

Это препринт Произведения, принятого для публикации в журнале «Письма в Астрономический журнал. Астрономия и космическая астрофизика». 2018. Т. 44, № 11. Вариант после корректуры 31.07.2018.

© Российская академия наук, 2018 г.

© Редколлегия журнала «Письма в Астрономический журнал», 2018 г.

<http://pleiades.online/>

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОЦЕНКИ РАССТОЯНИЯ ДО ЦЕНТРА ГАЛАКТИКИ ПО ГЕОМЕТРИИ СЕГМЕНТОВ СПИРАЛЬНЫХ РУКАВОВ

© 2018 г. И.И.Никифоров*, А.В.Веселова

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 28 августа 2018 г.

Методом Монте-Карло изучено влияние различных факторов на статистические свойства оценки расстояния до центра Галактики (R_0), получаемой в рамках решения общей задачи определения геометрических параметров спирального рукава Галактики по его сегменту с включением в число параметров расстояния до полюса спирали, т.е. R_0 . Численное моделирование выполнялось для модельных сегментов, представляющих рукава Персея и Щита по данным о мазерах в массивных областях звездообразования. Показано, что неопределенность современных измерений параллаксов этих объектов систематически снижается (!) с увеличением гелиоцентрического расстояния, тогда как относительная неопределенность параллаксов в среднем примерно постоянна. Это удачное обстоятельство существенно (в 1.4–1.7 раза) увеличивает точность оценки R_0 по сегменту рукава, определяемому мазерами. Результаты численных экспериментов свидетельствуют в пользу состоятельности оценки R_0 по геометрии спирального сегмента. Значимые смещения оценки, обнаруженные только для рукава Щита, вызываются в основном случайными ошибками параллаксов, а также малой угловой протяженностью сегмента и малым числом представляющих его объектов. Дисперсия оценки R_0 сильнее всего зависит от угловой протяженности сегмента, а также неопределенности параллаксов, если последняя в среднем не зависит от расстояния. Остальные параметры, кроме угла закрутки, оказывают одинаково существенное, но меньшее влияние на статистическую точность оценки. При совместной обработке данных о 3–8 сегментах прогнозируемая стандартная ошибка итоговой оценки — $\sigma_{R_0} \simeq 0.5\text{--}0.3$ кпк соответственно. Повысить точность можно за счет увеличения протяженности выделенных сегментов и числа принадлежащих им объектов. Способ определения R_0 по спиральным сегментам оказался работоспособным для широкого набора возможных значений параметров даже при использовании L-эстиматора (медианы). Это делает осмысленным разработку более сложного метода на основе M-эстиматора, позволяющего корректно учесть измерительную и природную дисперсии объектов относительно средней линии рукава и тем самым избежать смещений оценок параметров.

Ключевые слова: расстояние от Солнца до центра Галактики, спиральная структура, мазерные источники, пространственное распределение, Галактика (Млечный Путь).

* Электронный адрес <nii@astro.spbu.ru>

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавний прогресс в наблюдательных данных сделал возможным выделение деталей спиральной структуры Галактики, *резких* в смысле сильной видимой концентрации к их средним линиям и одновременно *протяженных* (подробнее см. Никифоров, Веселова, 2018, далее НВ18). Это, в свою очередь, стимулировало работы по пространственному моделированию *отдельных* сегментов спиральных рукавов при отказе от предположений, обычных для исследований спирального узора Галактики, о числе рукавов в Галактике и о равенстве углов закрутки у разных рукавов (см. обзор в НВ18, а также, например, недавние работы Грива и др., 2017, Кришнана и др., 2017, и ссылки в них). В предыдущей работе (НВ18) мы предложили отказаться еще от одного традиционного предположения — заранее принятой величины расстояния R_0 от Солнца до полюса спиральных рукавов, т.е. расстояния до центра Галактики. Если в настоящей задаче считать R_0 свободным параметром, наряду с параметрами сегмента, то это, с одной стороны, позволяет выполнять моделирование спиральных сегментов в более общем виде, учитывающем, в частности, заметную корреляцию между R_0 и углом закрутки (показана в НВ18), а с другой стороны, потенциально открывает новый способ определения R_0 в классе пространственных методов (см. обзор Никифорова, 2004) — по геометрии спиральных рукавов.

В НВ18 для апробации и тестирования такого способа был разработан упрощенный (трехточечный) метод решения задачи. Его приложение в той же работе к выборке объектов (мазеры с тригонометрическими параллаксами) подтвердило в целом работоспособность нового подхода: по мазерам двух рукавов (Персея и Щита) удалось получить надежные результаты, основываясь на которых, мы вывели оценку $R_0 = 8.8 \pm 0.5$ кпк.

В настоящей работе мы используем трехточечный метод для численного исследования статистических свойств оценки R_0 по геометрии сегмента спирального рукава в зависимости от параметров задачи. Метод состоит в получении решения для трех параметров сегмента, включая R_0 , по положениям трех его репрезентативных точек. Будучи относительно нетрудоемким, данный упрощенный метод позволяет за разумное время выполнить большое количество численных экспериментов. Последнее существенно для достижения основной цели этой работы — оценки условий применимости и принципиальных возможностей нового способа нахождения R_0 как для современных данных, так и на перспективу.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ИЗМЕРЕНИЯ R_0 ПО ГЕОМЕТРИИ СПИРАЛЬНОГО СЕГМЕНТА

2.1. Параметры модельного сегмента

В соответствии с параметризацией, введенной в НВ18, будем описывать сегмент спирального рукава следующим набором параметров: расстояние от начала координат, т.е. от Солнца, до полюса модельной логарифмической спирали (R_0); угол ее

закрутки (i); позиционный угол спирали на солнечном круге $R = R_0(\lambda_0)$, где R — расстояние от точки в плоскости Галактики до полюса спирали; границы сегмента спирали по галактоцентрической долготе (λ_1^s и λ_2^s), которые определяют угловую протяженность сегмента ($\Delta\lambda = \lambda_2^s - \lambda_1^s$); количество представляющих сегмент объектов (N); природный среднеквадратический разброс объектов поперек сегмента (σ_w); абсолютная (σ_ϖ) или относительная (σ_ϖ/ϖ) среднеквадратическая ошибка измерения параллакса ϖ . Здесь долготы λ отсчитываются в плоскости Галактики от направления на Солнце по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса Галактики, т.е. в направлении вращения Галактики.

Введение ошибок в параллаксы как учет неопределенности гелиоцентрических расстояний r отвечает здесь использованию данных о мазерах с тригонометрическими параллаксами, наиболее перспективном для применения нового метода типе опорных объектов (HB18). Вариант с заданием σ_ϖ соответствует предположению, что среднюю неопределенность параллакса в пределах сегмента можно считать примерно постоянной. Однако наш анализ данных Рида и др. (2014) (см. раздел 2.2) показал, что абсолютная неопределенность σ_ϖ современных измерений параллаксов мазеров систематически зависит от расстояния до них (уменьшается с ростом r !), т.е. в общем случае не является в среднем постоянной для сегмента. С другой стороны, мы обнаружили, что относительная неопределенность параллакса слабее меняется в пределах выявленных по мазерам спиральных сегментов, поэтому вариант с заданием σ_ϖ/ϖ лучше описывает современные данные для этих объектов. Так как в будущем указанная тенденция для ошибки параллакса может не сохраниться, мы рассмотрели оба этих варианта параметризации неопределенности расстояний.

Непосредственная цель численного моделирования состоит в нахождении среднего смещения и дисперсии оценки R_0 по геометрии спирального сегмента в зависимости от существенных параметров задачи ($\Delta\lambda$, σ_w , σ_ϖ , σ_ϖ/ϖ , N , i).

2.2. Неопределенность тригонометрических параллаксов по данным о мазерах

Для выбора вариантов представления ошибок измерений параллаксов в численных экспериментах мы проанализировали данные двух каталогов, содержащих оценки параллаксов ϖ и их неопределенностей σ_ϖ для объектов, включающих мазеры: более однородный каталог Рида и др. (2014), в который вошли 103 области образования звезд высокой массы (HMSFRs), и каталог Расторгуева и др. (2017, далее каталог Rc17), который включает каталог Рида и др. (2014) с заменой старых данных на новые для 2 объектов (далее каталог Rd14), а также данные о 38 дополнительных мазерных источниках, из которых (как показало изучение литературы) только 9 относятся к классу HMSFRs, а остальные — к 14 другим типам (всего 141 объект). Каталог Rd14 мы используем потому, что Рид и др. (2014) указали принадлежность мазеров к тому или иному спиральному рукаву, а также чтобы сравнить характеристики объектов Rd14 и источников, добавленных в Rc17.

В табл. 1 приведены медианные значения абсолютной ($\text{Me } \sigma_\varpi$) и относительной

Таблица 1: Дисперсионные характеристики пространственного положения мазеров по данным каталогов Рида и др. (2014) и Расторгуева и др. (2017)

Рукав/выборка, каталог	N	$\text{Me } \sigma_{\varpi}$, мсд	$\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$	σ_w , кпк
Щита (Sct), Рд14	17	0.028	0.100	0.29 ± 0.08 0.30 ± 0.05 0.35 ± 0.05
Стрельца (Sgr), Рд14	18	0.033	0.085	
Местный (Loc), Рд14	25	0.035	0.054	
Персея (Per), Рд14	24	0.018	0.061	
Внешний (Out), Рд14	6	0.012	0.070	
Все объекты (All), Рд14	103	0.025	0.069	—
Мазеры HMSFRs, Pc17	112	0.025	0.073	—
Мазеры не-HMSFRs, Pc17	29	0.037	0.063	—

Примечание. N — число объектов; $\text{Me } \sigma_{\varpi}$ и $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$ — медианные значения абсолютной и относительной ошибок параллакса; σ_w — среднеквадратический природный разброс объектов поперек сегмента, полученный в HB18 для итоговой оценки $R_0 = 8.8$ кпк.

($\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$) неопределенностей параллаксов, найденные нами по отдельности для сегментов рукавов, которые были выделены Ридом и др. (2014), для всей выборки Рд14 в целом, а также для мазеров HMSFRs и не-HMSFRs каталога Рд17. Поскольку понадобится выбирать и значения σ_w , в той же таблице мы указали полученные в HB18 оценки природного разброса мазеров поперек сегментов для тех рукавов, для которых этот параметр удалось разрешить.

Модель $\sigma_{\varpi} = \text{const}$ для сегмента соответствует опыту измерения параллаксов звезд. Так, медиана стандартных ошибок параллаксов в каталоге Hipparcos практически не зависит от блеска звезды и начинает расти лишь с приближением к предельной звездной величине каталога (рис. 1 в статье Миньяра, 2000), что означает примерное постоянство средней неопределенности параллакса при удалении от Солнца и ее увеличение только на расстояниях, близких к предельным для каталога. Однако для мазеров поведение средней величины σ_{ϖ} с расстоянием оказалось много лучше ожидаемого по аналогии со звездами. Величина $\text{Me } \sigma_{\varpi}$ в табл. 1 уменьшается по мере удаления сегмента от Солнца, принимая наибольшее значение для Местного рукава и наименьшие — для рукава Щита (во внутренней части Галактики) и для Внешнего рукава (за пределами солнечного круга). Непосредственное сопоставление каталожных величин σ_{ϖ} и $r = 1/\varpi$ (рис. 1a и 2a) показывает, что неопределенность параллаксов в среднем падает (!) с расстоянием (приблизительно по гиперболическому закону). Причем на границах интервала r , представленного данными, средние уровни σ_{ϖ} различаются кратно по обоим каталогам.

Заметим, что добавленные в Pc17 мазеры HMSFRs практически не меняют медианные неопределенности параллаксов для объектов этого класса (табл. 1) и распо-

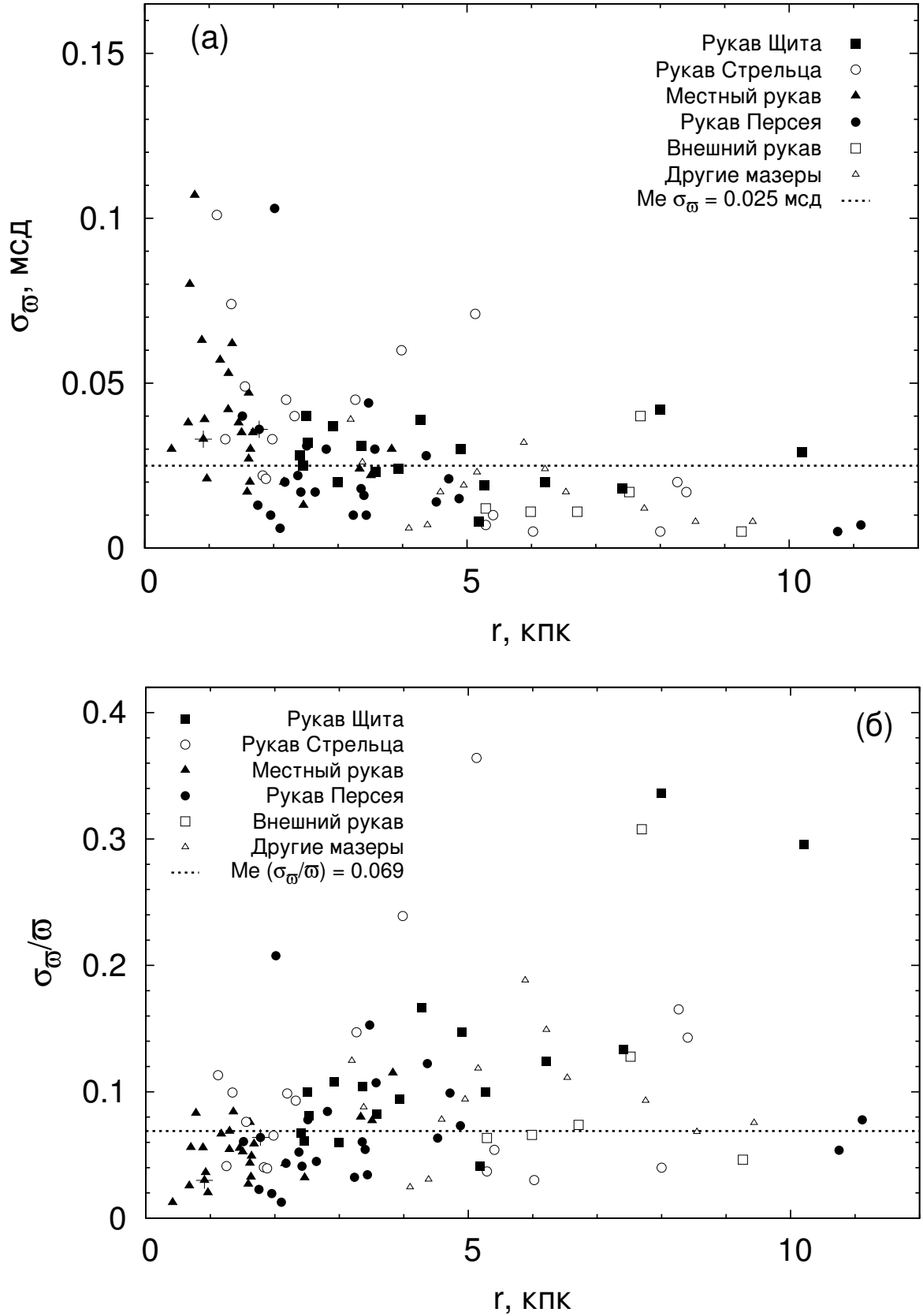


Рис. 1: Абсолютная (а) и относительная (б) неопределенности измерения параллаксов в зависимости от гелиоцентрического расстояния для мазеров каталога Рд14. Крестиками обозначены два объекта, данные о которых были заменены на более новые из каталога Рс17. Пунктирными линиями обозначены медианные значения σ_{ϖ} и σ_{ϖ}/ϖ для полной выборки мазеров каталога.

