

## КИНЕМАТИКА ЗВЕЗД КАТАЛОГА TGAS (GAIA DR1)

© 2018 г. В. В. Витязев\*, А. В. Попов\*\*, А. С. Цветков\*\*\*,  
С. Д. Петров\*\*\*\*, Д. А. Трофимов\*\*\*\*\*, В. И. Кияев\*\*\*\*\*

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 30.07.2017 г.

По собственным движениям звезд каталога TGAS (Gaia DR1) произведен анализ поля скоростей звезд главной последовательности и красных гигантов каталога TGAS с гелиоцентрическими расстояниями до 1.5 кпк. Получены четыре варианта кинематических параметров, отвечающих различным способам вычислений расстояний через параллаксы звезд, измеренных с большими относительными ошибками. Установлено, что в рамках модели Огородникова–Милна изменение варианта расстояний оказывает существенное влияние только на компоненты скорости движения Солнца относительно выбранного центра звезд, при условии получения решения в узких диапазонах расстояний (0.1 кпк). Оценки всех остальных кинематических параметров изменяются мало. Это обстоятельство позволяет получить надежные оценки коэффициентов Оорта и связанных с ними параметров вращения Галактики, а также всех остальных параметров модели Огородникова–Милна (кроме солнечных членов) независимо от точности измерения параллаксов. Основные результаты, полученные по звездам главной последовательности в диапазоне расстояний от 0.1 до 1.5 кпк:  $A = 16.29 \pm 0.06$ ,  $B = -11.90 \pm 0.05$ ,  $C = -2.99 \pm 0.06$ ,  $K = -4.04 \pm 0.16$ , км/с/кпк, период вращения Галактики  $P = 217.41 \pm 0.60$  млн лет. Аналогичные результаты, полученные по красным гигантам в диапазоне от 0.2 до 1.6 кпк: постоянные Оорта  $A = 13.32 \pm 0.09$ ,  $B = -12.71 \pm 0.06$ ,  $C = -2.04 \pm 0.08$ ,  $K = -2.72 \pm 0.19$ , км/с/кпк, период вращения Галактики  $P = 236.03 \pm 0.98$  млн лет. Градиент изменения скорости вращения Галактики вдоль радиуса-вектора (наклон кривой вращения Галактики) для звезд главной последовательности равен  $-4.32 \pm 0.08$  км/с/кпк, а для красных гигантов  $-0.61 \pm 0.11$  км/с/кпк, что говорит о том, что скорость вращения Галактики, определенная по звездам главной последовательности, убывает по мере удаления от центра Галактики быстрее, чем для красных гигантов.

*Ключевые слова:* собственные движения, Gaia DR1, TGAS, кинематика Галактики.

DOI: 10.7868/S032001081803004X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Каталог TGAS (Tycho-Gaia Astrometric Solution), входящий в первый релиз проекта Gaia (Линдгрен и др., 2016), можно считать развитием проекта Tycho. Первый каталог этого проекта был получен с помощью измерений на борту спутника HIPPARCOS (ESA, 1997). Он содержал координаты и собственные движения около 1 млн звезд. Вторая версия, получившая название Tycho-2 (Хег и др., 2000), была дополнена еще 1.5 млн звезд, собственные движения которых были получены методом двух эпох. В качестве первой эпо-

хи (приблизительно 1905 год) были использованы координаты звезд из Astrographic Catalog (Урбан и др., 1998), а в качестве второй эпохи — средняя эпоха наблюдений на спутнике HIPPARCOS (1991.25). По оценке авторов, Tycho-2 имеет точность положений от 10 до 100 миллисекунд дуги (мсд), а точность собственных движений составляет 2.5 мсд/год. Полнота каталога на уровне 99% достигается для звезд с  $V = 11$ . Система каталога Tycho-2 совпадает с системой каталога HIPPARCOS. Каталог Tycho-2 охватывает всю небесную сферу и широко используется в различных астрометрических задачах. Существенным недостатком этого каталога является отсутствие параллаксов звезд. Частичную компенсацию этого недостатка предоставил каталог Tycho-2 Spectral Type (Райт и др., 2003), в котором (в основном для звезд южного экваториального полушария) приводится информация о спектрах и спектраль-

\* Электронный адрес: vityazev@list.ru

\*\* Электронный адрес: 9141866@gmail.com

\*\*\* Электронный адрес: a.s.tsvetkov@inbox.ru

\*\*\*\* Электронный адрес: petr0v@mail.ru

\*\*\*\*\* Электронный адрес: dm.trofimov@gmail.com

\*\*\*\*\* Электронный адрес: kiyayev@mail.ru

ных классах звезд, позволяющая получать оценки фотометрических параллаксов (Попов и др., 2006).

В первом релизе проекта Gaia DR1 (Линдгрен и др., 2016) для 2 057 050 звезд каталога Tycho-2 получены положения и тригонометрические параллаксы звезд с ошибками менее 1 мсд. Стандартные ошибки собственных движений звезд достигают 2–3 мсд/год. Собственные движения звезд в TGAS тоже получены методом двух эпох — в качестве которых использовались соответственно средние эпохи наблюдений на спутнике HIPPARCOS (1991.25) и на аппарате Gaia (2015.0). Систематические ошибки координат звезд каталога TGAS находятся на уровне  $\pm 0.3$  мсд. Положения и собственные движения звезд отнесены к системе отсчета, совмещенной с ICRF2 на эпоху J2015.0 с точностью, лучшей чем 0.1 мсд, и остаточным вращением до 0.03 мсд/год. При этом было обнаружено, что системы отсчета каталогов Hipparcos и Tycho-2 вращаются относительно системы Gaia DR1 со скоростью 0.24 мсд/год (Линдгрен и др., 2016). Каталог TGAS можно считать третьим каталогом проекта Tycho. По сравнению с Tycho-2 он содержит тригонометрические параллаксы звезд, кроме того, его собственные движения, полученные без привлечения наземных наблюдений, основаны на наблюдениях, выполненных в космосе на аппаратах HIPPARCOS и Gaia. Результаты измерений тригонометрических параллаксов для более чем 2 млн звезд являются крупным достижением современной астрометрии.

Сразу же после выхода в свет каталога TGAS была опубликована работа Бови (2017), посвященная кинематическому анализу собственных движений приблизительно 300 000 звезд главной последовательности этого каталога. Необходимо отметить, что Бови использовал только те звезды из каталога TGAS, для которых ошибка измерения параллаксов не превосходила 10%. Это обстоятельство привело к тому, что в указанном исследовании использовались звезды, удаленные от Солнца не более чем на 500 пк. С использованием двухмерной кинематической модели Оорта—Линдблада автором были получены оценки постоянных Оорта и параметров вращения Галактики.

В отличие от работы Бови (2017), наша статья посвящена кинематическому анализу собственных движений далеких звезд каталога TGAS. В ней используется трехмерная кинематическая модель Огородникова—Милна с границей применимости 1.5 кпк. Кинематические параметры модели получены для четырех вариантов гелиоцентрических расстояний звезд главной последовательности и красных гигантов, взятых из работы Астрадамья и Байлера—Джонса (2017). Такой подход позволяет

отобрать те параметры модели, которые не подвержены изменениям гелиоцентрических расстояний. Этим самым достигается возможность проведения хотя бы частичного кинематического анализа собственных движений далеких звезд, для которых относительная погрешность измерения параллаксов весьма велика.

