

СВОЙСТВА КАТАЛОГА Tycho-2 ПО ДАННЫМ ПЕРВОГО РЕЛИЗА ПРОЕКТА Gaia

© 2017 г. В. В. Витязев*, А. С. Цветков**,
С. Д. Петров***, Д. А. Трофимов****, В. И. Кияев*****

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 20.03.2017 г.

На основе измерений, выполненных в первые 14 месяцев работы космического аппарата Gaia, представлены результаты решения задачи о получении систематических разностей координат и собственных движений звезд каталогов TGAS (Tycho-Gaia Astrometric Solution) и Tycho-2. Путем разбиения общих звезд каталогов TGAS и Tycho-2 на три группы звездных величин в полосе G для средних значений 10^m , 11^m , 13^m , получены систематические разности экваториальных координат и собственных движений звезд обоих каталогов в виде разложения по векторным сферическим функциям с учетом уравнения яркости. Выделение систематических компонент из индивидуальных разностей произведено с вероятностью 0.977–0.999. Построенная модель систематических разностей позволяет перевести на систему каталога TGAS любые позиционные измерения, выполненные с применением Tycho-2 в качестве опорного каталога. Существенным обстоятельством оказалось наличие уравнения яркости в систематических разностях: при переходе от ярких ($G = 10^m$) к слабым ($G = 13^m$) звездам систематические разности координат изменяются в пределах приблизительно от -40 до 15 мсд, в то время как аналогичные изменения систематических разностей собственных движений меняются от -3 до 3 мсд/год. Обнаружено также, что параметры ориентации и взаимного вращения систем Tycho-2 и TGAS различны для звезд разной яркости: при переходе от ярких к слабым звездам угол поворота системы Tycho-2 относительно TGAS меняется от 3.51 до 5.63 мсд, а скорость вращения — от 0.35 до 1.22 мсд/год. На основе разработанного метода, позволяющего оценить степень влияния систематических ошибок экваториальных собственных движений звезд на результаты кинематического анализа Галактических собственных движений в рамках модели Огородникова–Милна, показано, что наиболее чувствительными к переходу из системы Tycho-2 в систему TGAS являются наклон кривой вращения Галактики и параметр Оорта C . Их относительные изменения после перевода в систему TGAS доходят до -56% и 100% процентов соответственно. При этом изменения оценок параметров Оорта A и B , а также линейной скорости движения Солнца относительно центра Галактики, периода вращения Галактики, отношения эпициклической частоты к угловой скорости вращения Галактики, массы Галактики в пределах расстояния от центра Галактики до Солнца не столь велики и находятся на уровне $2-10\%$.

Ключевые слова: астрометрия, сравнение каталогов, звездные каталоги, HIPPARCOS, Gaia, сферические функции, параметры вращения Галактики.

DOI: 10.7868/S0320010817110079

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена исследованию каталога Tycho-2 (Хег и др., 2000) на основе первого релиза проекта Gaia (Линдегрэн и др., 2016).

В результате выполнения космического проекта Hipparcos (ESA, 1997) появились два звездных каталога. Первый из них — Hipparcos. Он содержит измеренные с ошибкой порядка одной тысячной угловой секунды координаты, собственные движения и параллаксы для 118 218 звезд. Второй каталог получил название Tycho. В нем приводятся несколько менее точные сведения для 1 058 332 звезд. Общие характеристики двух каталогов таковы: средняя эпоха наблюдений J 1991.25, система каталогов — ICRS, точность привязки к ICRS (по

* Электронный адрес: vityazev@list.ru

** Электронный адрес: a.s.tsvetkov@inbox.ru

*** Электронный адрес: petr0v@mail.ru

**** Электронный адрес: dm.trofimov@gmail.com

***** Электронный адрес: kiyayev@mail.ru

3 осям) ± 0.6 мсд, остаточное вращение относительно ICRF (по 3 осям) ± 0.25 мсд/год.

Каталог Tycho-2 (Хег и др., 2000) представляет собой развитие проекта Tycho. Он основан на измерениях, выполненных на борту аппарата Hipparcos. При его создании использовались более точные методы редукций, а при расчете собственных движений — наземные каталоги положений звезд, давшие большую разность эпох. В качестве первой эпохи (1905) использовался Astrographic Catalog (Урбан и др., 1998). Вторая эпоха — средняя эпоха наблюдений на спутнике Hipparcos — 1991.25. В дополнение к Astrographic Catalog использовались еще 143 наземных каталога. По свидетельству авторов, Tycho-2 имеет точность положений от 10 до 100 мсд в зависимости от блеска звезды. Точность собственных движений составляет 2.5 мсд/год. Полнота каталога на уровне 99% достигается для звезд с $V = 11$. Система каталога Tycho-2 совпадает с системой каталога Hipparcos. Каталог Tycho-2, являясь одним из самых точных астрометрических каталогов, охватывающих всю небесную сферу, широко используется в различных астрометрических задачах. Тем не менее большим недостатком этого каталога является отсутствие параллаксов звезд. Частичную компенсацию этого недостатка предоставил каталог Tycho-2 Spectral Type (Райт и др., 2003), в котором (в основном для звезд южного экваториального полушария) приводится информация о спектрах и спектральных классах звезд, позволяющая получать оценки фотометрических параллаксов (Попов и др., 2006).

В первом релизе проекта Gaia DR1 (Линдегрэн и др., 2016) для 2 057 050 звезд каталога Tycho-2 получены положения и параллаксы звезд на субмиллисекундном уровне точности. Точность собственных движений звезд оказалась ниже — стандартные ошибки собственных движений звезд достигают 2–3 мсд/год. Этот каталог получил название TGAS (Tycho-Gaia Astrometric Solution). Собственные движения звезд в TGAS получены методом двух эпох. В качестве первой эпохи (1991.25) взяты наблюдения на спутнике Hipparcos, а вторая эпоха (2015.0) соответствует наблюдениям на аппарате Gaia в первые 14 месяцев его активной работы. Систематические ошибки звезд каталога TGAS, зависящие от положения на сфере и цвета звезд, находятся на уровне ± 0.3 мсд. Положения и собственные движения звезд отнесены к системе отсчета, совмещенной с ICRF2 на эпоху J2015.0, с точностью, лучшей чем 0.1 мсд, и остаточным вращением до 0.03 мсд/год. При этом было обнаружено, что системы отсчета каталогов Hipparcos и Tycho-2 вращаются относительно системы Gaia DR1 со скоростью 0.24 мсд/год (Линдегрэн и др., 2016). Каталог TGAS можно считать третьей

версией проекта Tycho. По сравнению с Tycho-2 он содержит параллаксы звезд, кроме того, его собственные движения, полученные без привлечения наземных наблюдений, основаны на наблюдениях, выполненных в космосе на аппаратах HIPPARCOS и Gaia.

Первая попытка сравнения каталогов TGAS и Tycho-2 было сделана в работе (Линдегрэн и др., 2016). Предварительно собственные движения звезд каталога Tycho-2 были переведены на систему Gaia DR1 с помощью следующих преобразований:

$$\mu_{\alpha}^* = (\mu_{\alpha}^*)_{Tycho-2} - 0.126 \sin \delta \cos \alpha + 0.185 \sin \delta \sin \alpha - 0.075 \cos \delta, \quad (1)$$

$$\mu_{\delta} = (\mu_{\delta})_{Tycho-2} - 0.126 \sin \alpha - 0.185 \cos \alpha. \quad (2)$$

После этого были вычислены глобальные характеристики — медианные (med) и среднеквадратичные (σ) — оценки разностей собственных движений вида TGAS–Tycho-2 в мсд/год без какого-либо разделения по координатам, цветам и другим характеристикам звезд:

$$\text{med}(\Delta \mu_{\alpha}^*) = +0.07 \text{ мсд}; \quad (3)$$

$$\text{med}(\Delta \mu_{\delta}) = +0.20 \text{ мсд},$$

$$\sigma(\Delta \mu_{\alpha}^*) = 3.6 \text{ мсд/год}; \quad (4)$$

$$\sigma(\Delta \mu_{\delta}) = 3.30 \text{ мсд/год}.$$

Кроме того, были построены карты распределения этих разностей по небесной сфере (Линдегрэн и др., 2016, Fig. C.7). Поскольку сравнение каталогов TGAS и Tycho-2 было сделано с целью проверки и подтверждения (validation) результатов проекта Gaia, авторы не нашли достаточного обоснования использовать каталог Tycho-2 в качестве надежного средства для подтверждения истинности измерений, выполненных аппаратом Gaia.

Предлагаемая статья также посвящена сравнению каталогов TGAS и Tycho-2, однако в ней решаются и другие задачи. Первая из них сводится к детальному изучению систематических разностей координат и собственных движений звезд этих каталогов с целью осуществления перевода измерений, выполненных в системе каталога Tycho-2, в систему каталога TGAS. Постановка такой задачи диктуется внутренней логикой астрометрии, в соответствии с которой каждый новый каталог всегда связывается с предыдущими каталогами систематическим разностями координат и собственных движений общих звезд. Вторая задача — это изучение взаимной ориентации и взаимного вращения систем отсчета Tycho-2 и TGAS. Третья задача посвящена поиску параметров вращения Галактики, оценки которых наиболее чувствительны к переходу из системы каталога Tycho-2 в систему каталога TGAS.

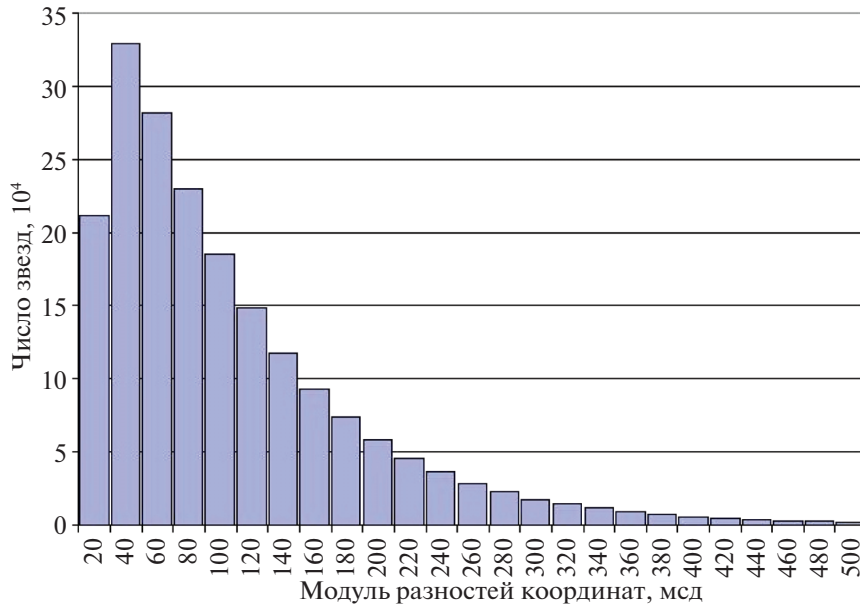


Рис. 1. Гистограмма распределения модулей $\sqrt{(\Delta\alpha^*)^2 + (\Delta\delta)^2}$ разностей координат J2000.

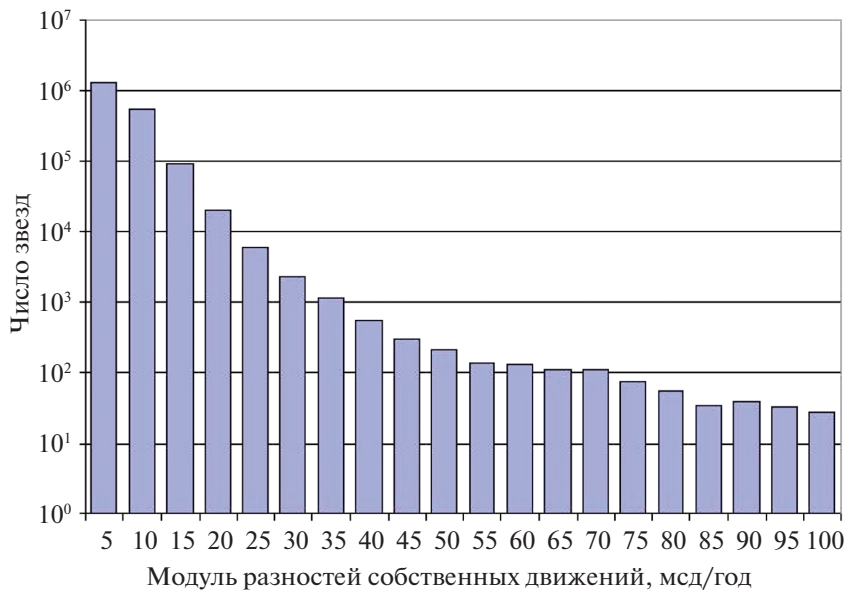


Рис. 2. Гистограмма распределения модулей $\sqrt{(\Delta\mu_\alpha^*)^2 + (\Delta\mu_\delta)^2}$ разностей собственных движений звезд.

