертикальной компоненты поля скоростей, то время как второе — градиент по вертикали скорости расширения звездной системы. В табл. 9 показаны численные значения этих величин, полученные нами по различным каталогам. Мы видим, что результаты, полученные по каталогам TYCHO-2 и HIPPARCOS для первого

из этих двух градиентов, оказались статистически незначимыми, в то время как каталог UCAC3 дает для градиента  $\partial V_z / \partial R$  статистически надежные отрицательные значения, показывая на уменьшение вертикальной компоненты скорости по мере удаления от центра Галактики. Интересно отметить, что величина  $M_{13}^- - M_{13}^+ = -3.9 \pm 0.2$  км/с кпк<sup>-1</sup>, полученная по полной сфере каталога UCAC3 (табл. 7), хорошо согласуется с решениями по полусферам.

Помимо этого, мы имеем весьма интересный результат для градиента по вертикали скорости расширения звездной системы  $\partial V_R / \partial z$ . Мы видим прекрасное согласие по каталогам UCAC3 и TYCHO-2 и согласующиеся с ними результаты по каталогу HIPPARCOS. Эти результаты дают для нашего градиента положительное значение в северном полушарии и отрицательное значение в южном. При решении по полной сфере среднее значение величины (36) оказалось равным  $M_{13}^- + M_{13}^+ = -9.7 \pm 0.2$  км/с кпк<sup>-1</sup>, что равно сумме соответствующих значений, полученных по разным полушариям. Это говорит о том, что при удалении от плоскости Галактики скорость расширения  $V_R$  увеличивается. Этот вывод нуждается в подтверждении на основе динамики звездных систем.

#### Компоненты скорости движения Солнца

Анализ параметров  $M_{32}^-$  и  $M_{32}^+$  при их определении по северному и южному полушариям отдельно показывает устойчивую картину, согласно которой эти параметры примерно одинаковы по модулю, но меняют знаки при переходе из одного полушария в другое. Подобным образом ведут себя и параметры  $M_{13}^-$  и  $M_{31}^+$ .

Можно показать, что такое поведение указанных параметров оказывает влияние на определение значений  $U$ ,  $V$  (проекция скорости движения Солнца на оси  $x$  и  $y$ ). С этой целью составим на всей сфере искусственный каталог собственных движений звезд в соответствии с формулами:

$$(\mu_l) \cos b = -M_{32}^- \sin b \cos l + M_{23}^+ \sin b \cos l - M_{13}^- \sin b \sin l - M_{13}^+ \sin b \sin l, \quad (37)$$

$$(\mu_b) = M_{32}^- \sin l + M_{23}^+ \cos 2b \cos l - M_{13}^- \cos l + M_{13}^+ \cos 2b \cos l, \quad (38)$$

и возьмем здесь типичные для каталога TYCHO-2 значения

$$M_{13}^- = \mp 10, \quad M_{13}^+ = \mp 10 \text{ км/с кпк}^{-1}, \\ M_{32}^- = \pm 25, \quad M_{32}^+ = \mp 25 \text{ км/с кпк}^{-1},$$

где верхние знаки относятся к северному, а нижние — к южному полушарию. Разлагая эти собственные движения по системе векторных сферических функций, определенных на всей сфере с использованием процедуры, описанной в работе Витязева, Цветкова (2009), получим

$$s_{110} = -81.4, \quad s_{310} = -29.7, \quad t_{211} = 35.0, \\ s_{111} = -32.6, \quad s_{311} = -8.3, \quad t_{210} = -14.0.$$

Остановимся на ситуации, которая описывается коэффициентами  $s_{110}$  и  $s_{111}$ , поскольку эти гармоники определяют проекции скорости движения Солнца соответственно на оси  $y$  и  $x$  (Витязев, Цветков, 2009). Используя в явном виде компоненты векторной функции  $S_{110}(l, b)$ ,  $S_{111}(l, b)$ , запишем формулы (8)–(9), удерживая в них только члены, содержащие проекции скоростей движения Солнца  $U$ ,  $V$ , а также компоненты векторных сферических функций  $S_{110}(l, b)$  и  $S_{111}(l, b)$ :

$$x/r \sin l - y/r \cos l = U/r \sin l - a_x \sin l - V/r \cos l + a_y \cos l, \quad (39)$$

$$x/r \cos l \sin b + y/r \sin l \sin b = U/r \cos l \sin b - a_x \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - a_y \sin l \sin b, \quad (40)$$

где введены обозначения  $a_x = 0.345 s_{111} = -11.2$ ;  $a_y = 0.345 s_{110} = -28.1$ .

