

Это препринт Произведения, принятого для публикации в журнале «Письма в Астрономический журнал. Астрономия и космическая астрофизика». 2017. Т. 43, № 12. Вариант после корректуры 24.08.2017.

© Российская академия наук, 2017 г.

© Редколлегия журнала «Письма в Астрономический журнал», 2017 г.

<http://pleiades.online/>

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И АПРОБАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ДО ЦЕНТРА ГАЛАКТИКИ ПО СЕГМЕНТАМ СПИРАЛЬНЫХ РУКАВОВ

© 2017 г. И.И.Никифоров\*, А.В.Веселова

*Санкт-Петербургский государственный университет*

Рассмотрена задача определения геометрических параметров спирального рукава Галактики по его сегменту с включением в их число расстояния до полюса спирали, т.е. расстояния до центра Галактики ( $R_0$ ). Численно-аналитически исследован вопрос о количестве точек, принадлежащих одному витку логарифмической спирали, определяющих эту спираль как геометрическую фигуру в предположении, что направление на полюс спирали (на центр Галактики) известно. На основе полученных результатов в целях апробации и тестирования нового подхода построен упрощенный метод решения задачи, состоящий в нахождении для каждого параметра медианы его значений по всем возможным тройкам объектов сегмента спирального рукава, удовлетворяющим условию на угловое расстояние между объектами. Применение метода к данным о пространственном распределении мазеров рукавов Персея и Щита (каталог Рида и др., 2014) привело к оценке  $R_0 = 8.8 \pm 0.5$  кпк. По мазерам того же каталога определены параметры пяти сегментов спиральных рукавов. Подтверждено различие спиральных рукавов по углу закрутки. Показано, что углы закрутки рукавов, выявляемых по мазерам, в общем случае коррелируют с величиной  $R_0$  в том смысле, что увеличение  $R_0$  ведет к росту модулей углов закрутки.

**Ключевые слова:** спиральная структура, расстояние от Солнца до центра Галактики, мазерные источники, пространственное распределение, Галактика (Млечный Путь).

---

\* Электронный адрес <nii@astro.spbu.ru>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования наблюдаемых проявлений спиральной структуры галактик, предоставляющие исходные ограничения для построения теорий ее формирования, имеют фундаментальное значение для галактической астрономии и звездной динамики. Такие исследования для нашей Галактики потенциально могут дать наиболее детальную информацию, однако они осложнены наблюдением спиральной структуры „с ребра“ из-за нахождения Солнца вблизи плоскости диска, хорошей изученностью только локального галактоцентрического сектора, поглощением света в диске, экранированием области за центром Галактики, низкой точностью или отсутствием данных о гелиоцентрических расстояниях для индикаторов спирального узора и другими трудностями. Существует два класса методов изучения спиральной структуры Галактики: 1) по пространственному положению трейсеров (индикаторов) деталей этой структуры и 2) по кинематике таких трейсеров (подробнее см., например, Никифоров, Шеховцова, 2001). Каждый из классов имеет свои преимущества и недостатки. Кинематический подход в случае привязки к динамическим возмущениям со стороны спирального узора может продуцировать хорошо обусловленные параметрические модели, но требует дополнительных предположений (в частности о природе спиральных рукавов), которые могут оказаться неадекватными. Пространственный подход, не нуждающийся в таких предположениях, применим к любым деталям спиральной структуры безотносительно их природы, но надежных результатов от анализа пространственного распределения можно ожидать только для тех типов трейсеров, по которым эти детали выделяются однозначно.

До недавнего времени пространственное моделирование спиральной структуры Галактики проводилось преимущественно по данным о тангенциальных и иных концентрациях газа и объектов, трассирующих спиральные рукава, в попытке „сложить“ из этих отдельных сегментов регулярную структуру, руководствуясь при этом не столько геометрией отдельных концентраций, сколько их положениями (Ефремов, 2011). Конечно, сделать это можно только в некоторых предположениях. Не всегда, но обычно при таком моделировании предполагалось следующее: 1) рукава имеют форму логарифмической спирали; 2) угол закрутки ( $i$ ) спирали постоянный; 3) угол  $i$  одинаковый для всех рукавов; 4) число рукавов в Галактике задается (как правило, два или четыре, иногда рассматривались оба варианта), что во многом определяет угол закрутки; 5) полюс спиральных рукавов находится в центре Галактики; 6) расстояние от Солнца до центра Галактики ( $R_0$ ) принимается фиксированным. При этом зачастую использовались разнородные, в том числе и не очень надежные, оценки гелиоцентрических расстояний с большой долей кинематических расстояний, особенно для далеких структурных деталей. Задачу осложняет и тот факт, что объекты, в принципе тяготеющие к спиральным рукавам, населяют и межрукавное пространство.