## 2. УРАВНЕНИЯ ОГОРОДНИКОВА—МИЛНА

В нашей работе для проведения кинематических исследований собственных движений звезд каталога TGAS использовалась модель Огородникова—Милна (Огородников, 1965; ДюМонт, 1977). В рамках этой модели поле скоростей звезд представляется линейным выражением

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{M}^+ \mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость звезды,  $\mathbf{V}_0$  — влияние поступательного движения Солнца,  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость твердотельного вращения звездной системы,  $\mathbf{M}^+$  — симметричный тензор деформации поля скоростей.

Модель Огородникова—Милна содержит 12 параметров:

$U, V, W$  — компоненты вектора скорости поступательного движения Солнца  $V_{\odot}$  относительно звезд;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — компоненты вектора твердотельного вращения  $\boldsymbol{\Omega}$ ;

$M_{11}^+, M_{22}^+, M_{33}^+$  — параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие сжатие-растяжение поля скоростей вдоль главных галактических осей;

$M_{12}^+, M_{13}^+, M_{23}^+$  — параметры тензора  $\mathbf{M}^+$ , описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

Известно, что параметры модели Огородникова—Милна позволяют оценить целый ряд кинематических и физических характеристик нашей Галактики. Прежде всего через них определяются постоянные Оорта. В предположении о том, что поле скоростей осесимметрично или  $V_R = 0$ , где  $V_R$  — проекция скорости звезды на радиус-вектор в Галактической цилиндрической системе координат (Миямото и др., 1993), для постоянных Оорта  $A$  и  $B$  имеем

$$A = M_{12}^+, \quad B = \omega_3. \quad (2)$$

В свою очередь постоянные Оорта  $C$  и  $K$  определяются следующим образом:

$$C = \frac{M_{11}^+ - M_{22}^+}{2}, \quad K = \frac{M_{11}^+ + M_{22}^+}{2} - M_{33}^+. \quad (3)$$

Эти постоянные являются линейными комбинациями градиентов параметров поля скоростей

звезд. При этом постоянные  $A$  и  $C$  характеризуют соответственно азимутальные и радиальные деформации, постоянная  $B$  — компоненту твердотельного вращения звезд относительно Галактической системы координат, а  $K$  — дивергенцию поля (Торра и др., 2000).

С учетом этих обозначений условные уравнения, определяющие собственные движения звезд в рамках модели Огородникова—Милна, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_l \cos b &= U/r \sin l - V/r \cos l - & (4) \\ &- \omega_1 \sin b \cos l - \omega_2 \sin b \sin l + B \cos b - \\ &- M_{13}^+ \sin b \sin l + M_{23}^+ \sin b \cos l + A \cos b \cos 2l - \\ &- C \cos b \sin 2l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_b &= U/r \cos l \sin b + V/r \sin l \sin b - & (5) \\ &- W/r \cos b + \omega_1 \sin l - \omega_2 \cos l - \\ &- \frac{1}{2}A \sin 2b \sin 2l + M_{13}^+ \cos 2b \cos l + \\ &+ M_{23}^+ \cos 2b \sin l - \\ &- \frac{1}{2}C \sin 2b \cos 2l - \frac{1}{2}K \sin 2b. \end{aligned}$$

Зная компоненты скорости Солнца  $U$ ,  $V$  и  $W$ , можно определить скорость Солнца  $V_\odot$  относительно центроида рассматриваемого множества звезд, а также координаты апекса Солнца  $L_\odot$ ,  $B_\odot$ :

$$V_\odot = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}, \quad (6)$$

$$L_\odot = \arctg \frac{V}{U}, \quad (7)$$

$$B_\odot = \arctg \frac{W}{\sqrt{U^2 + V^2}}. \quad (8)$$

Постоянные Оорта  $A$  и  $B$  позволяют оценить параметры вращения Галактики в окрестности Солнца. Так, угловая скорость вращения Галактики в окрестностях Солнца равна

$$\Omega = A - B. \quad (9)$$

Обозначая через  $R_S$  расстояние от Солнца до центра Галактики, для линейной скорости Солнца относительно центра Галактики имеем

$$V_S = R_S(A - B). \quad (10)$$

С этой скоростью период вращения Галактики составит

$$P = \frac{2\pi R_S}{V_S}. \quad (11)$$

Отметим, что в нашей работе принято значение  $R_S = 8.0 \pm 0.2$  кпк (Валли, 2017).

Наклон кривой вращения Галактики (или градиент изменения скорости вращения Галактики вдоль радиуса-вектора) определяется с помощью выражения

$$\frac{\partial V_S}{\partial R} = -(A + B). \quad (12)$$

### 3. ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Для выполнения данной работы мы дополнили каталог TGAS фотометрической информацией, взятой из каталога APASS (Хенден и др., 2015). Особое внимание было уделено оценкам гелиоцентрических расстояний звезд каталога TGAS, поскольку расстояния позволяют локализовать звезды в пространстве и формировать выборки звезд в заданных областях диаграммы Герцшпрунга—Рессела. Кроме того, расстояния входят в условные уравнения различных моделей кинематики (модель Огородникова—Милна, модель Оорта—Линдблада, модель Боттлингера и др.).

Астрометрические измерения на борту аппарата Gaia дают не расстояния, а тригонометрические параллаксы. В идеальном случае отсутствия ошибок измерений параллаксов гелиоцентрические расстояния получаются инвертированием параллаксов ( $r = 1/\pi$ ). Для удобства цитирования в нашей статье мы будем в дальнейшем обозначать такие расстояния, как  $R_i$ . Однако при наличии всегда присутствующих погрешностей измерений параллаксов вычисление расстояний становится непростой задачей, требующей использования априорных предположений о распределении звезд в пространстве, использования фотометрических, спектральных характеристик звезд, их собственных движений и т.п. В литературе описаны различные способы вычисления поправок расстояний системы  $R_i$  (Лутц, Келкер, 1973; Смит, Эйххорн, 1996; Арену, 1999; Байлер-Джонс, 2015; Астратмадя, Байлер-Джонс, 2016, 2017). При этом все авторы сходятся на том, что коррекция не требуется, если относительная ошибка измерения параллаксов не превосходит 10–20%. По этой причине в подавляющем большинстве работ используются выборки звезд с малыми относительными ошибками параллаксов, и коррекция расстояний не производится (Бови, 2017; Торра и др., 2000). Вследствие этого при кинематическом анализе используются сравнительно близкие звезды (до 300–500 пк).

Непосредственное отношение к нашей работе имеет статья Астратмадя и Байлер-Джонс (2017), в которой для всех звезд каталогов TGAS (независимо от относительной погрешности измерений параллаксов) рассчитаны три варианта расстояний (Exp1, Exp2 и MW), основанные на

различных методах моделирования пространственного распределения звезд. Расстояния Exр1 и Exр2 получены в рамках модели, экспоненциально убывающей с ростом расстояний пространственной плотности звезд. Два варианта этой модели, Exр1 и Exр2, соответствуют двум значениям масштабного фактора (scale length):  $L = 1350$  пк (для окончательного состава каталога проекта Gaia) и  $L = 110$  пк (для каталога TGAS). Вариант расстояний MW получен на основе моделирования распределения звезд в Галактике (Астраатмадя, Байлер-Джонс, 2016). Таким образом, для каталога TGAS вместе с обычным вариантом расстояний (Rрi) мы имеем четыре шкалы расстояний, которые были использованы в нашей работе. В окончательном рабочем каталоге содержится следующая информация для 1 890 045 звезд:

- Прямое восхождение, склонение и параллакс по данным каталога TGAS;
- Собственные движения звезд из каталога TGAS;
- Фотометрия в полосах  $B$ ,  $V$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $i$  из каталога APASS;
- Три оценки расстояния для каждой звезды по каталогу Астраатмадя и Байли-Джонса (2017) — Exр1, Exр2, MW.

