

# ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ЗВЕЗД КАТАЛОГА GAIA DATA RELEASE 2 WITH RADIAL VELOCITIES С ПОМОЩЬЮ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2020 г. А. С. Цветков<sup>1\*</sup>, Ф. А. Амосов<sup>1\*\*</sup>, Д. А. Трофимов<sup>1</sup>, С. Д. Петров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 15.05.2019 г.

После доработки 04.09.2019 г.; принята к публикации 16.09.2019 г.

Проведено разложение собственных движений и лучевых скоростей звезд каталога GAIA DR2 with RV. Получено подтверждение адекватности модели Огородникова–Милна наблюдательному материалу, а также найдены кинематические компоненты, не описываемые этой моделью. Внемоделные гармоники частично отождествлены с нелинейными членами расширенной модели Орта и параметрами кинематической модели второго порядка.

*Ключевые слова:* GAIA, звездная кинематика, сферические функции.

DOI: 10.31857/S0320010819110093

## ВВЕДЕНИЕ

В работе (Цветков, Амосов, 2019) был проведен кинематический анализ собственных движений и лучевых скоростей 6 млн звезд каталога GAIA DR2 with RV. Были определены параметры линейной трехмерной модели Огородникова–Милна (Огородников, 1965) из раздельных и совместных решений. Однако традиционный подход, заключающийся в решении методом наименьших квадратов условных уравнений, имеет известные недостатки, так как не позволяет выявить систематические компоненты в наблюдательном материале, которые изначально не включены в модельные уравнения. Использование аппарата векторных (при анализе собственных движений) и скалярных (при анализе лучевых скоростей) сферических функций позволяет не только обнаружить неучтенные систематические эффекты, но и проверить адекватность модели наблюдениям. Впервые эта техника, по-видимому, была описана в работе (Витязев, Цветков, 1989) и применена в работе (Витязев, Цветков, 1990) еще на материале каталогов FK4 и более ранних.

Полный вид и алгоритм вычисления векторных сферических функций, а также связь коэффициентов сферического разложения с параметрами модели Огородникова–Милна (и сами уравнения) приведены в (Витязев, Цветков, 2009) и в (Витязев,

Цветков, 2013). Аналогичные сведения, но уже для лучевых скоростей, и связи коэффициентов разложения по скалярным сферическим функциям представлены в (Витязев, Цветков, 2014).

Для удобства читателей мы приведем в настоящей статье лишь таблицы связи кинематических параметров с коэффициентами разложения. В табл. 1 и 2 приняты стандартные обозначения кинематических параметров:

$U, V, W$  — компоненты вектора  $V_0$  поступательного движения Солнца среди звезд,  $\langle r \rangle$  — среднее расстояние рассматриваемой группы звезд;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — компоненты вектора угловой скорости  $\Omega$ ;

$M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$  — параметры тензора деформации, описывающие сжатие–растяжение вдоль главных осей галактической системы координат;

$M_{12}^+, M_{13}^+, M_{23}^+$  — параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных плоскостях.

В работе (Витязев, Цветков, 2009) представлены и обратные соотношения, которые мы здесь не будем приводить.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НАБЛЮДАТЕЛЬНЫМ ДАННЫМ

Для сохранения преемственности и возможности корректного сравнения результатов мы провели разложение как собственных движений, так

\* Электронный адрес: a.s.tsvetkov@inbox.ru

\*\* Электронный адрес: amosov.f@mail.ru

**Таблица 1.** Связь кинематических параметров модели Огородникова–Милна с коэффициентами векторного сферического разложения собственных движений звезд

| Коэффициент $t_{nkp}$<br>или $s_{nkp}$ | Значение                                      |
|--|---|
| $t_{101}$                              | $2.89\omega_3$                                |
| $t_{110}$                              | $2.89\omega_2$                                |
| $t_{111}$                              | $2.89\omega_1$                                |
| $s_{101}$                              | $-2.89W/\langle r \rangle$                    |
| $s_{110}$                              | $-2.89V/\langle r \rangle$                    |
| $s_{111}$                              | $-2.89U/\langle r \rangle$                    |
| $s_{201}$                              | $-0.65M_{11}^+ - 0.65M_{22}^+ + 1.29M_{33}^+$ |
| $s_{210}$                              | $2.24M_{23}^+$                                |
| $s_{211}$                              | $2.24M_{13}^+$                                |
| $s_{220}$                              | $2.24M_{12}^+$                                |
| $s_{221}$                              | $1.12M_{11}^+ - 1.12M_{22}^+$                 |

**Таблица 2.** Связь кинематических параметров модели Огородникова–Милна с коэффициентами скалярного сферического разложения лучевых скоростей звезд

| Коэффициент $t_{nkp}$<br>или $s_{nkp}$ | Значение                                      |
|--|---|
| $v_{001}$                              | $1.18M_{11}^+ + 1.18M_{22}^+ + 1.18M_{33}^+$  |
| $v_{101}$                              | $-2.05W/\langle r \rangle$                    |
| $v_{110}$                              | $-2.05V/\langle r \rangle$                    |
| $v_{111}$                              | $-2.05U/\langle r \rangle$                    |
| $v_{201}$                              | $-0.53M_{11}^+ - 0.53M_{22}^+ + 1.06M_{33}^+$ |
| $v_{210}$                              | $1.83M_{23}^+$                                |
| $v_{211}$                              | $1.83M_{13}^+$                                |
| $v_{220}$                              | $1.83M_{12}^+$                                |
| $v_{221}$                              | $0.92M_{11}^+ - 0.92M_{22}^+$                 |

и лучевых звезд по векторным и скалярным сферическим функциям соответственно на материале 400 тысячных выборок звезд по расстояниям, как это было сделано в предыдущей статье (Цветков, Амосов, 2019). В силу отсутствия многополосной фотометрии в GAIA DR2 мы не проводили разделение звезд по каким-либо признакам, кроме расстояния. Приведем здесь только табл. 3 границ выборок звезд и среднее расстояние звезд выборки.

Для каждой выборки были получены коэффициенты разложения собственных движений звезд по векторным сферическим функциям (табл. 4, 5) и лучевых скоростей по скалярным сферическим функциям (табл. 6). Вычисления производились непосредственно по индивидуальным звездам без какого-либо усреднения. Поскольку все сферические функции являются ортонормированными на сфере, среднеквадратичные ошибки всех коэффициентов одинаковые для каждой выборки, и мы приводим только одно значение. Для удобства читателя в таблицах выделены полужирным шрифтом те значения, модуль которых превосходит три среднеквадратичные ошибки его определения (так называемый критерий  $3\sigma$ ).

#### АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Сравнение табл. 4–5 и табл. 1 показывает наличие значимых коэффициентов  $t_{101}$ ,  $t_{110}$ ,  $t_{111}$ , ответственных за твердотельное вращение группы звезд. При этом довольно велик коэффициент  $t_{111}$ , показывающий наличие вращения вокруг оси  $X$ . Остальные тороидальные гармоники должны быть равны нулю. Однако мы видим, что гармоники  $t_{301}$ ,  $t_{411}$ ,  $t_{321}$  и некоторые другие оказываются значимыми. Но основная внемоделная компонента — это гармоника  $t_{211}$ , ее значение лишь немного уступает основному эффекту — гармонике  $t_{101}$ , возникающей в силу вращения Галактики вокруг оси  $Z$ .

При анализе сфероидальных гармоник наблюдается похожая картина. Весьма значимы гармоники, описывающие поступательные движения Солнца среди звезд:  $s_{101}$ ,  $s_{110}$ ,  $s_{111}$ . Как и должно быть, их значения убывают с увеличением расстояния. Гармоника  $s_{220}$ , генерируемая параметром Орта  $A$ , также большая и не зависит от расстояния. Модельные гармоники  $s_{201}$ ,  $s_{210}$  невелики. Лишь гармоника  $s_{211}$ , ответственная за разность сжатия/расширения звездной выборки по оси  $X$  и  $Y$ , довольно значима. Из внемоделных гармоник большое значение имеет  $s_{310}$ . Этот эффект также порядка вращения Галактики. Остальные внемоделные гармоники хотя и формально значимы, но малы.

Таблица 3. Границы выборок 400 000 групп звезд в пк

|     |     |     |     |     |     |     |     |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Min | 3   | 208 | 300 | 386 | 474 | 571 | 687 | 835  | 1040 | 1303 | 1594 | 1897 | 2220 | 2582 | 3031 |
| Max | 208 | 300 | 386 | 474 | 571 | 687 | 835 | 1040 | 1303 | 1594 | 1897 | 2220 | 2582 | 3031 | 3677 |
| Avg | 144 | 255 | 343 | 430 | 522 | 627 | 757 | 933  | 1168 | 1447 | 1745 | 2056 | 2396 | 2796 | 3328 |

Таблица 4. Торoidalные коэффициенты в км/с/кпк разложения собственных движений по векторным сферическим функциям. Жирным шрифтом выделены значимые по критерию  $3\sigma$  величины

