6 Звезды

6.1 Общие характеристики звезд

1. *Блеск звезды.* Звездная величина m характеризует освещенность, создаваемую звездой на поверхности Земли или за границей ее атмосферы. Обычно используется вторая характеристика, поскольку атмосфера меняет прозрачность. Для точечных источников (большую часть звезд можно считать таковыми) эта освещенность $E \sim I/r^2$, где r – расстояние до звезды, I – интенсивность излучения звезды. По определению (формула Пактона) $m = -2.5 \lg E + const$, где постоянная определяет нуль-пункт.

Ясно, что видимая звездная величина m не есть характеристика непосредственно звезды, поскольку зависит от расстояния до нее. Чтобы сравнивать звезды, мы должны, как бы, перенести их на одно расстояние. Поэтому второй необходимой характеристикой является расстояние r.

2. *Тригонометрический параллакс* является мерой расстояния до звезды r. Он может быть определен прямо и косвенно. За единицу расстояния принято 10 пс (параллакс $\pi = 0.1^ppr$). Звездная величина для этого расстояния есть

$$M = -2.5 \lg I = -2.5 \lg E - 5 \lg r. \tag{1}$$

Если r в пс, а π в секундах, то

$$M = m + 5 - 5 \lg r = m + 5 + 5 \lg \pi. \tag{2}$$

Абсолютная звездная величина M является основной характеристикой звезды.

Светимость звезды L пропорциональная I, так что

$$-2.5 \lg \frac{L_*}{L_\odot} = M_* - M_\odot, \quad \text{и} \quad L = 10^{0.4(M_* - M_\odot)}. \tag{3}$$

Напомним, что $L = 4\pi R^2 H$, где $H = \sigma T_e^4$ – поток излучения, а R – радиус звезды.

3. *Спектры звезд* чрезвычайно многообразны. Гарвардская классификация спектров звезд была проведена по виду абсорбционного спектра, но были догадки, что это не просто для установления порядка, а за этим есть физические основания.

Были выбраны следующие признаки:
Класс A – хорошо видны бальмеровские линии
Класс B – помимо бальмеровских, есть линии гелия
Класс F – помимо слабеющих бальмеровских, линии H,K CaII
Класс G – хорошо видна сильная линия вблизи H_γ
Класс K – много линий нейтральных металлов
Класс M – видны молекулярные полосы
По виду спектра на глаз можно было легко определить класс звезды.

После построения теории звездных атмосфер выяснилось, что это классификация по температуре, имеющая следующий вид:

$$O--B--A--F--G--K--M \qquad K--S \quad K--N--R. \tag{4}$$

Ветви добавились, поскольку у звезд класса M в спектре видны линии TiO, но есть похожие спектры с другими молекулярными полосами: класс S – линии окиси циркония, класс C – полосы углеродных молекул, причем класс C разделяется по силе полос на классы N и R.

Позднее поделили классы на подклассы. Например, B0, B1, ..., B8, причем между B0 и B1 вставили B0.5. При этом у B8 видна только бальмеровская серия, в сторону класса O появляются линии гелия, в частности у B5 есть линия HeI на 4026 A. У звезд класса O линии не нейтрального, а ионизованного гелия, например на 4200 A. У звезд класса A появляется слабая линия K CaII. К звездам класса F интенсивность линий кальция растет. У звезды F0 интенсивность линии K сравнивается с интенсивностью линии H_ε. При переходе к G0 бальмеровские линии ослабевают настолько, что видны только линии до H_ε, а также линии кальция (K) и ионизованных металлов. В спектрах класса K появляется большое число линий нейтральных атомов (например, CaI на 4227 A), а линии ионизованных ослабевают. Для классов S, M, C характерно появление молекулярных полос. Есть и пекулярные спектры, например класс Ap, где аномально сильны металлические линии.

Расчеты показывают, что линейчатый спектр звезд есть функция эффективной температуры T_e и ускорения силы тяжести на поверхности g. При этом зависимость от T_e сильная, а от g сравнительно слабая. Таким образом, Гарвардская классификация отражает зависимость от температуры.

Рассмотрим влияние ускорения силы тяжести g на вид линий и на их появление. Во-первых, степень ионизации. Из формулы Саха $p_e\frac{n^+}{n_1} = ...f(T)$, при равенстве правых частей степень ионизации тем больше, чем больше p_e. Если $\frac{n^+}{n_1}$ одно и то же (один спектральный класс), то при меньшем p_e получится меньшая T.