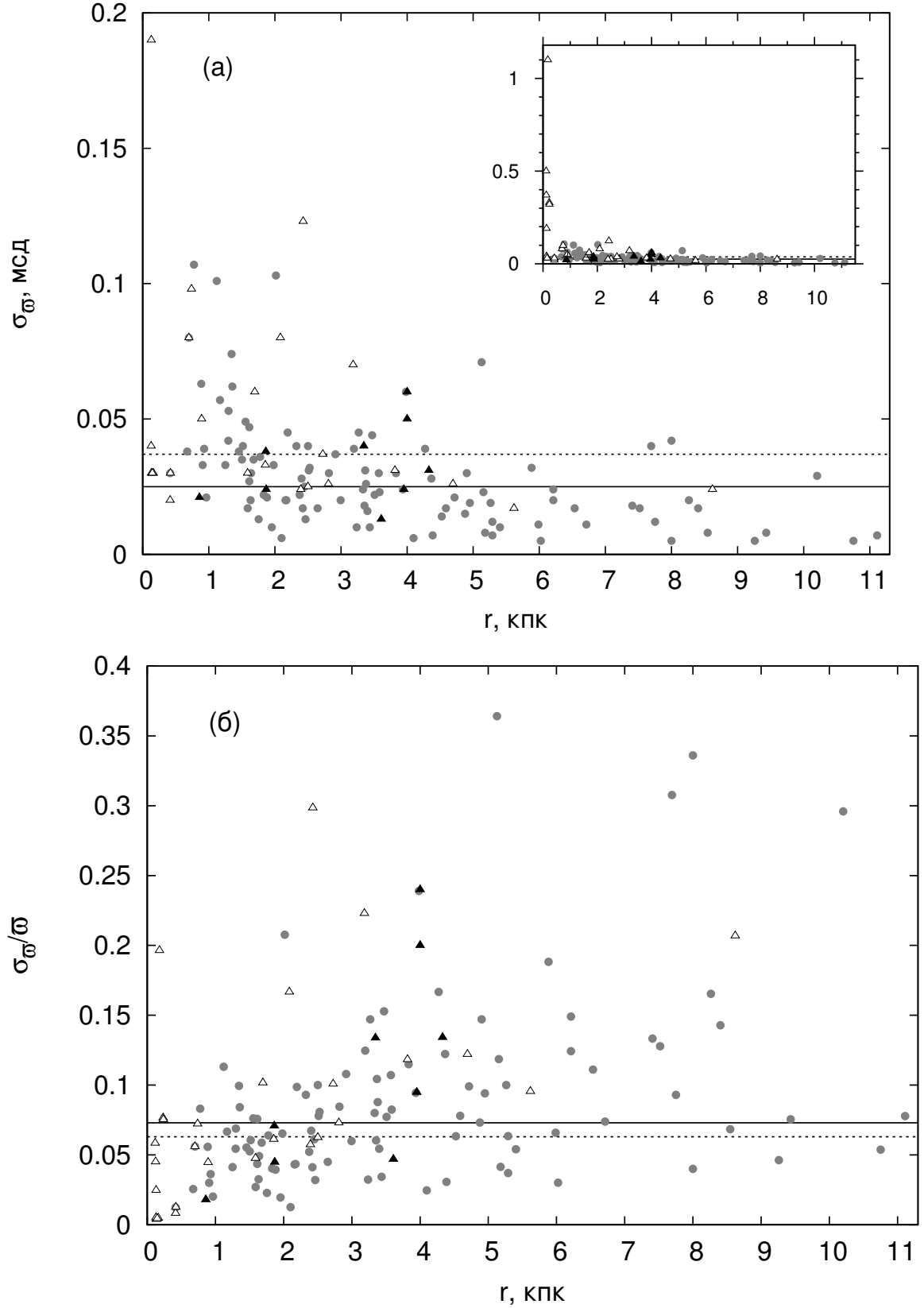


Рис. 2: Абсолютная (а) и относительная (б) неопределенности измерения параллаксов в зависимости от гелиоцентрического расстояния для мазеров каталога Рд14 (серые кружки) и дополнительных мазеров каталога Рс17 (черные треугольники — HMSFRs, белые треугольники — остальные источники). Сплошными линиями обозначены медианные значения σ_w и σ_w/w для полной выборки мазеров HMSFRs каталога Рс17, пунктирными линиями — для остальных объектов того же каталога.

ложены на плоскости (r, σ_{ϖ}) в хорошем согласии с мазерами Рд14 (рис. 2а). Значение $\text{Me } \sigma_{\varpi} = 0.037^{+0.033}_{-0.007}$ для мазеров не-HMSFRs в 1.5 раза выше, чем $\text{Me } \sigma_{\varpi} = 0.025^{+0.004}_{-0.003}$ для мазеров HMSFRs каталога Рс17. Хотя эти медианы формально отличаются незначимо, подавляющее большинство источников не-HMSFRs (25 из 29) имеют величины σ_{ϖ} , равные или большие медианной для мазеров HMSFRs (рис. 2а). Несколько меньшее значение $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$ для источников не-HMSFRs по сравнению с HMSFRs (табл. 1) непоказательно, поскольку первые находятся преимущественно вблизи Солнца (рис. 2б). В дальнейшем мы будем опираться на результаты для мазеров HMSFRs, образующих более однородные выборки с более точными измерениями параллакса.

С целью проверки значимости указанных трендов мы оценили для каждого сегмента по отдельности и для всех мазеров HMSFRs каталогов Рд14 и Рс17 коэффициенты κ линейной корреляции между неопределенностями параллакса, с одной стороны, и величинами расстояний или параллакса — с другой (табл. 2). Для каждой оценки коэффициента $\kappa(p_1, p_2)$ по выборочным значениям N пар случайных величин p_1 и p_2 мы вычислили вероятность P_{κ} получить коэффициент корреляции по модулю больше $|\kappa(p_1, p_2)|$ в предположении некоррелированности p_1 и p_2 , используя формулу для малых N

$$P_{\kappa} = 1 - S_{N-2}(t), \quad t = \kappa(p_1, p_2) \sqrt{\frac{N-2}{1 - \kappa^2(p_1, p_2)}}, \quad (1)$$

где $S_{N-2}(t)$ — распределение Стьюдента с $N-2$ степенями свободы (Пресс и др., 1997). Величины P_{κ} также приведены в табл. 2. Нуль-гипотеза об отсутствии корреляции может быть отвергнута при значениях $P_{\kappa} < 0.05$. Значимые в соответствии с этим правилом величины κ выделены в табл. 2 жирным шрифтом.

Представленные в табл. 2 результаты показывают, что корреляции между σ_{ϖ} и r (отрицательная) и между σ_{ϖ} и ϖ (положительная) являются значимыми не только для полных выборок HMSFRs, но и в пределах сегментов Местного рукава и рукава Стрельца по отдельности. Поскольку тенденция падения σ_{ϖ} с r сильнее всего выражена на расстояниях $r \lesssim 2.5$ кпк (рис. 1а, 2а), она меньше проявляется в случае других сегментов, которые мало захватывают эту область (рукава Персея и Щита) или совсем не проходят через нее (Внешний рукав) (рис. 1а). Однако при исключении двух самых далеких мазеров сегмента рукава Щита величины $\kappa(\sigma_{\varpi}, r)$ и $\kappa(\sigma_{\varpi}, \varpi)$ становятся значимыми и для этой детали. Близость друг к другу значимых коэффициентов корреляции ($\kappa(\sigma_{\varpi}, r) = -0.55 \div -0.44$, $\kappa(\sigma_{\varpi}, \varpi) = +0.38 \div +0.60$) говорит в пользу того, что во всех этих случаях мы имеем дело с одними и теми же эффектами. К их числу, по мнению Рида (2014), могут относиться 1) уменьшение с расстоянием видимого размера мазерных пятен, вследствие чего повышается точность астрометрических измерений при прочих равных условиях, и 2) использование большего числа наблюдений для некоторых далеких объектов (например, W 49). В любом случае полученные результаты свидетельствуют в пользу того, что в настоящую эпоху точность измерения параллакса мазеров в среднем растет с расстоянием, а, следовательно, модель $\sigma_{\varpi} = \text{const}$ для сегмента неадекватна современным данным. Заметим, что та же тенденция независимо прослеживается и по данным о мазерах не-HMSFRs, лишь со

Таблица 2: Коэффициенты линейной корреляции абсолютной и относительной неопределенностей параллаксов с оценками расстояний и параллаксов для мазеров HMSFRs.

Рукав/выборка каталог	$\kappa(\sigma_{\varpi}, r)$	P_{κ}	$\kappa(\sigma_{\varpi}/\varpi, r)$	P_{κ}	$\kappa(\sigma_{\varpi}, \varpi)$	P_{κ}	$\kappa(\sigma_{\varpi}/\varpi, \varpi)$	P_{κ}
Sct, Рд14	−0.10	0.69	+ 0.79	0.0003	+0.23	0.38	− 0.65	0.0055
Sct ^a , Рд14	− 0.55	0.035	+0.46	0.076	+ 0.52	0.048	−0.48	0.064
Sgr, Рд14	− 0.55	0.018	+0.20	0.43	+ 0.60	0.0094	−0.26	0.29
Loc, Рд14	− 0.47	0.020	+ 0.55	0.0047	+ 0.38	0.059	− 0.48	0.016
Per, Рд14	−0.33	0.11	+0.08	0.72	+0.35	0.10	−0.18	0.41
Out, Рд14	+0.06	0.90	+0.19	0.72	−0.15	0.78	−0.28	0.60
All, Рд14	− 0.47	$8 \cdot 10^{-5}$	+ 0.41	$3 \cdot 10^{-5}$	+ 0.48	$2 \cdot 10^{-7}$	− 0.36	0.0002
HMSFRs, Рс17	− 0.44	0.0001	+ 0.40	0.0001	+ 0.49	0.0002	− 0.35	0.0003

^a Без двух мазеров рукава Щита на $r \geq 8$ кпк.

Примечание. $P_{\kappa} \equiv P(|\kappa| > |\kappa(p_1, p_2)|)$ — вероятность получить коэффициент корреляции κ по модулю больше измеренного $|\kappa(p_1, p_2)|$ при отсутствии корреляции между случайными величинами p_1 и p_2 . Жирным шрифтом выделены значимые коэффициенты корреляции ($P_{\kappa} < 0.05$).

сдвигом в сторону бóльших σ_{ϖ} (рис. 2а).

При наличии тренда $\langle \sigma_{\varpi} \rangle \propto r^{-1}$ можно ожидать, что относительная неопределенность σ_{ϖ}/ϖ в среднем не меняется с r . Непосредственное сравнение σ_{ϖ}/ϖ с r (рис. 16, 2б) показывает, что разброс значений σ_{ϖ}/ϖ для HMSFRs действительно остается примерно постоянным на $r \lesssim 3.2$ кпк. За пределами этой области с ростом r величины σ_{ϖ}/ϖ смещаются в целом к большим значениям и появляется несколько измерений с низкой относительной точностью. Однако эта тенденция выражена много слабее, чем снижение $\langle \sigma_{\varpi} \rangle$ с r . Хотя для полных выборок HMSFRs корреляции между σ_{ϖ}/ϖ и r (положительная) и между σ_{ϖ}/ϖ и ϖ (отрицательная) получаются значимыми, для отдельных сегментов они незначимы либо — для рукавов Местного и Щита — лишь формально значимы (табл. 2). Так, для рукава Щита значимость корреляций основывается лишь на двух самых далеких ($r \geq 8$ кпк) объектах, которые резко отличаются от других мазеров того же сегмента большими величинами σ_{ϖ}/ϖ , кратно превышающими значения $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$ как для объектов рукава Щита, так и для всего каталога Рд14 (рис. 16, табл. 1). При исключении этих двух (из 17) объектов нуль-гипотеза не отвергается и для рукава Щита (табл. 2). Для Местного рукава формальная значимость появилась только после замены в Рс17 данных для одного (!) объекта (L 1206). (Подобная ситуация в случае корреляций для σ_{ϖ} не возникает.) Относительный разброс значений $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$ для разных сегментов заметно меньше, чем значений $\text{Me}(\sigma_{\varpi})$ (табл. 1). Таким образом, хотя корреляция между σ_{ϖ}/ϖ и r , по-видимому, су-

ществует, она слабо проявляется в пределах сегментов рукавов, рассматриваемых по отдельности. Поэтому для отдельного сегмента модель $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ можно принять как согласующуюся в первом приближении с современными данными о мазерах.