2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Для сравнения каталогов TGAS и Tycho-2 мы вычислили на эпоху J2000.0 каталога Tycho-2 индивидуальные разности $\Delta\alpha^* = (\alpha_{TGAS} - \alpha_{Tycho-2}) \cos \delta$, $\Delta\delta = (\delta_{TGAS} - \delta_{Tycho-2})$, $\Delta\mu_\alpha^* = ((\mu_\alpha)_{TGAS} - (\mu_\alpha)_{Tycho-2}) \cos \delta$, $\Delta\mu_\delta = ((\mu_\delta)_{TGAS} - (\mu_\delta)_{Tycho-2})$. При этом координаты звезд каталога TGAS были переведены на эпоху J2000.0 с помощью линейной процедуры. Мы не применяли строгую процедуру (ESA, 1997), во-первых, из-за отсутствия для всех звезд лучевых

скоростей, во-вторых, из-за наличия нереально больших разностей для большого числа звезд, что видно на рис. 1 и 2. По этой причине мы провели фильтрацию данных, оставив звезды, у которых выполнялись соотношения

$$\sqrt{(\Delta\alpha^*)^2 + (\Delta\delta)^2} < A, \quad (5)$$

$$\sqrt{(\Delta\mu_\alpha^*)^2 + (\Delta\mu_\delta)^2} < M, \quad (6)$$

где $A = 200$ мсд, а $M = 20$ мсд/год. Оставшиеся разности были разделены на три группы для

звезд в диапазонах блеска $G_1 = (10-11)$; $G_2 = (11-12)$; $G_3 = (12-14)$ и отнесены к 1200 площадкам небесной сферы, построенным по методу Healpix (Горский и др., 2005). Для каждой площадки вычислялись среднее значение разностей $\langle \Delta\alpha^* \rangle$, $\langle \Delta\delta \rangle$, $\langle \Delta\mu_\alpha^* \rangle$, $\langle \Delta\mu_\delta \rangle$ и среднеквадратичные отклонения индивидуальных разностей от средних значений. Очевидно, что эти характеристики определяют средние отклонения и дисперсии положений и собственных движений звезд каталога Tycho-2 от звезд TGAS в заданном направлении небесной сферы и в заданном диапазоне звездных величин. Если считать, что точность каталога TGAS существенно выше точности Tycho-2, то можно эти величины назвать ошибками каталога Tycho-2. В свою очередь осреднение этих величин по всем площадкам дает представление о средних ошибках и дисперсиях координат и собственных движений каталога Tycho-2 относительно TGAS по всему небу, но в прежних диапазонах блеска звезд. Эти глобальные характеристики каталога Tycho-2 приведены в табл. 1, анализ которой позволяет сформулировать следующий вывод: все глобальные характеристики разностей собственных движений и положений звезд каталогов TGAS и Tycho-2 увеличиваются по мере перехода от ярких звезд к слабым (за исключением разностей $\Delta\mu_\alpha^*$). Следует отметить, что наши результаты находятся в согласии с результатами (3) и (4), однако при их сравнении нужно иметь в виду, что мы не проводили редукцию Tycho-2 на систему TGAS вида (1) и (2), так как в рамках поставленной задачи о переводе данных из системы Tycho-2 в систему TGAS эти повороты должны содержаться в численных значениях коэффициентов модели систематических разностей, которые, очевидно, будут зависеть от блеска звезд. Отсюда следует, что координаты и собственные движения каталога Tycho-2 отягощены ошибками уравнения яркости, причиной появления которых является использование при построении Tycho-2 старых фотографических каталогов. Этот вывод приводит к необходимости использовать соответствующий математический аппарат при вычислении систематических разностей, о чем будет сказано в следующем разделе.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ РАЗНОСТЕЙ TGAS–Tycho-2 С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе систематические разности каталогов TGAS и Tycho-2 получены методом, основанном на применении векторных сферических функций с учетом уравнения яркости, разработанном нами ранее (Витязев, Цветков, 2015а). Ниже описаны его основные этапы, сводящиеся к получению систематических разностей координат

Таблица 1. Глобальная статистика разностей координат и собственных движений звезд TGAS — Tycho-2

G	10–11	11–12	12–14
Число звезд в выборке	538323	648279	126755
$\text{mean}(\langle \Delta\mu_\alpha^* \rangle)$, мсд/год	0.15	0.14	0.14
$\text{med}(\langle \Delta\mu_\alpha^* \rangle)$, мсд/год	0.13	0.17	0.09
$\sigma(\langle \Delta\mu_\alpha^* \rangle)$, мсд/год	3.41	3.89	4.18
$\text{mean}(\langle \Delta\mu_\delta \rangle)$, мсд/год	0.27	0.40	0.48
$\text{med}(\langle \Delta\mu_\delta \rangle)$, мсд/год	0.26	0.44	0.54
$\sigma(\langle \Delta\mu_\delta \rangle)$, мсд/год	3.12	3.48	3.79
$\text{mean}(\langle \Delta\alpha^* \rangle)$, мсд	1.30	2.02	2.23
$\text{med}(\langle \Delta\alpha^* \rangle)$, мсд	1.40	1.68	1.51
$\sigma(\langle \Delta\alpha^* \rangle)$, мсд	53.98	76.33	86.43
$\text{mean}(\langle \Delta\delta \rangle)$, мсд	1.78	4.36	4.69
$\text{med}(\langle \Delta\delta \rangle)$, мсд	2.74	4.34	3.57
$\sigma(\langle \Delta\delta \rangle)$, мсд	54.59	75.97	86.21

и собственных движений TGAS–Tycho-2. В этом методе векторные поля разностей прямых восхождений и склонений $\Delta\alpha \cos \delta$ и $\Delta\delta$, а также поля разностей собственных движений звезд $\Delta\mu_\alpha \cos \delta$ и $\Delta\mu_\delta$:

$$\Delta \mathbf{F}(\alpha, \delta, m) = \begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta\delta \mathbf{e}_\delta, \\ \Delta\mu_\alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta\mu_\delta \mathbf{e}_\delta, \end{cases} \quad (7)$$

аппроксимируются выражением

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}(\alpha, \delta, G) = & \\ = \sum_{nkpr} t_{nkpr} \mathbf{T}_{nkpr}(\alpha, \delta) Q_r(\bar{G}) + & \\ + \sum_{nkpr} s_{nkpr} \mathbf{S}_{nkpr}(\alpha, \delta) Q_r(\bar{G}). & \end{aligned} \quad (8)$$

В формуле (7) через $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_\delta$ обозначены взаимно ортогональные орты соответственно в направлениях изменения прямых восхождений и склонений в тангенциальной плоскости. В формуле (8) зависимость полей от координат описывается тороидальными $\mathbf{T}_{nkpr}(\alpha, \delta)$ и сфероидальными $\mathbf{S}_{nkpr}(\alpha, \delta)$ сферическими функциями, а зависимость поля от звездной величины G — нормализованными полиномами Лежандра $Q_r(\bar{G})$. Явные формулы для вычисления функций $\mathbf{T}_{nkpr}(\alpha, \delta)$, $\mathbf{S}_{nkpr}(\alpha, \delta)$ и $Q_r(\bar{G})$ приводятся в Приложении. Подробное описание процедуры получения коэффициентов t_{nkpr} и s_{nkpr} содержится в статьях Витязева,

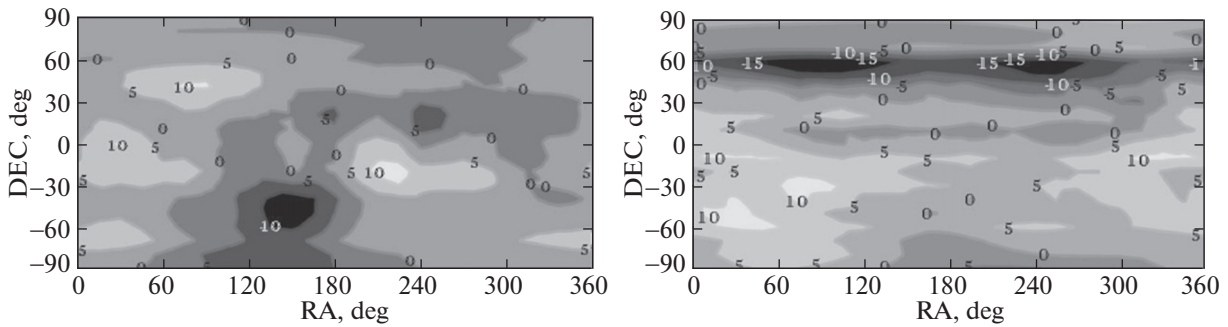


Рис. 3. Карты систематических разностей координат TGAS–Tycho-2 для $G_1 = (10-11)$. Слева — $\Delta\alpha \cos \delta$, справа — $\Delta\delta$. Единицы мсд.

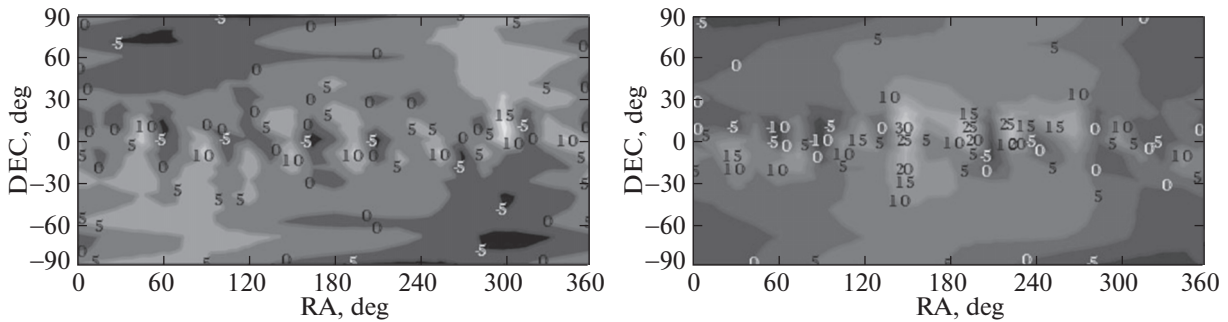


Рис. 4. Карты систематических разностей координат TGAS–Tycho-2 для $G_3 = (12-14)$. Слева — $\Delta\alpha \cos \delta$, справа — $\Delta\delta$. Единицы мсд.

Цветкова (2015a,b). Отметим, что по сравнению с традиционными приемами использования векторных сферических гармоник (Миньяр и др., 1990, 2000, 2012) новыми особенностями нашего метода являются, во-первых, метод определения значимости всех гармоник, которые можно реализовать на выбранной схеме пикселизации данных, и, во-вторых, моделирование уравнения яркости и определение его параметров.

Коэффициенты t_{nkp} и s_{nkp} были получены в два этапа. На первом вычислялись коэффициенты $t_{nkp}(G_j)$ и $s_{nkp}(G_j)$ для каждой из наших трех выборок звезд со средними значениями $G_1 = 10.5$, $G_2 = 11.5$, $G_3 = 13$. В силу ортонормированности векторных сферических функций средние квадратичные ошибки тороидальных и сфероидальных коэффициентов $\sigma_t(G)$ и $\sigma_s(G)$ в каждой выборке оказались одинаковыми и равными для разностей координат $\sigma_t(G_1) = \sigma_s(G_1) = 0.60$, $\sigma_t(G_2) = \sigma_s(G_2) = 0.67$ и $\sigma_t(G_3) = \sigma_s(G_3) = 1.74$ мсд, а для разностей собственных движений звезд соответственно $\sigma_t(G_1) = \sigma_s(G_1) = 0.05$, $\sigma_t(G_2) = \sigma_s(G_2) = 0.06$ и $\sigma_t(G_3) = \sigma_s(G_3) = 0.12$ мсд/год. Зависимость каждого из коэффициентов от блеска была аппроксимирована параболой (суммой полиномов Лежандра $Q_r(\bar{G})$, $r = 0, 1, 2$) с коэффициентами t_{nkp} и s_{nkp} . Параболическое представление коэффициентов проводилось в том случае, когда

хотя бы один из коэффициентов в какой-либо выборке по G оказывался значимым (при этом одноименные незначимые коэффициенты в других зонах считались равными нулю). Значения полученных коэффициентов t_{nkp} и s_{nkp} представлены в табл. 13–18. С вероятностью 97.7–99.9% их значимость устанавливалась с помощью статистических критериев, описанных в работах Витязева, Цветкова (2015a,b).