Мы не использовали звезды, для которых отсутствует фотометрия APASS (как наиболее точная), а также звезды, для которых в каталоге TGAS приведены близкие к нулю или отрицательные параллаксы ( $\pi < 0.25$  мсд). По этим причинам было отброшено 167 005 звезд, что составляет 8% от первоначального состава. В соответствии с поставленной задачей о влиянии на результаты кинематического анализа собственных движений звезд всех вариантов расстояний, мы не делали отбор звезд по величине относительной ошибки параллаксов.

Далее из каталога были выделены две основные группы звезд:

1. главная последовательность (V класс светимости) — 1 144 455 звезд,
2. красные гиганты (III класс светимости) — 475 440 звезд.

Выделение производилось путем отбора звезд на диаграмме Герцшпрунга–Рассела по заданным абсолютной звездной величине и показателю цвета. Для определения видимой звездной величины и показателя цвета использовалась фотометрия APASS. Абсолютная звездная величина была вычислена по формуле

$$M_V = V + 5 - 5 \lg r \quad (13)$$

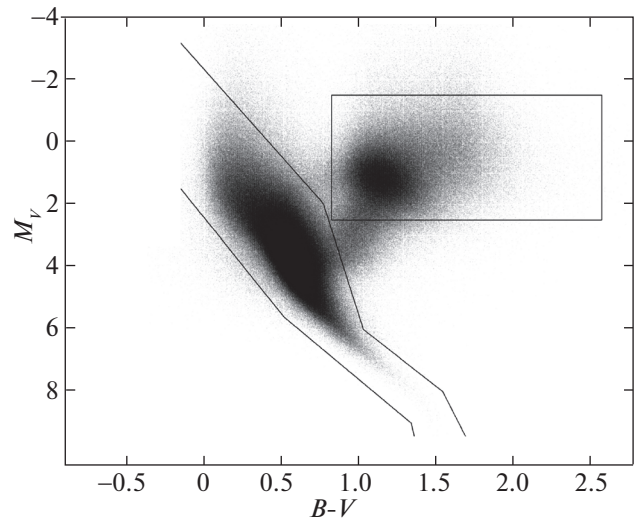


Рис. 1. Диаграмма Герцшпрунга–Рассела для звезд каталога TGAS.

с использованием расстояний звезд TGAS (система Rрi) и видимой звездной величины в полосе V каталога APASS. Учет межзвездного поглощения не производился.

Диаграмма Герцшпрунга–Рассела в координатах  $(B - V, M_V)$  показана на рис. 1. Разделение звезд на множества III и V классов светимости производилось с помощью ломаных линий аналогично тому, как это было сделано в работах Денен и Бинни (1998) и Бови (2017). Для выделения звезд главной последовательности использовались ломаные вида

$$M_V = a(B - V) + b \quad (14)$$

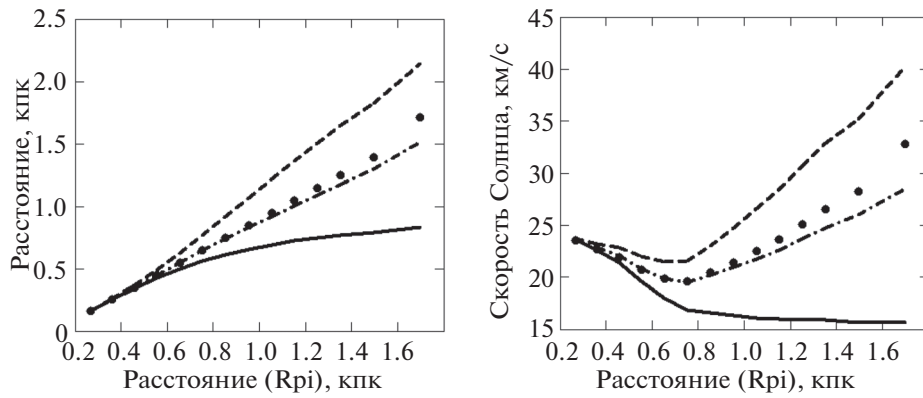
с параметрами  $a$  и  $b$ , приведенными в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Нижняя граница группы звезд V класса светимости на диаграмме Герцшпрунга–Рассела

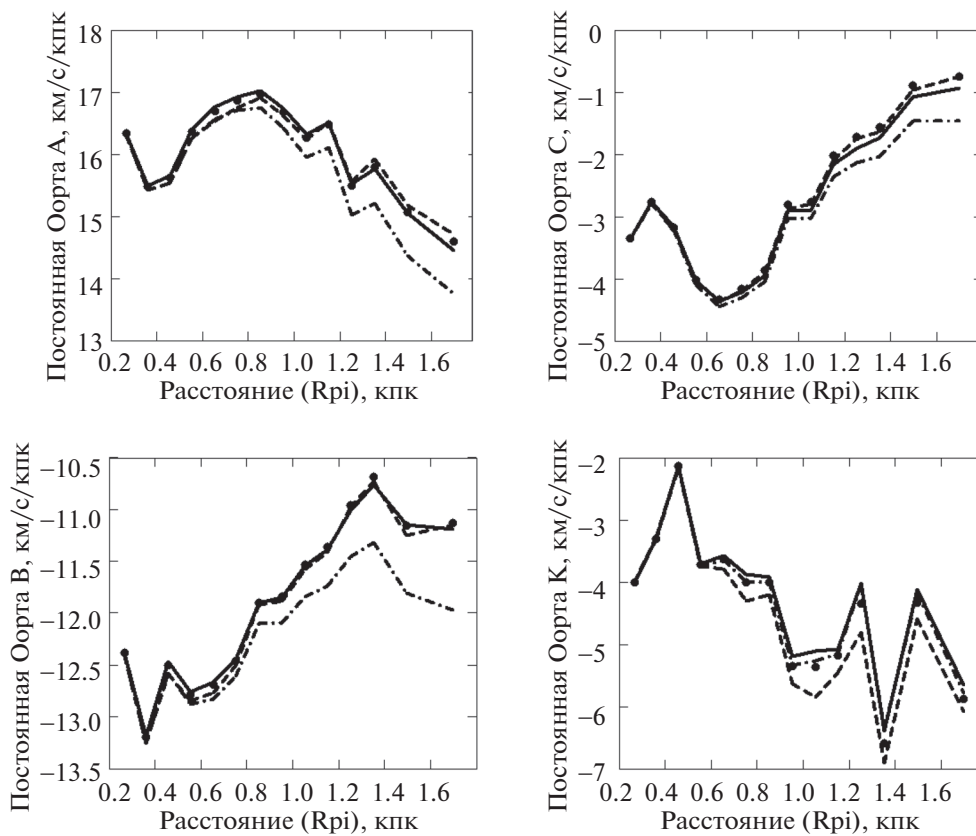
$B - V$	$a$	$b$
−0.1–0.5	6.33	2.43
0.5–1.3	4.25	3.48
1.3–1.35	20	−17

Таблица 2. Верхняя граница группы звезд V класса светимости на диаграмме Герцшпрунга–Рассела

$B - V$	$a$	$b$
−0.1–0.8	5.7	−2.3
0.8–1	16	−10
1–1.5	4	2
1.5–1.7	10	−7



**Рис. 2.** Средние расстояния до звезд выборок (слева), полная скорость движения Солнца (справа), определенная по собственным движениям TGAS для звезд главной последовательности, в различных вариантах расстояний: точки — Rpi, сплошная линия — Exp1, штриховая линия — Exp2, штрихпунктирная линия — MW.