Найдем совместное решение этих уравнений методом наименьших квадратов. Если расстояния до звезд нам не известны, то решение проводится относительно величин  $\langle x/r \rangle$  и  $\langle y/r \rangle$ , вместо которых мы на самом деле получаем

$$\langle x/r \rangle = \langle U/r \rangle - a_x, \quad \langle y/r \rangle = \langle V/r \rangle - a_y. \quad (41)$$

Если индивидуальные расстояния до звезд нам известны, то они принимаются во внимание при решении. В идеализированном случае, когда все звезды находятся от нас на одинаковом расстоянии  $r$ , в качестве решения мы получаем не сами проекции  $U$  и  $V$ , а величины

$$x = U - a_x r, \quad y = V - a_y r. \quad (42)$$

Численные эксперименты показали, что формулы (41)–(42) являются хорошим приближением для ситуаций, когда звезды расположены в шаровых слоях толщиной до 300 пк. В этих случаях в формуле (42) следует  $r$  заменить на среднее расстояние до звезд  $\langle r \rangle$ .

Если значение параметра  $a_y$  определяется вертикальным градиентом скорости вращения Галактики, то его значение отрицательно, и, как это следует из формулы (42), величина  $y$ , принимаемая



нами за проекцию скорости движения Солнца  $V$ , растет линейно со скоростью

$$\frac{dy}{dr} = -a_y = 28.1 \text{ км/с кпк}^{-1}$$

с увеличением среднего расстояния до звезд (численные оценки даются нами по каталогу ГУСНО-2). Этот факт, по-видимому, был впервые установлен в работе Хансон (1989), где приводится оценка градиента  $30 \text{ км/с кпк}^{-1}$ . Он также отмечается в работе Макарова, Мэрфи (2007) и объясняется ими одной из нескольких причин, в число которых входит и влияние вертикального градиента скорости вращения Галактики. Полученный нами результат устраняет неопределенность в выборе этих причин и показывает, что ускорение движение Солнца по отношению к далеким звездам является еще одним доказательством замедления вращения Галактики с ростом координаты  $z$ . Отметим, что впервые значимые коэффициенты  $s_{310}$  и  $t_{211}$ , не входящие в модель Огородникова–Милна, были найдены в работе Витязева, Шуксто (2003) при выполнении кинематического анализа собственных движений звезд каталога HIPPARCOS, распределенных по всей сфере. Затем этот результат был подтвержден в работах Макарова, Мерфи (2007), а также Витязева, Цветкова (2009). Теперь мы видим, что при анализе по всей сфере вертикальный градиент изменения скорости вращения Галактики, с одной стороны, приводит к появлению “внемоделльных” гармоник  $s_{110}$ ,  $s_{310}$  и  $t_{211}$ , а с другой стороны, создает эффект ускорения движения Солнца в направлении оси  $y$  с ростом расстояния до звезд.

Очевидно, что существует аналогичных эффект в движении Солнца вдоль оси  $x$ , вызываемый существованием вертикального градиента скорости расширения  $\partial V_R/\partial z$ . Этот градиент приводит к появлению другой серии гармоник при выполнении кинематического анализа звезд по всей сфере. Так по каталогу ГУСНО-2 имеем

$$s_{111} = -60.7 \pm 0.8, \quad s_{311} = -8.4 \pm 0.8, \\ t_{210} = -13.4 \pm 0.8,$$