Среднеквадратичные ошибки этих коэффициентов для разностей координат равны $\sigma(t_{nkp0}) = \sigma(s_{nkp0}) = 1.18$, $\sigma(t_{nkp1}) = \sigma(s_{nkp1}) = 0.75$, $\sigma(t_{nkp2}) = \sigma(s_{nkp2}) = 0.45$ мсд, а для собственных движений — $\sigma(t_{nkp0}) = \sigma(s_{nkp0}) = 0.07$, $\sigma(t_{nkp1}) = \sigma(s_{nkp1}) = 0.05$, $\sigma(t_{nkp2}) = \sigma(s_{nkp2}) = 0.04$ мсд/год для всех индексов nkp . Ввиду этого обстоятельства в таблицах приведены отношения модулей коэффициентов к их среднеквадратичным ошибкам.

Формула (8) и полученные нами коэффициенты t_{nkp} , s_{nkp} решают поставленную задачу, так как позволяют вычислить систематические разности координат и собственных движений звезд для перехода из системы каталога Tycho-2 в систему каталога TGAS и обратно. Представление о ходе систематических разностей по небесной сфере дают рис. 3–4 и 5–6. Диапазоны изменения систематических разностей показаны в табл. 2 и 3.

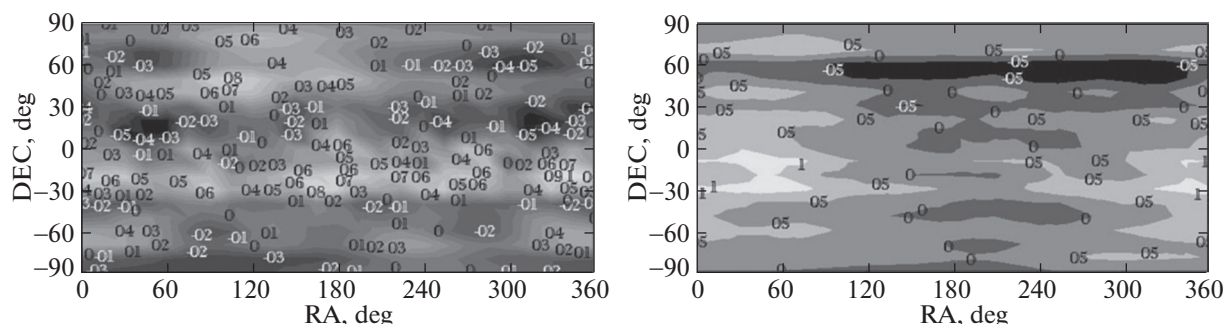


Рис. 5. Карты систематических разностей собственных движений TGAS–Tycho-2 для $G_1 = (10-11)$. Слева — $\Delta\mu_\alpha \cos \delta$, справа — $\Delta\mu_\delta$. Единицы мсд/год.

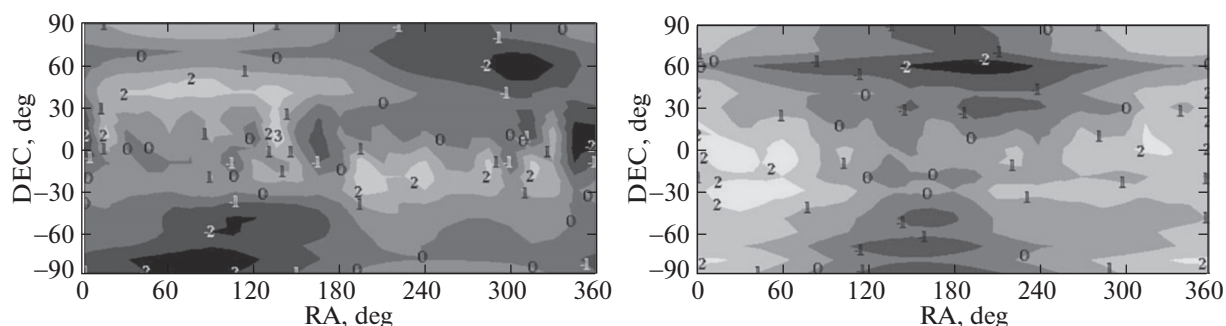


Рис. 6. Карты систематических разностей собственных движений TGAS–Tycho-2 для $G_3 = (12-14)$. Слева — $\Delta\mu_\alpha \cos \delta$, справа — $\Delta\mu_\delta$. Единицы мсд/год.

Таблица 2. Диапазоны изменения систематических разностей прямых восхождений и собственных движений по прямому восхождению TGAS–Tycho-2

G	$\min(\Delta\alpha \cos \delta)$	$\max(\Delta\alpha \cos \delta)$	$\min(\Delta\mu_\alpha \cos \delta)$	$\max(\Delta\mu_\alpha \cos \delta)$
10–11	–13.5	13.6	–0.94	1.17
11–12	–11.0	16.5	–1.30	1.55
12–14	–15.4	19.8	–3.45	3.28

Примечание. Единицы: мсд (столбцы 2, 3), мсд/год (столбцы 4, 5).

Карты систематических разностей координат и собственных движений TGAS–Tycho-2 демонстрируют две характерные особенности — зонную структуру систематических разностей и их изме-

нение при переходе к слабым звездам (уравнение яркости). Очевидно, что оба этих эффекта являются следствием использования при построении собственных движений каталога Tycho-2 зонных фотографических каталогов, являющихся основой Astrographic Catalog.

Таблица 3. Диапазоны изменения систематических разностей склонений и собственных движений по склонению TGAS–Tycho-2

G	$\min(\Delta\delta)$	$\max(\Delta\delta)$	$\min(\Delta\mu_\delta)$	$\max(\Delta\mu_\delta)$
10–11	–21.1	12.2	–1.01	1.33
11–12	–14.9	18.8	–2.17	2.10
12–14	–17.1	33.7	–2.55	2.79

Примечание. Единицы: мсд (столбцы 2, 3), мсд/год (столбцы 4, 5).

Эффект уравнения яркости усматривается при сравнении карт систематических разностей, полученных для различных групп звезд в полосах G_1 и G_3 (рис. 3–4 и 5–6). Количественные характеристики этих эффектов демонстрируют рис. 7 и 8. Здесь показаны разности величин $\Delta\alpha \cos \delta$, $\Delta\delta$, $\Delta\mu_\alpha \cos \delta$, $\Delta\mu_\delta$, вычисленные для звезд первой $G_1 = (10-11)$ и третьей выборки $G_3 = (12-14)$. Диапазоны изменения этих величин приведены в табл. 4 и 5.

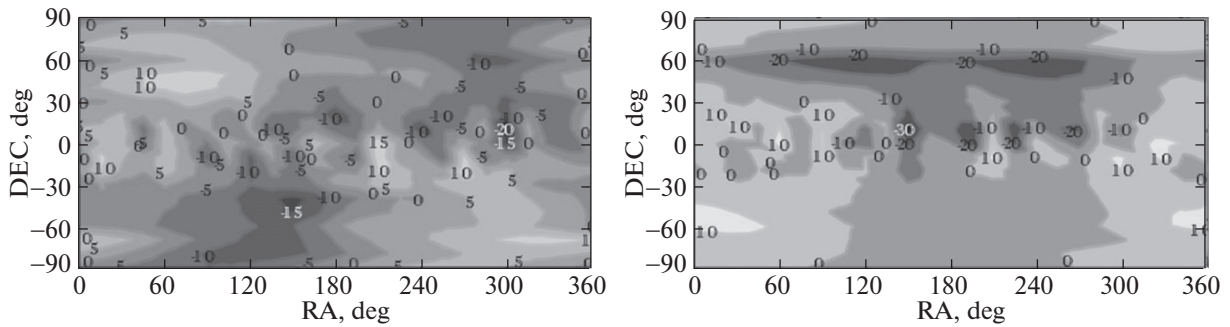


Рис. 7. Карты изменения систематических разностей координат звезд TGAS–Tycho-2 при переходе из фотометрической полосы G_1 в G_3 . Слева — $\Delta\alpha \cos \delta$, справа — $\Delta\delta$. Единицы мсд.

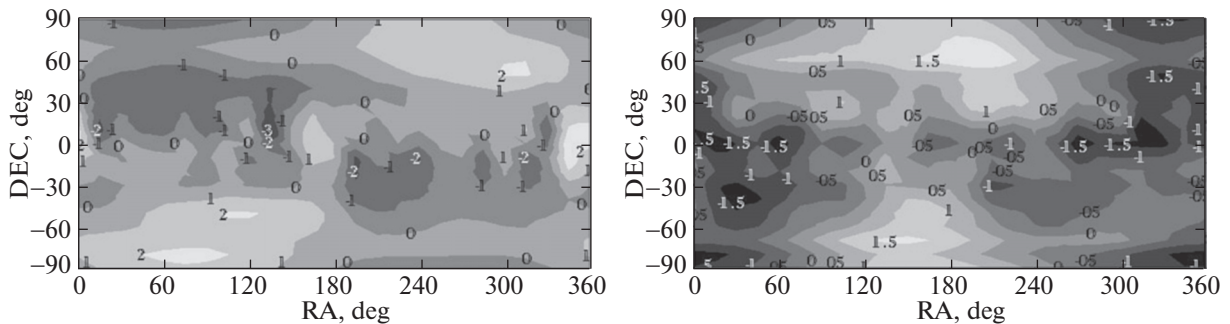


Рис. 8. Карты изменения систематических разностей собственных движений звезд TGAS–Tycho-2 при переходе из фотометрической полосы G_1 в G_3 . Слева — $\Delta\mu_\alpha \cos \delta$, справа — $\Delta\mu_\delta$. Единицы мсд/год.

4. МОДЕЛЬ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ РАЗНОСТЕЙ КООРДИНАТ И СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД

Основное назначение систематических разностей заключается в переводе координат и собственных движений звезд одного каталога на систему второго каталога. Однако помимо этих ре-

Таблица 4. Разности $\Delta A = (\Delta\alpha \cos \delta)(G_1) - (\Delta\alpha \cos \delta)(G_3)$, $\Delta D = (\Delta\delta)(G_1) - (\Delta\delta)(G_3)$

$\min(\Delta A)$	$\max(\Delta A)$	$\min(\Delta D)$	$\max(\Delta D)$
-22.0	15.2	-35.8	14.8

Примечание. Единицы: мсд (столбцы 2, 3), мсд/год (столбцы 4, 5).

Таблица 5. Разности $\Delta PMA = (\Delta\mu_\alpha \cos \delta)(G_1) - (\Delta\mu_\alpha \cos \delta)(G_3)$, $\Delta PMD = (\Delta\mu_\delta)(G_1) - (\Delta\mu_\delta)(G_3)$

$\min(\Delta PMA)$	$\max(\Delta PMA)$	$\min(\Delta PMD)$	$\max(\Delta PMD)$
-3.3	3.0	-2.0	1.9

Примечание. Единицы: мсд (столбцы 2, 3), мсд/год (столбцы 4, 5).

дукционных задач, систематические разности положений и собственных движений одних и тех же звезд отражают различия систем отсчета, которые реализуются каталогами сравнения. При сравнении оптических каталогов обычно используется модель твердотельного взаимного вращения и смещения двух систем отсчета. Будем считать, что система координат (x, y, z) , соответствующая каталогу Cat, переводится в систему координат (x', y', z') каталога Cat' с помощью переноса начала координат в точку (ξ, η, ζ) и поворота осей на углы $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. Углы будем считать положительными, когда для наблюдателя, находящегося на положительном луче оси, вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси вращения по направлению к началу координат. В данном случае преобразование систем координат описывается следующим уравнением:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x - \xi \\ y - \eta \\ z - \zeta \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В приближении бесконечно малого поворота матрица M имеет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 1 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

При аналогичном предположении о малости смещения начала координат с точностью до членов первого порядка малости имеем

$$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{bmatrix} = (M - E) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где E — единичная матрица.