Пусть T примерно одно и то же, но одна звезда является гигантом (g мало), а другая – карликом. Если g мало, то атмосфера протяженная (физически это гигант), и p_e мало, и тогда степень ионизации больше. Для легко ионизуемых элементов, например, будет будет много ионов Sr II, а не Sr I и появится линия Sr II λ 4077, типичная для гигантов. Поэтому появление некоторых линий (точнее изменение относительной интенсивности пар линий)

Во-вторых, ширины линий. Существуют совершенно одинаковые спектры в смысле относительных интенсивностей линий, но в одном они широкие, а в другом – узкие. Какой параметр определяет ширину линий? Возможные причины уширения:
а) эффект Допплера – тепловое движение дает ширину $\sim$0.5 A и турбулентность примерно то же, в итого около 1 A, а наблюдаются большие;
б) затухание вследствие излучения – расширение $\sim Nf$, где N – число атомов, f – сила осциллятора; расчеты показывают, что Nf одно и то же у гигантов и карликов;
в) расширение вследствие соударений – микроскопический эффект Штарка (смещение уровней).

Появилась двумерная спектральная классификация – МКК. Французская λ_1, D, φ_b. Итак, мы имеем светимость и спектр, по этим данным строится диаграмма Гершпрунга-Рассела.

Обсудим модели звездных атмосфер и химический состав звезд.

Теория звездных атмосфер (см. главу про Солнце) была изложена нами ранее. Выбрав химический состав, T_e и g, используя эту теорию, можно построить модель звездной атмосферы, т.е. рассчитать непрерывный и линейчатый спектр звезды. Эта задача решается при следующих предположениях и начальных условиях.

Задается:
1) T_e, $\quad \sigma T_e^4 = \frac{L}{4\pi R^2}$, где светимость, радиус и масса звезды задается (их определение обсуждается ниже);
2) g, $\quad g = G\frac{M}{R^2}$;
3) химический состав.

Предположения:
1) толщина фотосферы мала ($\frac{\Delta R}{R} \approx 10^{-3}$), т.е. слои рассматриваются как плоскопараллельные;

2) источники энергии внутри звезды и перенос осуществляется лучеиспусканием;
3) локальное термодинамическое равновесие (используем формулу Планка);
4) механическое равновесие, т.е. при действии тяготения, газового и светового давления атмосфера стационарна;
5) химический состав в пределах атмосферы постоянен;
6) поглощение энергии объемом происходит только в непрерывном спектре.

При этом получаются уравнения:

$$\begin{aligned} \cos\theta\frac{\mathrm{d}J_\nu}{\mathrm{d}r} &= -\alpha_\nu J_\nu + \varepsilon_\nu, & (5)\\ \int_0^\infty \varepsilon_\nu \mathrm{d}\nu &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \alpha_\nu \mathrm{d}\nu \int_0^\pi J_\nu \sin\theta \mathrm{d}\theta, & (6)\\ \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} &= B_\nu(T), & (7)\\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} &= -g\rho. & (8) \end{aligned}$$

Из первых трех уравнений можно получить уравнение, связывающее $\rho(\tau)$ и $T(\tau)$. И еще одно соотношение, их связывающие, из последнего уравнения и уравнения состояния, например

$$p = \frac{k}{\mu m_H}\rho T. \tag{9}$$

Это позволяет найти зависимости $\rho(\tau)$ и $T(\tau)$ и далее поток H_ν, для чего нужно знание α_ν. Выражение для него крайне сложно, поэтому берут разные средние значения и находят $\rho(\tau)$ и $T(\tau)$. После этого находят α_ν на любой глубине и распределение энергии в спектре H_ν.

Отклонения химического состава от солнечного различны:

1. *Металлические звезды.* Тип Ap – линии металлов узкие, т.е. звезда-гигант, но линии водорода широкие. Для построения модели приходится варьировать химический состав.

2. *Гелиевые звезды.* Сильные линии гелия (He:H = 330)

3. *Углеродные звезды.* Типы R, N и S (циркониевые, полосы ZrO). Если кислорода не хватает, то нет полос CO, а есть полосы C_2, CN, CH – это особенности спектров углеродных звезд.

4. *Углеродные и азотные звезды Вольфа-Райе.* Типы WC (углеродные) и WN (азотные).

Пекулярные спектры:
а) белые карлики (линии с очень широкими крыльями или вообще может не быть линий);
б) магнитные переменные звезды (линии редкоземельных элементов Y, Gd, Eu);
в) субкарлики (дефицит металлов, избыточное УФ излучение).

Существует влияние на спектры звезд их вращения и турбулентности. В первом случае линии расширяются пропорционально $v\sin i$, но их эквивалентная ширина не меняется, во втором – происходит увеличение эквивалентной ширины пропорционально скорости v.

Обсудим получение фундаментальных параметров звезд и, в частности, определение расстояний до них.

1) Тригонометрический параллакс

Точность ($\sim$0.01$''$) ограничивает применение областью до 100 пк. Внеатмосферные наблюдения позволяют изучать окрестности до 500 пк.