в то время как по выборкам звезд  $14-15^m$ ,  $15-16^m$  из каталога UCAC3 мы получили

$$s_{111} = -41.3 \pm 0.4, \quad s_{310} = -2.9 \pm 0.4, \\ t_{210} = -16.9 \pm 0.4,$$

$$s_{111} = -33.7 \pm 0.5, \quad s_{311} = -2.0 \pm 0.5, \\ t_{210} = -20.4 \pm 0.4.$$

Следовательно, если значение  $a_x$  определяется поведением параметров  $M_{13}^-$  и  $M_{31}^+$ , то его значение отрицательно, и, как это следует из формулы (42),

величина  $x$ , принимаемая нами за проекцию скорости движения Солнца на ось  $x$ , растет линейно со скоростью

$$\frac{dx}{dr} = -a_x = 11.2 \text{ км/с кпк}^{-1}$$

(численная оценка дается нами по каталогу ГУСНО-2). Этот эффект не очень велик, возможно поэтому он не отмечается в литературе.

### Анализ параметров $M_{21}^-$ и $M_{12}^+$ . Вращение Галактики

В этом и следующих параграфах мы остановимся на результатах нашего анализа, которые оказались практически одинаковыми для обоих полушарий Галактики. Прежде всего это относится к параметрам Оорта  $A$  и  $B$  и ко всем характеристикам вращения Галактики, которые через них определяются. Действительно, из формул (11) получаем

$$M_{21}^- - M_{12}^+ = \frac{V_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta}. \quad (43)$$

Положим здесь

$$\partial V_R/\partial \theta = 0. \quad (44)$$

При выполнении этого условия можно ввести параметры Оорта  $A$  и  $B$ :

$$A = M_{12}^+, B = M_{21}^-. \quad (45)$$

Так как вращение Галактики противоположно направлению отсчета азимутального угла, то для круговой скорости локальной системы отсчета  $V_\odot$  (скорости вращения Галактики в окрестности Солнца) из формулы (46) получаем

$$V_\odot = -R_\odot(M_{21}^- - M_{12}^+), \quad (46)$$

где через  $R_\odot$  обозначено расстояние от центра Галактики до Солнца.

В соответствии с эпициклической теорией (Бинни, Тремэн, 1987; Миньяр, 2000) параметры Оорта позволяют оценить отношение эпициклической частоты  $k_0$  к угловой скорости вращения Галактики  $\Omega_0$  в окрестности Солнца:

$$\frac{k_0}{\Omega_0} = 2\sqrt{\frac{-B}{A-B}}. \quad (47)$$

Кроме того, из (11) следует, что наклон кривой вращения Галактики или градиент изменения скорости вращения Галактики вдоль радиуса-вектора определяется с помощью выражения

$$M_{21}^- + M_{12}^+ = -\frac{\partial V_\odot}{\partial R}. \quad (48)$$

**Таблица 10.** Оценки разностей и сумм величин  $M_{21}^-$  и  $M_{12}^+$  по северному (N) и южному (S) галактическим полушариям

Каталог	$(M_{21}^- - M_{12}^+)_N$	$(M_{21}^- - M_{12}^+)_S$	$(M_{21}^- + M_{12}^+)_N$	$(M_{21}^- + M_{12}^+)_S$
UCAS3, 11–13 <sup>m</sup>	$-23.7 \pm 0.4$	$-25.2 \pm 0.6$	$-21.6 \pm 0.5$	$-3.2 \pm 0.4$
UCAS3, 14–17 <sup>m</sup>	$-19.8 \pm 0.7$	$-28.4 \pm 0.7$	$-21.7 \pm 0.9$	$-11.7 \pm 0.7$
TYCHO-2 R, 10–12 <sup>m</sup>	$-24.6 \pm 0.7$	$-28.4 \pm 0.6$	$-4.9 \pm 0.7$	$9.0 \pm 0.6$
HIPR, 250–500 пк	$-27.3 \pm 2.4$	$-29.4 \pm 2.3$	$1.0 \pm 2.3$	$1.9 \pm 2.3$

Примечание. Единицы измерения км/с кпк<sup>-1</sup>.