Используя соотношения между прямоугольными и сферическими координатами звезды с гелиоцентрическим расстоянием r

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \delta \cos \alpha \\ r \cos \delta \sin \alpha \\ r \sin \delta \end{bmatrix}, \quad (12)$$

получаем

$$\begin{bmatrix} r \Delta \alpha \cos \delta \\ r \Delta \delta \\ \Delta r \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где A — матрица перевода единичных ортов прямоугольной системы координат в орты касательной плоскости, направленные в сторону возрастания прямых восхождений, склонений и радиуса-вектора звезды:

$$A = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha \sin \delta & -\sin \alpha \sin \delta & \cos \delta \\ \cos \alpha \cos \delta & \sin \alpha \cos \delta & \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Считая параметры смещения и вращения функциями времени

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 + \dot{\xi}(t - t_0), \\ \eta(t) &= \eta_0 + \dot{\eta}(t - t_0), \\ \zeta(t) &= \zeta_0 + \dot{\zeta}(t - t_0), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \varepsilon_1 + \omega_1(t - t_0), \\ \Omega_2(t) &= \varepsilon_2 + \omega_2(t - t_0), \\ \Omega_3(t) &= \varepsilon_3 + \omega_3(t - t_0), \end{aligned} \quad (16)$$

из (11)–(13) при $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$, $\Delta z = z' - z$ получаем

$$\Delta \alpha \cos \delta = \varepsilon_1 \sin \delta \cos \alpha + \varepsilon_2 \sin \delta \sin \alpha - \varepsilon_3 \cos \delta + g_1 \sin \alpha - g_2 \cos \alpha; \quad (17)$$

$$\Delta \delta = -\varepsilon_1 \sin \alpha + \varepsilon_2 \cos \alpha + g_1 \cos \alpha \sin \delta + g_2 \sin \alpha \sin \delta - g_3 \cos \delta; \quad (18)$$

$$\Delta r = -\xi \cos \alpha \cos \delta - \eta \sin \alpha \cos \delta - \zeta \sin \delta; \quad (19)$$

$$\Delta \mu_\alpha \cos \delta = \omega_1 \sin \delta \cos \alpha + \omega_2 \sin \delta \sin \alpha - \omega_3 \cos \delta + \dot{g}_1 \sin \alpha - \dot{g}_2 \cos \alpha; \quad (20)$$

$$\Delta \mu_\delta = -\omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha + \dot{g}_1 \cos \alpha \sin \delta + \dot{g}_2 \sin \alpha \sin \delta - \dot{g}_3 \cos \delta; \quad (21)$$

$$\Delta V_r = -\dot{\xi} \cos \alpha \cos \delta - \dot{\eta} \sin \alpha \cos \delta - \dot{\zeta} \sin \delta. \quad (22)$$

Входящие в эти уравнения параметры имеют следующий смысл:

- $\Delta \alpha$, $\Delta \delta$, $\Delta \mu_\alpha$, $\Delta \mu_\delta$ — разности координат и собственных движений звезд на эпоху t_0 в смысле Cat'-Cat.
- Δr и ΔV_r — изменение гелиоцентрического расстояния до звезды, выраженное в единицах измерения расстояния, и изменение лучевой скорости звезды, выраженное в км/с;
- ε_1 , ε_2 , ε_3 — углы поворота прямоугольной системы координат Cat относительно Cat', выраженные в мсд;
- ω_1 , ω_2 , ω_3 — угловые скорости вращения прямоугольной системы координат Cat относительно Cat', выраженные в мсд/год;
- $g_1 = \xi_0/r$, $g_2 = \eta_0/r$, $g_3 = \zeta_0/r$ — компоненты смещения нуля-пункта системы отсчета каталога Cat относительно системы отсчета Cat', выраженные в мсд;
- $\dot{g}_1 = \dot{\xi}/r$, $\dot{g}_2 = \dot{\eta}/r$, $\dot{g}_3 = \dot{\zeta}/r$ — компоненты скорости смещения нуля-пункта системы отсчета каталога Cat относительно системы отсчета Cat', выраженные в мсд/год.

Отметим, что для вектора $\Delta = \Delta \alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta \delta \mathbf{e}_\delta$ и компоненты Δr уравнения (17)–(19) можно записать в виде линейной комбинации векторных сферических функций:

$$\Delta = -\varepsilon_1 \frac{\mathbf{T}_{111}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - \varepsilon_2 \frac{\mathbf{T}_{110}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - \varepsilon_3 \frac{\mathbf{T}_{101}(\alpha, \delta)}{\rho_{10}} - g_1 \frac{\mathbf{S}_{111}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& -g_2 \frac{\mathbf{S}_{110}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - g_3 \frac{\mathbf{S}_{101}(\alpha, \delta)}{\rho_{10}}, \\
\Delta r = & -\xi \frac{K_{111}(\alpha, \delta)}{R_{11}} - \eta \frac{K_{110}(\alpha, \delta)}{R_{11}} - \\
& -\zeta \frac{K_{101}(\alpha, \delta)}{R_{10}}.
\end{aligned} \quad (24)$$

Очевидно, что аналогичное представление уравнений (20)–(22) в виде линейной комбинации векторных сферических функций можно записать и для вектора $\Delta_\mu = \Delta_{\mu\alpha} \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta_{\mu\delta} \mathbf{e}_\delta$ и компоненты ΔV_r :

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu = & -\omega_1 \frac{\mathbf{T}_{111}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - \omega_2 \frac{\mathbf{T}_{110}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - \\
& -\omega_3 \frac{\mathbf{T}_{101}(\alpha, \delta)}{\rho_{10}} - \dot{g}_1 \frac{\mathbf{S}_{111}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - \\
& -\dot{g}_2 \frac{\mathbf{S}_{110}(\alpha, \delta)}{\rho_{11}} - \dot{g}_3 \frac{\mathbf{S}_{101}(\alpha, \delta)}{\rho_{10}},
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_r = & -\xi \frac{K_{111}(\alpha, \delta)}{R_{11}} - \eta \frac{K_{110}(\alpha, \delta)}{R_{11}} - \\
& -\zeta \frac{K_{101}(\alpha, \delta)}{R_{10}}.
\end{aligned} \quad (26)$$

В этих уравнениях

$$\rho_{nk} = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad (27)$$

а R_{nk} вычисляется по формуле (43).

Эти уравнения являются основными уравнениями задачи анализа различий двух систем отсчета, обусловленных их взаимным смещением и вращением. В нашем случае в роли Cat выступает каталог Tycho-2, а в роли Cat' — каталог TGAS. Поскольку эти каталоги не содержат лучевых скоростей, в нашем анализе формулы (19), (24) и (22), (26) использоваться не будут. Здесь они приведены для сохранения общности рассуждений.

Как мы видим, модель систематических разностей, которые порождаются взаимным вращением и смещением систем отсчета, является линейной комбинацией тороидальных и сфероидальных функций первого порядка. Сравнивая почленно уравнения (17)–(18) и (20)–(22) с уравнениями (23)–(25), мы приходим к выводу, что параметры вращения и смещения можно вычислить через коэффициенты разложения систематических разностей по векторным сферическим функциям, как это показано в табл. 6. Заметим, что эти же соотношения можно получить прямым разложением правых частей уравнений (17)–(19) и (20)–(22) по системе векторных сферических функций.

Таблица 6. Значения коэффициентов векторного сферического разложения уравнений (17), (18), (20), (21)

Коэффициент	Уравнения (17), (18)	Уравнения (20), (21)
t_{101}	$-2.89\varepsilon_3$	$-2.89\omega_3$
t_{110}	$-2.89\varepsilon_2$	$-2.89\omega_2$
t_{111}	$-2.89\varepsilon_1$	$-2.89\omega_1$
s_{101}	$-2.89g_3$	$-2.89\dot{g}_3$
s_{110}	$-2.89g_2$	$-2.89\dot{g}_2$
s_{111}	$-2.89g_1$	$-2.89\dot{g}_1$

В рамках модели твердотельного вращения связь углов поворота одной системы координат относительно другой и коэффициентов разложения систематических разностей прямых восхождений и склонений звезд по скалярным функциям была установлена в работе (Витязев, 1994). При использовании векторных сферических функций такая связь была найдена в работе (Миньяр и др., 1990). Влияние смещения нуль-пунктов системы координат, соответствующих двум каталогам сравнения, на систематические разности было выявлено в работе (Миньяр и др., 2012), где этот эффект рассматривается как поток, или непрерывное истечение (glide), из одной точки в другую, расположенную на сфере диаметрально противоположно. С астрономической точки зрения это поле можно связать с движением наблюдателя по направлению к апексу, при котором систематические разности “вытекают” из апекса и “втекают” в точку антиапекса.

На рис. 9 слева мы видим векторное поле, обусловленное поворотами системы отсчета Tycho-2 на углы $\varepsilon_1 = -t_{111}/2.89$, $\varepsilon_2 = -t_{110}/2.89$, $\varepsilon_3 = -t_{101}/2.89$. Входящие сюда значения t_{nkp} были вычислены для выборки $G_2 = (11-12)$ по формуле

$$t_{nkp}(G_2) = \sum_r t_{nkpr} Q_r(\vec{G}_2) \quad (28)$$

с коэффициентами t_{nkp} , взятыми из табл. 15.

Координаты полюса вращения, соответствующего концу вектора с этими компонентами, получены по формулам

$$A_{\text{rot}} = \arctg\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right); \quad (29)$$

$$D_{\text{rot}} = \arctg\left(\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}\right).$$

Векторное поле систематических разностей координат TGAS–Tycho-2, порождаемое смещением нуль-пунктов этих систем отсчета на величины

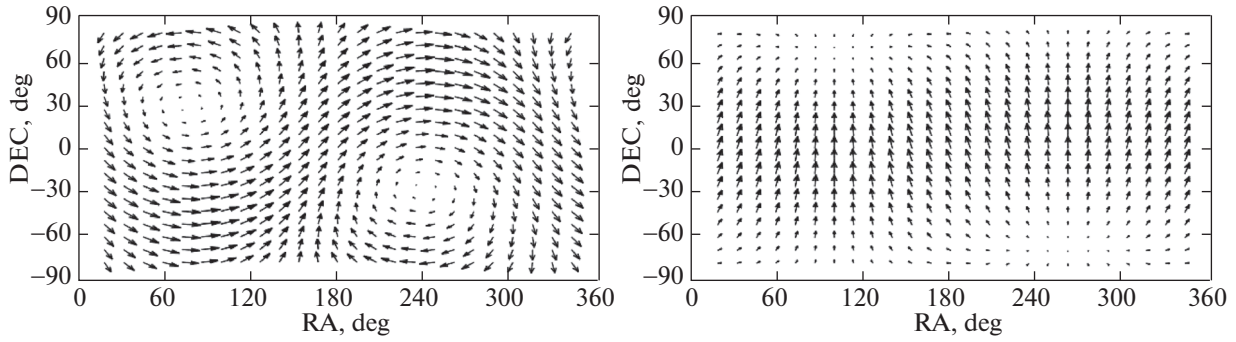


Рис. 9. Векторные карты разностей координат TGAS–Tycho-2 для $G = (10-11)$, обусловленные поворотом системы отсчета Tycho-2 относительно системы TGAS (слева) и смещением их нуль-пунктов (справа).

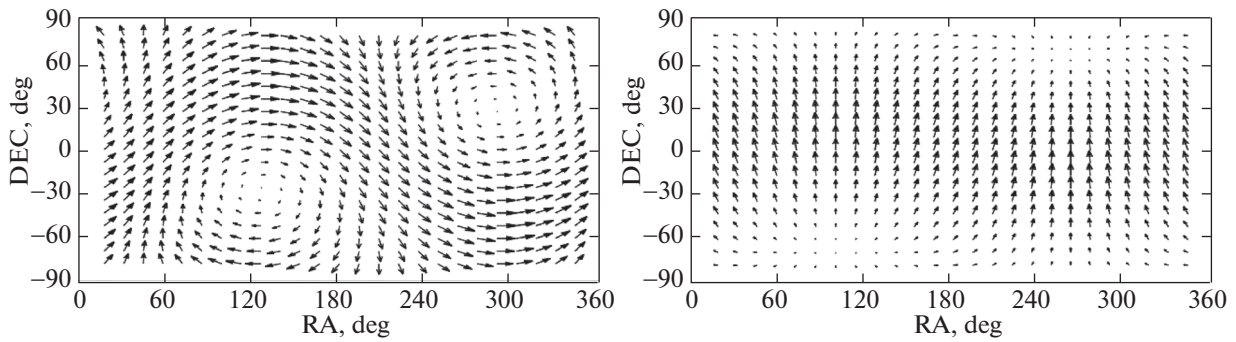


Рис. 10. Векторные карты разностей собственных движений звезд TGAS–Tycho-2 для $G = (10-11)$, обусловленные вращением системы отсчета Tycho-2 относительно системы TGAS (слева) и скоростью смещения их нуль-пунктов (справа).