1$'$) Групповой параллакс для движущихся скоплений (Гиады). Точность практически такая же, как выше. Измеряют собственное движение звезд μ и лучевые скорости V_r. Параллакс равен

$$\pi = 4.74\frac{\mu}{V_r \tan\lambda}. \tag{10}$$

2) Вековой параллакс

По движению Солнца в Галактике Гершель в 1783 г. сделал первое определение апекса.

3) Динамический параллакс

По третьему закону Кеплера

$$\frac{A^3}{p^2(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)}=1, \quad A=\frac{a''}{\pi''}. \qquad (11)$$

Наблюдения дают a'' и p. Для звезд типа Солнца $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2 \approx 2$, и тогда можно найти параллакс π''.

Это соотношение используется в обе стороны. Для близких звезд известен параллакс π'', и находят: A по a'' и $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$ по A и p. Для далеких звезд, делая предположение относительно $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$, находят A по p и π по a'' и A. Предположение о том, что $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2=2$ не очень грубое, поскольку оказывается, что массы звезд меняются не сильно $0.1<\mathcal{M}<3.5$ в тех случаях, когда параллакс известен.

4) Спектроскопический параллакс

Идея была высказана в 1911 г и осуществлена Адамсом и Кальшуттером в 1914 г. Она состоит в том, что по спектральному классу находят абсолютную звездную величину M (по известной калибровке), а затем из соотношения $M=m+5+5\lg\pi$ и известной видимой величины m получают параллакс. При этом нужно иногда учитывать межзвездное поглощение.

5) Особые случая

Для новых звезд при условии симметричности сброшенных оболочек определяют v_r (км/год) по лучевой скорости и изменение со временем a'' за K лет v_t. Из условия $v_r=v_t$ получают параллакс (расстояние).

Диаграмма Гершпрунга-Рассела (спектр – светимость) была построена Расселом в 1913 г.

а) Описание

Строят диаграмму в координатах абсолютная звездная величина – спектр или избыток цвета (colour index, CI). Спектр есть функция степени ионизации, которая в свою очередь зависит от температуры. Соответственно и CI определяется температурой звезды.

Позднее была введена двумерная спектральная классификация: сначала МКК (Морган, Кинан, Келман), затем МК. Такая классификация требует хорошей дисперсии (несколько сот A на мм – в Гарварде было лишь 1000 A/мм). В ней определяется спектральный класс и класс светимости (точность 0.1–0.2 подкласса). Были составлены атласы и введены обозначения: I – сверхгиганты (отдельные точки на диаграмме Г-Р), II – яркие гиганты (точки), III – гиганты (много звезд), IV – субгиганты (точки), V – главная последовательность (толстая полоса), VI – субкарлики, VII – белые карлики. Как критерии использовались пары линий. Учитывалось, что у карликов широкие линии из-за сильного давления.

б) Связь между положением звезды на диаграмме и движением звезды

Интересны значения средней скорости звезд в направлении от плоскости Галактики для разных областей диаграммы: белые карлики - 20 км/с, субкарлики – 50 км/с, звезды нижней части ГП – 23 км/с, звезды середины и верхней части ГП – 5–9 км/с, гиганты – 11 км/с, сверхгиганты – 8 км/с. Диаграмма не однородна, нет единства звезд в смысле их кинематических свойств и химического состава.

Для звезд с большим движением тригонометрический параллакс часто не совпадает со спектральным. Например, для Арктура $\pi_{\text{тригон}}=0.09''$, $\pi_{\text{спектр}}=0.10-0.21''$, для δ Lep $\pi_{\text{тригон}}=0.02-0.03''$, $\pi_{\text{спектр}}=0.03-0.13''$.

Очевидно, что спектральный параллакс неверен. Оказывается, что эти звезды бедны металлами и поэтому плохо ложатся на калибровочную диаграмму МК-системы.

Звезды с большими скоростями принадлежат сферической составляющей Галактики (население II типа), звезды с малыми скоростями – сферической (население I типа). Это ярко проявляется на диаграмме цвет–светимость для рассеянных и шаровых скоплений, принадлежащих соответственно к I и II типу населений. Это имеет отношение к эволюции звезд и будет обсуждаться ниже.

В общем, светимость нашли по видимой звездной величине и расстоянию. Теперь нужно найти радиус или эффективную температуру.

6.1.1 Размеры звезд

Имеем $\sigma T_e^4 = \frac{L}{4\pi R^2}$ и $g = G\frac{\mathcal{M}}{R^2}$. Светимость $L \sim M_{\text{абс}}$.

1. Использование известной T

Из формулы $F_\lambda = \frac{L_\lambda}{4\pi R^2}$ следует $L_\lambda \sim M_\lambda$ и $M_\lambda = 2.5\lg L_\lambda^\odot - 2.5\lg L_\lambda$. Далее $M_\lambda = 2.5\lg L_\lambda^\odot - 2.5\lg F_\lambda - 2.5\lg(4\pi R^2) = 2.5\lg\frac{L_\lambda^\odot}{4\pi} - 5\lg R - 2.5\lg F_\lambda$.