**Таблица 11.** Осредненные по северному и южному галактическим полушариям значения разностей  $M_{21}^-$  и  $M_{12}^+$ , оценки скорости вращения Галактики в км/с окрестности Солнца (при  $R_\odot = 7.5$  кпк) и оценки периода вращения Галактики в миллионах лет

Каталог	$M_{21}^- - M_{12}^+$	$V_\odot$	Период	$k_0/\Omega_0$
UCAS3, 11–13 <sup>m</sup>	$-24.5 \pm 0.7$	$183.8 \pm 4.5$	$250.6 \pm 6.1$	$1.42 \pm 0.01$
TYCHO-2 R, 10–12 <sup>2</sup>	$-26.5 \pm 0.7$	$198.8 \pm 5.3$	$231.0 \pm 6.1$	$1.36 \pm 0.01$
HIPR, 250–500 пк	$-28.4 \pm 2.4$	$213.0 \pm 18.8$	$216.2 \pm 18.2$	$1.38 \pm 0.04$

Примечание. В последнем столбце:  $k_0/\Omega_0$  — отношение эпициклической частоты к угловой скорости вращения Галактики в окрестности Солнца.

Численные оценки разностей и сумм параметров  $M_{21}^-$  и  $M_{12}^+$ , полученные нами по различным выборкам из каталогов UCAS3, TYCHO-2, HIPPARCOS показаны в табл. 10.

Из табл. 10 видно, что значения  $(M_{21}^- - M_{12}^+)$  в северном и южных полушариях различаются не сильно по разным каталогам для звезд до 12<sup>m</sup>. Это обстоятельство позволяет нам получить различные характеристики вращения Галактики путем осреднения полученных значений  $M_{21}^-$  и  $M_{12}^+$ . Результаты этого осреднения показаны в табл. 11. Отметим, что они находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными при кинематическом анализе собственных движений звезд, выполненном по всей небесной сфере (Бинни, Тремэн, 1987; Миньяр, 2000 и др.)

Что касается наклона кривой вращения Галактики, то полученные нами оценки для звезд до 13 звездной величины по каталогам HIPPARCOS TYCHO-2 весьма противоречивы и не дают возможности оценить эту величину надежно. Для каталога UCAS3 оценки получаются статистически надежными, однако, хотя они и сохраняют знак в обоих полушариях, но сильно различаются по абсолютной величине. Такое же поведение имеют и разности параметров  $M_{21}^-$  и  $M_{12}^+$  для выборок слабых звезд (14–17<sup>m</sup>) по каталогу UCAS3.

#### Диагональные элементы тензора деформации поля скоростей

Как уже было сказано выше, при анализе собственных движений звезд вместо трех компонентов  $M_{11}^+$ ,  $M_{22}^+$ ,  $M_{33}^+$  удается получить только два:  $M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+$  и  $M_{33}^* = M_{33}^+ - M_{22}^+$ . Полученные нами значения параметра  $M_{33}^*$  не позволяют использовать их для получения содержательной физической информации, так как они либо не значимы (по критерию “три сигма”), либо противоречивы по сравнению основного и альтернативного решений. Совсем другую картину дает определение параметра  $M_{11}^*$ . В табл. 12 приведены значения этого параметра, полученные нами по различным выборкам звезд из различных каталогов. Следует сказать, что значения этой величины, полученные по различным полушариям, практически совпадают. Поэтому мы приводим значения, полученные при решении по всей сфере. Вычисленные нами по разным каталогам значения  $M_{11}^*$  находятся в хорошем согласии с результатами работы Макарова, Мерфи (2007), полученными по выборке звезд с расстояниями  $r > 100$  пк из каталога HIPPARCOS ( $-9.44 \pm 2.38$  км/с кпк<sup>-1</sup>).