Очевидно, вследствие этих трудностей и, возможно, неадекватности принимаемых предположений, однозначных результатов в рамках такого подхода получить не удастся. Так, Ефремов (2011) пришел к выводу, что во внутренней области Га-

лактики ( $R < 9\text{--}10$  кпк) с данными о распределении нейтрального, молекулярного и ионизованного водорода лучше согласуется четырехрукавная схема спирального узора при  $i = 10\text{--}12^\circ$ . Фрэнсис, Андерсон (2012), напротив, заключают, что распределение HI, гигантских молекулярных облаков, областей HII и источников 2MASS соответствует, также во внутренней области ( $R < 12\text{--}15$  кпк), двухрукавной логарифмической спирали с  $i \sim 5^\circ.5$ . Поль и др. (2008) для представления данных по линии CO также предпочли двухрукавную модель, но с  $i \sim 12^\circ$ , отказавшись, впрочем, от воспроизведения моделью некоторых деталей построенного ими распределения молекулярного газа.

Вместе с тем возможен альтернативный подход — пространственное моделирование *отдельного* сегмента рукава или нескольких сегментов рукавов *по отдельности*, что, в частности, дает возможность определения углов закрутки сегментов без предположения (номер 4 в нашем списке) о числе рукавов в Галактике. Подобный анализ предпринимался в работах Павловской, Сучкова (1984), Аведисовой (1985), Дэйма и др. (1986), Валле (1988), Грабельского и др. (1988), однако развитие этого направления сдерживалось недостатком надежных оценок расстояний, особенно для трейсеров с сильной концентрацией к спиральным рукавам.

Ситуацию заметно меняет недавнее появление баз данных, позволяющих формировать выборки трейсеров спирального узора, которые 1) сильно концентрируются к спиральным рукавам, 2) имеют хотя бы внутренне точные гелиоцентрические расстояния, 3) позволяют проследить сегменты рукавов на достаточном протяжении, чтобы выявить их геометрию (желательно — кривизну). Выборки с такими свойствами имеются по крайней мере для мазеров с тригонометрическими параллаксами (например, Рид и др., 2014) и для молодых рассеянных скоплений (см, например, Попова, Локтин, 2005; Никифоров, Казакевич, 2009).

Анализ пространственного распределения трейсеров по новым данным с целью определения геометрических параметров отдельных спиральных сегментов уже выполнялся рядом исследовательских групп. Попова, Локтин (2005) оценили угол закрутки спиральных ветвей по данным „Однородного каталога параметров РЗС“, не используя предположение 4, но считая углы закрутки одинаковыми для всех сегментов (предположение 3 в нашем списке). Рид и др. (2009, 2014), Сюй и др. (2013), Бобылев, Байкова (2013, 2014) провели соответствующее моделирование для мазеров с тригонометрическими параллаксами при отказе от предположений и 4, и 3. Отметим, что при исследовании природы Местного рукава (Сюй и др., 2013), подразумевающим нахождение параметров именно этой детали, отказа от предположения 3 требует сама постановка задачи.

Аналогичный анализ для классических цефеид более проблематичен из-за их в целом менее выраженной концентрации к спиральным рукавам. В работах Поповой (2006) и Дамбиса и др. (2015) для получения более устойчивых результатов по цефеидам применялись процедуры выделения объектов, принадлежащих *хребтам* спиральных сегментов (заметим, что Попова, Локтин (2005) использовали ту же процедуру и для рассеянных скоплений). С другой стороны, более дисперсное распределение

цефеид отчасти компенсируется высокой внутренней точностью оценок расстояний до них и большим объемом современных выборок этих объектов. В обеих работах получены результаты без использования предположения 4, а в статье Дамбиса и др. (2015) — и при отказе от предположения 3.