$g_1 = -s_{111}/2.89$, $g_2 = -s_{110}/2.89$, $g_3 = -s_{101}/2.89$, показано на рис. 9 справа. Входящие сюда значения s_{nkp} были вычислены для выборки $G_2 = (11-12)$ по формуле

$$s_{nkp}(G_2) = \sum_r s_{nkp} Q_r(\bar{G}_2), \quad (30)$$

с коэффициентами t_{nkp} , взятыми из табл. 13.

Координаты точки вытекания потока определяются по формулам

$$A = \arctg\left(\frac{g_2}{g_1}\right); \quad (31)$$

$$D = \arctg\left(\frac{g_3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}\right).$$

Аналогично, на рис. 10 слева мы видим векторное поле, обусловленное вращением системы отсчета Tycho-2 относительно системы TGAS. На правой панели этого же рисунка показано векторное поле, порождаемое скоростью смещения нуль-пунктов наших систем отсчета. При построении этих полей использовались табл. 18 и 16

и соотношения (28)–(29) с формальной заменой параметров g_i на $\dot{g}_i$ и ε_i на ω_i .

Полученные нами параметры ориентации и вращения системы отсчета Tycho-2 относительно системы TGAS показаны в табл. 7 и 8. Анализ этих таблиц показывает, что параметры ориентации и вращения системы Tycho-2 зависят от блеска звезд и увеличиваются по мере перехода к более слабым звездам. В связи с этим следует отметить, что авторы статьи (Линдегрэн и др., 2016) при переводе собственных движений звезд каталога Tycho-2 на систему TGAS (Gaia DR1) использовали параметры вращения $\omega_x = -0.126$, $\omega_y = -0.185$, $\omega_z = 0.076$, полученные по разностям собственных движений звезд каталогов TGAS и Hipparcos. То, что параметры вращения системы отсчета Tycho-2 относительно TGAS вопреки аналогичным параметрам системы Hipparcos оказались зависящими от блеска звезд, вполне понятно, так как собственные движения звезд каталога Tycho-2 были получены с использованием наземных каталогов, а собственные движения звезд каталога Hipparcos — нет.

Таблица 7. Параметры ориентации и угол поворота $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}$ системы отсчета Tycho-2 относительно системы TGAS

G	ε_x	ε_y	ε_z	ε	A_{rot}	D_{rot}
10–11	-1.20 ± 0.22	2.79 ± 0.22	-1.75 ± 0.22	3.51 ± 0.22	113.3 ± 4.1	-29.9 ± 3.5
11–12	-1.56 ± 0.23	-3.48 ± 0.23	-2.36 ± 0.22	4.49 ± 0.23	245.9 ± 3.5	-31.8 ± 3.0
12–14	0.00 ± 0.58	-4.96 ± 0.58	-2.68 ± 0.58	5.63 ± 0.58	270 ± 6.7	-28.4 ± 5.9

Примечание. Единицы: мсд (столбцы 2–5), градусы (столбцы 6, 7).

Таблица 8. Параметры вращения и скорость вращения $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$ системы отсчета Tycho-2 относительно системы TGAS

G	ω_x	ω_y	ω_z	ω	A_{rot}	D_{rot}
10–11	-0.15 ± 0.02	0.26 ± 0.02	-0.19 ± 0.02	0.35 ± 0.02	120.2 ± 3.4	-32.2 ± 2.9
11–12	-0.08 ± 0.02	0.81 ± 0.02	-0.23 ± 0.02	0.85 ± 0.02	95.6 ± 1.6	-15.9 ± 1.6
12–14	0.00 ± 0.04	1.18 ± 0.04	-0.29 ± 0.04	1.22 ± 0.04	90.0 ± 2.1	-14.0 ± 2.0

Примечание. Единицы: мсд (столбцы 2–5), градусы (столбцы 6, 7).

4.1. Влияние Gaia на оценки параметров поля скоростей звезд

Используем теперь нашу модель систематических разностей экваториальных собственных движений звезд для оценки изменений кинематических параметров собственных движений звезд при переходе из системы каталога Tycho-2 в систему каталога TGAS.

В модели Огородникова–Милна (Огородников, 1965; Дю Монт, 1977), которую часто используют в анализе собственных движений звезд, поле скоростей звезд представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{M}^+ \mathbf{r}, \quad (32)$$

где $\mathbf{V}$ — скорость звезды, $\mathbf{V}_0$ — влияние поступательного движения Солнца, $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость твердотельного вращения звездной системы, $\mathbf{M}^+$ — симметричный тензор деформации поля скоростей.

Модель Огородникова–Милна содержит 12 параметров:

U, V, W — компоненты вектора скорости поступательного движения Солнца $\mathbf{V}_0$ относительно звезд;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты вектора твердотельного вращения $\boldsymbol{\Omega}$;

$M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$ — параметры тензора $\mathbf{M}^+$, описывающие сжатие-растяжение поля скоростей вдоль главных галактических осей;

$M_{12}^+, M_{13}^+, M_{23}^+$ — параметры тензора $\mathbf{M}^+$, описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

Спроецировав уравнение (32) на орты галактической системы координат и используя обозначения r для расстояния до звезды и $K = 4.738$ для множителя перевода размерности собственных движений звезд мсд/год в км/с кпк⁻¹, мы получим

$$\begin{aligned} K\mu_l \cos b = & U/r \sin l - V/r \cos l - \\ & - \omega_1 \sin b \cos l - \omega_2 \sin b \sin l + \omega_3 \cos b - \\ & - M_{13}^+ \sin b \sin l + M_{23}^+ \sin b \cos l + \\ & + M_{12}^+ \cos b \cos 2l - \frac{1}{2} M_{11}^* \cos b \sin 2l, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} K\mu_b = & U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - \\ & - W/r \cos b + \omega_1 \sin l - \omega_2 \cos l - \\ & - \frac{1}{2} M_{12}^+ \sin 2b \sin 2l + M_{13}^+ \cos 2b \cos l + \\ & + M_{23}^+ \cos 2b \sin l - \frac{1}{2} M_{11}^* \sin 2b \cos^2 l + \\ & + \frac{1}{2} M_{33}^* \sin 2b, \end{aligned} \quad (34)$$

где $M_{11}^* = M_{11}^+ - M_{22}^+$ и $M_{33}^* = M_{33}^+ - M_{22}^+$.

Известно, что параметры модели Огородникова–Милна позволяют оценить целый ряд кинематических и физических характеристик Галактики. Прежде всего, через них определяются постоянные Оорта. В предположении о том, что поле скоростей осесимметрично или $V_R = 0$, где V_R — проекция скорости на радиус-вектор в Галактической цилиндрической системе координат (Миямото и др., 1993), для постоянных Оорта A и B имеем

$$A = M_{12}^+, \quad B = \Omega_3. \quad (35)$$

В свою очередь постоянные Оорта C и K определяются следующим образом:

$$C = \frac{M_{11}^*}{2}, \quad K = \frac{M_{11}^*}{2} - M_{33}^*. \quad (36)$$

Эти постоянные являются линейными комбинациями градиентов параметров поля скоростей звезд. При этом постоянные A и C характеризуют соответственно азимутальные и радиальные деформации, постоянная B — компоненту твердотельного вращения звезд относительно Галактической системы координат, а K — дивергенцию поля (Торра и др., 2000).

В работе Витязева, Цветкова (2009) произведено разложение уравнений (33)–(34) по векторно сферическим функциям (ВСФ), показывающее, какие гармоники в разложении собственных движений звезд определяют отдельные параметры этой модели. Поскольку компоненты движения Солнца входят в уравнения (33) и (34) с множителем $1/r$, то коэффициенты соответствующих ВСФ определяются с точностью до множителя $1/\langle r \rangle$. Очевидно, что в силу линейности уравнений Огородникова–Милна систематические разности собственных движений звезд двух каталогов можно также представить в виде уравнений (33) и (34), в которых кинематические параметры U/r , V/r , ..., M_{33}^+ заменяются разностями $\Delta U/r$, $\Delta V/r$, ..., ΔM_{33}^+ . Поэтому, пользуясь результатами работы Витязева, Цветкова (2009), можно связать поправки кинематических параметров $\Delta U/r$, $\Delta V/r$, ..., ΔM_{33}^+ при переходе из системы одного каталога в систему другого каталога с численными значениями статистически значимых коэффициентов разложения разностей собственных движений звезд этих каталогов. Расчетные формулы, проясняющие физический смысл коэффициентов разложения, показаны в табл. 9.

Кинематический анализ поля скоростей звезд проводится в Галактической системе координат. Поскольку Галактическая система координат получается путем преобразования экваториальных координат и собственных движений звезд конкретного каталога, то систематическое различие галактических собственных движений звезд двух каталогов определяется систематическими различиями экваториальных собственных движений этих каталогов. Так как в нашей работе систематические разности экваториальных собственных движений звезд каталогов TGAS и Tycho-2 моделируются выражениями (8), то, применив к ним стандартную процедуру получения Галактических собственных движений (ESA, 1997), мы получим систематические разности Галактических собственных движений. Руководствуясь

Таблица 9. Связи разностей параметров модели Огородникова–Милна с коэффициентами разложения систематических разностей собственных движений звезд двух каталогов

Коэффициент	Значение
t_{101}	$2.89\Delta\omega_3$
t_{110}	$2.89\Delta\omega_2$
t_{111}	$2.89\Delta\omega_1$
s_{101}	$-2.89\Delta W/\langle r \rangle$
s_{110}	$-2.89\Delta V/\langle r \rangle$
s_{111}	$-2.89\Delta U/\langle r \rangle$
s_{201}	$-0.65 (\Delta M_{11}^* - 2\Delta M_{33}^*)$
s_{210}	$2.24\Delta M_{23}^+$
s_{211}	$2.24\Delta M_{13}^+$
s_{220}	$2.24\Delta M_{12}^+$
s_{221}	$1.12\Delta M_{11}^*$

видом уравнений Огородникова–Милна (33)–(34), мы провели разложений систематических разностей Галактических собственных движений звезд вида TGAS–Tycho-2 по системе векторных сферических функций для каждой из трех наших выборок звезд. Эти данные были использованы для вычисления смещений значений параметров модели Огородникова–Милна при переходе из системы каталога Tycho-2 в систему каталога TGAS. Результаты этих вычислений показаны в табл. 10. Анализ этой таблицы показывает, что при переходе от Tycho-2 к TGAS:

- смещения кинематических параметров (за исключением M_{13}^+ и M_{23}^+) увеличиваются по модулю с уменьшением блеска звезд;
- абсолютные величины смещений заключены в пределах от 0 до 4.2 км/с/кпк;
- учитывая то, что среднеквадратичные ошибки определения этих параметров по данным каталога Tycho-2 находятся на уровне 0.2 км/с/кпк (Бобылев и др., 2009), можно сказать, что при определении параметров Оорта систематика каталога Tycho-2 может давать смещения значений параметров, превышающие их ошибки в случайном отношении.

Таблица 10. Смещения параметров модели Огородникова–Милна при переходе из системы каталога Tycho-2 в систему каталога TGAS

Смещение параметра	$G_1 = (10-11)$	$G_2 = (11-12)$	$G_4 = (12-14)$
$\Delta\langle U/r \rangle$	0.45 ± 0.05	0.55 ± 0.07	0.90 ± 0.12
$\Delta\langle V/r \rangle$	-1.30 ± 0.05	-2.11 ± 0.07	-2.42 ± 0.12
$\Delta\langle W/r \rangle$	-1.05 ± 0.05	-1.81 ± 0.07	-2.29 ± 0.12
$\Delta\Omega_1$	0.62 ± 0.05	2.82 ± 0.07	4.21 ± 0.12
$\Delta\Omega_2$	1.57 ± 0.05	2.72 ± 0.07	3.38 ± 0.12
ΔB	0.04 ± 0.05	0.94 ± 0.07	1.74 ± 0.12
ΔM_{13}^+	0.97 ± 0.05	1.06 ± 0.07	1.00 ± 0.12
ΔM_{23}^+	-1.00 ± 0.05	-0.45 ± 0.07	0.25 ± 0.12
ΔA	0.71 ± 0.05	2.06 ± 0.07	3.33 ± 0.12
ΔC	0.15 ± 0.03	1.41 ± 0.04	2.01 ± 0.06
ΔK	-0.17 ± 0.06	-0.32 ± 0.08	-0.73 ± 0.13

Примечание. Единицы: км/с/кпк.