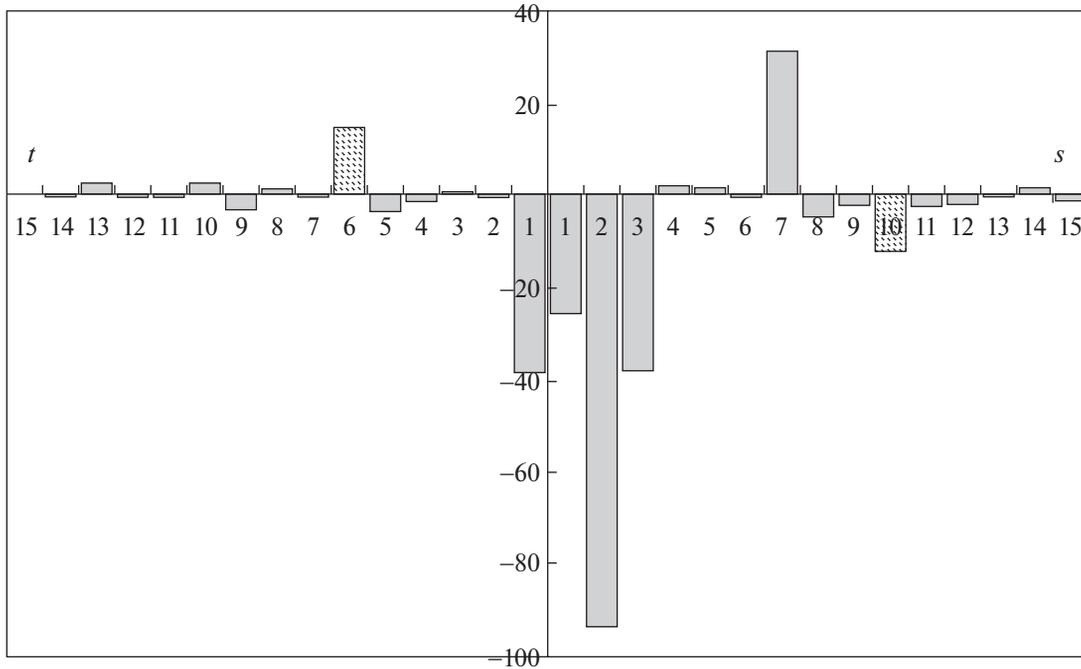
|           |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Min       | 3            | 208          | 300          | 386          | 474          | 571          | 687          | 835          | 1040         | 1303         | 1594         | 1897         | 2220         | 2582         | 3031         |
| Max       | 208          | 300          | 386          | 474          | 571          | 687          | 835          | 1040         | 1303         | 1594         | 1897         | 2220         | 2582         | 3031         | 3677         |
| $t_{101}$ | <b>-35.8</b> | <b>-36.5</b> | <b>-35.9</b> | <b>-37.3</b> | <b>-37.9</b> | <b>-38.2</b> | <b>-38.4</b> | <b>-38.8</b> | <b>-39.8</b> | <b>-40.7</b> | <b>-41.2</b> | <b>-41.6</b> | <b>-41.7</b> | <b>-41.6</b> | <b>-41.2</b> |
| $t_{110}$ | <b>-15.6</b> | <b>-6.4</b>  | <b>-3.1</b>  | <b>-3.0</b>  | <b>-3.4</b>  | <b>-3.6</b>  | <b>-1.5</b>  | <b>-0.4</b>  | <b>0.5</b>   | <b>1.3</b>   | <b>1.5</b>   | <b>1.4</b>   | <b>0.8</b>   | <b>1.1</b>   | <b>0.9</b>   |
| $t_{111}$ | 2.2          | <b>4.3</b>   | <b>2.0</b>   | <b>3.1</b>   | <b>2.5</b>   | <b>1.2</b>   | <b>-0.3</b>  | <b>0.7</b>   | <b>1.9</b>   | <b>3.7</b>   | <b>3.5</b>   | <b>4.9</b>   | <b>3.3</b>   | <b>3.8</b>   | <b>2.6</b>   |
| $t_{201}$ | 0.2          | 0.5          | 0.3          | -0.8         | <b>-1.3</b>  | <b>-1.4</b>  | <b>-2.1</b>  | <b>-1.3</b>  | <b>-1.0</b>  | <b>-0.7</b>  | 0.3          | <b>0.7</b>   | <b>1.4</b>   | <b>1.2</b>   | <b>1.4</b>   |
| $t_{210}$ | -1.2         | -0.4         | -1.3         | <b>-2.3</b>  | <b>-3.0</b>  | <b>-3.5</b>  | <b>-4.6</b>  | <b>-3.6</b>  | <b>-3.6</b>  | <b>-2.9</b>  | <b>-2.6</b>  | <b>-1.9</b>  | <b>-1.6</b>  | <b>-0.3</b>  | <b>-0.2</b>  |
| $t_{211}$ | <b>19.2</b>  | <b>11.5</b>  | <b>9.9</b>   | <b>10.6</b>  | <b>9.2</b>   | <b>8.9</b>   | <b>10.5</b>  | <b>14.8</b>  | <b>17.9</b>  | <b>20.4</b>  | <b>20.8</b>  | <b>21.0</b>  | <b>21.5</b>  | <b>22.7</b>  | <b>22.1</b>  |
| $t_{220}$ | -0.3         | 0.3          | 0.0          | -0.2         | -0.6         | 0.1          | -0.4         | -0.4         | -0.3         | <b>-0.8</b>  | <b>-1.0</b>  | <b>-0.9</b>  | -0.5         | 0.0          | -0.2         |
| $t_{221}$ | 1.8          | 0.5          | -0.3         | -0.5         | 0.1          | 0.9          | <b>1.0</b>   | <b>1.3</b>   | <b>1.2</b>   | 0.0          | 0.4          | -0.5         | -0.2         | <b>-0.8</b>  | -0.1         |
| $t_{301}$ | <b>-5.4</b>  | <b>-2.0</b>  | -1.3         | -0.8         | -0.2         | -0.8         | <b>-1.9</b>  | <b>-3.1</b>  | <b>-3.9</b>  | <b>-3.4</b>  | <b>-2.7</b>  | <b>-1.7</b>  | -0.6         | 0.1          | <b>1.6</b>   |
| $t_{310}$ | 2.0          | <b>4.9</b>   | <b>2.5</b>   | <b>1.4</b>   | -0.3         | 0.0          | <b>1.6</b>   | <b>2.3</b>   | <b>2.1</b>   | <b>1.8</b>   | <b>0.7</b>   | 0.5          | 0.3          | 0.5          | 0.2          |
| $t_{311}$ | -0.8         | <b>-1.9</b>  | <b>-2.1</b>  | 0.0          | -0.2         | <b>-1.5</b>  | <b>-2.1</b>  | -0.3         | 0.4          | <b>1.6</b>   | <b>1.2</b>   | <b>1.4</b>   | 0.3          | 0.6          | -0.1         |
| $t_{320}$ | 0.0          | 0.2          | -0.6         | 0.5          | 0.6          | <b>1.4</b>   | <b>1.0</b>   | -0.3         | 0.3          | -0.3         | -0.1         | -0.2         | 0.0          | -0.5         | 0.1          |
| $t_{321}$ | -1.2         | 0.8          | -0.6         | 0.4          | 0.4          | <b>1.0</b>   | <b>1.3</b>   | <b>2.5</b>   | <b>2.4</b>   | <b>3.1</b>   | <b>3.6</b>   | <b>3.5</b>   | <b>3.9</b>   | <b>4.1</b>   | <b>4.3</b>   |
| $t_{330}$ | -1.0         | 0.2          | -0.3         | -0.6         | 0.1          | -0.3         | -0.6         | -0.3         | 0.0          | -0.3         | 0.2          | 0.0          | 0.5          | 0.0          | 0.2          |
| $t_{331}$ | 2.0          | -0.9         | 0.0          | 0.0          | -0.4         | -0.3         | 0.1          | 0.3          | 0.1          | 0.3          | 0.2          | 0.3          | 0.3          | 0.0          | 0.0          |
| $t_{401}$ | 4.5          | 0.1          | <b>-2.0</b>  | -0.9         | <b>-1.2</b>  | <b>-1.2</b>  | -0.4         | 0.5          | <b>1.3</b>   | 0.4          | <b>1.0</b>   | <b>1.4</b>   | <b>1.4</b>   | <b>1.2</b>   | <b>1.0</b>   |
| $t_{410}$ | -0.5         | <b>-2.1</b>  | -1.3         | -0.5         | 0.0          | -0.5         | <b>-0.9</b>  | -0.2         | -0.3         | 0.6          | <b>1.0</b>   | <b>0.7</b>   | <b>0.8</b>   | <b>0.9</b>   | <b>0.8</b>   |
| $t_{411}$ | -3.3         | <b>-2.7</b>  | <b>-2.2</b>  | -1.0         | <b>-2.2</b>  | <b>-1.0</b>  | <b>1.4</b>   | <b>1.5</b>   | -0.2         | <b>-1.0</b>  | <b>-2.4</b>  | <b>-3.3</b>  | <b>-3.4</b>  | <b>-2.4</b>  | <b>-2.4</b>  |
| $t_{420}$ | 1.8          | -0.4         | -0.5         | 0.3          | -0.4         | 0.2          | -0.4         | 0.4          | -0.3         | -0.2         | -0.1         | 0.0          | 0.4          | 0.7          | 0.3          |
| $t_{421}$ | -3.2         | 1.1          | -1.1         | 1.1          | 0.5          | 0.7          | 0.5          | 0.4          | <b>0.7</b>   | <b>-0.9</b>  | -0.3         | <b>-0.8</b>  | -0.5         | <b>-0.8</b>  | -0.1         |
| $t_{430}$ | -1.1         | -0.6         | 0.6          | 0.2          | -0.3         | -0.7         | -0.1         | 0.3          | 0.3          | 0.0          | 0.1          | 0.3          | 0.3          | 0.5          | 0.4          |
| $t_{431}$ | -1.5         | 0.1          | -0.6         | -1.0         | -0.3         | -0.1         | 0.0          | 0.6          | <b>0.9</b>   | 0.5          | 0.6          | <b>0.7</b>   | 0.0          | 0.0          | -0.4         |
| $t_{440}$ | 0.7          | 0.1          | -0.2         | -0.2         | -0.2         | 0.0          | -0.1         | 0.0          | -0.2         | 0.0          | 0.0          | 0.0          | -0.1         | 0.0          | 0.0          |
| $t_{441}$ | 1.2          | -0.8         | -0.1         | 0.0          | 0.4          | 0.0          | -0.2         | -0.1         | 0.1          | 0.0          | 0.1          | 0.1          | 0.0          | 0.1          | 0.0          |
| $\sigma$  | 1.7          | 0.6          | 0.5          | 0.4          | 0.3          | 0.3          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          |