Поскольку одна из вероятных причин снижения $\langle\sigma_{\varpi}\rangle$ с r (использование большего числа наблюдений для далеких мазеров) не обязательно сохранится в будущем, при численном моделировании мы рассматриваем оба варианта учета неопределенности параллаксов. Из них, как будет показано ниже, модель $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$ описывает более благоприятную ситуацию для оценивания R_0 по геометрии спирального сегмента, а модель $\sigma_{\varpi} = \text{const}$ — менее благоприятную. Исходя из приведенных результатов и соображений, можно ожидать, что при любом ходе дальнейших измерений параллаксов поведение $\langle\sigma_{\varpi}\rangle$ с r , скорее всего, останется промежуточным между этими двумя случаями.

2.3. Процедура моделирования

Рассмотрим три *репрезентативные* точки M_1, M_2, M_3 , принадлежащие сегменту модельной спирали с параметрами $R_0, i, \lambda_0, \lambda_1^s, \Delta\lambda$ (см. раздел 2.1). Выберем положение точек так, чтобы соседние точки были равноудалены друг от друга по галактоцентрической долготе λ . Тогда долготы точек M_j определяются выражением $\lambda_j = \lambda_1^s + \Delta\lambda(2j - 1)/6$, $j = 1, 2, 3$. Таким образом, расстояние между соседними точками равно $\Delta\lambda/3$, расстояние от крайней точки (M_1 или M_3) до ближайшей по долготе границы сегмента равно $\Delta\lambda/6$. Каждая из точек M_j представляет положение трети сегмента по долготе. Равноудаленная конфигурация репрезентативных точек соответствует равномерному распределению объектов по λ , т.е. примерно равномерному вдоль сегмента. Эта модель довольно хорошо описывает реальность во многих случаях (см., например, рисунки в работах Поповой, Локтина, 2005; Дамбиса и др., 2015). Поэтому, а также чтобы не множить число параметров задачи, ограничимся здесь лишь таким типом конфигураций.

Для учета разброса объектов поперек сегмента рукава и неопределенности параллакса в численных экспериментах положения репрезентативных точек M_j , $j = 1, 2, 3$, модельной спирали варьировались следующим образом. Каждая точка M_j смещалась случайным образом на расстояние ρ_j в одну или другую сторону вдоль прямой, перпендикулярной модельной спирали в точке M_j ; таким образом находилась точка M'_j с параллаксом ϖ'_j (см. рис. 3). Затем точка M'_j смещалась, также случайным образом, по лучу зрения SM'_j , что определяло псевдослучайную точку (M''_j на рис. 3) с параллаксом ϖ''_j .

После получения набора точек M''_1, M''_2, M''_3 осуществлялся поиск параметров спиралей, проходящих через них за один виток. В этом случае (т.е. в рамках трехточечного метода) величины R_0 для таких спиралей находятся из следующего уравнения (см. НВ18):

$$(\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3 = 0, \quad (2)$$

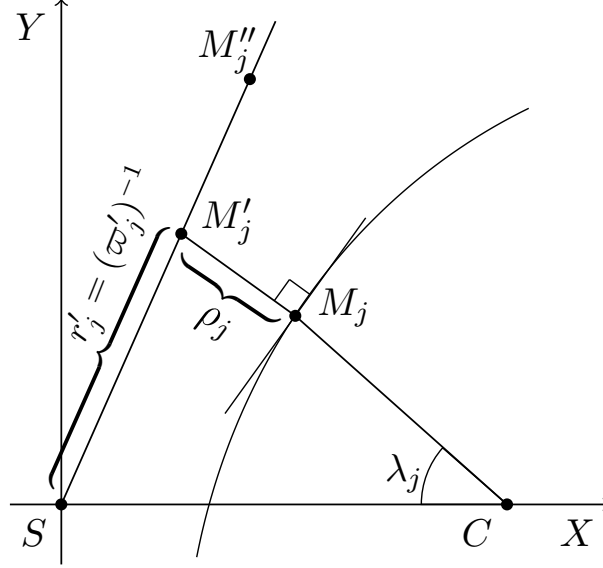


Рис. 3: Варьирование положения репрезентативной точки M_j вдоль перпендикуляра к модельной спирали (точка M'_j) и вдоль луча зрения (точка M''_j). S — положение Солнца, C — полюс модельной спирали (центр Галактики), (X, Y) — плоскость Галактики.

где галактоцентрические расстояния R_j точек M''_j выражаются через декартовы гелиоцентрические координаты X_j, Y_j этих точек по формуле

$$R_j = \sqrt{R_0^2 + X_j^2 + Y_j^2 - 2R_0X_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

а значения номинальных галактоцентрических долгот Λ_j точек M''_j ($-\pi \leq \Lambda_j < \pi$, см. HB18) определяются формулами

$$\sin \Lambda_j = \frac{Y_j}{R_j}, \quad \cos \Lambda_j = \frac{R_0 - X_j}{R_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Как показано в HB18, для тройки точек, снятых со спирали, т.е. для M_1, M_2, M_3 , уравнение (2) может иметь один или два дополнительных корня. Поэтому и для тройки псевдослучайных точек M''_1, M''_2, M''_3 можно получить больше одного (до трех) корня уравнения (2). В таких случаях среди значений R_0 , найденных для данной тройки, выбиралось наиболее близкое к исходной величине R_0 для модельной спирали, и оно считалось решением для тройки. Кроме того, как показали наши численные эксперименты, для точек M''_1, M''_2, M''_3 уравнение (2) может и не иметь корней. Это означает, что через три произвольные точки не обязательно можно провести виток хотя бы одной спирали, если задана прямая, на которой полюс спирали может находиться. Такие тройки исключались из дальнейшей обработки.

Найденное для тройки M''_1, M''_2, M''_3 значение R_0 однозначно определяет и два других параметра (i, λ_0) спирали (формулы (12), (13) в HB18). Однако свойства оценок i, λ_0 как производных характеристик, сильно коррелирующих с R_0 (см. HB18), на данном этапе мы не рассматриваем.

Для заданных положений репрезентативных точек M_j и выбранных значений других параметров создавалось множество из $N_{\text{МС}}$ троек псевдослучайных точек $\{M''_{1,m}, M''_{2,m}, M''_{3,m}\}_{m=1}^{N_{\text{МС}}}$, где $N_{\text{МС}}$ бралось таким, чтобы количество N_{sol} решений задачи определения R_0 , т.е. число троек с непустым множеством корней (2), получилось равным 10000. Считалось, что в спиральном сегменте со стандартом разброса объектов поперек рукава σ_w наблюдается N объектов с оценками параллаксов, имеющими среднеквадратическую неопределенность σ_ϖ или относительную неопределенность σ_ϖ/ϖ . Каждая точка M_j моделирует среднее положение трети сегмента. Поэтому стандартную ошибку положения M_j вдоль направления поперек рукава можно приближенно принять равной $\sigma_w/\sqrt{N/3}$, а стандартную ошибку параллакса смещенной точки M'_j (см. рис. 3) — равной $\sigma_\varpi(M'_j)/\sqrt{N/3}$, где $\sigma_\varpi(M'_j)$ — неопределенность параллакса в точке M'_j . Исходя из этого, для генерации точек $M''_{j,m}$, $j = 1, 2, 3$, $m = 1, 2, \dots, N_{\text{МС}}$, мы варьировали значение $\rho_{j,m}$ (смещение $M'_{j,m}$ относительно $M_{j,m}$) по нормальному закону с нулевым средним значением и стандартом $\sigma_w/\sqrt{N/3}$, а величины $\varpi''_{j,m}$ — по нормальному закону со средним значением, равным $\varpi'_{j,m}$, и стандартом $\sigma_\varpi/\sqrt{N/3}$ в случае постоянной для сегмента абсолютной ошибки параллакса или $\varpi'_{j,m}(\sigma_\varpi/\varpi)/\sqrt{N/3}$, в случае постоянной относительной ошибки параллакса.

Для множества всех полученных решений $\{R_{0,s}\}$, $s = 1, 2, \dots, N_{\text{sol}}$, вычислялись медиана $\text{Me } R_0$, интервал $[\text{Me } R_0 - \sigma_{R_0}^-, \text{Me } R_0 + \sigma_{R_0}^+]$, вероятность попадания в который отдельной оценки $R_{0,s}$ равна $\approx 68.3\%$ (уровень 1σ), и доверительный 1σ -интервал $[\text{Me } R_0 - \sigma^-(\text{Me } R_0), \text{Me } R_0 + \sigma^-(\text{Me } R_0)]$ для медианы. Величины $\sigma_{R_0}^-$, $\sigma_{R_0}^+$ и $\sigma^-(\text{Me } R_0)$, $\sigma^+(\text{Me } R_0)$ определялись на основе порядковых статистик для упорядоченного массива оценок $R_{0,s}$ (см., например, Кобзарь, 2006). Также вычислялось среднее смещение оценок $R_{0,s}$ при заданных параметрах задачи: $\Delta R_0 = \text{Me } R_0 - R_0$ с доверительным интервалом $[\Delta R_0 - \sigma^-(\text{Me } R_0), \Delta R_0 + \sigma^-(\text{Me } R_0)]$, где R_0 — значение параметра исходной модельной спирали.

2.4. Выбор базовых наборов параметров модельных сегментов

Численное моделирование выполнялось для двух семейств модельных сегментов, одно из которых представляет рукав Персея, а другое — рукав Щита. Эти случаи примерно охватывают разброс вероятных конфигураций сегментов, выявляемых в современную эпоху по объектам с точными гелиоцентрическими расстояниями: в локальном галактоцентрическом секторе (содержащем Солнце) рукав Персея проходит вне солнечного круга, т.е. далеко от центра Галактики, а рукав Щита — внутри круга $R = R_0$, относительно близко к центру (см. рис. 13 в НВ18, рис. 4 этой работы). Кроме того, определение R_0 трехточечным методом в НВ18 получилось надежным именно по мазерам рукавов Персея и Щита, поэтому исследовать, в том числе и на перспективу, свойства оценки R_0 по геометрии сегментов этих рукавов представляется сейчас наиболее интересным.

Параметр R_0 для модельных сегментов принят равным 8 кпк в согласии с недавними средними („наилучшими“) величинами $\langle R_0 \rangle_{\text{best}} = (7.9 \div 8.3) \pm (0.1 \div 0.4)$ кпк (Никифоров, Смирнова, 2013; Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016; де Грийс, Боно, 2016;

Таблица 3: Базовые наборы параметров модельных спиралей, представляющих рукава Персея и Щита в численных экспериментах

Параметр	Per	Sct	Параметр	Per	Sct
R_0 , кпк	8.0	8.0	σ_{ϖ} , мсд	0.018	0.028
i	-10°	-20°	σ_{ϖ}/ϖ	0.06	0.10
λ_0	$+61^\circ$	-55°	σ_w , кпк	0.35	0.17
λ_1^s	-21°	$+3^\circ$	N	24	18
λ_2^s	$+88^\circ$	$+100^\circ$			
$\Delta\lambda$	109°	97°			

Камарийо и др., 2018) и с недавними отдельными оценками R_0 (например, Расторгуев и др. 2017; Чэнь и др., 2018; Маджаесс и др., 2018). Величина исходного R_0 в данной задаче не является существенным параметром и в численных экспериментах не менялась. Для других параметров модельных сегментов каждого из двух семейств выбирался набор таких значений, которые точно или приблизительно соответствуют характеристикам, найденным по данным каталога Риды и др. (2014) для мазеров рукавов Персея и Щита. Будем называть такие наборы и сами значения параметров в них *базовыми*. Эти значения приведены в табл. 3; базовые сегменты, которые им соответствуют, показаны на рис. 4. Другие наборы параметров каждого семейства моделей формировались посредством варьирования одного из параметров при сохранении базовых значений остальными параметрами.

Базовые долготы границ сегмента λ_1^s , λ_2^s соответствуют границам области, занимаемой мазерными источниками данного рукава. Базовые значения i_0 и λ_0 были выбраны такими, чтобы модельный сегмент проходил через область, представленную мазерами рукава.

В случае рукава Персея базовый разброс поперек сегмента σ_w принят равным 0.35 кпк в соответствии с оценкой, полученной нами в результате применения трехточечного метода определения параметров модельной спирали к мазерам данного сегмента (НВ18). В случае рукава Щита для того же параметра взято значение $\sigma_w = 0.17$ кпк, найденное Ридом и др. (2014).

Базовые значения σ_{ϖ} и σ_{ϖ}/ϖ были выбраны равными медианам $\text{Me } \sigma_{\varpi}$ и $\text{Me}(\sigma_{\varpi}/\varpi)$, вычисленным для мазеров соответствующего рукава (табл. 1).

Базовое число N представляющих сегмент объектов для рукава Персея взято равным количеству мазеров каталога Риды и др. (2014), отнесенных к этому рукаву. В случае рукава Щита это число для удобства (поскольку каждая репрезентативная точка M_j представляет $N/3$ объектов сегмента) принято равным 18 — числу, ближайшему к числу мазеров ($N = 17$) данного рукава в том же каталоге и при этом кратному трем (табл. 1).