Посмотрим теперь, к каким изменениям значений параметров вращения Галактики приведут данные табл. 10. Обозначая через R_S расстояние от Солнца до центра Галактики, для линейной скорости Солнца относительно центра Галактики имеем

$$V_S = R_S * (A - B). \quad (37)$$

С этой скоростью период вращения Галактики в окрестности Солнца составит

$$P = \frac{2\pi R_S}{V_S}. \quad (38)$$

В свою очередь наклон кривой вращения Галактики S определяется по формуле

$$S = -(A + B). \quad (39)$$

В соответствии с эпициклической теорией (Бинни, Тремэн, 2008; Миньяр, 2000), параметры Оорта позволяют оценить отношение эпициклической частоты к угловой скорости вращения Галактики в окрестности Солнца:

$$F = 2\sqrt{\frac{-B}{A - B}}. \quad (40)$$

Большой интерес представляет также определение массы вещества Галактики, сосредоточенной внутри орбиты Солнца (Огородников, 1965):

$$M = \frac{R_S * V_S^2}{G}, \quad (41)$$

где G — постоянная тяготения.

В табл. 11 и 12 показаны абсолютные и относительные изменения значений фундаментальных постоянных Оорта A , B , C , K и параметров V , P , F , S , M при переходе из системы Tycho-2 в систему TGAS при принятом значении $R_S = 8$ кпк. Исходные результаты в системе Tycho-2 взяты из работы (Бобылев и др., 2009), значения в системе TGAS получены по нашим оценкам. Анализ этих таблиц показывает, что абсолютные величины смещения параметров зависят от яркости звезд. При этом наиболее чувствительным к переходу на систему TGAS среди параметров Оорта является параметр C . Его относительная погрешность в системе Tycho-2 достигает 100% для слабых звезд. Очень интересную особенность показывают результаты табл. 12. Здесь мы видим, что в то время, как параметры V , P , F , M имеют смещения на уровне 2–10%, оценки наклона кривой вращения Галактики меняются от –16% до –56%.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты, полученные в нашей работе.

1. Выполнено представление систематических разностей координат и собственных движений звезд каталогов TGAS и Tycho-2 в виде разложений по векторным сферическим функциям с учетом уравнения яркости. Выделение систематических компонент из индивидуальных разностей произведено с вероятностью 0.977–0.999. Модель систематических разностей (8), коэффициенты которой даны в табл. 13–18, позволяют перевести на систему каталога TGAS любые позиционные измерения, выполненные с применением Tycho-2 в качестве опорного каталога.

2. Изучение полученных систематических разностей показало, что они зависят от блеска звезд. Систематические разности координат могут изменяться при переходе от ярких $G = (10-11)$ к слабым $G = (12-13)$ звездам в пределах приблизительно от –40 до 15 мсд, в то время как аналогичные изменения для систематических разностей собственных движений меняются от –3 до 3 мсд/год. Причина существования уравнения яркости в исследуемых систематических разностях кроется в том, что при получении собственных движений звезд каталога Tycho-2 использовались старые фотографические каталоги.

3. Полученные систематические разности координат и собственных движений звезд были изучены в рамках модели твердотельного взаимного вращения и смещения систем отсчета Tycho-2 и TGAS. Нами было показано, что основные уравнения этой модели могут быть записаны в

Таблица 11. Постоянные Оорта A , B , C , K в системе TGAS и их относительные изменения $R = \frac{\text{TGAS} - \text{Tycho-2}}{\text{TGAS}}$ при переходе из системы каталога Tycho-2 в систему TGAS

		A	B	C	K
Tycho-2		15.9 ± 0.2	-12.0 ± 0.2	-3.9 ± 0.2	-2.6 ± 0.5
TGAS	$G = (10-11)$	16.6 ± 0.2	-12.0 ± 0.2	-3.8 ± 0.2	-2.8 ± 0.5
R		4.3%	0%	-3.0%	6.1%
TGAS	$G = (11-12)$	18.0 ± 0.2	-11.1 ± 0.2	-2.5 ± 0.2	-2.9 ± 0.5
R		11.5%	-8.5%	-56.6%	11.0%
TGAS	$G = (12-14)$	19.2 ± 0.2	-10.3 ± 0.2	-1.89 ± 0.2	-3.3 ± 0.5
R		17.3%	-17.0%	-106.3%	21.9%

Примечание. Первая строка — постоянные Оорта в системе каталога Tycho-2 по результатам работы (Бобылев и др., 2009). Единицы: км/с/кпк.

Таблица 12. Значения физических параметров V , P , S , F , M и их относительных изменений $R = \frac{\text{TGAS} - \text{Tycho-2}}{\text{TGAS}}$ при переходе из системы каталога Tycho-2 в систему TGAS

Параметры		V	P	S	F	M
Tycho-2		223.2 ± 2.3	220.2 ± 2.3	-3.9 ± 0.3	1.312 ± 0.008	$(9.2 \pm 0.2) \times 10^{10}$
TGAS	G_1	228.6 ± 2.4	215.0 ± 2.2	-4.7 ± 0.3	1.294 ± 0.008	$(9.7 \pm 0.2) \times 10^{10}$
R		2.3%	-2.4%	-16.1%	-1.4%	4.6%
TGAS	G_2	232.2 ± 2.4	211.7 ± 2.5	-6.9 ± 0.3	1.235 ± 0.0098	$(10.0 \pm 0.2) \times 10^{10}$
R		3.9%	-4.0%	-43.5%	-6.2%	7.6%
TGAS	G_3	235.9 ± 2.6	208.3 ± 2.6	-9.0 ± 0.3	1.180 ± 0.010	$(10.3 \pm 0.2) \times 10^{10}$
R		5.4%	-5.7%	-56.5%	-11.2%	10.5%

Примечание. Первая строка — по результатам работы (Бобылев и др., 2009). Параметры: V — линейная скорость вращения Солнца относительно центра Галактики (км/с); P — период обращения Солнца вокруг центра Галактики (млн. лет); S — наклон кривой вращения Галактики в окрестности Солнца (км/с/кпк); F — отношение эпициклической частоты к угловой скорости вращения Галактики в окрестности Солнца; M — масса Галактики внутри орбиты Солнца (в массах Солнца).

виде линейной комбинации векторных сферических функций. Это обстоятельство сразу же позволяет вычислить параметры модели непосредственно через коэффициенты представления систематических разностей по векторным сферическим функциям. Обнаружено, что, в отличие от взаимной ориентации систем отсчета Hipparcos и TGAS, параметры ориентации и взаимного вращения систем Tycho-2 и TGAS зависят от блеска звезд. Показано, что при переходе от ярких к слабым звездам система Tycho-2 развернута относительно TGAS на величину от 3.51 до 5.63 мсд и вращается с угловой

скоростью от 0.35 до 1.22 мсд/год. Заслуживает внимания то обстоятельство, что параметры ориентации, вращения и смещения системы отсчета Tycho-2 относительно TGAS, во-первых, зависят от блеска звезд, во-вторых, отличаются от параметров вращения каталога Hipparcos относительно TGAS, найденных в работе (Линдгрен и др., 2016). Это обстоятельство вполне объясняется тем, что собственные движения звезд каталогов Hipparcos и TGAS были получены без использования наземных каталогов.

4. Разработан метод учета влияния систематических ошибок собственных движений звезд

Таблица 13. Значения сфероидальных s_{nkpr} (мсд/год) коэффициентов разложения поля разностей координат $\Delta\alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta\delta \mathbf{e}_\delta$ вида TGAS-Tycho-2 с учетом уравнения яркости; u — отношение модуля коэффициента к его среднеквадратичной ошибке

n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u
1	0	1	0	23.66	20.07	9	0	1	2	-1.24	2.73	1	1	0	1	-2.08	2.77
1	0	1	1	4.37	5.81	10	0	1	0	2.07	1.76	1	1	0	2	-0.50	1.10
1	0	1	2	-2.03	4.48	10	0	1	1	0.00	0.00	2	1	1	0	4.13	3.50
2	0	1	0	-10.76	9.12	10	0	1	2	-0.93	2.05	2	1	1	1	0.85	1.12
2	0	1	1	5.86	7.80	11	0	1	0	-2.77	2.35	2	1	1	2	-2.50	5.52
2	0	1	2	0.27	0.60	11	0	1	1	0.00	0.00	3	1	0	0	4.02	3.41
3	0	1	0	-5.49	4.65	11	0	1	2	1.24	2.74	3	1	0	1	-0.97	1.29
3	0	1	1	2.85	3.79	12	0	1	0	2.97	2.52	3	1	0	2	-1.05	2.31
3	0	1	2	0.25	0.55	12	0	1	1	0.00	0.00	4	1	0	0	2.65	2.25
4	0	1	0	-3.24	2.75	12	0	1	2	-1.33	2.93	4	1	0	2	-1.19	2.62
4	0	1	1	2.01	2.67	13	0	1	0	-0.33	0.28	5	1	1	0	2.27	1.92
4	0	1	2	-0.11	0.23	13	0	1	1	1.14	1.52	5	1	1	1	0.00	0.00
5	0	1	0	-0.28	0.24	13	0	1	2	-0.74	1.63	5	1	1	2	-1.01	2.24
5	0	1	1	0.98	1.30	14	0	1	0	-4.37	3.70	6	1	1	0	2.90	2.46
5	0	1	2	-0.63	1.40	14	0	1	1	1.14	1.52	6	1	1	1	-0.78	1.03
7	0	1	0	0.50	0.42	14	0	1	2	1.07	2.36	6	1	1	2	-0.69	1.53
7	0	1	1	-1.74	2.31	21	0	1	0	2.30	1.95	6	1	0	0	-0.23	0.20
7	0	1	2	1.12	2.47	21	0	1	1	-0.83	1.10	6	1	0	1	0.81	1.08
8	0	1	0	6.08	5.15	21	0	1	2	-0.39	0.86	6	1	0	2	-0.52	1.16
8	0	1	1	-2.27	3.02	22	0	1	0	0.38	0.32	8	1	1	0	-0.27	0.23
8	0	1	2	-0.96	2.12	22	0	1	1	-1.33	1.77	8	1	1	1	0.92	1.23
9	0	1	0	4.42	3.75	22	0	1	2	0.86	1.89	8	1	1	2	-0.60	1.32
9	0	1	1	-0.96	1.27	1	1	0	0	4.71	4.00	2	2	1	0	-0.88	0.74

каталога в экваториальной системе координат на результаты определения кинематических параметров модели Огородникова—Милна по собственным движениям в Галактической системе координат. Показано, что при переходе из системы Tycho-2 в систему TGAS наибольшие изменения наблюдаются для оценки значения параметра Оорта C (100%) и наклона кривой вращения Галактики в окрестности Солнца S (-56%). Соответствующие изменения параметров Оорта A и B , а также линейной скорости движения Солнца относительно центра

Галактики, периода вращения Галактики, отношения эпициклической частоты к угловой скорости вращения Галактики, массы Галактики в пределах расстояния от центра Галактики до Солнца не столь велики и находятся на уровне 2–10%.