Из формулы Планка

$$F_\lambda = c_1\lambda^{-5}\left(10^{\frac{k}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}. \tag{12}$$

Логарифмируя, получаем

$$\begin{aligned} \lg F_\lambda &= \lg(c_1\lambda^{-5}) - \frac{k}{\lambda T} - \lg(1 - 10^{-\frac{k}{\lambda T}}) \\ M_\lambda &= 2.5\lg\frac{L_\lambda^\odot\lambda^{-5}}{4\pi c_1} - 5\lg R + 2.5\frac{k}{\lambda T} + 2.5\lg(1 - 10^{-\frac{k}{\lambda T}}) \end{aligned} \tag{13}$$

Вводя очевидные обозначения, в частности $2.5\frac{k}{\lambda T} = \frac{1.56}{\lambda T}$, имеем

$$M_\lambda = C_\lambda - 5\lg R + \frac{1.56}{\lambda T} + \Delta(\frac{1.56}{\lambda T}), \tag{14}$$

где зависимость $\Delta(\frac{1.56}{\lambda T})$ проиллюстрирована в таблице.

$\frac{1.56}{\lambda T}$	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0
Δ	-0.01	-0.03	-0.07	-0.19	-0.55

Используя данные для Солнца ($T = 6000$K, $R_\odot = 1$, $M_v = 4.83$, $M_{ph} = 5.40$) для видимой ($\lambda = 5290$A) и фотографической ($\lambda = 4250$A) области

$$\begin{aligned} M_v &= C_v - 5\lg R + \frac{29500}{T} + \Delta, \\ M_{ph} &= C_{ph} - 5\lg R + \frac{36700}{T} + \Delta, \end{aligned} \tag{15}$$

и далее

$$\begin{aligned} M_v &= \frac{29500}{T} - 5\lg R - 0.08, \\ M_{ph} &= \frac{36700}{T} - 5\lg R - 0.72, \end{aligned} \tag{16}$$

Откуда следует

$$CI = M_{ph} - M_v = \frac{7200}{T} - 0.64. \tag{17}$$

В системе UBV

$$
\begin{aligned}
M_V &= \frac{28620}{T} - 5\lg R - 0.01, \\
M_B &= \frac{36190}{T} - 5\lg R - 0.73, \\
B - V &= \frac{7570}{T} - 0.72.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Таким образом, знание абсолютной звездной величины M и температуры (здесь $T = T$) звезды позволяет найти ее радиус – температура T может быть найдена по последней формуле, а M – по видимой величине и расстоянию.

Было сделано допущение о чернотельном распределении энергии. Оно может не выполняться, поэтому нужно прямое определение размера звезд. Наиболее вероятно это для красных гигантов. В частности,

$$
\lg R = \frac{5900}{T} - 0.2M_v - 0.016, \quad \frac{7200}{T} = C + 0.64. \tag{19}
$$

и далее

$$
\begin{aligned}
\lg R &= 0.82C - 0.2M_v + 0.50, \\
\lg d'' &= 0.82C - 0.2m_v - 2.53.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Для Сириуса $m_v = -1^m\!.43, c = -0^m\!.18$, Для Антареса $m_v = -0^m\!.98, c = +1^m\!.72$, и следовательно

$$
d''_{\text{Сириус}} = 0''\!.0054, \quad d''_{\text{Антарес}} = 0''\!.038. \tag{21}
$$

При наблюдениях дифракционный диаметр звезды есть $d'' = \frac{28}{D}$, где D – диаметр зеркала телескопа, в частности при $D = 5$ м имеем $d'' = 0''\!.056$, т.е. прямые наблюдения безнадежны даже для Антереса. Мешает волновая природа света, но она же может и помочь.

2. Определение звездного радиуса при помощи интерферометра

Если наблюдать протяженный источник размером D, то увидим дифракционные полосы на угловом расстоянии $\alpha'' = \frac{5.7}{D}$.

Пусть источник – две звезды на расстоянии Δ''. Если $\Delta'' = \alpha''$, то полосы замоются, в дальше восстановятся. Это может быть использовано. Одна звезда может рассматриваться как две половинки, удаленные на расстояние $0.85R$. Тогда для звезды $d'' = 2R'' = \frac{13.4}{D(\text{см})}$ при равномерной яркости диска и $d'' = 2R'' = \frac{15.4}{D(\text{см})}$ при полном потемнении к краю. Следовательно нужно увеличивать D (перископ).

Звезда	d''	π''	$R/R_\odot$
$D = 6$ м			
o Cet	0.056	0.015	400
α Ori	0.047	0.005	1010
α Sco	0.040	0.006	720
α Her	0.030	0.008	400
β Peg	0.021	0.015	150
α Tau	0.020	0.048	45
α Boo	0.020	0.090	24
$D = 15$ м			
α Ori	0.034		730
α Sco	0.028		500
β And	0.0108	0.043	27
α Cet	0.0094	0.015	67

3. Определение радиуса звезд при покрытии их Луной.