**Таблица 5.** Сфероидальные коэффициенты в км/с/кпк разложения собственных движений по векторным сферическим функциям. Жирным шрифтом выделены значимые по критерию  $3\sigma$  величины

| Min       | 3            | 208          | 300          | 386          | 474          | 571          | 687          | 835          | 1040         | 1303         | 1594         | 1897         | 2220         | 2582         | 3031         |
|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Max       | 208          | 300          | 386          | 474          | 571          | 687          | 835          | 1040         | 1303         | 1594         | 1897         | 2220         | 2582         | 3031         | 3677         |
| $s_{101}$ | <b>-179</b>  | <b>-88.2</b> | <b>-66.4</b> | <b>-52.8</b> | <b>-43.7</b> | <b>-36.7</b> | <b>-30.9</b> | <b>-25.9</b> | <b>-21.1</b> | <b>-16.7</b> | <b>-14.3</b> | <b>-11.9</b> | <b>-10.5</b> | <b>-9.2</b>  | <b>-8.5</b>  |
| $s_{110}$ | <b>-517</b>  | <b>-255</b>  | <b>-194</b>  | <b>-156</b>  | <b>-130</b>  | <b>-110</b>  | <b>-98.3</b> | <b>-93.8</b> | <b>-91.1</b> | <b>-86.9</b> | <b>-82.6</b> | <b>-79.6</b> | <b>-77.7</b> | <b>-77.6</b> | <b>-77</b>   |
| $s_{111}$ | <b>-229</b>  | <b>-110</b>  | <b>-85.5</b> | <b>-69.4</b> | <b>-59.1</b> | <b>-50.1</b> | <b>-44.7</b> | <b>-38.1</b> | <b>-31.9</b> | <b>-27</b>   | <b>-23.5</b> | <b>-19.9</b> | <b>-17.4</b> | <b>-14.3</b> | <b>-12.5</b> |
| $s_{201}$ | -2.9         | <b>2.4</b>   | <b>2.6</b>   | <b>3.3</b>   | <b>3.2</b>   | <b>2.9</b>   | <b>2.8</b>   | <b>2.2</b>   | <b>2.5</b>   | <b>2</b>     | <b>1.4</b>   | <b>2</b>     | <b>1.4</b>   | <b>1.8</b>   | <b>1.9</b>   |
| $s_{210}$ | -1.5         | <b>-2.5</b>  | 0.5          | -0.8         | -1           | 0.9          | <b>2.8</b>   | <b>1.5</b>   | -0.5         | <b>-2.1</b>  | <b>-2.3</b>  | <b>-3.2</b>  | -1.5         | -1.8         | -1           |
| $s_{211}$ | <b>-6.1</b>  | <b>-2.5</b>  | -0.4         | <b>-2.5</b>  | <b>-2.9</b>  | <b>-2.8</b>  | <b>-0.7</b>  | -0.4         | -0.4         | -0.3         | -0.3         | -0.4         | -1.2         | <b>-0.8</b>  | -1           |
| $s_{220}$ | <b>38.7</b>  | <b>36.2</b>  | <b>34.6</b>  | <b>33.7</b>  | <b>33.6</b>  | <b>34.1</b>  | <b>33.5</b>  | <b>31.5</b>  | <b>30.1</b>  | <b>28</b>    | <b>26.9</b>  | <b>25.6</b>  | <b>24.4</b>  | <b>23.3</b>  | <b>21.3</b>  |
| $s_{221}$ | -3.5         | <b>-6.1</b>  | <b>-7.3</b>  | <b>-7.4</b>  | <b>-7.8</b>  | <b>-7.2</b>  | <b>-5.8</b>  | <b>-4.7</b>  | <b>-3.6</b>  | <b>-3.3</b>  | <b>-2.8</b>  | <b>-3.2</b>  | <b>-2.4</b>  | <b>-2.6</b>  | <b>-1.2</b>  |
| $s_{301}$ | <b>-5.8</b>  | -0.9         | -1.1         | -0.6         | <b>-1.6</b>  | <b>-1.9</b>  | <b>-2.4</b>  | -2           | -1.7         | -0.5         | -1.1         | -0.5         | -0.6         | <b>-0.7</b>  | <b>-1.4</b>  |
| $s_{310}$ | <b>-15.4</b> | <b>-7.5</b>  | <b>-7.2</b>  | <b>-8</b>    | <b>-7.7</b>  | <b>-7.6</b>  | <b>-8.8</b>  | <b>-12.1</b> | <b>-14.4</b> | <b>-15.5</b> | <b>-15.3</b> | <b>-15.8</b> | <b>-16.4</b> | <b>-17.2</b> | <b>-17.5</b> |
| $s_{311}$ | -2.5         | -0.1         | -0.2         | -1.2         | -1           | <b>-1.3</b>  | <b>-2.5</b>  | <b>-2.3</b>  | <b>-1.7</b>  | <b>-1.2</b>  | <b>-0.9</b>  | -0.6         | -0.5         | -0.1         | 0.1          |
| $s_{320}$ | -3.4         | 0            | -0.3         | 0.6          | -0.2         | -0.7         | <b>-1.5</b>  | <b>-1.8</b>  | <b>-1.3</b>  | -0.1         | -0.3         | 0.6          | 0.2          | <b>0.7</b>   | 0.3          |
| $s_{321}$ | -1.3         | -0.4         | -0.8         | -0.6         | -0.7         | -0.3         | -0.3         | -0.4         | -0.2         | -0.6         | -0.6         | -0.5         | -0.2         | 0.2          | 0.2          |
| $s_{330}$ | 2            | <b>1.9</b>   | <b>2.1</b>   | <b>2.1</b>   | <b>2</b>     | <b>2</b>     | <b>1.5</b>   | <b>1.6</b>   | <b>2.1</b>   | <b>3.2</b>   | <b>3.3</b>   | <b>3.5</b>   | <b>4</b>     | <b>3.9</b>   | <b>4.3</b>   |
| $s_{331}$ | -0.3         | -1.3         | -1.4         | <b>-1.9</b>  | -0.9         | <b>-1.1</b>  | <b>-1.3</b>  | -1           | -1           | <b>-1.6</b>  | <b>-1.6</b>  | <b>-1.3</b>  | <b>-1.2</b>  | <b>-1.1</b>  | <b>-1.1</b>  |
| $s_{401}$ | 0.4          | -1.3         | 0.7          | -0.3         | -0.3         | -0.1         | -0.2         | -0.4         | <b>0.8</b>   | 0.5          | 0.6          | 0.6          | 0.4          | <b>0.7</b>   | <b>0.9</b>   |
| $s_{410}$ | 0.2          | -0.3         | 1.2          | <b>-1.3</b>  | -0.6         | 0.7          | <b>1.3</b>   | 0.4          | <b>-0.7</b>  | -1           | <b>-0.9</b>  | -0.6         | 0            | 0.2          | 0.4          |
| $s_{411}$ | <b>5.6</b>   | <b>3</b>     | 1.4          | -0.3         | -0.5         | 0.7          | <b>1.1</b>   | 0.6          | -0.3         | -0.6         | <b>-0.9</b>  | -0.6         | <b>-0.9</b>  | -0.5         | <b>-0.7</b>  |
| $s_{420}$ | 0.5          | -0.1         | 0            | -0.7         | <b>-1.3</b>  | -0.8         | -1           | -2           | <b>-2.2</b>  | <b>-2.9</b>  | <b>-3.1</b>  | -3           | <b>-3.4</b>  | <b>-3.3</b>  | <b>-3.9</b>  |
| $s_{421}$ | -4.1         | -1.1         | -0.4         | -0.2         | <b>1.3</b>   | <b>1.3</b>   | 1            | 0.3          | 0            | -0.2         | -0.3         | <b>-0.7</b>  | 0            | -0.3         | 0.1          |
| $s_{430}$ | -0.4         | <b>1.9</b>   | 0.9          | 0.6          | 0.6          | 0.6          | -0.1         | -0.4         | -0.2         | -0.5         | 0            | -0.2         | -0.3         | 0.2          | 0            |
| $s_{431}$ | -1.3         | 0.2          | 0.1          | -0.7         | -0.2         | -0.2         | 0.1          | -0.3         | -0.1         | -0.3         | 0            | 0            | 0.4          | 0            | 0.3          |
| $s_{440}$ | 0            | 0.2          | 0            | 0.7          | 0.7          | -0.1         | <b>-0.8</b>  | <b>-0.7</b>  | <b>-0.9</b>  | 0            | 0.1          | 0            | 0.3          | 0.6          | <b>0.9</b>   |
| $s_{441}$ | 4.1          | 0.5          | -0.5         | 0            | -0.4         | 0.7          | <b>0.7</b>   | <b>0.8</b>   | <b>0.7</b>   | 0.6          | 0.4          | 0.1          | 0            | -0.2         | -0.1         |
| $\sigma$  | 1.7          | 0.6          | 0.5          | 0.4          | 0.3          | 0.3          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          |