**Рис. 3.** Параметры Оорта, определенные по собственным движениям TGAS для звезд главной последовательности, в различных вариантах расстояний: точки — Rpi, сплошная линия — Exp1, штриховая линия — Exp2, штрихпунктирная линия — MW.

Для выделения красных гигантов были использованы следующие ограничения на абсолютную звездную величину и показатель цвета:

$$0.8 < B - V < 2.5, \quad (15)$$

$$-1.5 < M < 2.5. \quad (16)$$

Данная область представляет собой прямоуголь-

ник, содержащий сгущение красных гигантов и захватывающий более яркие и более красные звезды.

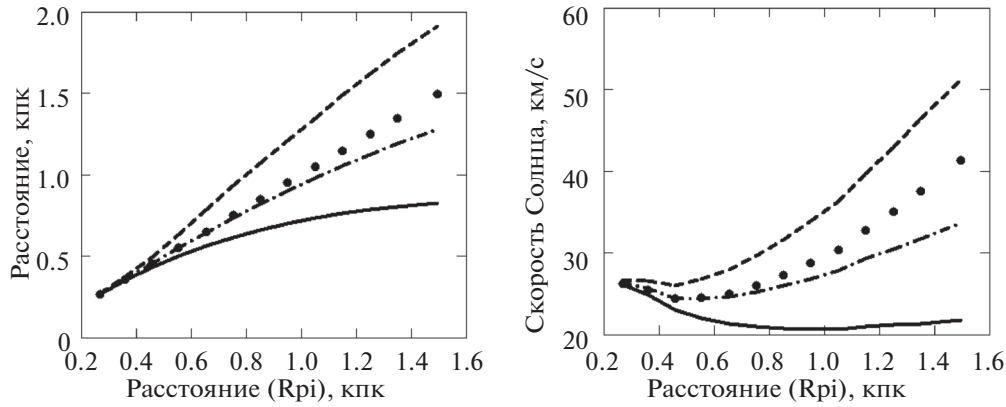
В табл. 3 и 4 даны характеристики выборок звезд V и III классов светимости в заданных диапазонах расстояний по шкале Rpi и средние значения расстояний до звезд каждой выборки для всех вариантов расстояний. Анализ этих таблиц и соответствующих им рис. 2 и 4 подтверждает

**Таблица 3.** Характеристики выборок звезд из главной последовательности. Единицы измерений расстояний — кпк

$r_{\min}$	$r_{\max}$	$\sigma_{\pi}/\pi$	Rpi	Exp1	Exp2	MW	Число звезд
0.10	0.20	0.06	0.16	0.16	0.16	0.16	124 602
0.20	0.30	0.10	0.25	0.25	0.26	0.25	198 948
0.30	0.40	0.13	0.35	0.34	0.37	0.35	199 173
0.40	0.50	0.17	0.45	0.43	0.49	0.45	162 309
0.50	0.60	0.21	0.55	0.50	0.62	0.55	120 559
0.60	0.70	0.24	0.65	0.56	0.77	0.65	87 705
0.70	0.80	0.28	0.75	0.61	0.91	0.74	63 738
0.80	0.90	0.32	0.85	0.66	1.06	0.83	46 237
0.90	1.00	0.36	0.95	0.69	1.22	0.92	34 394
1.00	1.10	0.40	1.05	0.72	1.36	1.00	25 576
1.10	1.20	0.44	1.15	0.75	1.51	1.09	19 630
1.20	1.30	0.48	1.25	0.77	1.64	1.17	14 951
1.30	1.50	0.54	1.39	0.79	1.82	1.29	20 845
1.50	2.00	0.67	1.71	0.83	2.14	1.51	25 788

**Таблица 4.** Характеристики выборок звезд из III класса светимости. Единицы измерений расстояний — кпк

$r_{\min}$	$r_{\max}$	$\sigma_{\pi}/\pi$	Rpi	Exp1	Exp2	MW	Число звезд
0.20	0.30	0.09	0.27	0.26	0.27	0.27	2761
0.30	0.40	0.13	0.36	0.35	0.37	0.36	11 295
0.40	0.50	0.17	0.46	0.43	0.49	0.46	25 070
0.50	0.60	0.21	0.55	0.50	0.63	0.55	37 978
0.60	0.70	0.25	0.65	0.56	0.78	0.65	46 118
0.70	0.80	0.28	0.75	0.62	0.93	0.73	49 135
0.80	0.90	0.32	0.85	0.66	1.07	0.82	46 927
0.90	1.00	0.35	0.95	0.70	1.21	0.90	41 675
1.00	1.10	0.39	1.05	0.73	1.35	0.98	36 073
1.10	1.20	0.43	1.15	0.76	1.49	1.05	30 147
1.20	1.30	0.46	1.25	0.78	1.62	1.12	24 780
1.30	1.40	0.51	1.35	0.80	1.75	1.19	20 478
1.40	1.60	0.56	1.49	0.83	1.91	1.28	30 568
1.60	1.80	0.65	1.69	0.85	2.11	1.38	20 715
1.80	2.00	0.74	1.89	0.86	2.28	1.48	14 413
2.00	2.25	0.84	2.12	0.88	2.43	1.56	12 241
2.25	2.50	0.95	2.37	0.89	2.56	1.62	8341
2.50	2.75	1.08	2.62	0.89	2.67	1.67	5724
2.75	3.00	1.18	2.87	0.90	2.75	1.71	3917
3.00	4.00	1.43	3.39	0.91	2.87	1.77	7084



**Рис. 4.** Средние расстояния до звезд выборок (слева), полная скорость движения Солнца (справа), определенная по собственным движениям TGAS для красных гигантов, в различных вариантах расстояний: точки —  $R_{pi}$ , сплошная линия — Exp1, штриховая линия — Exp2, штрихпунктирная линия — MW.

известный факт о том, что для значений относительных погрешностей измерения параллаксов, не превышающих 10–15%, все варианты расстояний практически совпадают. Это имеет место в сфере радиуса приблизительно 0.5 кпк. Для более далеких звезд картина меняется. Например, для звезд главной последовательности в диапазоне  $1.30 < R_{pi} < 1.50$  кпк поправочные множители для перехода из  $R_{pi}$  в другие варианты расстояний равны  $Exp1=0.57R_{pi}$ ,  $Exp2=1.31R_{pi}$ ,  $MW=0.93R_{pi}$ . Аналогичные поправки для расстояний  $R_{pi}$  красных гигантов в диапазоне  $1.40 < R_{pi} < 1.60$  кпк имеют следующий вид:  $Exp1=0.56R_{pi}$ ,  $Exp2=1.28R_{pi}$ ,  $MW=0.86R_{pi}$ . В полном согласии с рис. 2 и 4 эти формулы говорят о том, что шкала Exp1 сильно уменьшает расстояния  $R_{pi}$ , а шкала Exp2, наоборот, сильно их увеличивает. При этом шкала MW изменяет шкалу  $R_{pi}$  весьма умеренно.