Результаты первого релиза проекта Gaia позволили снабдить каталог Tycho-2 параллаксами звезд и новыми собственными движениями. Несомненно, добавление параллакссов примерно для 2 миллионов звезд явилось радикальным улучшением каталога Tycho-2. Что касается собственных

Таблица 14. Значения сфероидальных s_{nkp} (мсд) коэффициентов разложения поля разностей координат $\Delta\alpha \cos \delta e_\alpha + \Delta\delta e_\delta$ вида TGAS-Tycho-2 с учетом уравнения яркости; u — отношение модуля коэффициента к его среднеквадратичной ошибке (продолжение табл. 13)

n	k	p	r	s_{nkp}	u	n	k	p	r	s_{nkp}	u	n	k	p	r	s_{nkp}	u
2	2	1	1	3.04	4.05	7	4	1	2	-0.53	1.17	9	8	1	0	2.65	2.25
2	2	1	2	-1.96	4.34	5	5	1	0	2.17	1.84	9	8	1	1	0.00	0.00
3	2	1	0	8.43	7.15	5	5	1	1	0.00	0.00	9	8	1	2	-1.19	2.62
3	2	1	1	0.76	1.01	5	5	1	2	-0.97	2.14	10	9	0	0	-2.00	1.69
3	2	1	2	-0.74	1.65	5	5	0	0	3.23	2.74	10	9	0	1	-2.59	3.45
6	2	0	0	2.51	2.13	5	5	0	1	-1.03	1.37	10	9	0	2	-1.12	2.46
6	2	0	1	0.00	0.00	5	5	0	2	-0.65	1.43	13	12	1	0	-2.09	1.78
6	2	0	2	-1.12	2.48	9	5	0	0	-2.63	2.23	13	12	1	1	-2.72	3.62
7	2	1	0	3.35	2.84	9	5	0	1	0.77	1.03	13	12	1	2	-1.17	2.58
7	2	1	1	-1.31	1.74	9	5	0	2	0.58	1.28	14	14	1	0	2.00	1.69
7	2	1	2	-0.49	1.08	10	5	0	0	2.33	1.97	14	14	1	1	2.59	3.45
3	3	0	0	2.53	2.15	10	5	0	1	0.00	0.00	14	14	1	2	1.12	2.46
3	3	0	1	0.00	0.00	10	5	0	2	-1.04	2.30	17	17	1	0	-2.27	1.93
3	3	0	2	-1.13	2.50	6	6	0	0	2.42	2.05	17	17	1	1	-2.95	3.93
5	3	1	0	2.57	2.18	6	6	0	1	0.83	1.10	17	17	1	2	-1.27	2.81
5	3	1	1	-1.18	1.58	6	6	0	2	-1.73	3.81	41	29	0	0	2.23	1.89
5	3	1	2	-0.23	0.51	10	6	0	0	2.25	1.91	41	29	0	1	0.00	0.00
4	4	1	0	-2.82	2.40	10	6	0	1	0.00	0.00	41	29	0	2	-1.00	2.20
4	4	1	1	1.00	1.34	10	6	0	2	-1.01	2.22	38	37	1	0	1.91	1.62
4	4	1	2	0.48	1.07	8	8	1	0	2.38	2.02	38	37	1	1	2.48	3.30
7	4	1	0	2.61	2.22	8	8	1	1	0.00	0.00	38	37	1	2	1.07	2.36
7	4	1	1	-0.82	1.10	8	8	1	2	-1.06	2.35					.	.

движений звезд, то в этой работе нами было показано, что с точки зрения изучения кинематических параметров поля скоростей звезд, новые собственные движения звезд, полученные по наблюдениям в космосе на аппаратах Hipparcos и Gaia, приводят к существенному пересмотру численных значений параметра Оорта C и угла наклона кривой вращения Галактики в окрестностях Солнца. Уточнения значений других кинематических параметров оказываются не столь существенными.

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 6.37.343.2015. Авторы выражают благодарность анонимным рецензентам за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данной работе используются действительные скалярные сферические функции следующего вида:

$$K_{nkp}(\alpha, \delta) = \quad (42)$$

$$= R_{nk} \begin{cases} P_{n,0}(\delta), & k = 0, \quad p = 1, \\ P_{nk}(\delta) \sin k\alpha, & k \neq 0, \quad p = 0, \\ P_{nk}(\delta) \cos k\alpha, & k \neq 0, \quad p = 1, \end{cases}$$

$$R_{nk} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k > 0, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad (43)$$

Таблица 15. Значения тороидальных t_{nkpr} (мсд) коэффициентов разложения поля разностей координат движений $\Delta\alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta\delta \mathbf{e}_\delta$ вида TGAS-Tycho-2 с учетом уравнения яркости; u — отношение модуля коэффициента к его среднеквадратичной ошибке

n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u
1	0	1	0	9.74	8.26	2	1	0	0	3.45	2.93	9	9	1	0	-3.08	2.61
1	0	1	1	1.09	1.46	2	1	0	1	-0.77	1.03	9	9	1	1	-4.00	5.32
1	0	1	2	-0.31	0.68	2	1	0	2	-0.95	2.09	9	9	1	2	-1.72	3.80
4	0	1	0	4.66	3.95	3	1	0	0	0.35	0.30	24	23	0	0	1.95	1.65
4	0	1	1	-1.49	1.98	3	1	0	1	-1.22	1.63	24	23	0	1	2.53	3.36
4	0	1	2	-0.93	2.06	3	1	0	2	0.79	1.75	24	23	0	2	1.09	2.40
5	0	1	0	4.09	3.47	5	1	1	0	-0.27	0.22	24	23	1	0	1.69	1.43
5	0	1	1	0.00	0.00	5	1	1	1	0.92	1.22	24	23	1	1	2.20	2.92
5	0	1	2	-1.83	4.04	5	1	1	2	-0.59	1.31	24	23	1	2	0.95	2.09
6	0	1	0	-5.99	5.08	12	1	1	0	-1.67	1.41	28	28	0	0	-2.37	2.01
6	0	1	1	1.96	2.61	12	1	1	1	-2.16	2.88	28	28	0	1	0.00	0.00
6	0	1	2	1.16	2.55	12	1	1	2	-0.93	2.06	28	28	0	2	1.06	2.34
9	0	1	0	2.60	2.21	3	2	1	0	5.18	4.39	30	28	1	0	-2.09	1.78
9	0	1	1	0.00	0.00	3	2	1	1	0.00	0.00	30	28	1	1	-2.72	3.62
9	0	1	2	-1.16	2.57	3	2	1	2	-2.31	5.11	30	28	1	2	-1.17	2.58
10	0	1	0	0.23	0.19	4	2	0	0	-0.29	0.24	34	34	1	0	2.76	2.34
10	0	1	1	-0.79	1.05	4	2	0	1	0.99	1.32	34	34	1	1	3.58	4.76
10	0	1	2	0.51	1.12	4	2	0	2	-0.64	1.41	34	34	1	2	1.54	3.40
15	0	1	0	-2.69	2.29	5	2	1	0	-0.46	0.39	39	38	1	0	-1.81	1.54
15	0	1	1	0.86	1.15	5	2	1	1	1.59	2.12	39	38	1	1	-2.36	3.13
15	0	1	2	0.54	1.19	5	2	1	2	-1.03	2.27	39	38	1	2	-1.01	2.24
23	0	1	0	1.99	1.69	3	3	1	0	2.11	1.79	53	38	0	0	0.23	0.20
23	0	1	1	0.00	0.00	3	3	1	1	2.74	3.64	53	38	0	1	-0.81	1.08
23	0	1	2	-0.89	1.97	3	3	1	2	1.18	2.60	53	38	0	2	0.52	1.15
1	1	0	0	13.43	11.39	5	4	1	0	2.32	1.97	40	39	1	0	-2.67	2.27
1	1	0	1	9.14	12.16	5	4	1	1	0.00	0.00	40	39	1	1	0.00	0.00
1	1	0	2	-4.03	8.90	5	4	1	2	-1.04	2.29	40	39	1	2	1.19	2.64
1	1	1	0	4.84	4.10	7	6	1	0	-0.29	0.24	55	39	1	0	-2.23	1.89
1	1	1	1	-1.42	1.89	7	6	1	1	1.00	1.33	55	39	1	1	0.00	0.00
1	1	1	2	-1.07	2.36	7	6	1	2	-0.65	1.43	55	39	1	2	1.00	2.20

Таблица 16. Значения сфероидальных s_{nkpr} (мсд/год) коэффициентов разложения поля разностей собственных движений $\Delta\mu_\alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta\mu_\delta \mathbf{e}_\delta$ вида TGAS-Tycho-2 с учетом уравнения яркости; u — отношение модуля коэффициента к его среднеквадратичной ошибке

n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u
1	0	1	0	2.37	33.83	10	0	1	2	-0.06	1.59	2	1	1	1	-0.38	7.16
1	0	1	1	0.42	8.01	13	0	1	0	-0.32	4.53	2	1	1	2	0.06	1.68
1	0	1	2	-0.09	2.37	13	0	1	1	0.08	1.46	3	1	1	0	-0.02	0.30
2	0	1	0	-1.64	23.36	13	0	1	2	0.08	2.27	3	1	1	1	0.07	1.39
2	0	1	1	-0.29	5.47	14	0	1	0	-0.62	8.86	3	1	1	2	-0.05	1.32
2	0	1	2	0.06	1.78	14	0	1	1	-0.12	2.31	2	2	1	0	-0.30	4.27
3	0	1	0	-1.15	16.48	14	0	1	2	0.03	0.85	2	2	1	1	-0.39	7.32
3	0	1	1	-0.36	6.78	20	0	1	0	-0.28	4.00	2	2	1	2	-0.17	4.64
3	0	1	2	0.06	1.68	20	0	1	1	0.09	1.62	6	2	0	0	0.13	1.86
7	0	1	0	0.47	6.70	20	0	1	2	0.06	1.63	6	2	0	1	-0.08	1.46
7	0	1	1	-0.20	3.70	22	0	1	0	0.60	8.50	6	2	0	2	0.00	0.05
7	0	1	2	-0.06	1.61	22	0	1	1	0.00	0.08	7	2	1	0	0.18	2.56
8	0	1	0	0.28	3.97	22	0	1	2	-0.03	0.81	7	2	1	1	-0.08	1.46
8	0	1	1	-0.08	1.46	1	1	0	0	-0.68	9.78	7	2	1	2	-0.02	0.56
8	0	1	2	-0.06	1.78	1	1	0	1	-0.10	1.85	4	3	1	0	-0.18	2.60
9	0	1	0	0.78	11.08	1	1	0	2	0.07	2.00	4	3	1	1	-0.24	4.47
9	0	1	1	0.18	3.47	1	1	1	0	-0.14	2.07	4	3	1	2	-0.10	2.83
9	0	1	2	-0.05	1.46	1	1	1	1	-0.19	3.54	9	3	0	0	0.21	2.99
10	0	1	0	0.60	8.59	1	1	1	2	-0.08	2.24	9	3	0	1	-0.08	1.46
10	0	1	1	0.10	1.93	2	1	1	0	-0.45	6.48	9	3	0	2	-0.03	0.93

где α и δ — прямое восхождение (долгота), склонение (широта) точки на сфере соответственно ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $-\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2$); $P_{nk}(\delta)$ — полиномы Лежандра (при $k = 0$) и присоединенные функции Лежандра (при $k > 0$), которые можно вычислить с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$P_{nk}(\delta) = \sin \delta \frac{2n-1}{n-k} P_{n-1,k}(\delta) - \quad (44)$$

$$- \frac{n+k-1}{n-k} P_{n-2,k}(\delta),$$

$$k = 0, 1, \dots; \quad n = k+2, k+3, \dots;$$

$$P_{kk}(\delta) = \frac{(2k)!}{2^k k!} \cos^k \delta,$$

$$P_{k+1,k}(\delta) = \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!} \cos^k \delta \sin \delta.$$

При работе со сферическими функциями часто для удобства их нумерации используют один индекс j , при этом

$$j = n^2 + 2k + p - 1. \quad (45)$$

Введенные функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\iint_{\Omega} (K_i \cdot K_j) d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (46)$$

Другими словами, набор функций K_{nkp} образует на сфере ортонормированную систему функций.