**Таблица 6.** Коэффициенты разложения лучевых скоростей км/с по сферическим функциям. Жирным шрифтом выделены значимые по критерию  $3\sigma$  величины

| Min          | 3            | 208          | 300          | 386          | 474          | 571          | 687          | 835          | 1040         | 1303         | 1594         | 1897         | 2220         | 2582         | 3031          |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| Max          | 208          | 300          | 386          | 474          | 571          | 687          | 835          | 1040         | 1303         | 1594         | 1897         | 2220         | 2582         | 3031         | 3677          |
| <i>v</i> 001 | <b>0.8</b>   | -0.6         | <b>-1.0</b>  | <b>-2.0</b>  | <b>-2.8</b>  | <b>-2.7</b>  | <b>-3.4</b>  | <b>-4.0</b>  | <b>-5.1</b>  | <b>-4.7</b>  | <b>-2.6</b>  | <b>-2.8</b>  | -0.7         | -0.2         | -0.3          |
| <i>v</i> 101 | <b>-16.2</b> | <b>-16.3</b> | <b>-16.0</b> | <b>-16.9</b> | <b>-17.6</b> | <b>-16.7</b> | <b>-16.0</b> | <b>-16.4</b> | <b>-16.3</b> | <b>-17.0</b> | <b>-16.1</b> | <b>-16.5</b> | <b>-16.6</b> | <b>-16.2</b> | <b>-18.3</b>  |
| <i>v</i> 110 | <b>-43.9</b> | <b>-44.0</b> | <b>-43.8</b> | <b>-43.7</b> | <b>-43.8</b> | <b>-43.6</b> | <b>-44.3</b> | <b>-48.6</b> | <b>-57.7</b> | <b>-65.7</b> | <b>-73.5</b> | <b>-81.6</b> | <b>-90.2</b> | <b>-99.5</b> | <b>-110.3</b> |
| <i>v</i> 111 | <b>-20.6</b> | <b>-20.3</b> | <b>-20.8</b> | <b>-21.0</b> | <b>-20.9</b> | <b>-21.0</b> | <b>-21.2</b> | <b>-22.0</b> | <b>-22.9</b> | <b>-24.4</b> | <b>-25.4</b> | <b>-26.2</b> | <b>-25.5</b> | <b>-25.5</b> | <b>-24.3</b>  |
| <i>v</i> 201 | 0.1          | 0.3          | 0.2          | 0.4          | <b>1.1</b>   | <b>1.6</b>   | <b>2.2</b>   | <b>2.1</b>   | <b>1.7</b>   | <b>2.0</b>   | <b>3.8</b>   | <b>3.0</b>   | <b>4.6</b>   | <b>2.8</b>   | <b>2.4</b>    |
| <i>v</i> 210 | -0.5         | 0.0          | 0.1          | -0.1         | -0.2         | -0.2         | 0.1          | 0.4          | 0.9          | -1.2         | -0.7         | -2.2         | <b>-2.3</b>  | <b>-3.6</b>  | -1.7          |
| <i>v</i> 211 | <b>-1.4</b>  | <b>-1.8</b>  | <b>-1.2</b>  | <b>-1.3</b>  | <b>-1.5</b>  | <b>-1.7</b>  | <b>-2.4</b>  | <b>-2.2</b>  | <b>-1.8</b>  | <b>-1.5</b>  | -0.9         | <b>-1.6</b>  | -0.2         | -1.1         | 0.5           |
| <i>v</i> 220 | <b>4.8</b>   | <b>8.1</b>   | <b>10.3</b>  | <b>12.3</b>  | <b>15.1</b>  | <b>17.5</b>  | <b>20.2</b>  | <b>23.6</b>  | <b>28.1</b>  | <b>32.5</b>  | <b>37.0</b>  | <b>41.8</b>  | <b>46.4</b>  | <b>51.2</b>  | <b>55.1</b>   |
| <i>v</i> 221 | <b>-0.7</b>  | <b>-1.9</b>  | <b>-2.2</b>  | <b>-2.7</b>  | <b>-3.6</b>  | <b>-3.4</b>  | <b>-3.5</b>  | <b>-3.5</b>  | <b>-2.7</b>  | <b>-2.8</b>  | <b>-1.8</b>  | -1.2         | -1.0         | -0.7         | 0.1           |
| <i>v</i> 301 | 0.4          | 0.0          | <b>-0.8</b>  | <b>-0.7</b>  | <b>-0.7</b>  | <b>-0.8</b>  | -0.2         | -0.6         | -0.7         | <b>-1.8</b>  | <b>-1.7</b>  | <b>-2.1</b>  | <b>-3.0</b>  | <b>-3.7</b>  | <b>-5.2</b>   |
| <i>v</i> 310 | <b>-0.8</b>  | <b>-1.9</b>  | <b>-2.5</b>  | <b>-3.2</b>  | <b>-3.6</b>  | <b>-4.5</b>  | <b>-5.3</b>  | <b>-8.5</b>  | <b>-15.0</b> | <b>-20.4</b> | <b>-26.1</b> | <b>-32.1</b> | <b>-38.7</b> | <b>-46.5</b> | <b>-53.4</b>  |
| <i>v</i> 311 | 0.5          | 0.3          | 0.0          | -0.1         | <b>-0.7</b>  | -0.5         | <b>-1.1</b>  | <b>-1.4</b>  | <b>-1.5</b>  | <b>-2.0</b>  | <b>-1.8</b>  | <b>-1.6</b>  | -0.5         | 0.1          | 1.6           |
| <i>v</i> 320 | -0.2         | -0.2         | 0.4          | 0.1          | -0.3         | -0.5         | -0.2         | -0.8         | -0.5         | -0.5         | -0.6         | -0.5         | 0.6          | -0.1         | 0.2           |
| <i>v</i> 321 | -0.2         | 0.0          | 0.0          | -0.1         | -0.3         | 0.1          | 0.0          | -0.2         | -0.5         | -0.2         | -0.4         | -0.7         | -0.4         | -1.2         | -1.5          |
| <i>v</i> 330 | 0.0          | 0.2          | <b>0.7</b>   | <b>0.8</b>   | <b>0.9</b>   | <b>1.0</b>   | <b>1.1</b>   | <b>1.6</b>   | <b>2.4</b>   | <b>3.5</b>   | <b>4.4</b>   | <b>5.9</b>   | <b>7.6</b>   | <b>9.7</b>   | <b>13.0</b>   |
| <i>v</i> 331 | -0.2         | -0.1         | 0.0          | -0.4         | -0.2         | -0.3         | -0.5         | <b>-1.0</b>  | <b>-1.9</b>  | <b>-2.4</b>  | <b>-2.8</b>  | <b>-2.9</b>  | <b>-3.2</b>  | <b>-2.8</b>  | <b>-3.2</b>   |
| <i>v</i> 401 | 0.0          | 0.0          | 0.2          | 0.0          | 0.3          | 0.5          | 0.6          | 0.2          | 0.1          | -0.3         | 0.1          | 0.5          | 2.0          | 1.4          | 2.6           |
| <i>v</i> 410 | -0.1         | 0.2          | 0.5          | 0.5          | 0.0          | -0.2         | 0.4          | 0.6          | <b>1.1</b>   | -0.1         | -0.1         | -0.8         | -0.3         | -0.4         | 1.1           |
| <i>v</i> 411 | 0.2          | <b>0.8</b>   | <b>1.1</b>   | 0.0          | 0.0          | 0.3          | 0.3          | 0.6          | 0.9          | 1.2          | 1.6          | 1.4          | <b>2.7</b>   | 2.6          | 3.6           |
| <i>v</i> 420 | -0.1         | -0.1         | -0.3         | -0.5         | <b>-0.8</b>  | <b>-0.8</b>  | <b>-1.6</b>  | <b>-2.3</b>  | <b>-3.3</b>  | <b>-5.7</b>  | <b>-7.8</b>  | <b>-9.6</b>  | <b>-12.4</b> | <b>-15.2</b> | <b>-20.3</b>  |
| <i>v</i> 421 | 0.1          | 0.1          | 0.0          | 0.3          | -0.1         | 0.6          | <b>1.0</b>   | <b>1.1</b>   | <b>1.1</b>   | -0.3         | -0.3         | -1.0         | <b>-2.4</b>  | <b>-3.6</b>  | <b>-3.0</b>   |
| <i>v</i> 430 | -0.2         | 0.3          | 0.1          | 0.3          | 0.3          | 0.0          | -0.4         | -0.4         | -0.6         | -0.6         | -1.1         | -1.0         | -0.8         | -0.3         | -0.4          |
| <i>v</i> 431 | 0.1          | 0.1          | -0.2         | -0.3         | 0.0          | -0.2         | -0.5         | -0.2         | 0.0          | 0.2          | 0.9          | 0.4          | 0.6          | 0.1          | -0.3          |
| <i>v</i> 440 | 0.0          | -0.1         | 0.4          | 0.4          | 0.1          | -0.4         | -0.5         | -0.8         | -0.7         | -0.2         | 0.3          | 1.0          | <b>1.8</b>   | <b>2.9</b>   | <b>3.9</b>    |
| <i>v</i> 441 | -0.3         | 0.2          | -0.1         | -0.1         | -0.1         | 0.2          | 0.4          | 0.5          | 0.9          | <b>1.3</b>   | 1.2          | 1.0          | 0.7          | 0.6          | -0.7          |
| $\Sigma$     | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.2          | 0.3          | 0.3          | 0.4          | 0.4          | 0.5          | 0.5          | 0.6          | 0.7           |



**Рис. 1.** “Спектр” разложения собственных движений звезд для расстояний 835–1040 пк, слева — коэффициенты  $t_j$ , справа —  $s_j$ . Использована линейная нумерация коэффициентов. По вертикальной оси — значение коэффициентов в км/с/кпк.

Для иллюстрации данных табл. 4–5 мы предлагаем способ, который можно назвать “спектр” собственных движений. Рисунок 1 представляет этот спектр для расстояний 835–1040 пк. Для более компактного представления мы использовали линейную нумерацию коэффициентов по следующей формуле (Броше, 1966):

$$j = n^2 + 2k + p - 1, \quad (1)$$

которая позволяет преобразовать три индекса  $n, k, p$  в один.

Сильные немодельные гармоники в этой нумерации имеют обозначаются как  $t_6$  и  $s_{10}$  и выделены штриховкой на рисунке.

Обратимся теперь к анализу коэффициентов разложения лучевых скоростей (табл. 6) и сравним их с данными из табл. 2. Самый сильный эффект — это движение Солнца — коэффициенты  $v_{101}$ ,  $v_{110}$  и  $v_{111}$ . Отчетливо прослеживается дифференциальное вращение Галактики по коэффициенту  $v_{220}$ , начиная с расстояний в несколько сот парсек. Остальные значимые модельные гармоники сравнительно малы ( $v_{221}$ ,  $v_{001}$ ). Из немодельных гармоник опять сильно выделяются  $v_{310}$  и для больших расстояний —  $v_{420}$ . Мы наблюдаем рост гармоники  $v_{220}$  и  $v_{310}$ , что связано с их кинематическим характером, так как в модели Огородникова–Милна для лучевых скоростей лишь в функциях при параметрах движения Солнца нет расстояний,

в то время как для остальных членов есть. Для собственных движений картина обратная. Солнечные члены зависят от расстояния, в то время как члены, описывающие кинематику Галактики в линейном приближении от расстояния не зависят. В силу этого зависимость от расстояния немодельной гармоники  $v_{310}$  служит указанием на ее кинематический характер неучтенного движения звезд.