Работы МакМагона (1908 г.), Вильямса (1938 г.). Диск звезды диаметром $d'' = 0''02$ закрывается Луной за 0.02–0.03 с, поэтому должна быть безинерционная запись. Для Антареса получен диаметр $0.''040$. Работает только для звезд, близких к эклиптике.

4. Наблюдения двойных звезд.

Из этих наблюдений находят также и массы звезд, но об этом позднее.

6.1.2 Определение эффективной температуры

Прямой метод. Если известен поток от звезды f в широком диапазоне, то можно использовать соотношение

$$\frac{F}{f} = \left(\frac{d}{R}\right)^2 = \left(\frac{2d}{D}\right)^2, \tag{22}$$

где d – расстояние до звезды, R, D – ее радиус и диаметр. Имеем $\frac{R}{d} = \sin\theta = \theta_{\text{рад}}$ и

$$F = \frac{4f}{\theta^2_{\text{рад}}} \qquad T_{eff} = \left(\frac{F}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{4f}{\sigma\theta^2_{\text{рад}}}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{23}$$

Полупрямой метод (метод ИК потоков). Предложен Блеквелом и Шеллис и заключается в итерациях. Берется некоторая T_{eff} и по моделям вычисляется поток F_{IR} в ИК-области. Он сравнивается с наблюдаемым потоком f_{IR} и получается оценка θ. Затем, используя интегральный наблюдаемый поток f получают значение T_{eff}. Используя это значение и наблюдаемый поток f_{IR} опять находят θ и т.д.

Этот метод можно улучшить, если использовать ту же итерационную процедуру, но брать не ИК поток, интегральный поток. В модели 3 параметра (T, g, θ), которые находят в процессе итераций.

Косвенный метод. Опираясь на несколько звезд, для которых другими методами определены спектр и эффективная температура, осуществляют калибровку по какому-то наблюдаемому параметру. Потом этот параметр наблюдается для звезд с неизвестным спектром. Например, излучение в УФ области (заатмосферные наблюдения) или наклон в бальмеровском континууме Φ_n. В последнем случае метод работает до звезд класса F, и используется соотношение $\theta_{eff} = 0.605 + 0.334\Phi_n$, где $\theta_{eff} = \frac{5040}{T_{eff}}$. Метод дает хорошие результаты даже для химически пекулярных звезд.

Единственную возможность определения массы звезд дает их возможная двойственность. К счастью, двойных звезд даже больше, чем одиночных.

6.2 Двойные звезды

Двойственность проявляется в визуальных наблюдениях, фотометрических, спектральных. Соответственно звезды называются визуально-двойными, фотометрически-двойными, спектрально-двойными.

6.2.1 Визуально-двойные звезды

Здесь есть физические и оптические пары звезд. Если есть эллипс, который одна звезда (частично) описывает вокруг другой, то это физическая двойственность. Даже если период порядка 100 лет, то искривление пути за несколько десятков лет заметно и можно оценить параметры эллипса и период. Много двойных звезд, у которых период составляет десятки лет и даже годы.

При разделении звезд в паре с $\rho'' > 2''$ фотографические наблюдения лучше визуальных, если фокусное расстояние телескопа достаточно ($F > 6$ м). Расстояние между компонентами $d_{..} = \frac{d''}{\pi''}$. Фотографические наблюдения позволяют построить обе орбиты и определить их полуоси. Орбиты наблюдаются под углом, но есть способы перехода от видимого к истинному эллипсу.

Есть тесные и широкие пары. Поиски широких пар проводятся по собственному движению звезд μ. Например, BD $+4°4038$ имеет $\mu = 1''\!.59$ в направлении $\theta = 200°$, а слабая звезда ($m = 18^m\!.0$) показывает $\mu = 1''\!.45$ с $\theta = 204°$. Это дает $r'' = 74''$ и расстояние между компонентами около 440 а.е. Для α Cen и Проксимы Cen $r = 2°\!.2$ и $d = 10600$ а.е.

Рассматривают положение звезды B относительно звезды A, но можно и относительно окрестных звезд. Тогда точка G движется по дуге большого круга, и $\frac{AG}{GB} = \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A}$.

Существуют невидимые спутники звезд. Если разность $m_A - m_B = \Delta m$ велика, то найти компонент трудно. Для близких звезд может сработать. Так был предвычислен спутник Ross 614, обнаруженный через 4 года.

Возможно спеклоинтерферометрическое определение для более или менее одинаковых по яркости звезд. Разрешаются звезды на расстоянии до $0.01''$, и орбиты в 0.05^ppr могут быть выявлены. Для Капеллы найдено $r = 0°\!.05$ и период 104 дня.