#### 4. ЧЕТЫРЕ ВАРИАНТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Поскольку все варианты гелиоцентрических расстояний до звезд каталога TGAS получены на основе некоторых трудно проверяемых априорных предположений, мы провели кинематический анализ звезд каталога TGAS со всеми имеющимися в нашем распоряжении вариантами расстояний. Сопоставление полученных результатов позволит выяснить степень влияния различных шкал расстояний на оценки кинематических параметров. На рис. 2 и 3 показаны результаты совместного решения уравнений (4) и (5) по звездам главной последовательности, а на рис. 4 и 5 — аналогичные результаты, полученные по красным гигантам (мы не приводим результаты для параметров  $M_{13}^+$ ,  $M_{23}^+$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , поскольку их поведение вполне аналогично параметрам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $K$ ). Анализ этих рисунков говорит о том, что изменение шкалы

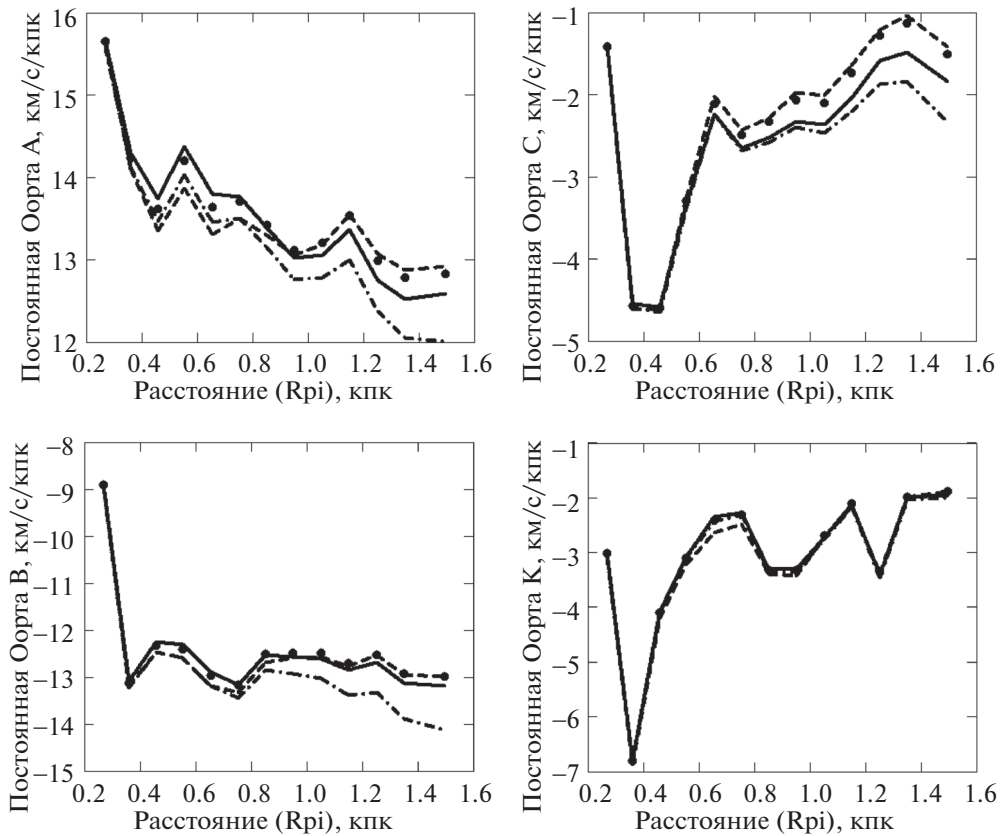
расстояний приводит к радикальному изменению только оценок скорости движения Солнца. Оценки остальных параметров модели Огородникова–Милна не претерпевают значительных смещений при замене шкалы расстояний  $R_{pi}$  на шкалы Exp1, Exp2. Умеренные смещения для далеких звезд наблюдаются только для параметров  $A$ ,  $B$ ,  $C$  при замене шкал  $R_{pi}$ , Exp1 и Exp2 на MW. При этом результаты, полученные для этих параметров при использовании вариантов  $R_{pi}$ , Exp1 и Exp2, практически совпадают. Следует особо подчеркнуть, что такой подход к анализу кинематики далеких звезд существенно опирается на получение решений основных кинематических уравнений в узких зонах гелиоцентрических расстояний. Это обстоятельство можно легко объяснить, если записать уравнения (4) и (5) в векторном виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
 K\mu_l \cos be_l + K\mu_b e_b = & -U/r \frac{S_{111}(l, b)}{\rho_{11}} - \quad (17) \\
 & - V/r \frac{S_{110}(l, b)}{\rho_{11}} - W/r \frac{S_{101}(l, b)}{\rho_{10}} + \\
 & + \omega_1 \frac{T_{111}(l, b)}{\rho_{11}} + \omega_2 \frac{T_{110}(l, b)}{\rho_{11}} + B \frac{T_{101}(l, b)}{\rho_{10}} + \\
 & + \frac{M_{13}^+ S_{211}(l, b)}{3 \rho_{21}} + \frac{M_{23}^+ S_{210}(l, b)}{3 \rho_{21}} + \frac{A S_{220}(l, b)}{6 \rho_{22}} + \\
 & + \frac{C S_{221}(l, b)}{6 \rho_{22}} - \frac{K S_{201}(l, b)}{3 \rho_{20}},
 \end{aligned}$$

где

$$\rho_{nk} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi n(n+1)}} \begin{cases} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k > 0; \\ 1, & k = 0. \end{cases} \quad (18)$$

В формуле (17)  $e_l$  и  $e_b$  — орты в направлении изменений галактических долгот и широт,  $T_{nkp}(l, b)$



**Рис. 5.** Параметры Оорта, определенные по собственным движениям TGAS для звезд III класса светимости, в различных вариантах расстояний: точки —  $R_{pi}$ , сплошная линия —  $Exr1$ , штриховая линия —  $Exr2$ , штрихпунктирная линия —  $MW$ .

и  $S_{nkp}(l, b)$  — тороидальные и сфероидальные векторные сферические функции. Определения этих функций можно найти в статье Витязева и Цветкова (2009).

Векторные сферические функции ортонормированы на сфере:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega &= & (19) \\ &= \iint_{\Omega} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) d\omega = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{T}_j) d\omega = 0, \quad \forall i, j. \quad (20)$$

По этой причине при условии  $r = \text{const}$  корреляционная матрица метода наименьших квадратов является диагональной, что обуславливает определение кинематических параметров независимо друг от друга. Вполне понятно, что переход на другое значение постоянного для всех звезд расстояния не меняет вид корреляционной матрицы, но приведет только к изменению значений параметров

$U, V, W$ . Однако решение уравнений в широких зонах расстояний может привести к коррелированности искомых параметров, и тогда переход на другую шкалу расстояний может вызвать существенные изменения всех кинематических параметров.

Отсюда следует очень важный вывод: кинематический анализ собственных движений звезд, находящихся на больших гелиоцентрических расстояниях (свыше 600 пк), возможен без коррекции расстояний  $R_{pi}$  только с точки зрения получения оценок постоянных Оорта  $A, B, C, K$  и значений  $\omega_2, \omega_1, M_{13}^+, M_{23}^+$ . Изучение компонент скорости движения Солнца без указанной коррекции возможно только для близких звезд (до 600 пк).

Полученный здесь вывод о характере влияния шкалы расстояний на оценки параметров модели Огородникова—Милна находится в согласии с результатами работы Бобылева и др. (2009), в которой на основе численного моделирования было показано, что относительные ошибки измерения расстояний вплоть до 60% вызывают только изменение компоненты скорости Солнца  $V$ .