Спектр разложения лучевых звезд для тех же расстояний 835–1040 пк представлен на рис. 2. На нем так же использована линейная нумерация коэффициентов. Сильная немодельная гармоника, в этих обозначениях  $v_{10}$ , выделена штриховкой.

Подводя итоги анализа коэффициентов разложения как собственных движений, так и лучевых скоростей звезд, резюмируем:

1. Кинематика самых близких звезд значительно отличается от кинематики более далеких звезд как в систематическом, так и в случайном отношении (большие ошибки коэффициентов). Это известный факт, вызванный наличием аномалии в кинематике Местной системы звезд (Цветков, 1999) и (Цветков, 1995) и пекулярными скоростями, заметно искажающими собственные движения близких звезд.
2. Существуют стабильные кинематические эффекты в движениях звезд, не описываемые

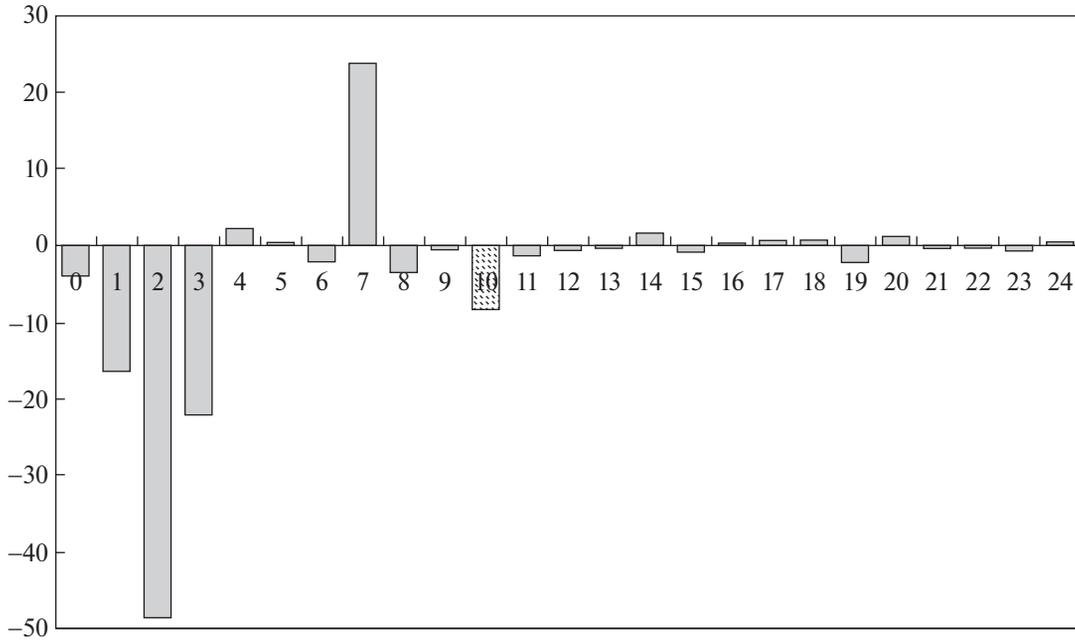


Рис. 2. “Спектр” разложения лучевых скоростей звезд для расстояний 835–1040 пк. Использована линейная нумерация коэффициентов. По вертикальной оси — значение коэффициентов в км/с.

моделью, а именно наличие коэффициентов  $t_{211}$ ,  $s_{310}$  и  $v_{310}$  (или  $t_6$ ,  $s_{10}$  и  $v_{10}$ ). Этот факт менее известен, хотя обнаруживался при анализе собственных движений звезд каталога Тучо-2 и лучевых скоростей каталога OSACA (Витязев, Шуксто, 2004) и (Витязев, Цветков, 2009). Последнее означает, что, по-видимому, действительно в околосолнечном пространстве присутствуют неучтенные эффекты. До появления каталога GAIA была небольшая вероятность, что эти гармоники могут быть следствием систематических ошибок в собственных движениях звезд каталогов.

### ВОЗМОЖНАЯ ПРИРОДА ВНЕМОДЕЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ В РАЗЛОЖЕНИЯХ

Систематическая значимость гармоник  $t_{211}$ ,  $s_{310}$  и  $v_{310}$  нуждается в объяснении. Одно из возможных объяснений — нелинейные члены в модели вращения Галактики. В самом простом случае — это обобщенная модель Орта–Линдблада. В общем случае эти уравнения являются частным случаем формул Боттлингера, подробное описание которых есть в (Бобылев, Байкова, 2004) и в (Бобылев, Байкова, 2017). Мы приведем эти уравнения так, как они даны в (Витязев, Цветков, 2009):

$$k\mu_l \cos b = U/r \sin l - V/r \cos l + \quad (2)$$

$$+ A \cos b \cos 2l + B \cos b - rF \cos^2 b \cos^3 l -$$

$$- rG(3 \cos^2 b \cos l - \cos^2 b \cos^3 l,$$

$$k\mu_b = U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - \quad (3)$$

$$- W/r \cos b - A \sin b \cos b \sin 2l +$$

$$+ rF \cos^2 b \sin b \sin l \cos^2 l + rG \cos^2 b \sin b \sin^3 l -$$

$$- K \cos b \sin b,$$

$$V_r/r = -U/r \cos b \cos l - V/r \cos b \sin l - \quad (4)$$

$$- W/r \sin b + A \cos^2 b \sin 2l - rF \cos^3 b \sin l \cos^2 l -$$

$$- rG \cos^3 b \sin^3 l + K \cos^2 b.$$

Здесь:

- $k = 4.738$  — множитель перехода от мсд/год в км/с/кпк;
- $l, b, r$  — галактические координаты звезды;
- $U, V, W$  — компоненты вектора  $\mathbf{V}_0$  поступательного движения Солнца среди звезд;
- $A = 0.5R_0\omega'_0$  и  $B = 0.5R_0\omega'_0 + \omega_0$  — параметры Орта,  $R_0$  — расстояние до центра Галактики,  $\omega_0$  — угловая скорость вращения Галактики (напомним, что  $A = M^+_{12}$  и  $B = \omega_3$ );
- $K$  — общее сжатие-растяжение системы в плоскости  $XY$ ;

**Таблица 7.** Вклад обобщенной модели Орта в коэффициенты скалярного и векторного сферического разложения

| $j$ | $n$ | $k$ | $p$ | $v_{nkp}$   | $t_{nkp}$  | $s_{nkp}$   |
|-----|-----|-----|-----|---|--|---|
| 0   | 0   | 0   | 1   | 2.363K  |  |   |
| 1   | 1   | 0   | 1   | $-2.047W/\langle r \rangle$   | 2.894B   | $-2.894W/\langle r \rangle$   |
| 2   | 1   | 1   | 0   | $-2.047V/\langle r \rangle$<br>$-0.409F\langle r \rangle - 1.228G\langle r \rangle$ |  | $-2.894V/\langle r \rangle$<br>$-1.158F\langle r \rangle - 3.473G\langle r \rangle$ |
| 3   | 1   | 1   | 1   | $-2.047U\langle r \rangle$  |  | $-2.894U/\langle r \rangle$   |
| 4   | 2   | 0   | 1   | $-1.057K$   |  | $-1.294K$   |
| 5   | 2   | 1   | 0   |   |  |   |
| 6   | 2   | 1   | 1   |   | $-0.747F\langle r \rangle - 2.242G\langle r \rangle$ |   |
| 7   | 2   | 2   | 0   | 1.831A  |  | 2.242A  |
| 8   | 2   | 2   | 1   |   |  |   |
| 9   | 3   | 0   | 1   |   |  |   |
| 10  | 3   | 1   | 0   | $0.109F\langle r \rangle + 0.328G\langle r \rangle$                                 |  | $0.126F\langle r \rangle + 0.379G\langle r \rangle$                                 |
| 11  | 3   | 1   | 1   |   |  |   |
| 12  | 3   | 2   | 0   |   |  |   |
| 13  | 3   | 2   | 1   |   |  |   |
| 14  | 3   | 3   | 0   | $-0.424F\langle r \rangle + 0.424G\langle r \rangle$                                |  | $-0.489F\langle r \rangle + 0.489G\langle r \rangle$                                |
| 15  | 3   | 3   | 1   |   |  |   |

- $F$  и  $G$  — параметры Орта второго порядка,  $F = 0.5R_0\omega_0''$  и  $G = A/R_0$ .

Если провести теоретическое разложение уравнений (2)–(4) по сферическим гармоникам, то в дополнение к табл. 1 и 2 мы получим результат, представленный в табл. 7.

Мы видим, что наличие в собственных движениях гармоник  $t_{211}$ ,  $s_{310}$ , а в лучевых скоростях гармоники  $v_{310}$  может быть объяснено расширенной моделью Орта. К сожалению, получить отдельно значения  $F$  и  $G$  по этим трем гармоникам невозможно из-за линейной зависимости. Действительно,

$$v_{310} = 0.109(F + 3G)\langle r \rangle, \quad (5)$$

$$t_{211} = -0.747(F + 3G)\langle r \rangle, \\ s_{310} = 0.126(F + 3G)\langle r \rangle,$$

т.е. мы можем определить только комбинацию  $(F + 3G)\langle r \rangle$ . Для звезд 835–1040 пк (среднее значение расстояния около 0.933 кпк) имеем следующее:

$$v_{310} \rightarrow F + 3G = -8.5/0.109/0.933 = -83.6, \quad (6) \\ t_{211} \rightarrow F + 3G = 14.8/(-0.747)/0.933 = -21.2, \\ s_{310} \rightarrow F + 3G = -12.1/0.126/0.933 = -83.6,$$

Как мы видим, значения, полученные по лучевым скоростям и по сфероидальным гармоникам, близки друг другу. А значение, определенное по тороидальной гармонике, выбивается.