Отметим, что в работе Миньяр (2000) показано, что величина

$$\phi = -\frac{1}{2} \arctan \left( \frac{M_{11}^*}{2M_{12}^+} \right) \quad (49)$$

**Таблица 12.** Оценки параметров  $M_{11}^*$ ,  $M_{12}^+$  в км/с кпк<sup>-1</sup> и фазового угла  $\phi$  в градусах по различным выборкам звезд из различных каталогов

Параметры	UCAC3	TYCHO-2 W	TYCHO-2 Y	TYCHO-2 R	HIP.V	HIP.R
$M_{11}^*$	$-5.3 \pm 0.5$	$-6.7 \pm 0.3$	$-8.0 \pm 1.2$	$-3.7 \pm 0.7$	$-9.4 \pm 1.7$	$-8.4 \pm 2.0$
$M_{12}^+$	$12.1 \pm 0.2$	$13.3 \pm 0.2$	$14.3 \pm 0.6$	$14.0 \pm 0.4$	$12.5 \pm 0.9$	$14.6 \pm 1.0$
$\phi$	$6.2 \pm 0.6$	$7.1 \pm 0.3$	$7.8 \pm 1.26$	$3.8 \pm 0.7$	$10.4 \pm 1.9$	$8.0 \pm 1.9$

Примечание. По каталогу UCAC3 звезды взяты из диапазона 11–17<sup>m</sup>, по каталогу TYCHO-2 — из диапазона 6–14<sup>m</sup>, выборка звезд из каталога HIPPARCOS соответствует интервалу расстояний от 100 до 1000 пк. Символами *B*, *W*, *Y*, *R* обозначены соответственно голубые, белые, желтые и красные звезды.

определяет угол поворота оси триады галактической системы координат вокруг оси  $z$ , что равносильно введению нового нуля-пункта отсчета галактических долгот. Такой поворот обеспечивает выполнение условий  $M_{11}^+ = 0$  и  $M_{22}^+ = 0$ . Интересно отметить, что значения этого угла, полученные Миньяром по различным выборкам из каталога HIPPARCOS, заключены в пределах от  $0.2 \pm 2.5$  до  $16.4 \pm 4.0$  градусов. Наши значения, полученные по различным каталогам (табл. 12), хорошо согласуются с этими значениями, но имеют меньший разброс. Все это говорит о том, что ориентация в пространстве прямоугольной Галактической системы координат должна определяться с учетом не только геометрических, но и динамических факторов.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы можно считать проведение кинематического анализа собственных движений звезд отдельно в северном и южном полушариях Галактики. Для этого мы воспользовались разработанным нами методом векторных зонных сферических функций, обладающих свойствами полноты и ортогональности в каждом из указанных полушарий. Наш метод обладает следующими преимуществами перед непосредственным оцениванием параметров кинематической модели методом наименьших квадратов: 1) метод ВСФ выявляет любые систематические компоненты поля скоростей звезд независимо от кинематической модели; 2) метод ВСФ позволяет определить параметры любой кинематической модели; 3) в отличие от обычной процедуры оценивания параметров кинематической модели метод ВСФ позволяет получить, как минимум, две оценки искомых параметров (основную и альтернативную). Их сравнение позволяет судить о соответствии модели наблюдательным данным.

Все эти свойства были подтверждены численными экспериментами, после чего мы применили наш метод для анализа собственных движений звезд каталогов HIPPARCOS, TYCHO-2 и