Заметим, что базовый набор параметров для рукава Персея определяет сегмент, пересекающий линию центр–антицентр Галактики (табл. 3, рис. 4). В этом случае в

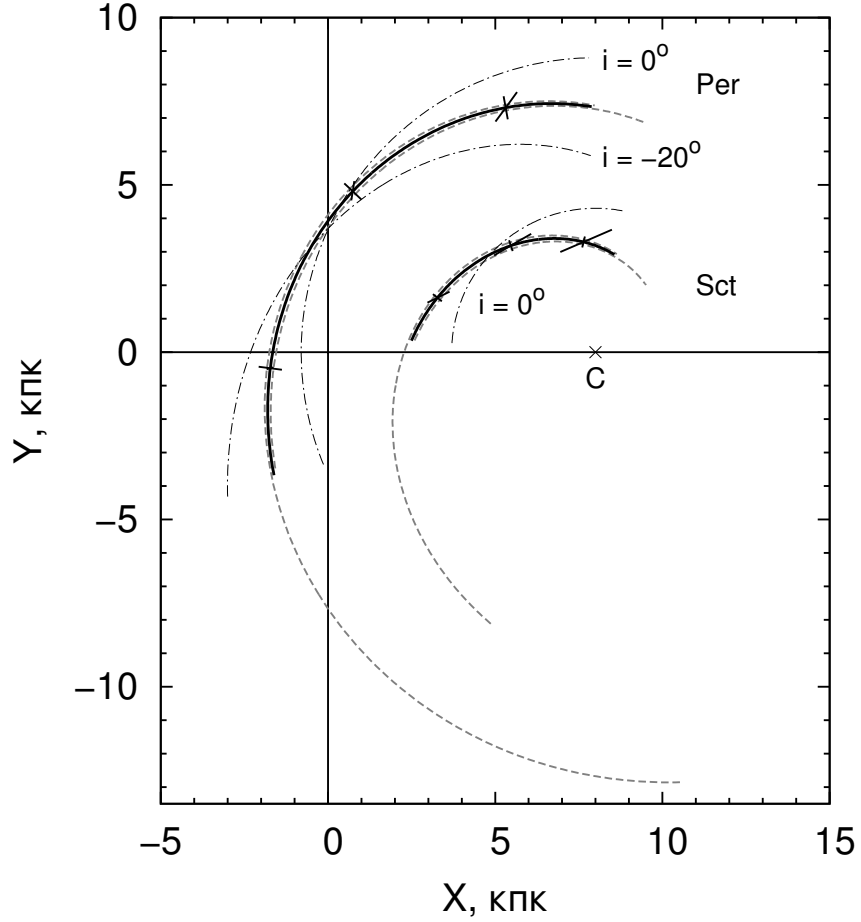


Рис. 4: Схема модельных сегментов спиралей, рассмотренных в численных экспериментах: базовые сегменты (черные кривые), сегменты наибольшей угловой протяженности $\Delta\lambda$ при фиксировании границы λ_1^s или λ_2^s (серые пунктирные кривые, даны с небольшим смещением по радиусу), сегменты с наибольшим и наименьшим углами закрутки i (черные штрихпунктирные кривые). Бары показывают для уровня 1σ неопределенность расстояния (при $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$) и разброс поперек рукава в трех репрезентативных точках M_j базовых сегментов. Для точки M_1 рукава Персея первый из этих баров лишь немного превышает толщину линии модельного сегмента. Точка C — полюс всех сегментов (центр Галактики), Солнце — в начале координат.

большинстве сгенерированных троек репрезентативных точек $M''_{1,m}$, $M''_{2,m}$, $M''_{3,m}$ отдельные точки располагаются по разные стороны от этой линии. При такой конфигурации в подавляющем числе случаев через тройку точек проходит единственная спираль (см. НВ18), поэтому выбирать решение для R_0 из множества корней уравнения (2) не требуется. Базовый набор для рукава Щита задает сегмент, полностью находящийся по одну сторону от линии центр–антицентр, в I квадранте (табл. 3, рис. 4). Там же в большинстве случаев оказываются и сгенерированные тройки. Через так расположенные тройки при непустом множестве корней (2) и в невырожденных случаях всегда проходят две спирали (НВ18), поэтому выбор из корней (2) ближайшего к исходному значению R_0 модельной спирали является необходимым. Случаи, когда для некоторых сгенерированных троек корней нет (решение для R_0 отсутству-

ет), имеют место только для таких наборов параметров, при которых дисперсия точек $M''_{1,m}$, $M''_{2,m}$, $M''_{3,m}$ относительно модельного сегмента значительна по сравнению с линейным размером и радиусом кривизны сегмента. Так, для семейства моделей рукава Персея это происходит, причем очень редко, лишь при $\Delta\lambda = 50^\circ$, значении более чем вдвое меньшем базового. Для семейства рукава Щита такие случаи, наоборот, обычны, так как модельные сегменты семейства имеют существенно меньшие линейную протяженность и радиус кривизны по сравнению с сегментами рукава Персея (рис. 4).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты численного моделирования — статистическая неопределенность на уровне 1σ ($\sigma_{R_0}^+$, $\sigma_{R_0}^-$) и среднее смещение (ΔR_0) оценки R_0 по геометрии спирального сегмента — для базовых наборов параметров (табл. 3), а также при замене в таких наборах базового значения одной из дисперсий на нулевое, приведены в табл. 4. Для рукава Персея во всех таких вариантах экспериментов значимых смещений ΔR_0 не обнаружено. При базовых наборах для рукава Щита величины ΔR_0 значимо отличаются от нуля, причем в случае модели $\sigma_\varpi = \text{const}$ — существенно. Сравнение с результатами для того же рукава при обнулении одной из дисперсий (табл. 4) показывает, что наличие смещения обусловлено неопределенностью параллаксов (при $\sigma_\varpi = 0$ мсд $\Delta R_0 = 0$ кпк в пределах ошибок), но, с другой стороны, разброс поперек рукава в дополнение к ненулевой σ_ϖ увеличивает значение ΔR_0 . Неопределенность R_0 и вклад в нее неопределенности параллаксов сильно зависят от модели для последней в пределах рукава: при $\sigma_\varpi = \text{const}$ величины $\sigma_{R_0}^\pm$ на 40–70% больше, чем при $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$; в первом случае вклад σ_ϖ в общую неопределенность R_0 явно преобладает (ср. строки для $\sigma_\varpi = \text{const} \neq 0$ и для $\sigma_\varpi = 0$ в табл. 4), во втором — вклады обеих дисперсий в целом сопоставимы, а для рукава Персея фактор разброса поперек рукава даже оказывается важнее (ср. строки для $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const} \neq 0$ и для $\sigma_\varpi = 0$ в табл. 4). У двух рассмотренных рукавов неопределенности R_0 при базовых наборах параметров оказались близкими в случае $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$, в случае $\sigma_\varpi = \text{const}$ для рукава Щита неопределенность R_0 немного выше.

Для исследования зависимости результатов от существенных параметров задачи были выполнены серии численных экспериментов, в каждой из которых один из параметров (кроме R_0 и λ_0) изменялся в широкой окрестности своего базового значения, а другие параметры базовые значения сохраняли. Будем называть такие серии *основными*. При изменении угловой протяженности $\Delta\lambda$ сегмента фиксировался либо левый (λ_1^s), либо правый его край (λ_2^s). Во всех случаях, кроме серии для разных σ_ϖ , принималась модель неопределенности расстояний $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$, так как этот вариант лучше согласуется с современными данными о мазерах (см. раздел 2.2). При варьировании угла закрутки i величина λ_0 подбиралась для каждого значения i такой, чтобы модельная спираль проходила через область, занимаемую мазерами этого рукава по данным Рида и др. (2014). Модельные сегменты для предельных i и наибольших $\Delta\lambda$ приведены на рис. 4. С целью выяснения роли каждой из двух дисперсий задачи для некоторых основных серий проводились *дополнительные* серии экспериментов в

Таблица 4: Статистическая неопределенность ($\sigma_{R_0}^+$, $\sigma_{R_0}^-$) и среднее смещение (ΔR_0) оценки R_0 по геометрии спирального сегмента для базовых значений параметров моделей рукавов Персея и Щита с вариантами обнуления одной из дисперсий.

Рукав Персея				Рукав Щита			
σ_{ϖ}/ϖ или σ_{ϖ} , мсД	σ_w , кпк	$\sigma_{R_0}^{\pm}$, кпк	ΔR_0 , кпк	σ_{ϖ}/ϖ или σ_{ϖ} , мсД	σ_w , кпк	$\sigma_{R_0}^{\pm}$, кпк	ΔR_0 , кпк
$\sigma_{\varpi}/\varpi = 0.06$	0.35	$+1.06$ -0.95	$-0.006^{+0.015}_{-0.014}$	$\sigma_{\varpi}/\varpi = 0.1$	0.17	$+0.99$ -1.03	$+0.116^{+0.012}_{-0.014}$
	0	$+0.54$ -0.52	$0.000^{+0.007}_{-0.006}$		0	$+0.84$ -0.90	$+0.044^{+0.011}_{-0.012}$
$\sigma_{\varpi} = 0.018$	0.35	$+1.55$ -1.39	$+0.005^{+0.019}_{-0.019}$	$\sigma_{\varpi} = 0.028$	0.17	$+1.71$ -1.49	$+0.562^{+0.021}_{-0.019}$
	0	$+1.23$ -1.16	$+0.014^{+0.018}_{-0.015}$		0	$+1.65$ -1.45	$+0.505^{+0.023}_{-0.017}$
$\sigma_{\varpi} = 0$	0.35	$+0.89$ -0.80	$-0.012^{+0.012}_{-0.010}$	$\sigma_{\varpi} = 0$	0.17	$+0.60$ -0.58	$-0.005^{+0.008}_{-0.007}$

Таблица 5: Статистическая неопределенность ($\sigma_{R_0}^+$, $\sigma_{R_0}^-$) и среднее смещение (ΔR_0) оценки R_0 по геометрии спирального сегмента при экстремальных отклонениях одного из параметров задачи от базового значения для моделей рукава Персея.

p	$p_{\min}$	$\sigma_{R_0}^{\pm}$, кпк	ΔR_0 , кпк	$p_{\max}$	$\sigma_{R_0}^{\pm}$, кпк	ΔR_0 , кпк
$\Delta\lambda$, $\lambda_1^s = -21^\circ$	50°	$+5.9$ -2.7	$-0.071^{+0.045}_{-0.048}$	120°	$+0.94$ -0.89	-0.004 ± 0.013
$\Delta\lambda$, $\lambda_2^s = +88^\circ$	109°	$+1.05$ -0.94	$-0.006^{+0.015}_{-0.014}$	190°	$+0.34$ -0.33	0.000 ± 0.004
σ_{ϖ}/ϖ	0.00	$+0.89$ -0.79	$-0.012^{+0.012}_{-0.010}$	0.20	$+2.1$ -1.8	$-0.012^{+0.034}_{-0.024}$
σ_{ϖ} , мсД	0.00	$+0.89$ -0.79	$-0.012^{+0.012}_{-0.010}$	0.05	$+4.1$ -3.1	$-0.020^{+0.045}_{-0.036}$
σ_w , кпк	0.00	$+0.54$ -0.52	$0.000^{+0.007}_{-0.006}$	0.60	$+1.7$ -1.4	$-0.026^{+0.022}_{-0.021}$
N	3	$+3.4$ -2.6	$-0.022^{+0.030}_{-0.040}$	60	$+0.66$ -0.61	$-0.004^{+0.010}_{-0.009}$
i	-20°	$+0.94$ -0.85	$+0.001^{+0.008}_{-0.013}$	0°	$+1.14$ -1.01	$-0.014^{+0.017}_{-0.014}$
i , $\sigma_{\varpi} = 0$	-20°	$+0.77$ -0.69	$-0.008^{+0.009}_{-0.010}$	0°	$+1.01$ -0.89	$-0.021^{+0.015}_{-0.013}$
i , $\sigma_w = 0$	-20°	$+0.52$ -0.49	$-0.001^{+0.006}_{-0.007}$	0°	$+0.49$ -0.48	$+0.002^{+0.007}_{-0.006}$

Примечание. p — изменяемый параметр; $p_{\min}$, $p_{\max}$ — наименьшее и наибольшее из рассмотренных значений параметра p . При наличии дополнительных условий проведения численных экспериментов они указаны в первой колонке.

предположении $\sigma_{\varpi} = 0$ или $\sigma_w = 0$. Как правило, это делалось, когда в основной серии имелись случаи смещений ΔR_0 , значимо отличных от нуля. Полученные результаты суммированы в табл. 5, 6 и графически представлены на рис. 5–11.