**Таблица 8.** Значения параметров расширенной модели Орта, полученные из совместного решения уравнений (2)–(4)

|          |                  |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|----------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Min      | 3                | 208             | 300             | 386             | 474             | 571             | 687             | 835             |
| Max      | 208              | 300             | 386             | 474             | 571             | 687             | 835             | 1040            |
| <i>U</i> | $9.2 \pm 0.0$    | $8.9 \pm 0.0$   | $9.3 \pm 0.0$   | $9.4 \pm 0.0$   | $9.6 \pm 0.0$   | $9.8 \pm 0.0$   | $10.1 \pm 0.0$  | $10.6 \pm 0.1$  |
| <i>V</i> | $19.5 \pm 0.1$   | $19.9 \pm 0.1$  | $20.1 \pm 0.1$  | $20.4 \pm 0.1$  | $20.4 \pm 0.1$  | $20.3 \pm 0.1$  | $20.4 \pm 0.1$  | $22.0 \pm 0.1$  |
| <i>W</i> | $7.9 \pm 0.0$    | $7.8 \pm 0.0$   | $7.8 \pm 0.0$   | $7.9 \pm 0.0$   | $7.9 \pm 0.0$   | $7.9 \pm 0.0$   | $7.8 \pm 0.0$   | $8.0 \pm 0.0$   |
| <i>A</i> | $16.5 \pm 0.5$   | $15.8 \pm 0.2$  | $15.1 \pm 0.1$  | $14.8 \pm 0.1$  | $15.0 \pm 0.1$  | $15 \pm 0.1$    | $14.8 \pm 0.1$  | $14.5 \pm 0.0$  |
| <i>B</i> | $-11.0 \pm 0.5$  | $-11.0 \pm 0.2$ | $-11.1 \pm 0.1$ | $-11.7 \pm 0.1$ | $-12.1 \pm 0.1$ | $-12.3 \pm 0.1$ | $-12.3 \pm 0.1$ | $-12.3 \pm 0.0$ |
| <i>F</i> | $-13.9 \pm 11.8$ | $-10.5 \pm 2.7$ | $-10.2 \pm 1.5$ | $-8.1 \pm 0.9$  | $-6.3 \pm 0.4$  | $-4.8 \pm 0.4$  | $-2.7 \pm 0.2$  | $-2.6 \pm 0.1$  |
| <i>G</i> | $2.9 \pm 4.4$    | $2.4 \pm 1.1$   | $3.2 \pm 0.6$   | $1.5 \pm 0.4$   | $1.6 \pm 0.2$   | $1.5 \pm 0.2$   | $1.6 \pm 0.1$   | $1.4 \pm 0.1$   |
| <i>K</i> | $2.8 \pm 0.5$    | $-1.2 \pm 0.2$  | $-1.2 \pm 0.1$  | $-1.8 \pm 0.1$  | $-2.0 \pm 0.1$  | $-1.7 \pm 0.1$  | $-1.8 \pm 0.1$  | $-1.7 \pm 0.0$  |
| Min      | 1040             | 1303            | 1594            | 1897            | 2220            | 2582            | 3031            |                 |
| Max      | 1303             | 1594            | 1897            | 2220            | 2582            | 3031            | 3677            |                 |
| <i>U</i> | $11.1 \pm 0.1$   | $11.6 \pm 0.1$  | $12.1 \pm 0.1$  | $12.5 \pm 0.1$  | $12.6 \pm 0.1$  | $13.0 \pm 0.1$  | $13.2 \pm 0.1$  |                 |
| <i>V</i> | $25.1 \pm 0.1$   | $27.8 \pm 0.1$  | $29.8 \pm 0.1$  | $31.2 \pm 0.1$  | $32.7 \pm 0.1$  | $33.3 \pm 0.1$  | $33.6 \pm 0.1$  |                 |
| <i>W</i> | $8.1 \pm 0.0$    | $8.2 \pm 0.1$   | $8.3 \pm 0.1$   | $8.5 \pm 0.1$   | $8.7 \pm 0.1$   | $8.8 \pm 0.1$   | $9.1 \pm 0.1$   |                 |
| <i>A</i> | $14.0 \pm 0.0$   | $13.6 \pm 0.0$  | $13.3 \pm 0.0$  | $12.9 \pm 0.0$  | $12.6 \pm 0.0$  | $12.1 \pm 0.0$  | $11.4 \pm 0.0$  |                 |
| <i>B</i> | $-12.5 \pm 0.0$  | $-13.0 \pm 0.0$ | $-13.3 \pm 0.0$ | $-13.7 \pm 0.0$ | $-14.1 \pm 0.0$ | $-14.3 \pm 0.0$ | $-14.6 \pm 0.0$ |                 |
| <i>F</i> | $-2.9 \pm 0.1$   | $-3.4 \pm 0.1$  | $-2.9 \pm 0.1$  | $-2.7 \pm 0.0$  | $-2.4 \pm 0.0$  | $-2.0 \pm 0.0$  | $-1.6 \pm 0.0$  |                 |
| <i>G</i> | $1.1 \pm 0.1$    | $1.1 \pm 0.0$   | $1.0 \pm 0.0$   | $1.0 \pm 0.0$   | $1.0 \pm 0.0$   | $1.0 \pm 0.0$   | $1.1 \pm 0.0$   |                 |
| <i>K</i> | $-1.7 \pm 0.0$   | $-1.4 \pm 0.0$  | $-1.1 \pm 0.0$  | $-0.8 \pm 0.0$  | $-0.6 \pm 0.0$  | $-0.3 \pm 0.0$  | $-0.1 \pm 0.0$  |                 |

Дальнейшее знакомство с табл. 7 заставляет нас проверить значения коэффициентов  $v_{330}$  и  $s_{330}$ , которые так же порождаются параметрами  $F$  и  $G$ . Анализ этих гармоник показывает, что они в целом малы (за исключением  $v_{330}$  для далеких звезд). Это означает либо отсутствие данных кинематических эффектов, либо примерное равенство величин  $F$  и  $G$ .

Сопоставление этих фактов указывает на про-

тиворечие в прямой интерпретации внемоделных гармоник, как проявление эффектов расширенной модели Орта.

Для окончательного выяснения мы провели непосредственно совместное решение уравнений (2)–(4) по собственным движениям и лучевым скоростям звезд на материале тех же выборок с учетом индивидуальных расстояний звезд. Результаты представлены в табл. 8. Для той же выборки

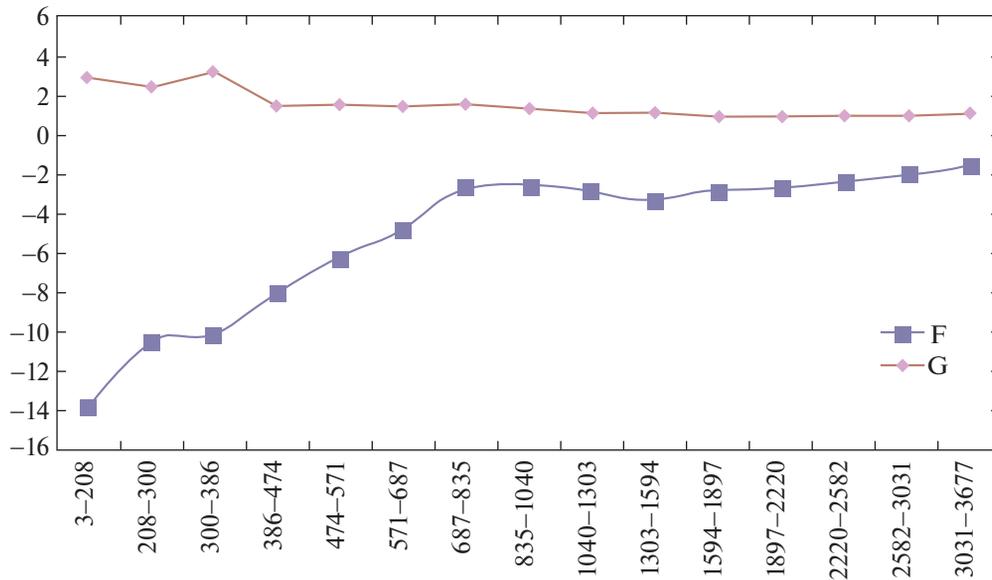


Рис. 3. Зависимость параметров  $F$  и  $G$  от расстояния. По вертикальной оси — значение коэффициентов в км/с/кпк.

звезд со средним расстоянием около 0.93 кпк, мы имеем  $F = -2.9$  км/с/кпк<sup>-2</sup>,  $G = 1.4$  км/с/кпк<sup>-2</sup>, что прекрасно согласуется со значениями, полученными в (Бобылев, Байкова, 2014), но находится в резком противоречии с выражениями (6), из которых следует что  $F$  и  $G$  должны быть значительно больше по модулю. Таким образом, большие значения гармоник  $t_{211}$ ,  $s_{310}$  и  $v_{310}$  не могут быть объяснены расширенной моделью Оорта. Хотя значение гармоники  $s_{330} = 0.42(G-F)$  находится в хорошем согласии с найденными параметрами  $F$  и  $G$ , но если попытаться получить  $F$  и  $G$ , например, из комбинации гармоник  $s_{310}$  и  $s_{330}$ , то мы получим нереально большие значения  $F \approx 26$  км/с/кпк<sup>2</sup>,  $G \approx -23$  км/с/кпк<sup>2</sup>.