Если принять, что при современных данных пространственное моделирование спиральных сегментов позволяет уверенно устанавливать их геометрию (в частности определять угол закрутки), не основываясь на предположениях 3 и 4, то можно попытаться пойти еще дальше и освободить параметр  $R_0$ , т.е. отказаться от предположения 6. Это позволит выполнять более полное моделирование спиральных сегментов, так как из общих соображений можно ожидать наличия существенной зависимости углов закрутки от  $R_0$  (что подтверждается нашими вычислениями). Кроме того, это может дать новый метод определения расстояния до центра Галактики как расстояния от Солнца до полюса (геометрического центра) спиральной структуры. Предлагаемый метод может стать первым пространственным методом определения  $R_0$ , применимым к объектам плоской подсистемы Галактики. Метод может быть как абсолютным, при использовании данных о мазерах с тригонометрическими параллаксами, так и относительным, если он применяется к объектам с фотометрическими расстояниями (см. классификацию измерений  $R_0$  в обзоре Никифорова, 2004). В принципе, метод может быть применен к любым объектам, трассирующим спиральную структуру Галактики.

Строгое рассмотрение настоящей задачи с учетом двух неопределенностей (дисперсии поперек рукава и случайных ошибок гелиоцентрических расстояний), возможно, позволит дополнительно отказаться и от каких-то других предположений из приведенного выше списка. Однако строгий метод предполагает трудоемкие вычисления даже в рассматриваемом здесь варианте (при отказе только от предположений 3, 4, 6). Поэтому прежде всего следует проверить принципиальную работоспособность нового подхода как для современных данных, так и на перспективу. В настоящей работе сначала рассматривается идеализированная (геометрическая) задача о восстановлении параметров логарифмической спирали как фигуры по принадлежащим ей точкам в предположении, что направление на полюс спирали (центр Галактики) известно (раздел 2). Затем, в целях апробации предлагаемого подхода, мы строим упрощенный метод решения задачи для реальных данных и применяем его к мазерам (раздел 3). В разделе 4 упрощенный метод тестируется при помощи численного моделирования. Метод и полученные результаты обсуждаются в разделе 5.

## 2. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ ПО ТОЧКАМ ЕЕ СЕГМЕНТА

### 2.1. Формулы для определения параметров спирали по трем точкам

Рассмотрим геометрическую задачу о возможности восстановления параметров логарифмической спирали по точкам, принадлежащим ее сегменту. Будем считать, что

спираль находится в плоскости Галактики, а направление от Солнца к полюсу спирали (к центру Галактики) является известным. Тогда представим отдельный рукав Галактики участком логарифмической спирали

$$R(\lambda) = |R_0|e^{k(\lambda-\lambda_0)}. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$  — галактоцентрическая долгота (отсчитывается от направления на Солнце по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса Галактики, т.е. в направлении вращения Галактики);  $k \equiv \operatorname{tg} i$ , где  $i$  — угол закрутки (отрицательный для отстающей спирали);  $\lambda_0$  — позиционный параметр ( $R(\lambda_0) = |R_0|$ ). В направлении на Солнце  $\lambda = 0 \pm 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Поскольку логарифмическая спираль задается уравнением (1), содержащим три параметра ( $R_0, k, \lambda_0$ ), рассмотрим возможность определения этих параметров по трем (различным) точкам  $M_1(r_1, l_1, b_1)$ ,  $M_2(r_2, l_2, b_2)$ ,  $M_3(r_3, l_3, b_3)$ , лежащим на одном витке спирали при проецировании на плоскость Галактики. Здесь  $r_j, l_j, b_j$  — гелиоцентрическое расстояние, галактическая долгота и широта точки  $M_j$  соответственно,  $j = 1, 2, 3$ . Примем, что  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ; тогда галактоцентрические долготы подобных точек удовлетворяют неравенству

$$\lambda_3 - \lambda_1 < 2\pi. \quad (2)$$

Формула (1) дает выражения для галактоосевых расстояний  $R_j$  точек  $M_j$  через соответствующие галактоцентрические долготы:

$$R_j = |R_0|e^{k(\lambda_j-\lambda_0)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

С другой стороны, величины  $R_j$  можно найти по координатам  $r_j, b_j, l_j$  точек  $M_j$  в зависимости от параметра  $R_0$  спирали

$$R_j = \sqrt{R_0^2 + r_j^2 \cos^2 b_j - 2R_0 r_j \cos l_j \cos b_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Перейдя к декартовым координатам

$$X_j = r_j \cos l_j \cos b_j, \quad Y_j = r_j \sin l_j \cos b_j, \quad Z_j = r_j \sin b_j, \quad (5)$$