**Таблица 5.** Компоненты скорости движения Солнца относительно звезд с гелиоцентрическими расстояниями до 0.6 кпк

Компоненты	Класс светимости V	Класс светимости III
$U$ , км/с	$8.90 \pm 0.04$	$7.97 \pm 0.13$
$V$ , км/с	$18.98 \pm 0.04$	$22.45 \pm 0.13$
$W$ , км/с	$7.00 \pm 0.04$	$6.34 \pm 0.11$
$V_{\odot}$ , км/с	$22.10 \pm 0.04$	$24.65 \pm 0.13$
$L_{\odot}$ , град	$64.88 \pm 0.11$	$70.45 \pm 0.31$
$B_{\odot}$ , град	$18.47 \pm 0.08$	$14.90 \pm 0.26$

## 5. КИНЕМАТИКА ЗВЕЗД ГЛАВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И КРАСНЫХ ГИГАНТОВ

Проведенный в предыдущем пункте анализ влияния шкал расстояний на результаты кинематического анализа собственных звезд позволяет использовать шкалу  $R_p$  для получения компонент скорости движения Солнца только до 0.6 кпк (табл. 5). Что касается остальных параметров модели Огородникова—Милна, то надежность их определения определяется не шкалой расстояний, а границей применимости линейного приближения (до 1.5 кпк). Исходя из этого результата, мы проведем исследование кинематических параметров звезд III и V классов светимости с использованием варианта расстояний  $R_p$ .

Рисунки 3 и 5 дают представление о значении кинематических параметров в зависимости от среднего радиуса тонких (0.1 кпк) сферических слоев. Хотя соответствующие кривые показывают определенный ход по гелиоцентрическим расстояниям, вряд ли эти изменения параметров можно связать с реальной кинематикой наших сферических слоев. Как было сказано выше, тонкие слои использовались нами для ослабления влияния ошибок расстояний на значения постоянных Оорта. В этой ситуации реальная кинематика звезд, заключенных в объеме до 1.5–1.6 кпк, может анализироваться с помощью средневзвешенных значений кинематических параметров, полученных в тонких сферических слоях. Эти оценки показаны в табл. 6 для красных гигантов и звезд главной последовательности. Осреднение проводилось в диапазонах  $0.1 < r < 1.5$  кпк и  $0.2 < r < 1.6$  кпк для звезд главной последовательности и красных гигантов соответственно. В этой же таблице приведены и оценки других кинематических параметров, вычисленных по формулам (9)–(12). Ниже приводится сравнительный анализ результатов, полученных по звездам главной последовательности и по красным гигантам.

### 5.1. Компоненты скорости Солнца $U$ , $V$ , $W$

Из рис. 2, 4 следует, что инвариантность оценок скорости Солнца  $U$ ,  $V$ ,  $W$  относительно различных шкал расстояний имеет место лишь для звезд, удаленных от Солнца не более чем на 0.6 кпк. В табл. 5 показаны средневзвешенные значения оценок компонент скорости Солнца  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , оценки полной скорости Солнца  $V_{\odot}$ , координаты апекса движения Солнца  $L_{\odot}$ ,  $B_{\odot}$  относительно звезд с расстояниями до 0.6 кпк. Как видим, для близких звезд имеет место практически совпадение параметров  $U$  и  $W$  для звезд главной последовательности и красных гигантов и заметное различие соответствующих значений параметров  $V$ ,  $V_{\odot}$ , а также координат апекса движения Солнца  $L_{\odot}$ ,  $B_{\odot}$ . Отметим, что найденные нами координаты апекса Солнца отличаются от координат так называемого стандартного апекса  $L_{\odot} = 56^{\circ}$ ,  $B_{\odot} = 23^{\circ}$ , однако находятся в пределах значений, определенных по карликам и гигантам различных спектральных классов (Михалас, Бинни, 1981).

### 5.2. Коэффициенты Оорта $A$ и $B$ . Параметры вращения Галактики

Коэффициенты Оорта  $A$  и  $B$ , полученные для классов светимости III и V, существенно различны (табл. 6), что приводит к интересным особенностям поведения параметров вращения Галактики, определенных по звездам главной последовательности и красным гигантам. Например, скорость вращения Галактики на галактоцентрическом расстоянии  $R_S = 8 \pm 0.2$  кпк, полученная по звездам главной последовательности, превышает значение скорости, найденное по красным гигантам. Из формулы (12) следует, что сумма коэффициентов Оорта  $A$  и  $B$  определяет наклон кривой вращения Галактики в окрестности Солнца. Данные табл. 6 говорят о том, что для звезд главной последовательности скорость вращения Галактики убывает по мере удаления звезд от центра Галактики гораздо быстрее, чем для красных гигантов.

Найденные в настоящей работе значения кинематических параметров поля скоростей звезд интересно сравнить с результатами, полученными другими авторами. Например, по ветви красных гигантов в каталоге *TucHo-2* были найдены следующие значения постоянных Оорта:  $A = 16.2 \pm 2$  км/с/кпк,  $B = -13 \pm 2$  км/кпк (Гончаров, 2011). В работе Расторгуева и др. (2017) были использованы 136 мазеров в диапазоне галактоцентрических расстояний 0–16 кпк. При этом для модели  $S1$  (модель постоянной радиальной дисперсии скоростей) компоненты скорости Солнца составили  $(U, V, W) = (10.98, 19.62, 8.93) \pm \pm (1.40, 1.15, 1.05)$  км/с, а угловая скорость вращения Галактики  $\Omega = 28.35 \pm 0.45$  км/с/кпк. Ранее из

**Таблица 6.** Кинематические параметры поля скоростей звезд каталога TGAS с гелиоцентрическими расстояниями до 1.6 кпк

Параметры	Класс светимости V	Класс светимости III
$A$ , км/с/кпк	$16.29 \pm 0.06$	$13.32 \pm 0.09$
$B$ , км/с/кпк	$-11.90 \pm 0.05$	$-12.71 \pm 0.06$
$C$ , км/с/кпк	$-2.99 \pm 0.06$	$-2.04 \pm 0.08$
$K$ , км/с/кпк	$-4.04 \pm 0.16$	$-2.72 \pm 0.19$
$M_{13}^+$ , км/с/кпк	$-0.36 \pm 0.09$	$-0.68 \pm 0.11$
$M_{23}^+$ , км/с/кпк	$1.83 \pm 0.09$	$-0.64 \pm 0.11$
$\omega_1$ , км/с/кпк	$1.36 \pm 0.08$	$-0.52 \pm 0.09$
$\omega_2$ , км/с/кпк	$-0.23 \pm 0.08$	$-0.82 \pm 0.09$
$\Omega$ , км/с/кпк	$28.19 \pm 0.08$	$26.03 \pm 0.11$
$V_S$ , км/с	$226.08 \pm 0.62$	$208.24 \pm 0.87$
$R$ , млн лет	$217.41 \pm 0.60$	$236.03 \pm 0.98$
$\frac{\partial V_S}{\partial R}$ , км/с/кпк	$-4.32 \pm 0.08$	$-0.61 \pm 0.11$

анализа мазеров в работе Хонмы и др. (2012) была получена оценка скорости Солнца  $V_S = 238 \pm 14$  км/с (при  $R_S = 8.05 \pm 0.45$  кпк), в работе Рида и др. (2014) определена скорость  $V_S = 240 \pm 8$  км/с (при  $R_S = 8.34 \pm 0.16$  кпк).

По скоростям 260 цефеид с собственными движениями из каталога Gaia DR1 Бобылевым (2017) были найдены компоненты вектора пекулярной скорости Солнца  $(U, V, W) = (7.90, 11.73, 7.39) \pm (0.65, 0.77, 0.62)$  км/с и значение угловой скорости вращения Галактики:  $\Omega = 28.84 \pm 0.33$  км/с/кпк. При этом были получены оценки круговой скорости вращения местного стандарта покоя вокруг центра Галактики  $V_0 = 231 \pm 6$  км/с и значения постоянных Оорта  $A = 16.20 \pm 0.38$  км/с/кпк,  $B = -12.64 \pm 0.51$  км/кпк.