В табл. 5 и 6 характеристики распределения оценок $R_{0,s}$, те же что и в табл. 4, даны для экстремальных значений варьируемых параметров моделей рукавов Персея и Щита соответственно. Рисунки 5–11 показывают зависимости от разных параметров медианы $\text{Me } R_0$ и интервала $[\text{Me } R_0 - \sigma_{R_0}^-, \text{Me } R_0 + \sigma_{R_0}^+]$ (серые бары) для оценок $R_{0,s}$, полученных в основных и дополнительных сериях экспериментов для каждого из двух рукавов. На этих рисунках утолщенная линия бара отмечает результат при ба-

Таблица 6: То же, что в таблице 5, но для моделей рукава Щита.

p	$p_{\min}$	$\sigma_{R_0}^{\pm}$, кпк	ΔR_0 , кпк	$p_{\max}$	$\sigma_{R_0}^{\pm}$, кпк	ΔR_0 , кпк
$\Delta\lambda$, $\lambda_1^s = +3^\circ$	50°	$+2.3$ -1.8	$-0.47^{+0.03}_{-0.03}$	120°	$+0.92$ -0.93	$+0.294^{+0.014}_{-0.012}$
$\Delta\lambda$, $\lambda_1^s = +3^\circ$, $\sigma_w = 0$	50°	$+2.1$ -1.5	$-0.31^{+0.02}_{-0.02}$	120°	$+0.44$ -0.49	$+0.001^{+0.006}_{-0.005}$
$\Delta\lambda$, $\lambda_1^s = +3^\circ$, $\sigma_w = 0$	50°	$+1.1$ -1.2	$+0.051^{+0.017}_{-0.019}$	120°	$+0.87$ -0.90	$+0.249^{+0.010}_{-0.013}$
$\Delta\lambda$, $\lambda_2^s = +100^\circ$	97°	$+0.99$ -1.02	$+0.11 \pm 0.01$	170°	$+0.31$ -0.29	$+0.008 \pm 0.004$
$\Delta\lambda$, $\lambda_2^s = +100^\circ$, $\sigma_w = 0$	97°	$+0.60$ -0.58	$-0.005^{+0.008}_{-0.007}$	170°	$+0.18$ -0.17	$-0.002^{+0.003}_{-0.002}$
$\Delta\lambda$, $\lambda_2^s = +100^\circ$, $\sigma_w = 0$	97°	$+0.84$ -0.90	$+0.044 \pm 0.012$	170°	$+0.26$ -0.23	$+0.003^{+0.004}_{-0.003}$
σ_w/ϖ	0.00	$+0.60$ -0.58	$-0.005^{+0.008}_{-0.007}$	0.20	$+1.5$ -1.4	$+0.48 \pm 0.02$
σ_w/ϖ , $\sigma_w = 0$	0.01	$+0.092$ -0.095	0.000 ± 0.001	0.20	$+1.5$ -1.3	$+0.43^{+0.02}_{-0.02}$
σ_w , мсД	0.00	$+0.60$ -0.58	$-0.005^{+0.008}_{-0.007}$	0.05	$+2.5$ -2.5	$+0.69 \pm 0.03$
σ_w , мсД, $\sigma_w = 0$	0.005	$+0.36$ -0.39	$-0.002^{+0.005}_{-0.004}$	0.05	$+2.3$ -2.4	$+0.67 \pm 0.03$
σ_w , кпк	0.00	$+0.84$ -0.90	$+0.044^{+0.011}_{-0.012}$	0.60	$+2.1$ -1.6	$+0.37 \pm 0.02$
σ_w , кпк, $\sigma_w = 0$	0.05	$+0.17$ -0.17	-0.002 ± 0.002	0.60	$+2.0$ -1.5	$+0.28 \pm 0.02$
N	3	$+2.1$ -1.8	$+0.71^{+0.02}_{-0.02}$	60	$+0.58$ -0.64	$-0.002^{+0.007}_{-0.008}$
N , $\sigma_w = 0$	3	$+1.5$ -1.2	$+0.17 \pm 0.02$	60	$+0.33$ -0.32	-0.004 ± 0.004
N , $\sigma_w = 0$	3	$+1.7$ -1.5	$+0.58 \pm 0.03$	60	-0.54 $+0.49$	-0.007 ± 0.006
i	-20°	$+0.99$ -1.03	$+0.11 \pm 0.01$	0°	$+1.5$ -1.5	$+0.33 \pm 0.02$
i , $\sigma_w = 0$	-20°	$+0.60$ -0.58	-0.005 ± 0.01	0°	$+0.86$ -0.88	$+0.064^{+0.013}_{-0.015}$
i , $\sigma_w = 0$	-20°	$+0.84$ -0.90	$+0.044^{+0.012}_{-0.012}$	0°	$+1.4$ -1.3	$+0.22 \pm 0.02$

зовом значении изменяемого параметра в данной серии, а горизонтальная пунктирная линия изображает исходное значение $R_0 = 8$ кпк.

Наиболее важным параметром задачи оказалась протяженность сегмента $\Delta\lambda$ (табл. 5, 6, рис. 5, 6). С уменьшением $\Delta\lambda$ неопределенность R_0 увеличивается, причем для рукава Персея при $\Delta\lambda \lesssim 70^\circ$ — весьма резко (рис. 5). Такие короткие сегменты внешнего рукава практически не создают ограничений на величину R_0 . При сокращении сегмента рукава Щита $\sigma_{R_0}^{\pm}$ растут не так драматически, но при $\Delta\lambda \lesssim 50^\circ$ появляется существенное смещение ΔR_0 , которое обусловлено в основном ненулевой толщиной спирального рукава, т.е. которое не может быть устранено снижением ошибок параллаксов (ср. соответствующие строки в табл. 6, и панели рис. 5 при базовых значениях двух дисперсий и при обнулении либо одной, либо другой из них). Для короткого сегмента, близкого к центру Галактики, разброс объектов относительно средней линии даже при точных расстояниях не мал по отношению к линейной протяженности сегмента, поэтому его кривизна устанавливается ненадежно. Однако при $\Delta\lambda \gtrsim 60^\circ$ близкие к центру сегменты можно использовать для оценивания R_0 , но лишь при обязательном учете в методе неопределенности параллаксов, чтобы избежать возможных смещений (правые панели рис. 5). При значениях $\Delta\lambda$, больших базового, для

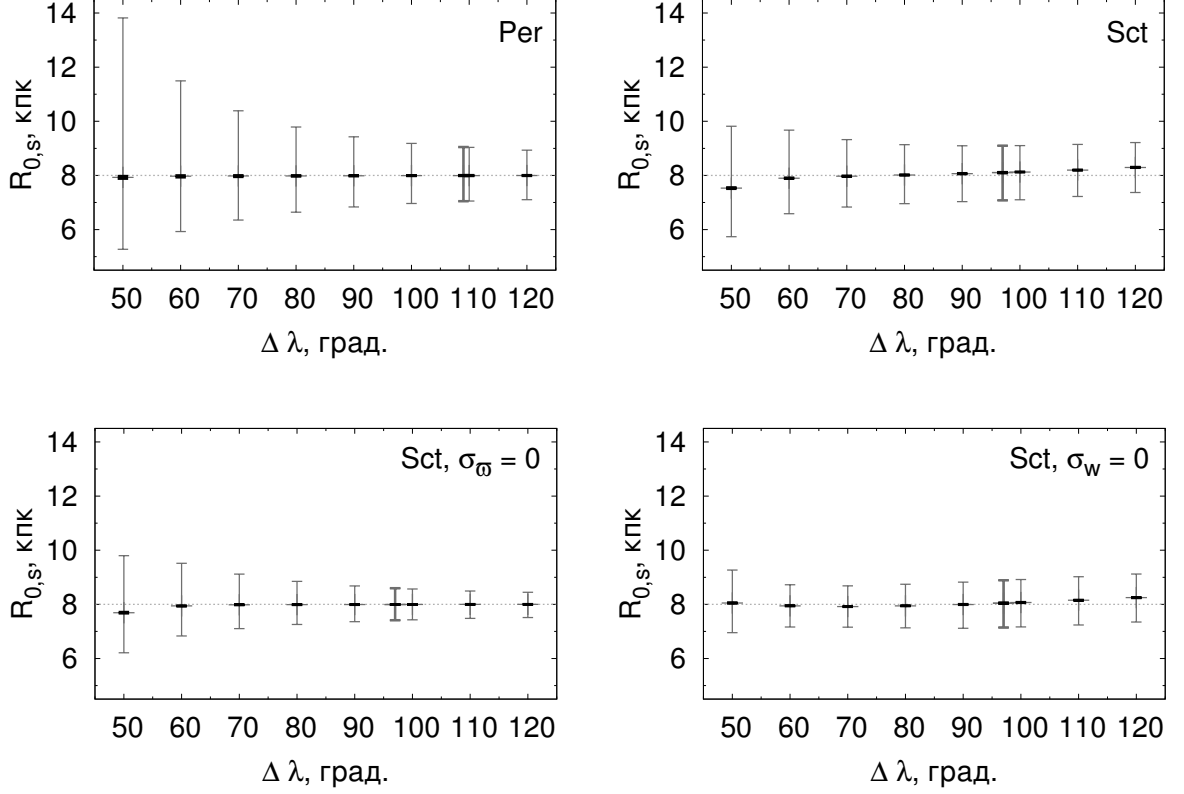


Рис. 5: Зависимость медианы и статистической неопределенности (интервала $[Me R_0 - \sigma_{R_0}^-, Me R_0 + \sigma_{R_0}^+]$ для уровня 1σ , серые бары) оценок R_0 по геометрии спирального сегмента от угловой протяженности сегмента в случае постоянства долготы его левого края (λ_1^s) для моделей рукавов Персея и Щита. На каждой панели утолщенный серый бар отмечает результат при базовом значении изменяемого параметра. Маленькие черные бары указывают 1σ -неопределенность медианы $Me R_0$.

обоих рукавов неопределенность R_0 быстро падает с ростом $\Delta\lambda$, уменьшаясь втрое по сравнению с базовыми результатами (полученными при базовых значениях параметров), когда протяженность сегмента достигает примерно половины витка спирали (табл. 5, 6, рис. 4, 6).

Вторым по важности фактором является вид закона изменения статистической ошибки измерения расстояния с удалением от Солнца. Конечно, с увеличением неопределенности параллаксов в любом случае растет и дисперсия оценок $R_{0,s}$, но темп этого роста сильно зависит от модели, принятой для σ_ϖ (рис. 7, панели для основных серий рис. 8, табл. 5, 6). Анализ полученных результатов показал, что величины $\sigma_{R_0}^\pm$ во всех рассмотренных случаях примерно следуют степенному закону

$$\sigma_{R_0}(\varsigma/\varsigma_b) = k(\varsigma/\varsigma_b)^\alpha + \sigma_{R_0}(\varsigma = 0), \quad (5)$$

где ς — дисперсионная характеристика параллаксов (σ_ϖ или σ_ϖ/ϖ), ς_b — базовое значение ς ; индекс „ $\pm$ “ в формуле (5) для простоты опущен. Показатель α оказался практически не зависящим от модели для σ_ϖ ; по-видимому, он задается конфигурацией сегмента: для рукава Персея $\alpha \approx 1.5$, для рукава Щита $\alpha \approx 1$. Однако коэффициент k , определяющий масштаб роста σ_{R_0} , для обоих рукавов при модели $\sigma_\varpi = \text{const}$

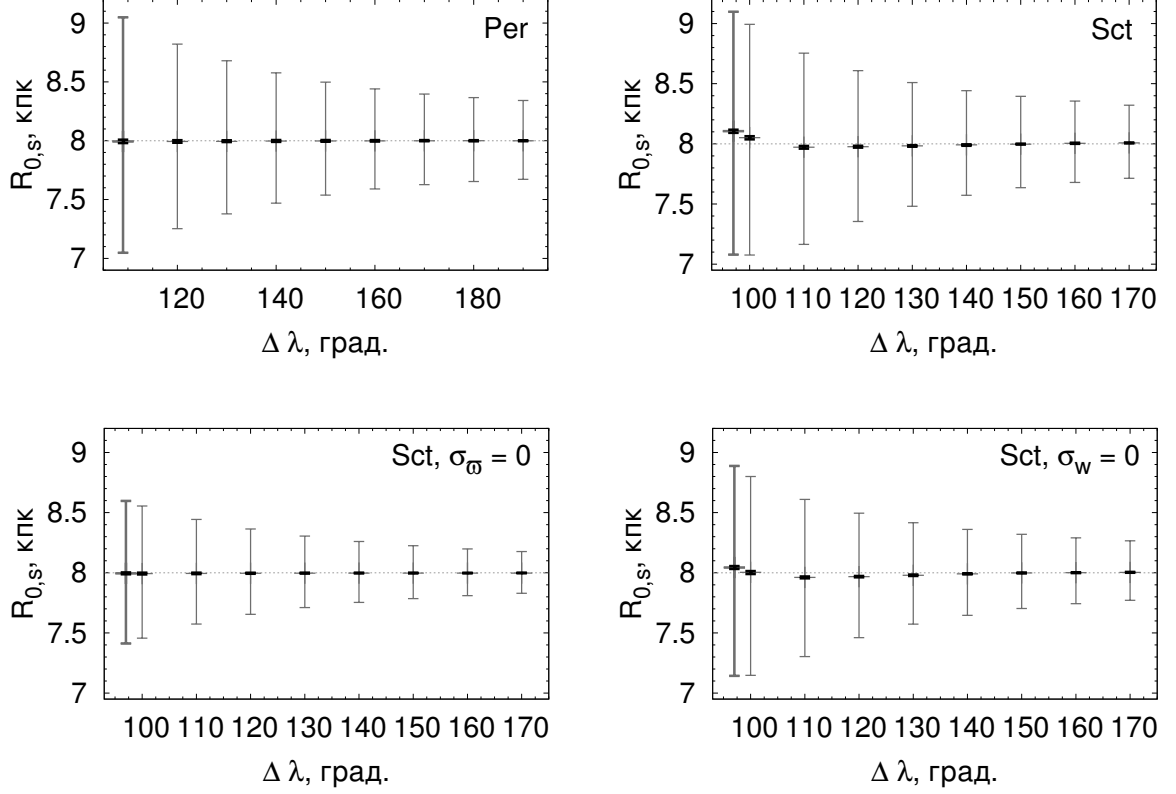


Рис. 6: То же, что на рис. 5, но в случае постоянства долготы правого края сегмента (λ_2^s).

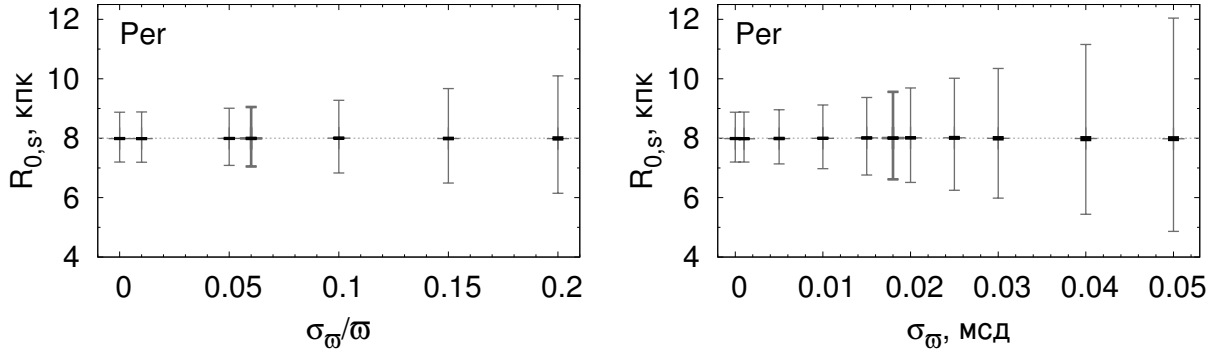


Рис. 7: То же, что на рис. 5, но в зависимости от относительной и абсолютной среднеквадратических ошибок параллакса для моделей рукава Персея.