запишем следующие выражения для галактоцентрических долгот:

$$X_j = R_0 - R_j \cos \lambda_j, \quad Y_j = R_j \sin \lambda_j. \quad (6)$$

Формулы (5), (6) показывают, что при известных  $r_j, b_j, l_j$  и заданном значении  $R_0$  для точек  $M_j$  однозначно могут быть определены только *номинальные* галактоцентрические долготы  $\Lambda_j$  такие, что

$$-\pi \leq \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3 < \pi; \quad (7)$$

$$\sin \Lambda_j = \frac{Y_j}{R_j}, \quad \cos \Lambda_j = \frac{R_0 - X_j}{R_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

*Поворотные* долготы  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$  могут отличаться от номинальных долгот  $\Lambda$  на целое число полных поворотов. В итоговые формулы для вычисления параметров спирали  $R_0$  и  $k$  галактоцентрические долготы входят только в виде разностей долгот двух точек, принадлежащих (по изначальному предположению) одному витку спирали, что позволяет заменить в формулах поворотные долготы на номинальные.

Основываясь на равенствах (3), составим, например, следующую систему уравнений для неизвестных параметров  $R_0$  и  $k$ :

$$R_1/R_2 = e^{k(\Lambda_1 - \Lambda_2)}, \quad R_2/R_3 = e^{k(\Lambda_2 - \Lambda_3)}. \quad (9)$$

Выразим  $k$ , например, из первого равенства (9), тогда  $k = \ln(R_1/R_2)/(\Lambda_1 - \Lambda_2)$ , и подставим во второе. Логарифмируя последнее, получаем уравнение для  $R_0$

$$(\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3 = 0. \quad (10)$$

Все величины в (10) являются функциями только  $R_0$  и координат точек  $M_j$ . Значения  $R_j$  и  $\Lambda_j$  определяются формулами (4) и (8) соответственно<sup>1</sup>. Уравнение (10) решалось численно.

После нахождения  $R_0$  из уравнения (10) два других параметра спирали определяются любой парой из следующих выражений:

$$k = \ln(R_j/R_m)/(\Lambda_j - \Lambda_m), \quad j, m = 1, 2, 3, \quad j \neq m; \quad (11)$$

$$\lambda_0 = \Lambda_j - \frac{\ln(R_j/|R_0|)}{k}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

При  $k = 0$  (окружность) уравнение (10) тривиально, а формула (11) не имеет смысла. Уравнение (10) и выражения (11), (12) составляют формальный аппарат метода определения параметров логарифмической спирали, который мы будем называть *трехточечным*.

## 2.2. Число корней трехточечного уравнения для параметра $R_0$

Так как уравнение (10) трансцендентно, отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о количестве его корней, т.е. вопрос об однозначности восстановления параметров логарифмической спирали по трем точкам, принадлежащим одному ее витку. Пусть такие точки  $M_1, M_2, M_3$  принадлежат спирали с параметрами  $R_0, k, \lambda_0$ . Рассмотрим переменную  $R'_0$ , имеющую смысл пробного значения  $R_0$ , определяющего величины  $R_j, \Lambda_j, j = 1, 2, 3$ . Для левой части (10) введем обозначение

$$f(R'_0) \equiv (\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3. \quad (13)$$

При  $R'_0 = R_0$  значение  $f(R'_0)$  равно нулю. Но верно ли обратное: означает ли нахождение такого  $R'_0$ , что  $f(R'_0) = 0$ , *однозначное* определение параметра  $R_0$  спирали,

---

<sup>1</sup>Сэкономить на вычислениях можно, используя вместо уравнения (10) эквивалентное ему уравнение  $(\Lambda_3 - \Lambda_2) \ln R_1^2 + (\Lambda_1 - \Lambda_3) \ln R_2^2 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \ln R_3^2 = 0$ . Тогда достаточно находить  $R_j^2$ , не извлекая корня. Для нахождения  $\Lambda_j$  знание  $R_j$  не обязательно.

проходящей через три точки? Т.е. определяют ли три точки спираль в данной постановке задачи?

Проведенное нами, преимущественно численное, исследование поведения  $f(R'_0)$  в зависимости от начальных данных и параметров спирали позволило выявить основные свойства этой функции. Проиллюстрируем их на примере модельных спиралей, соответствующих внешнему и внутреннему по отношению к Солнцу рукавам Галактики.