Есть еще одно обстоятельство, из которого следует, что параметры  $F$  и  $G$  должны иметь относительно малые значения. Смысл нелинейных членов — производные параметров Оорта по расстоянию. Но результаты предыдущей работы авторов (Цветков, Амосов, 2019) как раз показали удивительную стабильность параметров Оорта ( $B = \omega_3$ ,  $A = M_{12}^+$ ) для значительных диапазонов расстояний, следовательно, производные от этих параметров должны быть малы. Для близких звезд значения многих кинематических параметров велики, что объясняется аномалиями Местной системы звезд (Цветков, 1995). С расстояний свыше 500 пк значения параметров  $F$  и  $G$  уменьшаются и стабилизируются (рис. 3).

#### *Вклад трехмерной модели второго порядка в коэффициенты сферического разложения*

Можно рассмотреть полую трехмерную модель второго порядка. Подробному выводу уравнений следует, по-видимому, посвятить отдельную статью в силу довольно громоздких выкладок. Предварительно следует сказать, что в силу корреляций, видимо, вообще не имеет смысла решать уравнения второго порядка, так как можно будет получить лишь линейные комбинации параметров. В данном случае метод разложения по сферическим гармоникам и использование полученных коэффициентов для анализа нелинейной части модели представляется наиболее целесообразным.

Введем частные производные от кинематических параметров вдоль главных осей галактической системы координат  $X, Y, Z$ , которые обозначим через  $\frac{\partial}{\partial r_1}$ ,  $\frac{\partial}{\partial r_2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial r_3}$  соответственно. Разложение полученных уравнений второго порядка по скалярным (для лучевых скоростей) и векторным (для собственных движений) сферическим функциям представлено в табл. 9–11, множитель  $\langle r \rangle$  (среднее расстояние рассматриваемой группы звезд) у каждой частной производной для компактности опущен. В этих таблицах присутствует и вклад линейной модели первого порядка, который уже был представлен в табл. 1–2.

Мы видим, что большое число производных от кинематических параметров входит в виде линейной комбинации в отдельные гармоники. В некоторых случаях параметры второго порядка накладываются на коэффициенты, которые ранее предпо-

лагались зависящими лишь от параметров первого порядка ( $s_{101}$ ,  $s_{110}$ ,  $s_{111}$ ,  $v_{101}$ ,  $v_{110}$ ,  $v_{111}$ ).

Вернемся, однако, к рассматриваемым гармоникам, имеющим большое значение. Выпишем отдельно для них полные выражения из табл. 9–11, группируя слагаемые так, чтобы их было удобно анализировать. Имеем (с точностью до множителя  $\langle r \rangle$ ):

$$s_{310} = 0.13 \left( -\frac{\partial M^+_{11}}{\partial r_2} - 2\frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} - 3\frac{\partial M^+_{22}}{\partial r_2} + 4\frac{\partial M^+_{33}}{\partial r_2} + 8\frac{\partial M^+_{23}}{\partial r_3} \right), \quad (7)$$

$$v_{310} = 0.11 \left( -\frac{\partial M^+_{11}}{\partial r_2} - 2\frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} - 3\frac{\partial M^+_{22}}{\partial r_2} + 4\frac{\partial M^+_{33}}{\partial r_2} + 8\frac{\partial M^+_{23}}{\partial r_3} \right), \quad (8)$$

$$t_{211} = 0.37 \left( -\frac{\partial M^+_{11}}{\partial r_2} + \frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} - \frac{\partial M^+_{23}}{\partial r_3} + \frac{\partial M^+_{33}}{\partial r_2} + 3 \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial r_3} + \frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} \right) \right). \quad (9)$$

Анализ формул (7)–(9) показывает, что есть 4 кинематических параметра  $\frac{\partial M^+_{11}}{\partial r_2}$ ,  $\frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1}$ ,  $\frac{\partial M^+_{23}}{\partial r_3}$ ,  $\frac{\partial M^+_{33}}{\partial r_2}$ , которые входят во все 3 коэффициента. Кроме этого, параметр  $\frac{\partial M^+_{22}}{\partial r_2}$  входит в коэффициенты  $s_{310}$  и  $v_{310}$ , в то время как в  $t_{211}$  входят  $\frac{\partial \omega_1}{\partial r_3}$  и  $\frac{\partial \omega_3}{\partial r_1}$ . Вероятно, этим и можно объяснить схожесть поведения  $s_{310}$  и  $v_{310}$  и отличие  $t_{211}$ , если проводить анализ в рамках расширенной модели Оорта.

Теоретическое соотношение коэффициентов  $s_{310}$  и  $v_{310}$  практически точно совпадает с соотношением коэффициентов, полученных на материале каталога. Это значит, что линейная комбинация параметров в формулах (7) и (8) имеет одно и то же значение при анализе лучевых скоростей и собственных движений.

Приведенные рассуждения не решают задачу об отождествлении внемоделных гармоник с какими-то конкретными параметрами кинематической модели, так как система уравнений, задаваемая табл. 9–11, недоопределена. Число определяемых параметров превосходит число коэффициентов разложения. Кроме того, мы видим, что коэффициенты могут быть пропорциональны друг другу и могут быть использованы лишь некоторые дополнительные критерии адекватности модели наблюдениям.

Для полного описания системы в рамках модели второго порядка нужна какая-то дополнительная

информация (например, о незначимости некоторых параметров второго порядка), которая позволила бы если и не полностью получить значения всех параметров, то хотя бы значения их менее сложных линейных комбинаций.

Мы можем лишь предложить такое упрощение: оставим в уравнениях (7)–(9) только производные от  $M^+_{12} = A$  и от  $\omega_3 = B$  по  $r_1$ , считая остальные значения малыми, тогда уравнения (7)–(9) сводятся к

$$s_{310} = -0.26 \frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} \langle r \rangle, \quad (10)$$

$$v_{310} = -0.22 \frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} \langle r \rangle,$$

$$t_{211} = 0.37 \left( \frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} + 3 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} \right) \langle r \rangle.$$

Здесь мы уже не стали опускать множитель  $\langle r \rangle$ . Взяв из табл. 4–6 значения коэффициентов для диапазона 835–1040 со средним значением  $\langle r \rangle = 0.933$  кпк:

$$t_{211} = 14.8, \quad s_{310} = -12.1, \quad v_{310} = -8.5,$$

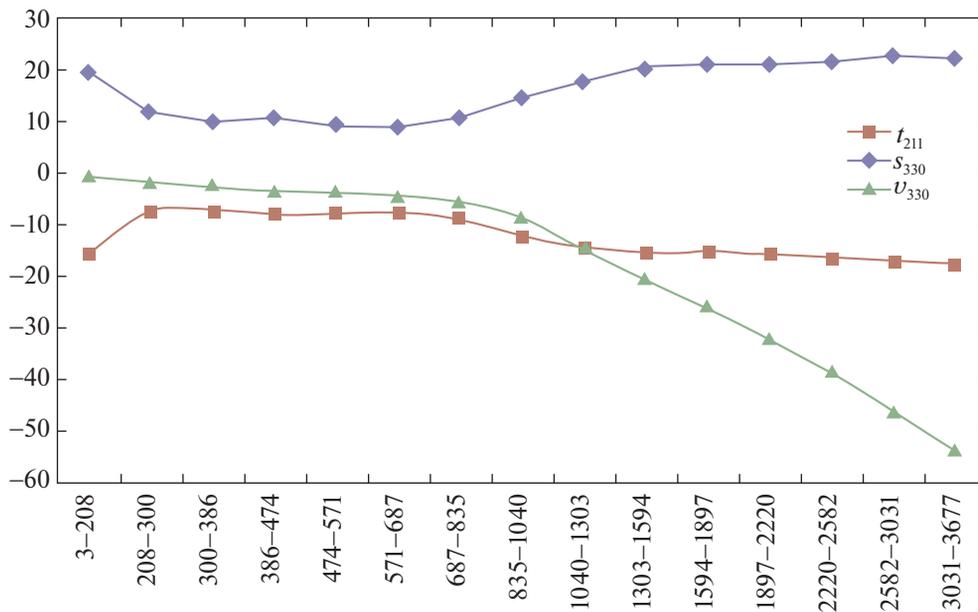
получаем из  $s_{310}$  и  $v_{310}$  среднее значение  $\frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} = 44$  км/с/кпк<sup>-2</sup>, а  $\frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} \approx 0!$

Это довольно странный результат, если учесть, что  $\frac{\partial M^+_{12}}{\partial r_1} = \frac{\partial A}{\partial r_1}$ , что во многом по смыслу совпадает с параметром Оорта  $F$ . Мы предположили, что другие частные производные от кинематическим параметров модели Огородникова–Милна близки к нулю, просто в связи с тем, что сами эти параметры обычно малы. Но малое значение параметров не означает, что производные от них тоже малы. Так что вопрос о нелинейных эффектах в поле скоростей звезд нуждается в дальнейшей проработке. Некоторым указанием на то, что внемоделные коэффициенты  $t_{211}$ ,  $s_{310}$  и  $v_{310}$  суть проявление нелинейных эффектов, является рост их абсолютных значений с увеличением расстояния, так как в нелинейные параметры всегда входит  $\langle r \rangle$  — среднее расстояние рассматриваемой группы звезд. Ближе 500 пк, по-видимому, имеют силу местные кинематические эффекты (рис. 4).

Возможно, природа гармоник  $t_{211}$ ,  $s_{310}$  и  $v_{310}$ , вообще, другая (особенности распределения звезд, звездные потоки, что-либо еще). Интересно отметить, что существуют значимые коэффициенты (например,  $v_{420}$  для больших расстояний), которые не могут быть проинтерпретированы даже в рамках модели второго порядка.