кратно больше ($k \approx 0.2$ для рукава Персея и 0.4 для рукава Щита), чем в случае $\sigma_w/\varpi = \text{const}$ ($k \approx 0.6$ и 1 соответственно). Это приводит к тому, что, например, отношение $\sigma_{R_0}(2)/\sigma_{R_0}(0)$ составляет при $\sigma_w/\varpi = \text{const}$ ~ 1.5 для рукава Персея и ~ 2.5 для рукава Щита, а при $\sigma_w/\varpi = \text{const}$ — ~ 3 и ~ 4.5 соответственно. С другой стороны, полное отсутствие ошибок в параллаксах повышает статистическую точность оценки $R_{0,s}$ по сравнению с базовым результатом при $\sigma_w = \text{const}$ гораздо сильнее (для сегмента рукава Щита почти вдвое), чем при $\sigma_w/\varpi = \text{const}$ (см. табл. 4).

Дисперсия оценок $R_{0,s}$ с ростом числа N объектов, представляющих сегмент,

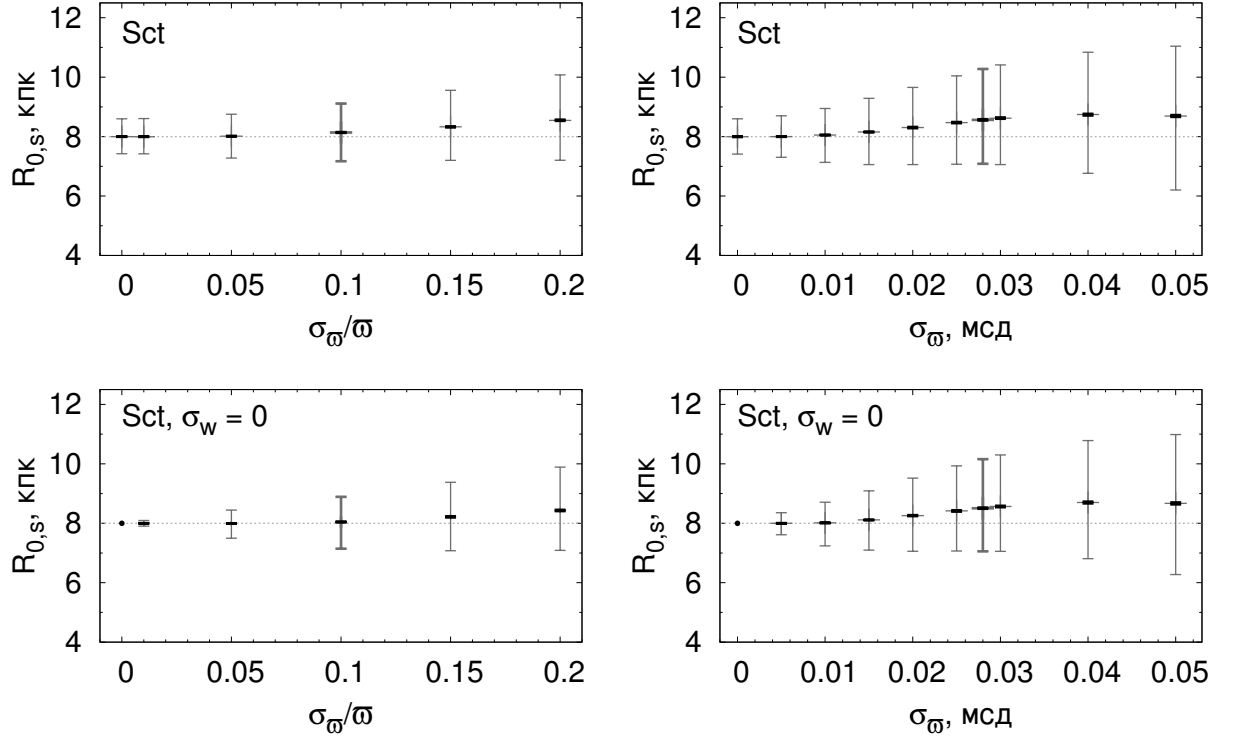


Рис. 8: То же, что на рис. 7, но для моделей рукава Щита.

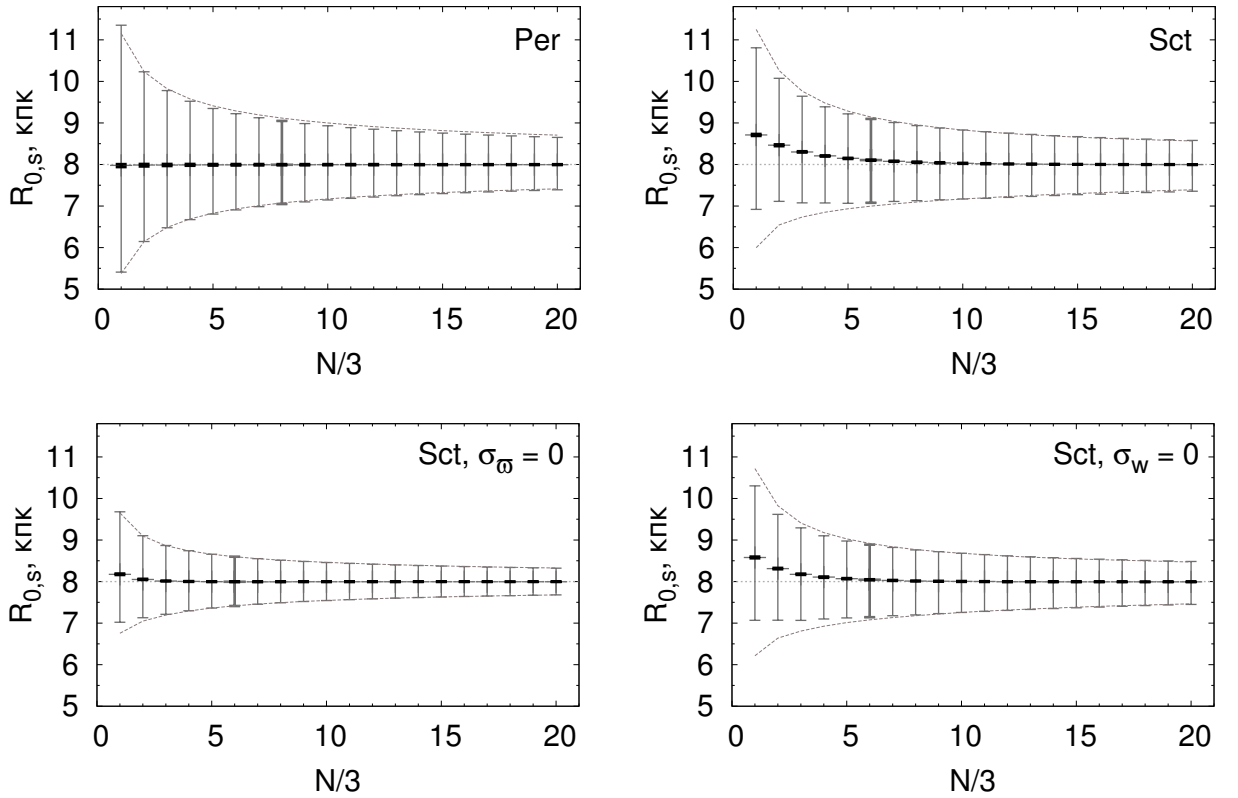


Рис. 9: То же, что на рис. 5, но в зависимости от количества населяющих сегмент объектов. Кривые линии представляют законы $\sigma_{R_0}^+(N) \propto 1/\sqrt{N}$ и $\sigma_{R_0}^-(N) \propto 1/\sqrt{N}$.

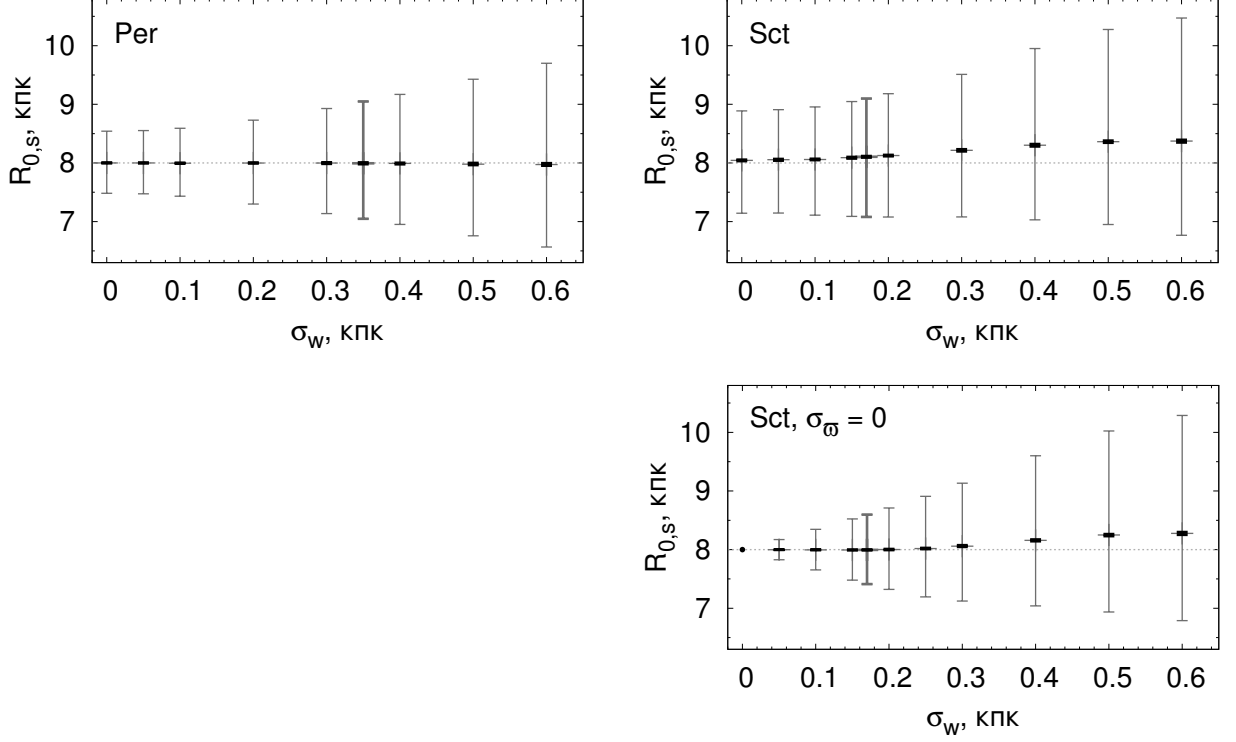


Рис. 10: То же, что на рис. 5, но в зависимости от разброса объектов поперек сегмента модельной спирали.

ожидаемо снижается; при этом в случае рукава Персея, а для $N/3 \geq 8$ — и в случае рукава Щита, согласие с законом

$$\sigma_{R_0}^{\pm}(N) \propto N^{-1/2} \quad (6)$$

почти идеальное (рис. 9, верхние панели). Худшее согласие для меньших N в случае второго рукава получается при наличии значимого смещения ΔR_0 . Последнее вызывается в основном ошибками в параллаксах (ср. две нижние и верхнюю правую панели рис. 9). При $\sigma_w = 0$ мсд близкое согласие с законом (6) получается уже при $N/3 \geq 3$ (нижняя левая панель рис. 9). Падение $\sigma_{R_0}^{\pm}(N)$ по закону (6) и отсутствие значимых смещений ΔR_0 по крайней мере при $N \geq 24$ (а для рукава Персея и при малых N) свидетельствует в пользу состоятельности оценки R_0 по геометрии спирального сегмента даже в случае применения упрощенного (трехточечного) метода (при $N \rightarrow \infty$ математическое ожидание $M R_{0,s} \rightarrow R_0$, дисперсия $D R_{0,s} \rightarrow 0$).

С увеличением σ_w величины $\sigma_{R_0}^{\pm}$ растут, так же как и с увеличением σ_w и σ_w/ϖ , примерно по степенному закону (рис. 10). Роль вклада σ_w в общую неопределенность оценки $R_{0,s}$ зависит от уровня точности параллаксов и вида зависимости $\sigma_w(r)$. Так, для рукава Персея при обнулении разброса σ_w в случае $\sigma_w/\varpi = \text{const}$ значения $\sigma_{R_0}^{\pm}$ снижаются вдвое, а в случае $\sigma_w = \text{const}$ — лишь на $\approx 1/4$ (табл. 4, панель „Per“ рис. 10). Для рукава Щита вклад ошибок параллаксов преобладает при обеих моделях для σ_w , поэтому сведение σ_w к нулю в обоих случаях сокращает $\sigma_{R_0}^{\pm}$ незначительно при базовых значениях σ_w и σ_w/ϖ (табл. 4, панели „Sct“ рис. 10).