Пусть начальные точки  $M_1, M_2, M_3$ , принадлежат одному витку логарифмической спирали, представляющей рукав Стрельца, с параметрами  $R_0 = 8.0$  кпк,  $i = -18^\circ.7$  (Никифоров, Шеховцова, 2001),  $\lambda_0 = -30^\circ$ . В дальнейшем будем называть эту спираль *исходной*. При вычислении функции  $f(R'_0)$ , определяемой набором трех начальных точек, последние для каждого значения  $R'_0$  заново нумеровались так, чтобы выполнялось условие (7), т.е. нумерация точек  $M_j$  при  $R'_0 \neq R_0$  могла совпадать или не совпадать с начальной. Это обеспечивает при невырожденных конфигурациях ( $\Lambda_j \neq \Lambda_m, j \neq m$ ) увеличение номера точки с ростом формальной долготы  $\Lambda(R'_0)$  при любом значении  $R'_0$ . Такое правило нумерации и условие (7) вытекают из самой постановки задачи поиска спирали, проходящей через три заданные точки за один виток, а также из отсутствия предположения, что порядок прохождения точек спиралью нам заранее известен.

При  $R'_0 \rightarrow \pm\infty$  функция  $f(R'_0) \rightarrow 0$ , что видно из следующих асимптотических выражений. При  $R'_0 \rightarrow +\infty$  для любой конфигурации точек и при  $R'_0 \rightarrow -\infty$  для  $\Lambda_1 \leq 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$

$$f(R'_0) = [(Y_3 - Y_2)X_1 + (Y_1 - Y_3)X_2 + (Y_2 - Y_1)X_3]/R_0'^2 + o(1/R_0'^2); \quad (14)$$

при  $R'_0 \rightarrow -\infty$

$$\text{для } \Lambda_1 \leq 0, \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 > 0 \quad f(R'_0) = 2\pi(X_2 - X_3)/R'_0 + o(1/R'_0); \quad (15)$$

$$\text{для } \Lambda_1 \leq 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 > 0 \quad f(R'_0) = 2\pi(X_2 - X_1)/R'_0 + o(1/R'_0). \quad (16)$$

Здесь нумерация точек (в общем случае не начальная) расставлена по указанному выше правилу, отрицательному значению  $R_0$  соответствует положение полюса спирали в области отрицательных значений  $X$ . Знак функций, эквивалентных  $f(R'_0)$ , во всех случаях (14)–(16) зависит только от координат точек  $M_j$ , но не от величины  $R'_0$ . Это означает, что при  $R'_0 \rightarrow \pm\infty$  функция  $f(R'_0)$  асимптотически приближается к оси абсцисс, не пересекая ее. Следовательно, корни уравнения (10) существуют лишь на ограниченном промежутке  $R'_0$  (включающем исходное  $R_0$ ). Прямые вычисления  $f(R'_0)$  это подтверждают (см. примеры на рис. 1, 2). Функция  $f(R'_0)$  при аргументе, близком к  $X_1$  или  $X_2$  или  $X_3$ , может испытывать резкие колебания, а при вырождениях конфигурации ( $\Lambda_j = \Lambda_m, j \neq m$ ) терпит разрывы из-за смены порядка нумерации точек (см. врезки на рис. 2).

Расчеты показывают, что в общем случае значение  $f(R'_0) = 0$  достигается в одной, двух или трех точках. Один корень фиксирован ( $R'_0 = R_0 = 8.0$  кпк), *дополни-*