Бобылевым, Байковой (2017) по 238 ОВ-звездам с использованием собственных движений из каталога Gaia DR1 были найдены следующие значения кинематических параметров:  $(U, V, W) = (8.19, 9.28, 8.79) \pm (0.74, 0.92, 0.74)$  км/с,  $\Omega = 31.53 \pm 0.54$  км/с/кпк, и значения постоянных Оорта  $A = 17.77 \pm 0.46$  км/с/кпк и  $B = -13.76 \pm 0.71$  км/с/кпк, а также  $V_S = 252 \pm 8$  км/с (для  $R_0 = 8.0 \pm 0.2$  кпк).

В работе Бобылева, Байковой (2016) были проанализированы звезды с лучевыми скоростями из каталога RAVE4 и собственными

движениями из каталога UCAC4. По выборке из более 145 000 звезд были найдены следующие кинематические параметры:  $(U, V, W) = (9.12, 20.80, 7.66) \pm (0.10, 0.10, 0.08)$  км/с,  $\Omega = 28.71 \pm 0.63$  км/с/кпк, а также значения постоянных Оорта  $A = 17.12 \pm 0.45$  км/с/кпк и  $B = -11.60 \pm 0.77$  км/с/кпк.

Можно заключить, что использование собственных движений звезд из каталога Gaia TGAS позволяет оценивать кинематические параметры нашей модели в хорошем согласии с результатами анализа независимых данных.

### 5.3. Параметры $\omega_1, \omega_2$ и $M_{13}^+, M_{23}^+$

Как следует из табл. 6, угловые скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  значимо отличаются от нуля. Это довольно неожиданный результат, свидетельствующий о том, что рассматриваемые нами центроиды звезд имеют твердотельное вращение не только вокруг основной Галактической оси  $z$ , но и вокруг двух других осей  $x$  и  $y$ . Значимыми оказались и параметры  $M_{13}^+, M_{23}^+$ . Если считать, что пары  $(\omega_1, M_{23}^+)$  и  $(\omega_2, M_{13}^+)$  являются в соответствующих плоскостях аналогами постоянных Оорта  $B$  и  $A$  соответственно, то можно сделать вывод о том, что в окрестностях Солнца мгновенная скорость вращения Галактики слегка отклоняется от перпендикуляра к основной плоскости Галактики.

### 5.4. Коэффициенты Оорта $C$ и $K$

Оба параметра  $C$  и  $K$  (табл. 6) имеют отрицательный знак для обоих классов светимости. Полученные нами значения этих параметров хорошо согласуются с оценками, полученными другими авторами. Например, Бови (2017) приводит следующие значения, полученные по звездам главной последовательности:  $C = -3.2 \pm 0.4$  км/с/кпк,  $K = -3.3 \pm 0.6$  км/с/кпк. В работе Бобылева и др. (2009) показано, что значение параметра  $K$  существенно зависит от того, относятся ли исследуемые звезды к тонкому галактическому диску или лежат вне его. Для красных гигантов, расположенных в плоскости галактического диска, ими получено значение  $K = -3.5 \pm 0.9$  км/с/кпк. Ранее Оллинг и Денен (2003) в своей работе показали, что значение параметра  $C$  существенно зависит от возраста исследуемой группы звезд. Для красных гигантов (не включая сгущение красных гигантов) ими получена оценка  $C = -10.2 \pm 2.5$  км/с/кпк. Для звезд главной последовательности ими найдены оценки  $C$  от  $-2$  до  $-4$  км/с/кпк, а для сгущения красных гигантов  $C = -4.4$ , но с большими ошибками.

### 5.5. Изгиб Галактического диска

В работах Миямото, Зи Жу (1998) и Зи Жу (2000) показано, что величина

$$\Sigma = \omega_1 + M_{32}^+ \quad (21)$$

связывается с кинематическим проявлением локального изгиба плоскости Галактики. По собственным движениям  $O - B5$  звезд каталога HIPPARCOS эти авторы определили следующее значение  $\Sigma = 3.79 \pm 1.05$  км/с/кпк, которое находится в хорошем согласии со значением, определенным ими ранее (Миямото и др., 1993) по каталогу ACRS (Корбин и др., 1991). В нашем случае, как это следует из таблицы 6, для звезд главной последовательности имеем  $\Sigma = 3.19 \pm \pm 0.12$  км/с/кпк, что согласуется с приведенными выше результатами, однако для красных гигантов это значение имеет противоположный знак ( $\Sigma = -1.16 \pm 0.14$  км/с/кпк).

Нужно сказать, что отрицательный знак величины  $\Sigma$  был получен и в других работах. Так, в статье Лопес-Коррейдора (2014), при изучении вертикальных скоростей звезд диска в диапазоне галактоцентрических расстояний до 5.16 кпк на расстояниях до 2 кпк от Галактической плоскости для величины  $\Sigma$  были найдены значения, лежащие в пределах от  $-4$  до  $-1$  км/с/кпк, что не совпадает с результатами Миямото, Зи Жу (1998) и Зи Жу (2000), однако согласуется, по крайней мере, по знаку со значениями  $\Sigma = -4$  км/с/кпк и  $\Sigma = -15$  км/с/кпк (Бобылев, 2010, 2013), полученным по красным гигантам и цефеидам.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ключевым моментом в нашей статье является проверка влияния различных шкал расстояний до звезд каталога TGAS на определение кинематических параметров линейной модели Огородникова—Милна. Естественным ограничением на использование этой модели является расстояние 1.5 кпк (Огородников, 1965). Однако из-за всегда присутствующих ошибок измерений параллаксов вычисление расстояний, превышающих 0.5 кпк, является сложной задачей, требующей использования различных априорных предположений о распределении звезд в пространстве и не имеющей однозначного решения. Анализ четырех вариантов решений основных кинематических уравнений позволил получить важный результат: кинематический анализ собственных движений далеких звезд при использовании различных вариантов расстояний до звезд каталога TGAS приводит к существенному изменению только компонент скорости движения Солнца и практически не влияет на определение постоянных Оорта и других параметров модели.

Это обстоятельство дает возможность получить надежные оценки постоянных Оорта и связанные с ними характеристики поля скоростей, используя звезды с гелиоцентрическими расстояниями  $R_{\text{p}}$  вплоть до 1.5 кпк.

Опираясь на этот вывод, мы провели кинематический анализ собственных движений звезд каталога TGAS для главной последовательности и красных гигантов. Перечислим основные выводы, которые были сделаны на основе этих вычислений.

1. В диапазоне расстояний 0.2–0.6 кпк для звезд главной последовательности и красных гигантов наблюдается согласие лишь компонент скорости движения Солнца  $U$  и  $W$ . Все остальные параметры солнечного движения существенно разнятся.

2. В диапазоне расстояний 0.2–1.6 кпк кинематические параметры модели Огородникова—Милна статистически надежны, но различаются для звезд главной последовательности и красных гигантов.

3. Различие постоянных Оорта для звезд главной последовательности и красных гигантов приводит к различию всех остальных параметров, которые определяются через значения  $A$  и  $B$ . Например, период вращения Галактики на расстоянии 8 кпк, определенный по звездам главной последовательности, составляет  $217.41 \pm 0.60$  млн лет, в то время как аналогичная оценка по красным гигантам равна  $236.03 \pm 0.98$  млн лет.