Менее всего на дисперсию оценки $R_{0,s}$ влияет угол закрутки i модельной спира-

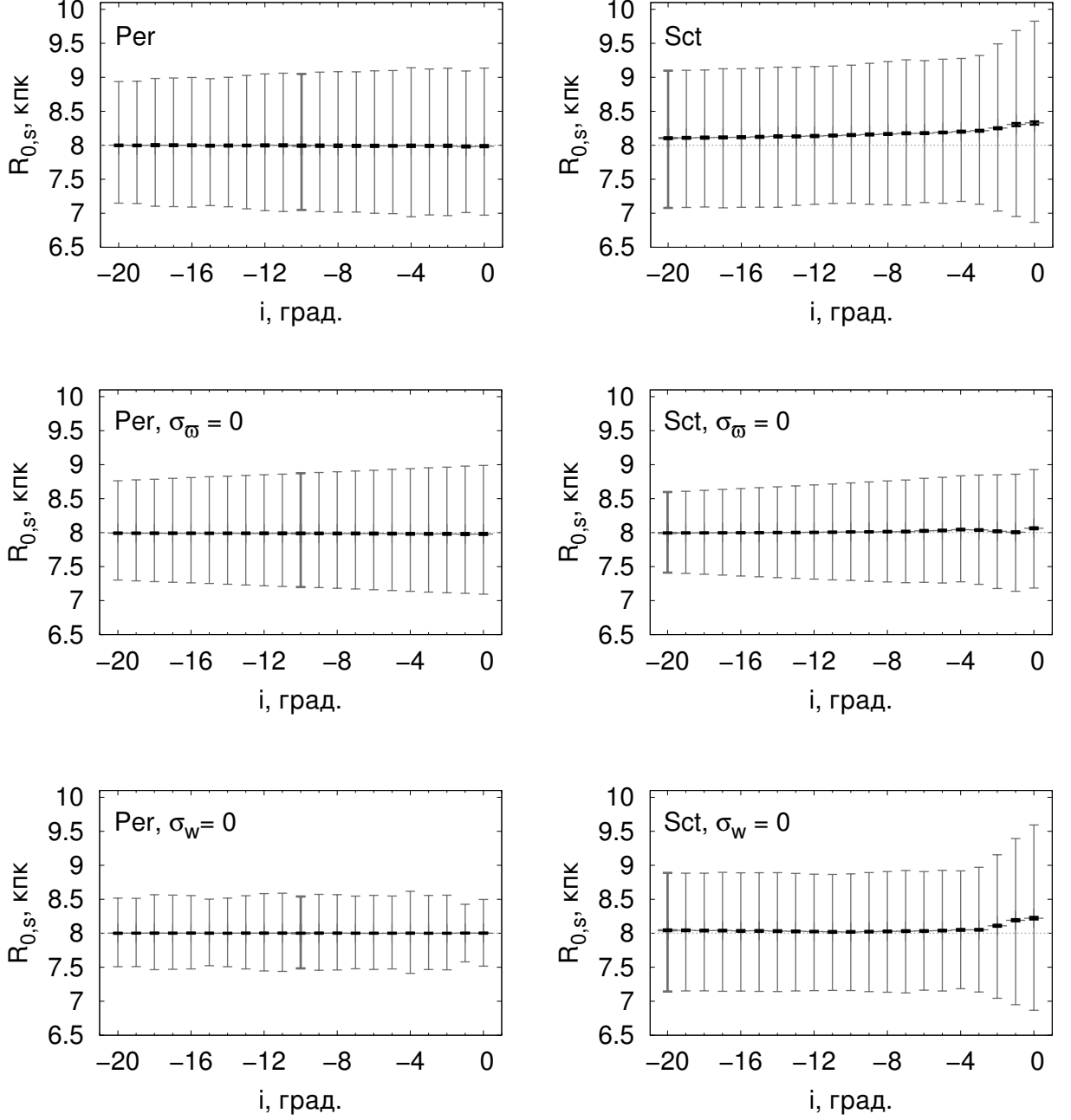


Рис. 11: То же, что на рис. 5, но в зависимости от угла закрутки модельной спирали.

ли (рис. 11, табл. 5, 6). При базовых значениях обеих дисперсий задачи общий тренд с изменением i не вполне очевиден (верхние панели рис. 11). Однако обнуление σ_w дает ясную картину: величины $\sigma_{R_0}^\pm$ почти линейно растут с увеличением $|i|$ (средние панели рис. 11). Это означает, что в отсутствие ошибок измерений расстояние от Солнца до центра кольцевой структуры по ее сектору определяется с меньшей (!) точностью, чем расстояние до полюса спирального рукава по его сегменту при одинаковой угловой протяженности сектора и сегмента. И чем больше по модулю угол закрутки рукава, тем точнее результат. Рост $\sigma_{R_0}^\pm$ с $|i|$ умеренный, но не пренебрежимо малый: при $\sigma_w = 0$ мсд на интервале $i \in [-20^\circ, 0^\circ]$ он составляет ≈ 1.3 раза для рукава Персея и ≈ 1.5 раза для рукава Щита (табл. 5, 6). Для идеально тонких структур

($\sigma_w = 0$ кпк), искаженных ошибками в параллаксах, поведение $\sigma_{R_0}^\pm(i)$ определяется разбросом и характерными величинами расстояний до точек сегмента от Солнца и от центра Галактики, положением сегмента относительно оси центр–антицентр и другими параметрами. Поэтому для разных конфигураций тренды могут быть довольно различными (нижние панели рис. 11). Отсюда и сложные зависимости $\sigma_{R_0}^\pm(i)$ при комбинированном действии обеих дисперсий (верхние панели того же рисунка).

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Значимые величины смещений ΔR_0 обнаружены только для рукава Щита (табл. 6, рис. 5, 6, 8–11). Это вызвано тем, что его сегменты имеют заметно меньшую линейную протяженность и находятся гораздо ближе к центру Галактики по сравнению с сегментами рукава Персея (рис. 4). В результате решения для рукава Щита оказываются более чувствительными к дисперсии относительно средней линии. При этом главную роль в появлении значимых смещений играют ошибки в параллаксах: при их обнулении в большинстве случаев такие смещения исчезают (ср. результаты основных серий и дополнительных серий при $\sigma_w = 0$ в таблице и на рисунках, указанных выше). Смещения ΔR_0 , вызванные неопределенностью параллаксов, всегда положительные (см. там же результаты при $\sigma_w = 0$). При нормальном распределении случайных ошибок параллаксов распределение ошибок расстояний имеет положительную асимметрию, что приводит к некоторому завышению расстояний в среднем, тем большему, чем больше σ_w . В комбинации с расположением рукава Щита в общем направлении на центр Галактики это приводит к завышению оценок $R_{0,s}$ по сегментам данного рукава в среднем. Однако не всегда смещения объясняются только ошибками в параллаксах: при малой протяженности ($\Delta\lambda \lesssim 60^\circ$), низкой населенности ($N/3 \leq 2$) и большом природном разбросе ($\sigma_w \gtrsim 0.3$ кпк) даже для $\sigma_w = 0$ мсд могут получиться небольшие, но значимые смещения $\Delta R_0 = -0.3 \div +0.3$ кпк (табл. 6; панели „Sct, $\sigma_w = 0$ “ рис. 5, 9, 10). Их природа иная: если дисперсия по сравнению с длиной сегмента не мала, то для немалой части наборов троек M_j'' (например, лежащих на одной прямой) информация о кривизне исходного сегмента полностью теряется; формальные решения (2) для таких троек и приводят к смещениям. Чтобы избежать заметных смещений ΔR_0 , нужно 1) непосредственно в методе учитывать ошибки в параллаксах и 2) не использовать для пространственного моделирования короткие, малонаселенные, дисперсные сегменты, близкие к центру Галактики.

Заметим, что в предварительных численных экспериментах (Никифоров, Веселова, 2015) значимые смещения получались и для рукава Персея в некоторых сериях. Это было вызвано исключением из рассмотрения троек точек M_j'' , соответствующих лидирующим спиральям ($i > 0^\circ$). Новые эксперименты показали, что несмотря на, казалось бы, естественность такого ограничения для нашей Галактики, оно фактически отсекает часть распределения оценок $R_{0,s}$ и тем самым может ввести фиктивное смещение ΔR_0 . При отказе от ограничения $i \leq 0^\circ$ смещения для рукава Персея исчезают. В настоящей работе такое ограничение не накладывалось.

Во всех сериях экспериментов для рукава Персея и в большинстве для рука-

ва Щита оказалось, что $\sigma_{R_0}^+ > \sigma_{R_0}^-$ (см. таблицы и рисунки раздела 3). Отчасти это следствие асимметрии распределения ошибок в расстояниях, о котором говорилось выше, отчасти — общее геометрическое свойство некоторых классов методов определения R_0 , состоящее в том, что данные лучше согласуются с моделью при пробном $R'_0 = \check{R}_0 + \delta R_0$, чем при $R'_0 = \check{R}_0 - \delta R_0$, где $\check{R}_0$ — оптимальное или истинное значение, особенно если $\delta R_0 > 0$ кпк не мало по сравнению с $\check{R}_0$ (см. Никифоров, 1999, 2000; Никифоров, Казакевич, 2009, в качестве примеров в кинематическом классе методов).

Результаты, полученные в предыдущем разделе, показывают, что дисперсия измерений R_0 по геометрии спиральных сегментов в существенной степени зависит от закона $\sigma_\varpi(r)$. Для примера мы создали псевдослучайные „наблюдаемые“ распределения объектов (по 100 на каждый градус долготы λ), принадлежащих одному витку спирального рукава с параметрами, равными базовым значениям для рукава Персея, при постоянной абсолютной неопределенности параллаксов (рис. 12а) и при постоянной относительной неопределенности параллаксов (рис. 12б). Эти рисунки иллюстрируют, насколько сильнее размывается истинное распределение трейсеров спирального рукава при модели $\sigma_\varpi = \text{const}$ по сравнению с моделью $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$. То, что современные данные о мазерах ближе ко второй из этих моделей (раздел 2.2), является весьма удачным обстоятельством для перспектив применения настоящего подхода. В любом случае ошибки в параллаксах заметно деформируют наблюдаемое пространственное распределение, поэтому корректное его моделирование возможно только при учете обеих дисперсий. При этом на некоторых участках спирального рукава доминирует та или иная дисперсия, на других участках роль дисперсий сравнима (рис. 12б, 12в). Результаты экспериментов в разделе 3 также указывают, что, хотя в целом ошибки измерений расстояний — более важный фактор, вклады двух дисперсий в общую неопределенность оценки $R_{0,s}$ сопоставимы (ср. результаты при $\sigma_\varpi = 0$ мсд и при $\sigma_w = 0$ кпк). Это означает, что при моделировании ни одну из дисперсий нельзя игнорировать.

Для обоих рукавов статистическая неопределенность $\sigma_{R_0} \approx 1$ кпк при базовых параметрах сегментов (табл. 4). Как было показано в предыдущем разделе, сильнее всего на дисперсию оценок $R_{0,s}$ влияет протяженность $\Delta\lambda$ сегмента. Поэтому можно предположить, что наличие краевых объектов, которые в реальности и задают границы сегмента, должно несколько увеличивать обусловленность задачи определения R_0 по сравнению с результатами моделирования сегмента тремя репрезентативными точками. Т.е. можно ожидать, что полученные в экспериментах величины σ_{R_0} суть оценки сверху. Чтобы оценить коэффициент завышения, мы повторили численные эксперименты в НВ18 для распределенных по сегменту мазеров (при отказе от ограничения на i) и нашли $\sigma_{R_0}^- = 0.84$ кпк, $\sigma_{R_0}^+ = 0.85$ кпк для рукава Персея и $\sigma_{R_0}^- = 0.73$ кпк, $\sigma_{R_0}^+ = 0.65$ кпк для рукава Щита. Беря наибольшую из этих величин и сравнивая с базовыми результатами в данной работе, получаем, что завышение $\sigma_{R_0}^\pm$ в трехточечных экспериментах составляет по меньшей мере 15% при параметрах, близких к базовым. Т.е. для неопределенности по *единственному* сегменту можно принять осторожную оценку $\sigma_{R_0} \simeq 0.85$ кпк. Если использовать данные о *нескольких* (N_{arm}) сегментах, то при прочих равных условиях можно ожидать итоговой неопре-

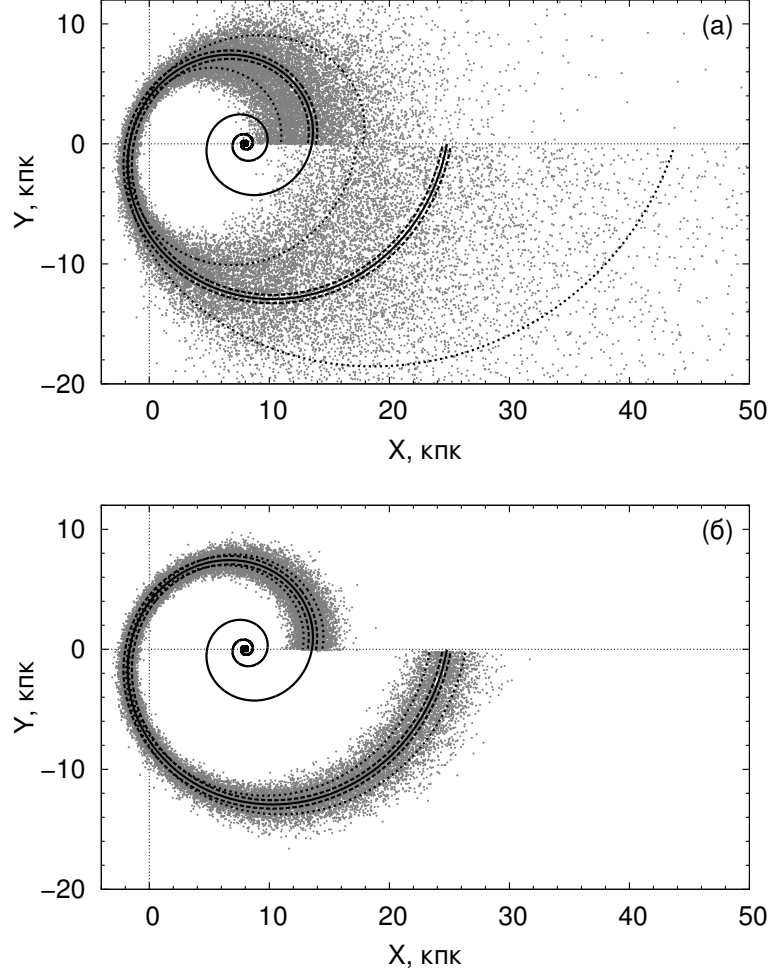


Рис. 12: Численно сгенерированное распределение 3600 объектов, принадлежащих одному витку спирального рукава с параметрами средней линии $R_0 = 8.0$ кпк, $i = -10^\circ$, $\lambda_0 = 61^\circ$ и поперечным разбросом $\sigma_w = 0.35$ кпк, при $\sigma_\varpi = 0.0175$ мсд (а) и $\sigma_\varpi/\varpi = 0.06$ (б). Сплошная линия изображает модельную спираль, штриховые линии ограничивают область отклонения от модельной спирали на $\pm 1\sigma_w$, пунктирные линии — на $\pm 1\sigma_\varpi$ (б) или $\pm 1\sigma_\varpi/\varpi$ (в).