**Таблица 9.** Вклад кинематической модели второго порядка в тороидальные коэффициенты векторного сферического разложения собственных движений звезд. Множитель  $\langle r \rangle$  у всех частных производных опущен

| $j$ | $N$ | $k$ | $p$ | $t_j$   |
|-----|-----|-----|-----|---|
| 1   | 1   | 0   | 1   | $2.89\omega_3$  |
| 2   | 1   | 1   | 0   | $2.89\omega_2$  |
| 3   | 1   | 1   | 1   | $2.89\omega_1$  |
| 4   | 2   | 0   | 1   | $-0.65\frac{\partial\omega_1}{\partial r_1} - 0.65\frac{\partial\omega_2}{\partial r_2} + 1.30\frac{\partial\omega_3}{\partial r_3} - 0.65\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.65\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$  |
| 5   | 2   | 1   | 0   | $1.12\frac{\partial\omega_2}{\partial r_3} + 1.12\frac{\partial\omega_3}{\partial r_2} - 0.37\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.37\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3} + 0.37\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} - 0.37\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1}$ |
| 6   | 2   | 1   | 1   | $1.12\frac{\partial\omega_1}{\partial r_3} + 1.12\frac{\partial\omega_3}{\partial r_1} - 0.37\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 0.37\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 0.37\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} + 0.37\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2}$ |
| 7   | 2   | 2   | 0   | $1.12\frac{\partial\omega_1}{\partial r_2} + 1.12\frac{\partial\omega_2}{\partial r_1} + 0.37\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.37\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.37\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.37\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$ |
| 8   | 2   | 2   | 1   | $1.12\frac{\partial\omega_1}{\partial r_1} - 1.12\frac{\partial\omega_2}{\partial r_2} - 0.75\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_3} + 0.37\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.37\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$  |



**Рис. 4.** Зависимость гармоник  $t_{211}$ ,  $s_{330}$  и  $v_{330}$  от расстояния. По вертикальной оси — значение коэффициентов в км/с/кпк.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показало, что в собственных движениях и лучевых скоростях звезд уверенно присутствуют такие кинематические эф-

фекты, как поступательно движение Солнца, твердотельное вращение в основном вокруг оси  $Z$ , но есть и меньший эффект вокруг оси  $X$ . Также не подлежит сомнению наличие деформации поля

**Таблица 10.** Вклад кинематической модели второго порядка в сферические коэффициенты векторного сферического разложения собственных движений звезд. Множитель  $\langle r \rangle$  у всех частных производных опущен

| $j$ | $N$ | $k$ | $p$ | $t_j$  |
|-----|-----|-----|-----|--|
| 1   | 1   | 0   | 1   | $-2.89W/r + 1.45 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_2} - 1.45 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} + 0.87 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.87 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2} + 0.56 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3}$ |
| 2   | 1   | 1   | 0   | $-2.89V/r - 1.45 \frac{\partial \omega_1}{\partial r_3} + 1.45 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 0.87 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} + 0.58 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.87 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} - 0.29 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1}$ |
| 3   | 1   | 1   | 1   | $-2.89U/r + 1.45 \frac{\partial \omega_2}{\partial r_3} - 1.45 \frac{\partial \omega_3}{\partial r_2} + 0.58 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} + 0.87 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.87 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3} - 0.29 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} - 0.29 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1}$ |
| 4   | 2   | 0   | 1   | $-0.65M_{11}^+ - 0.65M_{22}^+ + 1.30M_{33}^+$  |
| 5   | 2   | 1   | 0   | $2.24M_{23}^+$   |
| 6   | 2   | 1   | 1   | $2.24M_{13}^+$   |
| 7   | 2   | 1   | 0   | $2.24M_{12}^+$   |
| 8   | 2   | 2   | 1   | $1.12M_{11}^+ - 1.12M_{22}^+$  |
| 9   | 3   | 0   | 1   | $-0.31 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.62 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.31 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_3} - 0.62 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2} + 0.62 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3}$   |
| 10  | 3   | 1   | 0   | $-0.13 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 0.25 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 0.38 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 1.01 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3} + 0.51 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2}$   |
| 11  | 3   | 1   | 1   | $-0.38 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.25 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 1.01 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3} - 0.13 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.51 \frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1}$   |
| 12  | 3   | 2   | 0   | $0.80 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_3} + 0.80 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.80 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$  |
| 13  | 3   | 2   | 1   | $0.40 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} + 0.80 \frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.40 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} - 0.80 \frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$  |
| 14  | 3   | 3   | 0   | $0.49 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 0.98 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} - 0.49 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2}$  |
| 15  | 3   | 3   | 1   | $0.49 \frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.98 \frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} - 0.49 \frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1}$  |

скоростей в плоскости  $XU$ . Остальные компоненты линейной модели присутствуют в незначительном количестве. Загадку составляет существование сильных гармоник  $t_{211}$ ,  $s_{310}$  и  $v_{310}$ , не описываемых линейными звездно-кинематическими моделями Оорта–Линдблада и Огородникова–Милна. Попытка напрямую привязать их к расширенной модели Оорта–Линдблада лишь частично позволила объяснить их существование, из-за возникшего противоречия в определении параметров по

гармоникам  $s_{310}$ ,  $v_{310}$  и  $t_{211}$ . Возможно, ключ к пониманию природы этих гармоник лежит в использовании полной трехмерной модели второго порядка. Однако вопрос этот сложный и нуждается в проведении дополнительных исследований. Авторы планируют посвятить модели второго порядка отдельную публикацию.

**Таблица 11.** Вклад кинематической модели второго порядка в коэффициенты сферического разложения лучевых скоростей звезд. Множитель  $\langle r \rangle$  у всех частных производных опущен

| $j$ | $N$ | $k$ | $p$ | $v_j/r$   |
|-----|-----|-----|-----|---|
| 0   | 0   | 0   | 1   | $1.18M_{11}^+ + 1.18M_{22}^+ + 1.18M_{33}^+$  |
| 1   | 1   | 0   | 1   | $-2.05W/r + 0.41\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} + 0.41\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 1.23\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3} + 0.82\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} + 0.82\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$ |
| 2   | 1   | 1   | 0   | $-2.05V/r + 0.41\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} + 1.23\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.41\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2} + 0.82\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} + 0.82\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3}$ |
| 3   | 1   | 1   | 1   | $-2.05U/r + 1.23\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} + 1.41\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} + 0.41\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1} + 0.82\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.82\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3}$ |
| 4   | 2   | 0   | 1   | $-0.53M_{11}^+ - 0.53M_{22}^+ + 1.06M_{33}^+$   |
| 5   | 2   | 1   | 0   | $1.83M_{23}^+$  |
| 6   | 2   | 1   | 1   | $1.83M_{13}^+$  |
| 7   | 2   | 1   | 0   | $1.831M_{12}^+$   |
| 8   | 2   | 2   | 1   | $0.92M_{11}^+ - 0.92M_{22}^+$   |
| 9   | 3   | 0   | 1   | $-0.27\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.27\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.54\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_3} - 0.54\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$  |
| 10  | 3   | 1   | 0   | $-0.11\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 0.33\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.44\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_2} - 0.22\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1} + 0.88\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_3}$           |
| 11  | 3   | 1   | 1   | $-0.33\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.11\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} + 0.44\frac{\partial M_{33}^+}{\partial r_1} - 0.22\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2} + 0.88\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_3}$           |
| 12  | 3   | 2   | 0   | $0.69\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_3} + 0.69\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_2} + 0.69\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_1}$  |
| 13  | 3   | 2   | 1   | $0.35\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_3} - 0.35\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_3} + 0.69\frac{\partial M_{13}^+}{\partial r_1} - 0.69\frac{\partial M_{23}^+}{\partial r_2}$   |
| 14  | 3   | 3   | 0   | $0.42\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_2} - 0.42\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_2} + 0.85\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_1}$  |
| 15  | 3   | 3   | 1   | $0.42\frac{\partial M_{11}^+}{\partial r_1} - 0.42\frac{\partial M_{22}^+}{\partial r_1} - 0.85\frac{\partial M_{12}^+}{\partial r_2}$  |

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витязев, Цветков (V. V. Vityazev and A. S. Tsvetkov), *Astron. Nachr.* **334**, 760 (2013).
2. Витязев, Шуксто (V. V. Vityazev and A. Shuksto), *ASP Conf. Ser.* 316, 230 (2004).
3. Бобылев В. В., Письма в Астрон. журн. **30**, 861 (2004) [V. V. Bobylev, *Astron. Lett.* **30**, 848 (2004)].
4. Бобылев В. В., Байкова А. Т., Лебедева С. В., Письма в Астрон. журн. **33**, 809 (2007) [V. V. Bobylev, A. T. Bajkova, S. V. Lebedeva, *Astron. Lett.* **33**, 720 (2007)].
5. Бобылев В. В., Байкова А. Т., Письма в Астрон. журн. **40**, 830 (2014) [V. V. Bobylev, A. T. Bajkova, *Astron. Lett.* **40**, 773 (2014)].

6. Бобылев В. В., Байкова А. Т., Письма в Астрон. журн. **43**, 185 (2017) [V. V. Bobylev, Astron. Lett. **43**, 152 (2017)].
7. Броше (P. Brosche), Veröff. des Astron. Rechen-Inst. Heidelberg № 17, 1 (1966).
8. Витязев В. В., Цветков А. С., Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2 (N8), 73 (1989).
9. Витязев В. В., Цветков А. С., Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 2 (N8), 79 (1990).
10. Витязев В. В., Цветков А. С., Письма в Астрон. журн. **35**, 114 (2009) [V. V. Vityazev, A. S. Tsvetkov, Astron. Lett. **35**, 100 (2009)].
11. Витязев В.В., Цветков А.С., Трофимов Д.А., Письма в Астрон. журн. **40**, 783 (2014) [V. V. Vityazev, A. S. Tsvetkov, D. A. Trofimov, Astron. Lett. **40**, 713 (2014)].
12. Огородников К. Ф., *Динамика звездных систем* (М.: Физматгиз, 1965).
13. Цветков (A. S. Tsvetkov), *Journess, Systemes de referance spatio-temporels* (Dresden, Germany, 1999).
14. Цветков (A. S. Tsvetkov), Astron. Astrophys. Transact. **9**, 1(1995).
15. Цветков А. С., Амосов Ф. А., Письма в Астрон. журн. **45**, (2019).