4. Градиент изменения скорости вращения Галактики вдоль радиуса-вектора (наклон кривой вращения Галактики) для звезд главной последовательности равен  $-4.32 \pm 0.08$  км/с/кпк, а для красных гигантов  $-0.61 \pm 0.11$  км/с/кпк, что говорит о том, что скорость вращения Галактики, определенная по звездам главной последовательности, убывает по мере удаления от центра Галактики быстрее, чем для красных гигантов.

По существующим прогнозам окончательный каталог Gaia будет содержать астрометрическую информацию приблизительно для 1 млрд звезд. При этом только для 20% звезд относительная точность измерения параллаксов не будет превосходить 20% (Байлер-Джонс, 2015). Это означает, что вычисление гелиоцентрических расстояний до 800 млн звезд будет представлять собой сложную задачу, требующую привлечения дополнительной информации для каждой звезды. Очевидно, что однозначного решения такая задача не имеет. Однако в каждом конкретном случае, требующем знания расстояний до звезд, можно проводить сопутствующие исследования, показывающие, как различные методы определения расстояний влияют на результаты решения конкретной задачи. Именно такой подход демонстрирует настоящая статья на примере использования первого релиза проекта Gaia в задачах звездной кинематики.

Авторы выражают благодарность анонимным рецензентам за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 6.37.343.2015.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арену (F. Arenou), ASP Conf. Ser. **167** (Ed. D. Egret, A. Heck, 1999).
2. Астраатмадья, Байлер-Джонс (T.L. Astraatmadja and C.A.L. Bailer-Jones), *Astrophys. J.* **832**, 137 (2016).
3. Астраатмадья, Байлер-Джонс (T.L. Astraatmadja and C.A.L. Bailer-Jones), *Astrophys. J.* **833**, 119 (2017).
4. Байлер-Джонс (C.A.L. Bailer-Jones), *Publ. Astron. Soc. Pacific* **127**, 994 (2015).
5. Бобылев В.В., Письма в Астрон. журн. **36**, 667 (2010) [V.V. Bobylev, *Astron. Lett.* **36**, 634 (2010)].
6. Бобылев В.В., Письма в Астрон. журн. **39**, 909 (2013) [V.V. Bobylev, *Astron. Lett.* **39**, 819 (2013)].
7. Бобылев В.В., Письма в Астрон. журн. **43**, 177 (2017). [V.V. Bobylev, *Astron. Lett.* **43**, 152 (2017)].
8. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Письма в Астрон. журн. **42**, 110 (2016) [V.V. Bobylev and A.T. Bajkova, *Astron. Lett.* **42**, 90 (2016)].
9. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Письма в Астрон. журн. **43**, 185 (2017). [V.V. Bobylev and A.T. Bajkova, *Astron. Lett.* **43**, 159 (2017)].
10. Бобылев В.В., Степанищев А.С., Байкова А.Т., Гончаров Г.А., Письма в Астрон. журн. **35**, 920 (2009) [V.V. Bobylev, A.S. Stepanishchev, A.T. Bajkova, G.A. Gontcharov], *Astron. Lett.* **35**, 836 (2009)].
11. Бови (Jo Bovy), *MNRAS (Lett.)* **468**, L63 (2017).
12. Валли (J.P. Vallee), *Astrophys. Sp. Sci.* **364**, 79 (2017).
13. Витязев В.В., Цветков А.С., Письма в Астрон. журн. **35**, 114 (2009) [V.V. Vityazev, A.S. Tsvetkov, *Astron. Lett.* **35**, 100 (2009)].
14. Гончаров Г.А., Письма в Астрон. журн. **37**, 769 (2011) [G.A. Gontcharov, *Astron. Lett.* **37**, 707 (2011)].
15. Денен, Бинни (W. Dehnen and J.J. Binney), *MNRAS* **298**, 387 (1998).
16. Дю Монт (B.A. du Mont), *Astron. Astrophys.* **61**, 127 (1977).
17. ESA, 1997 (ESA Special Publication), Vol. 1200, The Hipparcos and TYCHO catalogues. Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA HIPPARCOS Space Astrometry Mission.
18. Зи Жу (Zi Zhu), *Publ. Astron. Soc. Japan* **52**, 1133 (2000). *Astron. J.* **145**, 44 (2013).
19. Корбин и др. (T.E. Corbin, S.E. Urban, and W.H. Warren, Jr.), *Astrographic Catalogue Reference Stars (ACRS)*, USNO (1991).
20. Линдегрэн и др., (L. Lindegren, U. Lammers, U. Bastian, J. Hernandez, S. Klioner, D. Hobbs, A. Bombrun, D. Michalik, et al.), *Astron. Astrophys.* **595**, 4L (2016).
21. Лопес-Коррейдора и др. (M. Lopez-Correidora, et al.), *Astron. Astrophys.* **572**, 101 (2014).
22. Лутц, Келкер (T.E. Lutz and D.H. Kelker), *Publ. Astron. Soc. Pacific* **85**, 573 (1973).
23. Михалас, Бинни (D. Mihalas and J. Binney), *Galactic Astronomy* (Ed. W. H. Freeman, 1981).
24. Миямото и др. (M. Miyamoto, M. Soma, and M. Yoshizawa), *Astron. J.* **105**, 2138 (1993).
25. Миямото, Зи Жу (M. Miyamoto and Zi Zhu), *Astron. J.* **115**, 1483 (1998).
26. Огородников К.Ф., *Динамика звездных систем* (М.: Физматгиз, 1965).
27. Оллинг, Денен (R.P. Olling and W. Dehnen), *Astrophys. J.* **599**, 275 (2003).
28. Попов А.В., Витязев В.В., Цветков А.С., Спектральные параллаксы звезд каталога Tycho-2, *Вестн. С.-Петербург. ун.-та. Сер. 1*, вып. 4 (2006).
29. Райт и др. (C.O. Wright, M.P. Egan, K.E. Kraemer, and S.D. Price), *Astron. J.* **125**, 359 (2003).
30. Расторгуев и др., *Астрофиз. Бюлл.* **72**, 134 (2017).
31. Рид и др. (M.J. Reid, K.M. Menten, A. Brunthaler, X.W. Zheng, T.M. Dame, Y. Xu, Y. Wu, B. Zhang, et al.), *Astrophys. J.* **783**, 130 (2014).
32. Смит, Эйххорн (H. Smith, Jr. and H. Eichhorn), *MNRAS* **281**, 211 (1996).
33. Торра и др., (J. Torra, D. Fernandez, and F. Figueras), *Astron. Astrophys.* **359**, 82 (2000).
34. Урбан и др. (S.E. Urban, T.E. Corbin, G.L. Wycoff, J.C. Martin, E.S. Jackson, M.I. Zacharias, and D.M. Hall), *Astron. J.* **115**, 1212 (1998).
35. Хег и др. (E. Hoeg, C. Fabricius, V.V. Makarov, S. Urban, T. Corbin, G. Wycoff, U. Bastian, P. Schwekendrick, and A. Wicenc), *Astron. J.* **355**, L27 (2000).
36. Хенден и др. (A.A. Henden, S. Levine, J. Terrell, and D.L. Welch), *Am. Astron. Soc. Meet.* **225**, id.336.16 (2015).
37. Хонма и др. (M. Honma, T. Nagayama, K. Ando, T. Bushimata, Y.K. Choi, T. Handa, T. Hirota, H. Imai, T. Jike, et al.), *Publ. Astron. Soc. Japan* **64**, 136 (2012).