6.2.2 Спектрально-двойные звезды

Обнаруживаются по смещению спектральных линий.

Если блеск компонентов сильно разный, то линия слабой звезды замываются непрерывным спектром яркой звезды и виден только один спектр, но линии в нем смещаются.

6.2.3 Затменные переменные звезды

Примеры Алголь и β Lyr – периоды около 27 лет. В зависимости от ориентации орбиты и яркости звезд кривая блеска сильно меняется. В тесной двойной системе звезды эллиптические и имеют блеск, зависящий от фазы.

6.2.4 Определение характеристик двойных звезд

Видимый эллипс есть проекция истинного, при этом фокусы не проектируются, но центр в центре.

По второму закону Кеплера $\rho^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = const$.

По третьему закону $\frac{A^3}{P^2} = \frac{k^2(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)}{4\pi}$, где A – большая полуось относительной орбиты, P – период, k^2 – постоянная тяготения.

Если измерять A и P в а.е. и годах, а $\mathcal{M}$ в солнечных массах, то

$$\frac{A^3}{P^2(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)} = 1. \tag{24}$$

Из наблюдений определяем $a'' = A\pi''$. Тогда

$$\frac{a''^3}{\pi''^3 P^2} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B. \tag{25}$$

По отношению полуосей орбит имеем

$$\frac{\mathcal{M}_A}{\mathcal{M}_B} = \frac{a_2}{a_1}, \tag{26}$$

что дает массы компонентов. Для реализации метода нужны длительные наблюдения.

6.2.5 Кривая лучевых скоростей и элементы орбиты двойных звезд

Рассмотрим движение по эллипсу и получающуюся кривую лучевых скоростей.

Имеем лучевые скорости в абсолютных единицах. Горизонтальная ось смещена из-за движения центра тяжести системы. Ее проводим так, чтобы интегралы $\int V_r \mathrm{d}t$ выше и ниже этой оси были равны.

Пусть r – радиус-вектор, ϑ – истинная аномалия, z – проекция r на луч зрения, e – эксцентриситет орбиты. Тогда $z = r\sin(\vartheta+\omega)\sin i$ и

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sin i \sin(\vartheta+\omega)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\sin i\cos(\vartheta+\omega)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{27}$$

Закон движения по эллипсу дает

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu a_1(1+e\cos\vartheta)}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{28}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu a_1 e\sin\vartheta}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{29}$$

где $\mu = \frac{2\pi}{P}$. Получаем

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = K\left[e\cos\omega + \cos(\vartheta+\omega)\right], \tag{30}$$

где

$$K = \frac{\mu a_1 e\sin i}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{31}$$

Максимум и минимум при $\vartheta = 180+\omega$. Введем $A = K(1+e\cos\omega)$, $B = K(1-e\cos\omega)$, и $A+B = 2K$. Полезно рассмотреть характерные случаи ориентации орбиты относительно наблюдателя: 1) $e=0$ (кривая лучевых скоростей – синусоида); 2) $e=0.5$, $\omega=0$; 3) $e=0.5$, $\omega=270^\circ$; 4) $e=0.5$, $\omega=90^\circ$ (то же, что и 3, но отраженное).

Когда мы наблюдаем спектрально-двойную звезду, мы получаем только V_r. Поэтому все измерения включают множитель $\sin i$, который принципиально не определяется (его можно лишь грубо оценить).

Из теории эллиптического движения имеем (если получили лучевую скорость для второй звезды, то для нее кривая будет схожа, но с иной амплитудой)

$$a_1\sin i = 13751(1-e^2)^{\frac{1}{2}}K_A P, \tag{32}$$

$$a_2\sin i = 13751(1-e^2)^{\frac{1}{2}}K_B P, \tag{33}$$

где a в км, P в сутках, K в км/с. Тогда отношение

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{K_A}{K_B} = \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A}. \tag{34}$$

Если $a = a_1 + a_2$, $K = K_A + K_B$, то

$$a\sin i = 13751(1-e^2)^{\frac{1}{2}}KP. \tag{35}$$

Возведем в куб

$$a^3\sin^3 i = const(1-e^2)^{\frac{3}{2}}P^3K^3 \tag{36}$$

и с учетом

$$a^3 = P^2(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B) \tag{37}$$

получим

$$(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)\sin^3 i = const(1-e^2)^{\frac{3}{2}} K^3 P. \tag{38}$$

Таким образом,

$$\mathcal{M}_A \sin^3 i = const(1-e^2)^{\frac{3}{2}} K^2 K_B P, \tag{39}$$

$$\mathcal{M}_B \sin^3 i = const(1-e^2)^{\frac{3}{2}} K^2 K_A P. \tag{40}$$

Если наблюдается один спектр, то получаем K_A и P. Исключим K, возведем одно уравнение в куб, а другое – в квадрат и разделим одно на другое

$$\frac{\mathcal{M}_B^3 \sin^3 i}{(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)^2} = const(1-e^2)^{\frac{3}{2}} K_A^3 P \tag{41}$$

Левая часть называется функцией масс $f(\mathcal{M})$.