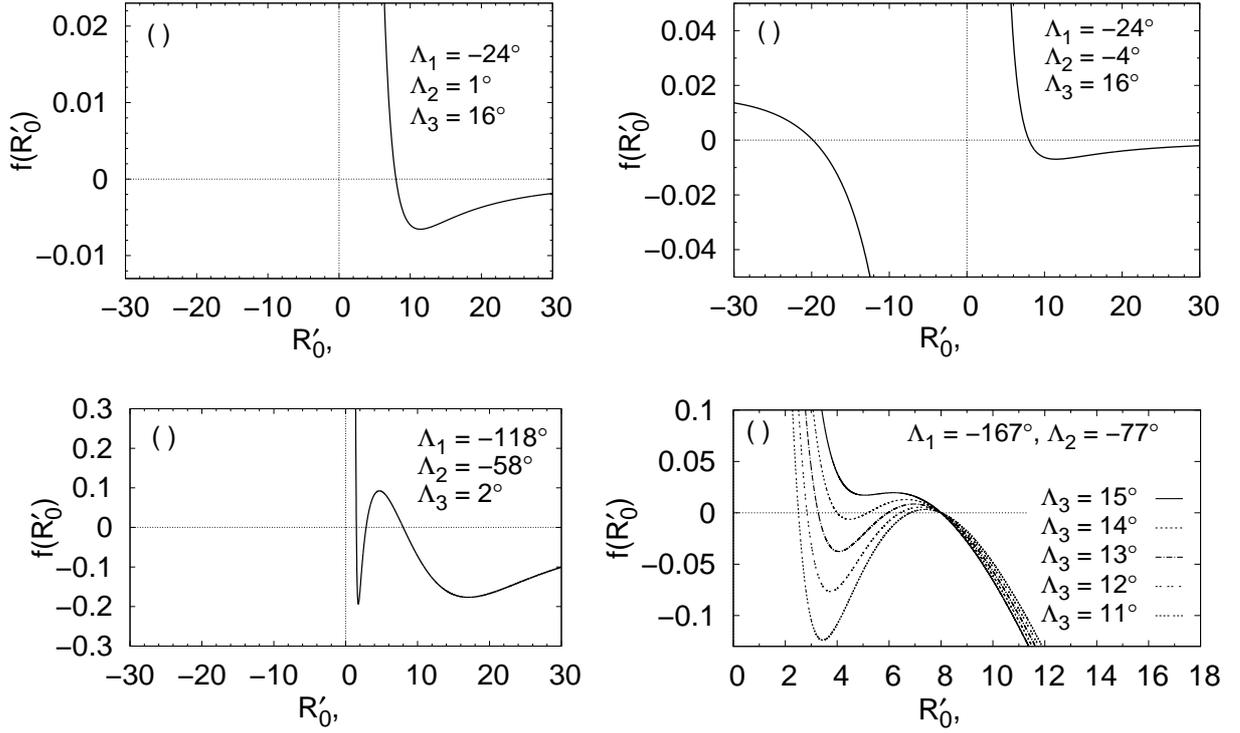


Рис. 1: Графики функций  $f(R'_0)$  для сегментов, пересекающих направление на полюс спирали. (а)–(в) — Примеры  $f(R'_0)$ , имеющих различное количество корней. (г) — Пример зависимости числа корней  $f(R'_0)$  от долготы  $\Lambda_3$ . Указана начальная нумерация точек.

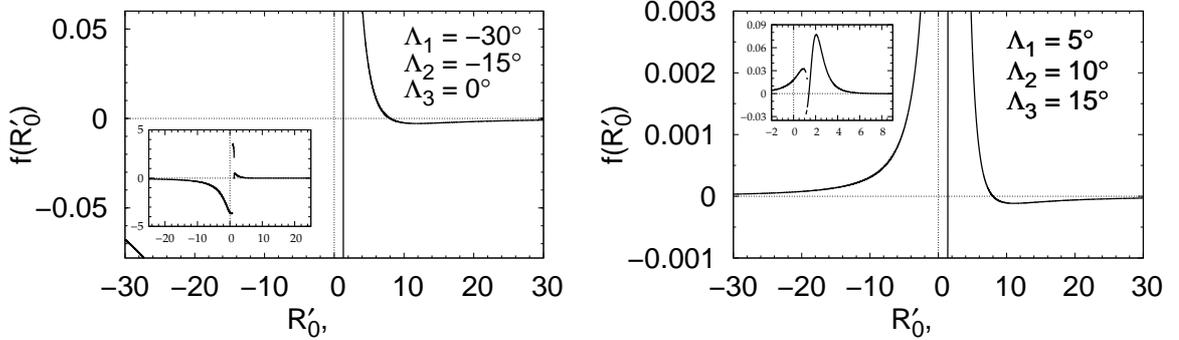


Рис. 2: Графики функций  $f(R'_0)$  для сегментов, расположенных по одну сторону от направления на полюс спирали. На врезках показаны графики тех же функций для больших промежутков значений. В окрестностях корней  $R'_0 \approx 1.30$  кпк на левой панели и  $R'_0 \approx 1.39$  кпк на правой панели  $f(R'_0)$  имеет большую, но конечную, положительную производную. Указана начальная нумерация точек.

тельные корни меняют свое положение в зависимости от галактоцентрических долгот  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ .

Если сегмент спирали, ограниченный точками  $M_1$  и  $M_3$ , пересекает ось  $X$  (линию центр–антицентр Галактики), количество корней уравнения  $f(R'_0) = 0$  зависит

от расположения точек на исходной спирали. На рис. 1а–1в представлены примеры функций  $f(R'_0)$  для тех конфигураций точек, при которых число корней равно одному, двум или трем. В особых случаях число корней чувствительно даже к небольшим изменениям долготы одной точки. Например, к изменениям  $\Lambda_3$ , если это единственная положительная долгота, значение  $\Lambda_3$  невелико, а интервал между  $\Lambda_j$  — большой (рис. 1г); заметим, что для семейства  $f(R'_0)$  на рис. 1г в интервале  $\Lambda_3 \in (14^\circ, 15^\circ)$  существует значение, при котором число корней становится равным двум.