Таблица 17. Значения сфероидальных s_{nkpr} (мсд/год) коэффициентов разложения поля разностей собственных движений $\Delta\mu_\alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta\mu_\delta \mathbf{e}_\delta$ вида TGAS-Tycho-2 с учетом уравнения яркости; u — отношение модуля коэффициента к его среднеквадратичной ошибке (продолжение табл. 16)

n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u
4	4	0	0	-0.18	2.54	7	7	0	0	-0.23	3.23	31	30	0	0	0.02	0.30
4	4	0	1	-0.33	6.16	7	7	0	1	-0.20	3.85	31	30	0	1	-0.07	1.39
4	4	0	2	-0.07	1.83	7	7	0	2	-0.16	4.39	31	30	0	2	0.05	1.32
4	4	1	0	-0.14	2.07	8	8	1	0	-0.33	4.67	34	33	1	0	-0.17	2.42
4	4	1	1	-0.19	3.54	8	8	1	1	-0.42	8.01	34	33	1	1	-0.22	4.16
4	4	1	2	-0.08	2.24	8	8	1	2	-0.18	5.08	34	33	1	2	-0.09	2.64
5	4	1	0	-0.30	4.25	9	9	1	0	-0.21	2.96	48	36	1	0	0.02	0.30
5	4	1	1	0.08	1.46	9	9	1	1	-0.27	5.08	48	36	1	1	-0.07	1.39
5	4	1	2	0.07	2.03	9	9	1	2	-0.12	3.22	48	36	1	2	0.05	1.32
9	4	0	0	0.41	5.81	10	9	0	0	-0.15	2.11	38	37	1	0	0.25	3.59
9	4	0	1	0.11	2.08	10	9	0	1	-0.19	3.62	38	37	1	1	0.24	4.47
9	4	0	2	0.03	0.83	10	9	0	2	-0.08	2.29	38	37	1	2	0.17	4.78
6	6	0	0	-0.19	2.69	22	22	1	0	-0.14	2.07	40	39	0	0	-0.18	2.51
6	6	0	1	-0.24	4.62	22	22	1	1	-0.19	3.54	40	39	0	1	-0.23	4.31
6	6	0	2	-0.11	2.93	22	22	1	2	-0.08	2.24	40	39	0	2	-0.10	2.73
6	6	1	0	-0.29	4.18	43	29	0	0	-0.02	0.30	45	39	1	0	0.21	3.02
6	6	1	1	-0.38	7.16	43	29	0	1	0.07	1.39	45	39	1	1	-0.09	1.62
6	6	1	2	-0.16	4.54	43	29	0	2	-0.05	1.32	45	39	1	2	-0.03	0.78

Систематические разности координат и собственных движений являются компонентами некоторого векторного поля. В связи с этим представляется целесообразным применить для изучения систематических разностей метод разложения этого поля по системе векторных сферических функций. В настоящей статье используется аппарат векторных сферических функций в том виде, в котором он применялся в наших предыдущих работах по кинематическому анализу собственных движений звезд (Витязев В.В., Цветков А.С., 2013, 2014). В этих обозначениях тороидальные $\mathbf{T}_{nkp}$ и сфероидальные $\mathbf{S}_{nkp}$ векторные сферические функции задаются следующим образом:

$$\mathbf{T}_{nkp}(\alpha, \delta) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \times \left(\frac{\partial K_{nkp}(\alpha, \delta)}{\partial \delta} \mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{\cos \delta} \frac{\partial K_{nkp'}(\alpha, \delta)}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\delta \right), \quad (47)$$

$$\mathbf{S}_{nkp}(\alpha, \delta) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \times \quad (48)$$

$$\times \left(\frac{1}{\cos \delta} \frac{\partial K_{nkp}(\alpha, \delta)}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial K_{nkp}(\alpha, \delta)}{\partial \delta} \mathbf{e}_\delta \right).$$

Обозначим компоненты при единичном векторе $\mathbf{e}_\alpha$ как T_{nkp}^α и S_{nkp}^α , а при единичном векторе $\mathbf{e}_\delta$ — соответственно T_{nkp}^δ и S_{nkp}^δ :

$$\mathbf{T}_{nkp} = T_{nkp}^\alpha \mathbf{e}_\alpha + T_{nkp}^\delta \mathbf{e}_\delta, \quad (49)$$

$$\mathbf{S}_{nkp} = S_{nkp}^\alpha \mathbf{e}_\alpha + S_{nkp}^\delta \mathbf{e}_\delta. \quad (50)$$

С учетом того, что $P_{n,k+1}(b) = 0$ при $n < k + 1$, эти компоненты определяются следующим образом:

$$T_{nkp}^\alpha = S_{nkp}^\delta = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \times \quad (51)$$

$$\times \begin{cases} P_{n,1}(\delta), \\ k = 0, \quad p = 1, \\ (-k \operatorname{tg} \delta P_{nk}(\delta) + P_{n,k+1}(\delta)) \sin k\alpha, \\ k \neq 0, \quad p = 0, \\ (-k \operatorname{tg} \delta P_{nk}(\delta) + P_{n,k+1}(\delta)) \cos k\alpha, \\ k \neq 0, \quad p = 1; \end{cases}$$

Таблица 18. Значения тороидальных t_{nkpr} (мсд/год) коэффициентов разложения поля разностей собственных движений $\Delta\mu_\alpha \cos \delta \mathbf{e}_\alpha + \Delta\mu_\delta \mathbf{e}_\delta$ вида TGAS-Tycho-2 с учетом уравнения яркости; u — отношение модуля коэффициента к его среднеквадратичной ошибке

n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u	n	k	p	r	s_{nkpr}	u
1	0	1	0	0.99	14.13	15	0	1	1	0.07	1.23	7	1	1	2	0.03	0.93
1	0	1	1	0.13	2.39	15	0	1	2	-0.04	1.17	9	1	0	0	-0.13	1.89
1	0	1	2	0.00	0.07	18	0	1	0	0.16	2.23	9	1	0	1	-0.17	3.24
2	0	1	0	-0.18	2.52	18	0	1	1	0.10	1.93	9	1	0	2	-0.07	2.05
2	0	1	1	0.13	2.54	18	0	1	2	0.12	3.42	2	2	1	0	0.48	6.90
2	0	1	2	-0.03	0.71	1	1	1	0	0.28	3.95	2	2	1	1	0.07	1.39
3	0	1	0	-0.21	3.05	1	1	1	1	-0.18	3.31	2	2	1	2	0.01	0.15
3	0	1	1	-0.28	5.24	1	1	1	2	0.01	0.34	3	2	1	0	-0.71	10.20
3	0	1	2	-0.12	3.32	1	1	0	0	-3.46	49.43	3	2	1	1	-0.49	9.17
4	0	1	0	1.05	15.04	1	1	0	1	-1.09	20.64	3	2	1	2	0.06	1.76
4	0	1	1	0.10	1.85	1	1	0	2	0.23	6.44	7	2	0	0	0.12	1.66
4	0	1	2	-0.03	0.78	2	1	1	0	-0.12	1.71	7	2	0	1	0.15	2.85
5	0	1	0	-0.36	5.16	2	1	1	1	-0.16	2.93	7	2	0	2	0.07	1.81
5	0	1	1	-0.47	8.86	2	1	1	2	-0.07	1.85	9	2	1	0	0.12	1.72
5	0	1	2	-0.20	5.61	3	1	0	0	0.20	2.87	9	2	1	1	-0.08	1.46
6	0	1	0	-0.92	13.12	3	1	0	1	0.26	4.93	9	2	1	2	0.01	0.17
6	0	1	1	-0.08	1.54	3	1	0	2	0.11	3.12	5	4	1	0	-0.24	3.47
6	0	1	2	0.04	1.22	4	1	0	0	0.44	6.22	5	4	1	1	-0.25	4.70
10	0	1	0	0.72	10.31	4	1	0	1	0.06	1.16	5	4	1	2	0.04	1.17
10	0	1	1	0.11	2.08	4	1	0	2	0.00	0.12	9	5	0	0	-0.02	0.27
10	0	1	2	-0.01	0.27	5	1	1	0	-0.19	2.69	9	5	0	1	0.07	1.23
13	0	1	0	0.02	0.27	5	1	1	1	-0.24	4.62	9	5	0	2	-0.04	1.17
13	0	1	1	-0.07	1.23	5	1	1	2	-0.11	2.93	7	7	1	0	0.19	2.74
13	0	1	2	0.04	1.17	7	1	1	0	-0.21	2.99	7	7	1	1	0.25	4.70
15	0	1	0	-0.02	0.27	7	1	1	1	0.08	1.46	7	7	1	2	0.11	2.98

$$T_{nkpr}^\delta = -S_{nkpr}^\alpha = \frac{R_{nk}}{\sqrt{n(n+1)}} \times \quad (52) \quad = \iint_{\Omega} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j; \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} 0, & k = 0, \quad p = 1, \\ -\frac{k}{\cos \delta} P_{nk}(\delta) \cos k\alpha, & k \neq 0, \quad p = 0, \\ +\frac{k}{\cos \delta} P_{nk}(\delta) \sin k\alpha, & k \neq 0, \quad p = 1. \end{cases} \quad \iint_{\Omega} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = 0, \quad \forall i, j. \quad (54)$$

Введенные функции образуют на сфере ортонормированную систему функций

Для описания уравнения яркости в формуле (8) используются нормированные полиномы Лежандра:

$$\iint_{\Omega} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = \quad (53)$$

$$t_{nkpr}(G) = \sum_r t_{nkpr} Q_r(\bar{G}); \quad (55)$$

$$s_{nkp}(G) = \sum_r s_{nkpr} Q_r(\bar{G}),$$

где преобразование

$$\bar{G} = 2 \frac{G - G_{\min}}{G_{\max} - G_{\min}} - 1 \quad (56)$$

переводит отрезок $[G_{\min} \leq G \leq G_{\max}]$ в отрезок $[-1 \leq \bar{m} \leq +1]$.

В формуле (55) используются нормированные полиномы Лежандра

$$Q_r(\bar{G}) = \sqrt{\frac{2r+1}{2}} P_r(\bar{G}), \quad (57)$$

а $P_r(\bar{G})$ — полиномы Лежандра, для вычисления которых можно воспользоваться следующим рекуррентным соотношением:

$$P_{r+1}(\bar{G}) = \frac{2r+1}{r+1} \bar{G} P_r(\bar{G}) - \frac{r}{r+1} P_{r-1}(\bar{G}), \quad (58)$$

$$r = 1, 2, \dots, \quad P_0 = 1, \quad P_1 = \bar{G}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бинни, Тремэйн (J. Binney and S. Tremaine), *Galactic Dynamics* (2nd Ed., Princeton Univ. Press, 2008).
2. Бобылев В.В., Степанищев А.С., Байкова А.Т., Гончаров Г.А., Письма в Астрон. журн. **35**, 920 (2009) [V.V. Bobylev, A.S. Stepanishchev, A.T. Bajkova, and G.A. Gontcharov, *Astron. Lett.* **35**, 836 (2009)].
3. Витязев (V.V. Vityazev), *Astron. Astrophys. Trans.* **4**, 195 (1994).
4. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в Астрон. журн. **35**, 114 (2009) [V.V. Vityazev, A.S. Tsvetkov, *Astron. Lett.* **35**, 100 (2009)].
5. Витязев, Цветков (V.V. Vityazev and A.S. Tsvetkov), *Astron. Nachr.* **334**, 760 (2013).
6. Витязев, Цветков (V.V. Vityazev and A.S. Tsvetkov), *MNRAS* **442**, 1249 (2014).
7. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в Астрон. журн. **41**, 350 (2015a) [V.V. Vityazev, A.S. Tsvetkov, *Astron. Lett.* **41**, 317 (2015a)].
8. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в Астрон. журн. **41**, 624 (2015b) [V.V. Vityazev, A.S. Tsvetkov, *Astron. Lett.* **41**, 575 (2015b)].
9. Горский и др. (K.M. Gorski, E. Hivon, A.J. Banday, B.D. Wandelt, F.K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelmann), *Astrophys. J.* **622**, 759 (2005).
10. ESA, 1997 (ESA Special Publication), Vol. 1200, The Hipparcos and TYCHO catalogues. Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA HIPPARCOS Space Astrometry Mission.
11. Линдегрэн и др. (L. Lindegren, U. Lammers, U. Bastian, J. Hernández, S. Klioner, D. Hobbs, A. Bombrun, D. Michalik, et al.), *Astron. Astrophys.* **595**, 4L (2016).
12. Миньяр, Клионе (F. Mignard and S. Klioner), *Astron. Astrophys.* **547**, A59 (2012).
13. Миньяр, Морато (F. Mignard and B. Morando), *Journées 1990: Systèmes de référence spatio-temporels. Colloque André Danjon*, p. 151 (1990).
14. Миньяр, Фрошле (F. Mignard and M. Froeschle), *Astron. Astrophys.* **354**, 732 (2000).
15. Миямото и др. (M. Miyamoto, M. Soma, and M. Yokoshima), *Astron. J.* **105**, 2138 (1993).
16. Дю Монт (B.A. du Mont), *Astron. Astrophys.* **61**, 127 (1977).
17. Огородников К.Ф., *Динамика звездных систем* (М.: Физматгиз, 1965).
18. Попов А.В., Витязев В.В., Цветков А.В., Спектральные параллаксы звезд каталога Tycho-2, *Вестн. С.-Петербург. ун.-та. Сер. 1*, вып. 4 (2006).
19. Райт и др. (C.O. Wright, M.P. Egan, K.E. Kraemer, and S.D. Price), *Astron. J.* **125**, 359 (2003).
20. Торра и др. (J. Torra, D. Fernandez, and F. Figueras), *Astron. Astrophys.* **359**, 82 (2000).
21. Хег и др. (E. Hoeg, C. Fabricius, V.V. Makarov, S. Urban, T. Corbin, G. Wycoff, U. Bastian, P. Schwkendrick, and A. Wicenec), *Astron. Astrophys.* **355**, L27 (2000).
22. Урбан и др. (S.E. Urban, T.E. Corbin, G.L. Wycoff, J.C. Martin, E.S. Jackson, M.I. Zacharias, and D.M. Hall), *Astron. J.* **115**, 1212 (1998).