Если удается угадать как-либо отношение $\frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A} = \alpha$, то

$$f(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{M}_A \alpha^3}{(1+\alpha)^2}\sin^3 i \tag{42}$$

удается найти $\mathcal{M}_A \sin^3 i$, а

$$\frac{f(\mathcal{M})}{\mathcal{M}_B} = \frac{\mathcal{M}_B^2 \sin^3 i}{(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)^2} = \frac{\mathcal{M}_B^2}{(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)^2}\sin^3 i. \tag{43}$$

Все определяется с точностью до множителя $\sin^3 i$.

6.2.6 Затменные переменные звезды

Для этих звезд имеем кривую блеска с периодически повторяющимися минимумами и максимумами. Кривая блеска зависит только от геометрии орбиты. Чтобы происходило затмение, необходимо, чтобы наклон орбиты к лучу зрения был порядка 90°.

Для близких двойных $\sin(90-i) = \frac{r_1+r_2}{a}$, где r_1, r_2 – радиусы звезд, a – расстояние между ними.

Кривая блеска лучше решается, когда компоненты далеко друг от друга. Если звезды – шары, то если затмение полное, тогда на дне главного минимума должен быть плоский участок. Во вторичном минимуме при полном затмении – кольцеобразное затмение. Если у большей звезды нет потемнения к краю, то вторичный минимум плоский – это U-гипотеза. Если потемнение к краю есть, то дно минимума неплоское. Гипотеза о полном потемнению к краю – D-гипотеза. Если затмение частное, то в главном минимуме плоского участка не будет.

Рассмотрим частный случай неравного радиуса звезд $\frac{r_1}{r_2} = k$ $(k \le 1)$. Пусть $\lambda_{1,2}$ – блеск в минимумах, α_0 – фотометрическая фаза – затмеваемая площадь в долях площади малой звезды. В минимуме блеск двойной звезды меняется от 1 до λ_1. Светимость $L_1 = (1-\lambda_1)/\alpha_0$. Через половину периода будет закрыто $k^2\alpha_0$ и светимость $L_2 = (1-\lambda_2)/\alpha_0/k^2$. Из равенства $L_1 + L_2 = 1$ следует, что

$$\alpha_0 = 1 - \lambda_1 + \frac{1-\alpha_2}{k^2}. \tag{44}$$

Если затмение полное, то $\alpha_0 = 1$ и

$$k^2 = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1}, \tag{45}$$

т.е. сразу находится отношение радиусов компонент.

Далее можно найти угол i, а также r_1 и r_2 в долях величины a. Решение кривой блеска позволяет найти и другие элементы: ω, e. Вторичный минимум обычно смещен относительно главного. Легко показать, что если луч зрения перпендикулярен большой полуоси, то

$$(T_2 - T_1 - \frac{P}{2})\frac{\pi}{P} = e\cos\omega(\csc^2 i + 1). \tag{46}$$

Если луч зрения параллелен большой полуоси, то

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1+g}{1-g}, \tag{47}$$

где $g = e\sin\omega$. В промежуточных случаях также проводится определение e, ω.

Случай, когда затменная переменная является одновременно и спектральной двойной, представляет наибольший интерес, поскольку возможно наиболее полное исследование.

1) Кривая лучевых скоростей дает $a\sin i$ (км) и $\mathcal{M}\sin^3 i$ ($M_\odot$).

2) Кривая блеска дает i, r_1, r_2 в долях a. Таким образом, мы можем найти массу и расстояние, и, как следствие, радиусы компонентов. Можно далее получить среднюю плотность компонентов $\rho_{A,B} = \frac{\mathcal{M}_{A,B}}{R^3_{A,B}}$ в долях солнечной. Заметим, что все эти оценки не зависят от расстояния до звезды.

Если в спектрально-двойной видна только одна компонента, то плотность можно получить из предположения

$$a^3 = constP^2(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B). \tag{48}$$

Поскольку $R_A = r_A a$, то

$$R_A^3 = constr_A^3 P^2(\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B). \tag{49}$$

Тогда

$$\rho_A = \frac{1}{P^2 r_A^3}\frac{\mathcal{M}_A}{\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B}. \tag{50}$$

Полагая $\alpha = \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A}$, получаем

$$\rho_A = \frac{1}{P^2 r_A^3}\frac{1}{1+\alpha}, \quad \rho_B = \frac{1}{P^2 r_B^3}\frac{\alpha}{1+\alpha}. \tag{51}$$

Обычно предполагают $\alpha = 1$. На самом деле $\alpha < 1$ и тем меньше, чем меньше светимость L_B. Поэтому лучше $\alpha = \frac{1}{2}$ при $L_B < 0.25$, $\alpha = 1$ при $0.25 < L_B < 0.5$.