В случае расположения сегмента *по одну сторону от оси X*, включая случаи, когда одна из (крайних) его точек  $M_1, M_3$  находится точно на оси  $X$ , всегда существует два корня, один из которых совпадает с исходным  $R_0$  (рис. 2).

Каждому корню функции  $f(R'_0)$  и вычисленным для него по формулам (11), (12) двум оставшимся параметрам соответствует спираль, проходящая через все три исходные точки (см. примеры на рис. 3), т.е. число таких спиралей равно числу корней. Таким образом, в общем случае по трем точкам нельзя однозначно определить логарифмическую спираль, проходящую через них за один виток, даже если направление на полюс спирали известно.

Найденные закономерности рассмотрим более детально на примере случая (важного для некоторых приложений) равноудаленных по долготе  $\Lambda$  начальных точек  $M_j$ . Обозначим параметр  $R_0$  исходной спирали через  $R_{0,1}$ , а дополнительные корни (10), если они существуют, — через  $R_{0,2}, R_{0,3}$ . Исследуем зависимость наличия/отсутствия дополнительных корней и величин  $R_{0,2}, R_{0,3}$  от положения троек начальных точек  $\{M_{1,n}, M_{2,n}, M_{3,n}\}_{n=1}^N$ , лежащих на исходной спирали. Начальные долготы этих точек зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_{2,n} - \Lambda_{1,n} &\equiv \Delta\Lambda \equiv \Lambda_{3,n} - \Lambda_{2,n}, \\ \Lambda_{1,n+1} - \Lambda_{1,n} &= 1^\circ, \\ \Lambda_{1,1} &= -180^\circ, \quad \Lambda_{3,N} = 180^\circ - 1^\circ = 179^\circ. \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом (почти полный) виток спирали покрывался тройками точек с шагом  $1^\circ$ . Для каждой тройки определялся набор решений.

На рис. 4а корни  $f(R'_0)$  отложены в зависимости от долготы точки  $M_2$  при некоторых значениях  $\Delta\Lambda$  для модели, представляющей рукав Стрельца. Количество корней для тройки точек с заданными  $\Delta\Lambda$  и  $\Lambda_2$  равно числу пересечений прямой  $\Lambda_2 = \text{const}$  с приведенными на рисунке ветвями решений (включая ветвь  $R_{0,1} = 8$  кпк) для этой величины  $\Delta\Lambda$ . Обобщение полученных результатов представлено на рис. 5а для конфигурационной плоскости  $(\Lambda_2, \Delta\Lambda)$ , на которой область возможных конфигураций (ОВК) в данной постановке задачи ограничена равнобедренным треугольником с вершинами  $(\Lambda_2, \Delta\Lambda) = (-\pi, 0), (\pi, 0), (0, \pi)$ . ОВК не образует замкнутое множество, так как ей не принадлежит правая боковая сторона треугольника (по определению  $\Lambda_3 < \pi$ ) и его основание (по определению  $\Delta\Lambda > 0$ ). Анализ графиков ветвей решений (рис. 4а) и результаты сканирования по правилу (17) показывают, что ОВК разделяется на шесть двумерных областей, все точки каждой из которых имеют одинаковое число корней (рис. 5а).