UCAC3. Результаты, полученные в локальной системе координат, движущейся вместе с Солнцем, были переведены в галактоцентрическую цилиндрическую систему координат, относительно которой были получены компоненты поля скоростей и их градиенты. Анализ компонентов  $M_{12}^+$  и  $M_{21}^-$  матрицы смещения  $M$  в уравнении (4) не выявил ясно выраженных различий параметров Оорта и оценок скорости вращения Галактики, найденных по разным полушариям. В противоположность этому компоненты с индексами (1, 3) и (2, 3) позволили обнаружить эффекты замедления скорости вращения Галактики и эффект увеличения скорости расширения звездной системы по мере удаления звезд от основной плоскости. Численные оценки вертикального градиента замедления скорости вращения Галактики, полученные нами прямым методом, находятся в хорошем согласии с результатами определения величины этого градиента, найденными другими авторами косвенными методами. В свою очередь, оба указанных градиента приводят к появлению кажущегося ускорения движения Солнца вдоль осей  $x$  и  $y$  прямоугольной галактической системы координат.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арфкен Г., *Математические методы в физике* (М.: Атомиздат, 1970), с. 493.
2. Бинни, Тремэйн (J. Binney and S. Tremaine), *Galactic Dynamics* (Princeton Univ. Press, 1994).
3. Бобылев В.В. и др., *Астрон. журн.* **83**, 821 (2006).
4. Бобылев и др. (V.V. Bobylev and M. Yu. Khovritchev), *MNRAS* **417**, 1952 (2011).
5. Брэхэм (Branham L. Richard, Jr), *Astrophys. J.* **570**, 190 (2002).
6. Броше (P. Brosche), *Veröff. des Astron. Rechen-Inst. Heidelberg N 17*, 1 (1966).
7. Бэйлер-Джонс (A.L. Coyn and Bailer-Jones), *Mem. S. A. It.* **77**, 1c SAIIt (2004).
8. Горски и др. (K.M. Gorski, E. Hivon, A.J. Banday, et al.), *Astrophys. J.* **622**, 759 (2005).
9. Витязев В.В., Цветков А.С., *Вестн. ЛГУ, Сер. 1, Вып. 2*, 73 (1989).

10. Витязев, Шуксто (V. Vityazev and A. Shuksto), ASP, Conf. Ser. **316**, 230 (2004).
11. Витязев В.В., Шуксто А.К., Вестн. СПбГУ, Сер. 1, Вып. 1, 116 (2005).
12. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в Астрон. журн. **35**, 114 (2009).
13. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в Астрон. журн. **37**, 940 (2011).
14. Дриммель и др. (R. Drimmel, R.L. Smart, M.G. Lattanzi, et al.) Astron. Astrophys. **354**, 67 (2000).
15. Жирар (Т.М. Girard), Astron. J. **132**, 1768 (2006).
16. Захариас и др. (N. Zacharias et al.), CDS Strasbourg, I/315 (2009).
17. Корбин, Урбан (Т.Е. Corbin and S.E. Urban), ACRS, USNO (1991).
18. Маевский (S.R. Majewski), Ann. Rev. Astron. Astrophys. **31**, 575 (1993).
19. Макаров, Мерфи (V.V. Makarov and D.W. Murphy), Astron. J. **134**, 367 (2007).
20. Миньяр (F. Mignard), Astron. Astrophys. **354**, 522 (2000).
21. Миньяр, Морандо (F. Mignard and B. Morando), Journees 90. Systemes de Reference Spatio-Temporels. Paris, p. 151–158 (1990).
22. Миямото, Цзы Чжу (Masanori Miyamoto and Zi Zhu), Astron. J. **115**, 1483 (1993).
23. Миямото и др. (M. Miyamoto, M. Soma, and M. Yokoshima), Astron. J. **105**, 2138 (1993).
24. Дю Монт (B. A. du Mont), Astron. Astrophys. **61**, 127 (1977).
25. Моне (D.G. Monet, S.E. Levin, B. Canzian, et al.), Astron. J. **125**, 984 (2003).
26. Огородников К.Ф., *Динамика звездных систем* (М.: Физматгиз, 1965).
27. Перриман и др. (Perriman et al.), The HIPPARCOS and TYCHO Catalogues, v. 1–17, ESA SP-1200 (1997).
28. Резер и др., (S. Roeser, M. Demleitner, and E. Schilbach), Astron. J. **139**, 2440 (2010).
29. Скрутски и др. (M.F. Skrutskie, R.M. Cutri, R. Stiening, et al.), Astron. J. **131**, 1163 (2006).
30. Хансон, (R. Hanson), Astron. J. **94**, 409 (1989).
31. Хег и др., (E. Hog, C. Fabricius, V.V. Makarov, et al.), Astron. Astrophys. **355**, L27 (2000).
32. Цзы Чжу (Zi Zhu), Publ. Astron. Soc. Japan **52**, 1133 (2000).
33. Эдмондсон (F.K. Edmondson), MNRAS **97**, 473 (1937).