Можно найти эффективную температуру, если наблюдаются оба компонента спектрально-двойной затменной переменной

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4, \quad L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4. \tag{52}$$

В результате

$$2.5\lg\frac{L_\odot}{L} = M_{bol} - M_\odot = 10\lg T_\odot - 10\lg T_e - 5\lg R. \tag{53}$$

С учетом $M_\odot = 4.75$, $T_\odot = 5785$ K

$$\lg T_e = -0.1M_{bol} - 0.5\lg R + 4.236. \tag{54}$$

Здесь болометрическая величина $M_{bol} = M_v + \Delta m_{bol}$, где Δm_{bol} – болометрическая поправка, визуальная величина $M_v = m_v + 5 + 5\lg\pi$.

6.2.7 Закон масса–светимость

Разброс масс звезд не очень большой: от 90 $M_\odot$ (компонент "горячей звезды Планкетта") до 0.03–0.04 $M_\odot$ (карликовая пара UV Cet). Есть квазизвездные объекты и меньшей массы: 61 Cyg (0.016 $M_\odot$) и звезда Бернарда (0.0015 $M_\odot$), но они могут быть не звездами, а объектами типа Юпитера. Предельная масса, по-видимому, – 0.02 $M_\odot$.

Эддингтон приказал существование зависимость светимость–масса

$$L_{bol} = k\mathcal{M}^{3+p}, \tag{55}$$

где $p \approx \frac{1}{3}$. В начале все звезды укладывались, кроме белых карликов. Потом был найден излом зависимости $L(\mathcal{M})$

$$M_{bol} = 6.76 - 3.80 \lg \mathcal{M} \text{ или } L_{bol} = 0.1\mathcal{M}^{\frac{3}{2}} \text{ при } M_{bol} > 7^m\!.5 \tag{56}$$

$$M_{bol} = 4.62 - 10.03 \lg \mathcal{M} \text{ или } L_{bol} = 1.3\mathcal{M}^4 \text{ при } 7^m\!.5 < M_{bol} < 0^m\!.3. \tag{57}$$

Для еще более ярких звезд $L_{bol} \sim \mathcal{M}^{2.8}$. Есть и исключения, например, 85 Peg с $\mathcal{M}_A/\mathcal{M}_B \approx 1$, а $\Delta m = 3^m\!.0$.

Диаграмма $L = f(\mathcal{M})$ позволяет определять $\alpha = \frac{\mathcal{M}_B}{\mathcal{M}_A}$ по разности блеска компонентов. Однако у звезд типа W UMa часто более яркий компонент является менее массивным.

Диаграмма Гешпрунга-Рассела и зависимость масса–светимость свидетельствуют о том, что есть зависимость спектр–масса.

Спектр	$\mathcal{M}$	Спектр	$\mathcal{M}$
O5–O7	32.7	A0	4.0
O8–O9	23.3	A5	2.2
B0–B2	13.6	F0	1.8
B3–B4	10.2	F5	1.5
B5–B7	4.7		
Спектр	**$\mathcal{M}$**	**Спектр**	**$\mathcal{M}$**
gG0	3.2	dG0	1.25
gG5	3.7	dG5	1.07
gK0	3.9	dK0	0.85
gK5	5.2	dK5	0.65
gM0	5.7	dM0	0.52
gM5	9.2	dM5	0.38

Обратимся, наконец, к физическим характеристикам двойных звезд. Есть системы, в которых карлик просвечивает сквозь гигант, например, ζ Aur (gK3 + B8) с периодом 972 дня. Полная фаза длится 37 дней, заход B-звезды – 1.5 дня, т.е. $R_1/R_2 = 37/1.5 = 190 : 7(R_\odot)$, $\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2 = 14 : 8(M_\odot)$. Это явление позволяет изучать атмосферы и в частности зависимость светимости от высоты.

Другие подобные звезды: 31 Cyg с периодом $P = 3780^d$, 32 Cyg с $P = 1148^d$, VV Cep (M2 + B8) с периодом $7430^d = 20.4$ лет ($\mathcal{M} = 47$ и 38 $\mathcal{M}_\odot$), ε Aur (F0 Ia) с периодом 9898^d.

Отметим тесные двойные системы (контактные системы), подобные β Lyr (B8 + F). Здесь можно получить форму поверхности Роша в дополнение к отношению масс. Изучение тонких эффектов позволяет извлечь еще кое-что. Например, наблюдения поляризации (на потоке вещества) дает возможность найти позиционный угол линии узлов. ($\mathcal{M} = 47$ и 38 $\mathcal{M}_\odot$),