деленности

$$\sigma_{R_0} \simeq \frac{0.85 \text{ кпк}}{\sqrt{N_{\text{arm}}}}. \quad (7)$$

Например, при трех сегментах (рассеянные скопления) $\sigma_{R_0} \simeq 0.5$ кпк, при четырех (мазеры) — $\sigma_{R_0} \simeq 0.4$ кпк, при восьми (классические цефеиды) — $\sigma_{R_0} \simeq 0.3$ кпк. Это близко к уровню статистической точности современных оценок R_0 (см., например, Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016; де Грийс, Боно, 2016).

Снизить прогнозируемую точность решения может использование коротких и малонаселенных сегментов, а также внутренне менее точных данных о гелиоцентрических расстояниях. Если в будущем при измерении параллаксов установится закон $\sigma_\varpi = \text{const}$, вопрос о величине σ_ϖ станет остро. Если же сохранится закон $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$, то величина относительной точности параллаксов будет не так

существенна.

Повысить точность R_0 сильнее всего можно за счет увеличения протяженности выделенных сегментов. Следующими по важности факторами уточнения решения являются увеличение числа отнесенных к сегментам объектов с независимо измеренными расстояниями, а также выявление новых сегментов рукавов и внутренней структуры уже известных деталей спирального узора. Потенциал снижения σ_{R_0} за счет более точного измерения параллаксов (при $\sigma_{\varpi}/\varpi = \text{const}$) лишь умеренный.

Представленные результаты были получены при помощи стандартного мультипликативного конгруэнтного генератора случайных чисел (IBM Manual C20-8011), который в двумерном случае имеет приемлемое для целей работы качество. Чтобы проверить устойчивость результатов к выбору генератора, мы также использовали для наиболее дисперсионных серий экспериментов один из генераторов Фишмэна, Мура (1986), первый в их рейтинге, принадлежащий тому же классу. С этим генератором для рукава Персея смещения ΔR_0 отличаются от приведенных в статье в пределах ошибок, а стандарты $\sigma_{R_0}^{\pm}$ сохраняют все приведенные знаки. Для рукава Щита при этих двух генераторах стандарты отличаются незначимо в пределах всей серии, а смещения — при умеренных отклонениях изменяемого параметра от базового значения. Для экстремальных значений параметра, при которых решение в случае рукава Щита становится неустойчивым по указанным выше причинам, при втором генераторе смещения получаются несколько меньше, но остаются значимыми во всех случаях, когда они значимы при первом генераторе. Таким образом, применение другого генератора случайных чисел не влияет на выводы работы.

В целом полученные результаты показывают, что геометрическое оценивание R_0 по спиральным сегментам является работоспособным для широкого набора возможных значений параметров даже в случае упрощенного (трехточечного) метода. Однако возможности этого, по сути пробного, метода ограничены: он не учитывает наличия природной и измерительной дисперсий; он слишком чувствителен к некоторым особенностям пространственного распределения объектов сегмента, особенно при малом объеме выборки (см. НВ18); непосредственно решение с его помощью можно получить только для одного сегмента и для одного типа модели (логарифмической спирали). Учесть обе дисперсии, как указывалось в НВ18, можно при реализации настоящего подхода в рамках метода наибольшего правдоподобия (МНП). Хотя этот метод будет гораздо более трудоемким, он позволит оценивать R_0 по геометрии спиральных сегментов для произвольных моделей рукавов и, одновременно, корректно решать классические и новые задачи моделирования спиральной структуры Галактики.

Заметим, что возможность введения более общей модели рукавов существенна для устранения внешней ошибки в рамках данного подхода. В случае трехточечного метода к такой ошибке могут привести систематические отклонения от логарифмической спирали. Так, если репрезентативные точки снимать с архимедовой спирали, то для базовых сегментов рукавов Персея и Щита трехточечный метод дает смещения $\Delta R_0 = -0.02$ и $+0.06$ кпк соответственно. Однако согласно нашим предварительным

оценкам для рукавов нашей Галактики пока не удастся найти значимых отклонений от формы логарифмической спирали по трейсерам с надежными фотометрическими или абсолютными расстояниями. Среди различных вариантов наибольшая по модулю производная угла закрутки $i_1 \equiv \frac{di}{d\lambda}$ составляет $+0.029 \pm 0.076$ для рукава Персея и -0.04 ± 0.25 для рукава Щита¹ (обе оценки незначимо отличны от нуля). Если репрезентативные точки снять со спиралей с переменным углом закрутки $i(\lambda) = i_0 + i_1(\lambda - \lambda_0)$, взяв указанные значения i_1 , это дает верхние по модулю оценки смещений при трехточечном методе: $\Delta R_0 < +0.6$ кпк для рукава Персея и $\Delta R_0 > -0.4$ кпк для рукава Щита. Во всех этих случаях нелогарифмические спирали на участке между репрезентативными точками при базовой протяженности сегментов мало отличаются от логарифмических моделей по сравнению с неопределенностью последних, а смещения для отдельных сегментов меньше или даже заметно меньше статистических ошибок R_0 и имеют противоположные знаки для разных сегментов. Поэтому можно ожидать, что смещение итоговой оценки R_0 по нескольким сегментам будет незначительным. В любом случае смещение этого типа не является принципиальной проблемой рассматриваемого способа определения R_0 при условии перехода к МНП, допускающему использование моделей более общего вида, что позволит выявлять систематические отклонения от логарифмической спирали, если они существуют, и одновременно учитывать их при оценивании параметров. С другой стороны, масштаб потенциальных смещений для отдельных сегментов показывает, что поиску таких отклонений надо уделять внимание.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С целью выяснения возможностей и границ применимости предложенного нами ранее (НВ18) нового способа определения расстояния до центра Галактики R_0 — по геометрии сегментов спиральных рукавов — методом численного моделирования исследовано влияние различных факторов на статистические свойства оценки R_0 по отдельному сегменту. Оценки R_0 находились упрощенным методом, восстанавливающим геометрию сегмента по трем репрезентативным точкам, что позволило за ограниченное время выполнить большое число экспериментов. Параметры задачи варьировались в широких окрестностях базовых значений, характеризующих сегменты рукавов Персея и Щита по современным данным о мазерах с тригонометрическими параллаксами.

Показано, что статистическая неопределенность σ_ϖ современных измерений параллаксов мазеров систематически снижается (!) с ростом гелиоцентрического расстояния r , при этом относительная неопределенность σ_ϖ/ϖ остается в среднем примерно постоянной (по крайней мере на $r \lesssim 3.2$ кпк).

Результаты численных экспериментов свидетельствуют в пользу состоятельности оценки R_0 по геометрии спирального сегмента. Значимые смещения оценки обнаружены только для внутреннего рукава (Щита); они обусловлены в основном случайными ошибками в параллаксах, приводящими к асимметричному распределению

¹Здесь величины i и λ выражены в одинаковой угловой мере.

расстояний r , а также малой угловой протяженностью $\Delta\lambda$ сегмента и малым числом N представляющих его объектов. На дисперсию оценки R_0 наибольшее влияние оказывает протяженность $\Delta\lambda$ (при росте последней от базового значения до половины витка спирали σ_{R_0} снижается вдвое). С ростом неопределенности параллаксов σ_{R_0} увеличивается. Если при дальнейших измерениях параллаксов величина σ_ϖ в среднем будет оставаться постоянной с r , то значение σ_ϖ будет почти таким же важным для дисперсии R_0 , как $\Delta\lambda$. При сохранении закона $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$, который хорошо описывает современные данные, остальные параметры, кроме угла закрутки i , оказывают одинаково существенное, но меньшее влияние на σ_{R_0} . В отсутствие ошибок параллаксов уменьшение $|i|$ слабо увеличивает дисперсию R_0 ; в частности, это означает, что при вырождении спирального сегмента в кольцевой сектор (при $i = 0^\circ$) расстояние до центра последнего определяется менее точно, чем расстояние до полюса спирального сегмента.

Границы применимости определения R_0 по геометрии спирального сегмента лимитируются для внешнего рукава (Персея) дисперсией оценки R_0 ($\Delta\lambda > 70^\circ$, $\sigma_\varpi < 0.04$ мсд, $N/3 > 1$), для внутреннего рукава (Щита) — наличием существенного смещения оценки R_0 , вызванного не ошибками параллаксов, а конечной толщиной сегмента ($\Delta\lambda > 50^\circ$, $\sigma_w < 0.3$ кпк, $N/3 > 2$).

То, что современные данные о мазерах лучше согласуются с моделью $\sigma_\varpi/\varpi = \text{const}$, является очень удачным обстоятельством для применения настоящего подхода к этим трейсерам спиральной структуры. Повысить точность итоговой оценки R_0 можно за счет использования в анализе нескольких сегментов рукавов, увеличения протяженности $\Delta\lambda$ выделенных сегментов и числа отнесенных к ним объектов с независимыми оценками расстояний.

Полученные результаты говорят в пользу работоспособности оценивания R_0 по спиральным сегментам для широкого набора возможных значений параметров даже при использовании робастного, но неэффективного L-эстиматора (медианы) в трехточечном методе. Это делает осмысленным разработку более сложного, но и более корректного метода на основе эффективного M-эстиматора. Как показали наши численные эксперименты, комбинированное действие измерительной дисперсии расстояний и природного разброса поперек рукава в общем случае приводит к сложному виду наблюдаемого пространственного распределения объектов, при этом влияние на него одной из дисперсий в целом сопоставимо с влиянием другой. Для корректного моделирования такого распределения в качестве M-эстиматора могут быть использованы оценки методом наибольшего правдоподобия (ML-эстиматоры).

Авторы выражают признательность рецензентам за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 18-12-00050).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блэнд-Хоторн, Герхард (J. Bland-Hawthorn and O. Gerhard), *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **54**, 529 (2016).

2. Грив и др. (E. Griv, I.-G. Jiang, and L.-G. Hou), *Astrophys. J.* **844**, 118 (2017).
3. Дамбис А.К., Бердников Л.Н., Ефремов Ю.Н., Князев А.Ю., Расторгуев А.С., Глушкова Е.В., Кравцов В.В., Тернер Д.Г. и др., *Письма в Астрон. журн.* **41**, 533 (2015) [A.K. Dambis, L.N. Berdnikov, Yu.N. Efremov, A.Yu. Kniazev, A.S. Rastorguev, E.V. Glushkova, V.V. Kravtsov, D.G. Turner, et al., *Astron. Lett.* **41**, 489 (2015)].
4. де Грийс, Боно (R. de Grijs and G. Bono), *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **227**, 5 (2016).
5. Кобзарь А.И., *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников* (М.: Физматлит, 2006).
6. Камарийо и др. (T. Camarillo, V. Mathur, T. Mitchell, and B. Ratra), *Publ. Astron. Soc. Pacific* **130**, 024101 (2018).
7. Кришнан и др. (V. Krishnan, S.P. Ellingsen, M.J. Reid, H.E. Bignall, J. McCallum, C.J. Phillips, C. Reynolds, and J. Stevens), *MNRAS* **465**, 1095 (2017).
8. Маджаесс и др. (D. Majaess, I. Dékány, G. Hajdu, D. Minniti, D. Turner, and W. Gieren), *arXiv:1805.04119* (2018).
9. Миньяр (F. Mignard), *Astron. Astrophys.* **354**, 522 (2000).
10. Никифоров И.И., *Астрон. журн.* **76**, 403 (1999) [I.I. Nikiforov, *Astron. Rep.* **43**, 345 (1999)].
11. Никифоров (I.I. Nikiforov), *ASP Conf. Ser.* **209**, 403 (2000).
12. Никифоров (I.I. Nikiforov), *ASP Conf. Ser.* **316**, 199 (2004).
13. Никифоров, Веселова (I.I. Nikiforov and A.V. Veselova), *Baltic Astron.* **24**, 387 (2015).
14. Никифоров И.И., Веселова А.В., *Письма в Астрон. журн.* **44**, 102 (2018) [I.I. Nikiforov, A.V. Veselova, *Astron. Lett.* **44**, 81 (2018)].
15. Никифоров И.И., Казакевич Е.Э., *Изв. ГАО* **219**, 4, 245 (2009).
16. Никифоров, Смирнова (I.I. Nikiforov and O.V. Smirnova), *Astron. Nachr.* **334**, 749 (2013).
17. Попова М.Э., Локтин А.В., *Письма в Астрон. журн.* **31**, 190 (2005) [M.E. Popova, A.V. Loktin, *Astron. Lett.* **31**, 171 (2005)].
18. Пресс и др. (W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery), *Numerical Recipes in C* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1997).
19. Расторгуев А.С., Уткин Н.Д., Заболотских М.В., Дамбис А.К., Байкова А.Т., Бобылев В.В., *Астрофиз. бюлл.* **72**, 134 (2017) [A.S. Rastorguev, N.D. Utkin, M.V. Zabolotskikh, A.K. Dambis, A.T. Bajkova, V.V. Bobylev, *Astrophys. Bull.* **72**, 122 (2017)].
20. Рид (M.J. Reid), Гарвард-Смитсоновский центр астрофизики, США, частное сообщение (2014).

21. Рид и др. (M.J. Reid, K.M. Menten, A. Brunthaler, X.W. Zheng, T.M. Dame, Y. Xu, Y. Wu, B. Zhang, et al.), *Astrophys. J.* **783**, 130 (2014).
22. Фишмэн, Мур (G.S. Fishman and L.R. Moore), *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **7**, 24 (1986).
23. Чэнь и др. (X. Chen, S. Wang, L. Deng, and R. de Grijs), *arXiv:1804.06807* (2018).