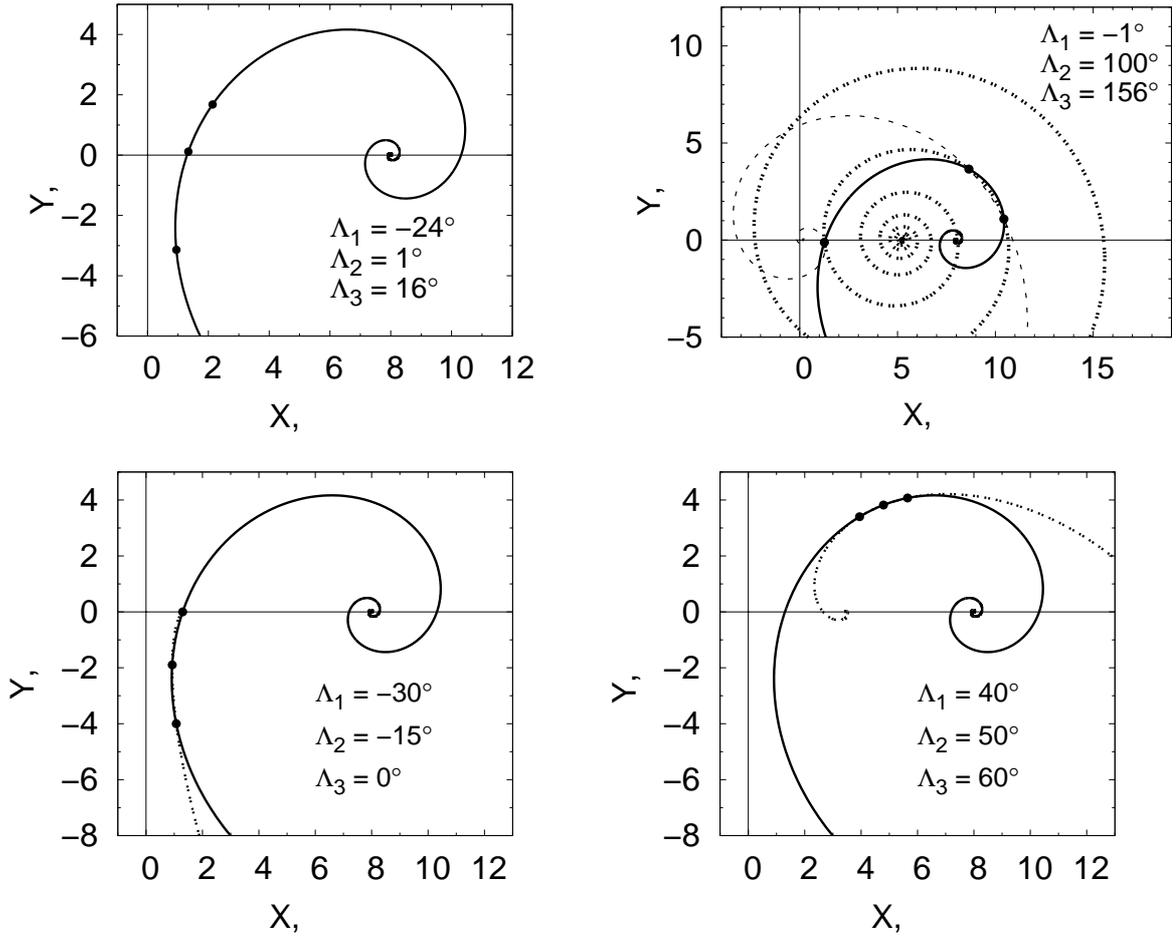


Рис. 3: Примеры конфигураций начальных точек, при которых образуемый ими сегмент пересекает направление на полюс спирали (верхние панели) или расположен по одну сторону от этого направления (нижние панели). Сплошной линией изображена исходная спираль. На левой нижней панели полюс дополнительной спирали находится рядом с точкой  $M_3$ . Нумерация точек — начальная.

Самой большой является область единственного корня ( $R_{0,1} = 8$  кпк), занимающая немного меньше половины площади ОВК. Ей принадлежит подавляющее большинство троек, чьи сегменты пересекают ось  $X$ , среди них — все тройки с  $\Lambda_2 = 0$ . Такими же свойствами области единственного корня получаются и для моделей других рукавов Галактики. Т.е. трехточечные конфигурации с единственным решением уравнения (10) соответствуют сегментам рукавов в околосолнечном секторе Галактики. Подобные сегменты обычно и выявляются по трейсерам с некинематическими (т.е. более надежными) расстояниями (см., например, работы Поповой, Локтина, 2005; Никифорова, Казакевич, 2009; Дамбиса и др., 2015).

Два корня существуют в двух больших областях, ограниченных треугольниками с вершинами  $(\Lambda_2, \Delta\Lambda) = (-\pi, 0), (0, 0), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  и  $(0, 0), (0, \pi), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  и вместе занимающих ровно  $\frac{1}{2}$  площади ОВК (рис. 5а). Однако им соответствуют сегменты, лежащие по одну сторону от оси  $X$ , включая случаи касания этой оси крайней точкой ( $\Lambda_1 = 0$  или  $\Lambda_3 = 0$ ), а такие конфигурации нехарактерны для трейсеров с некинематическими

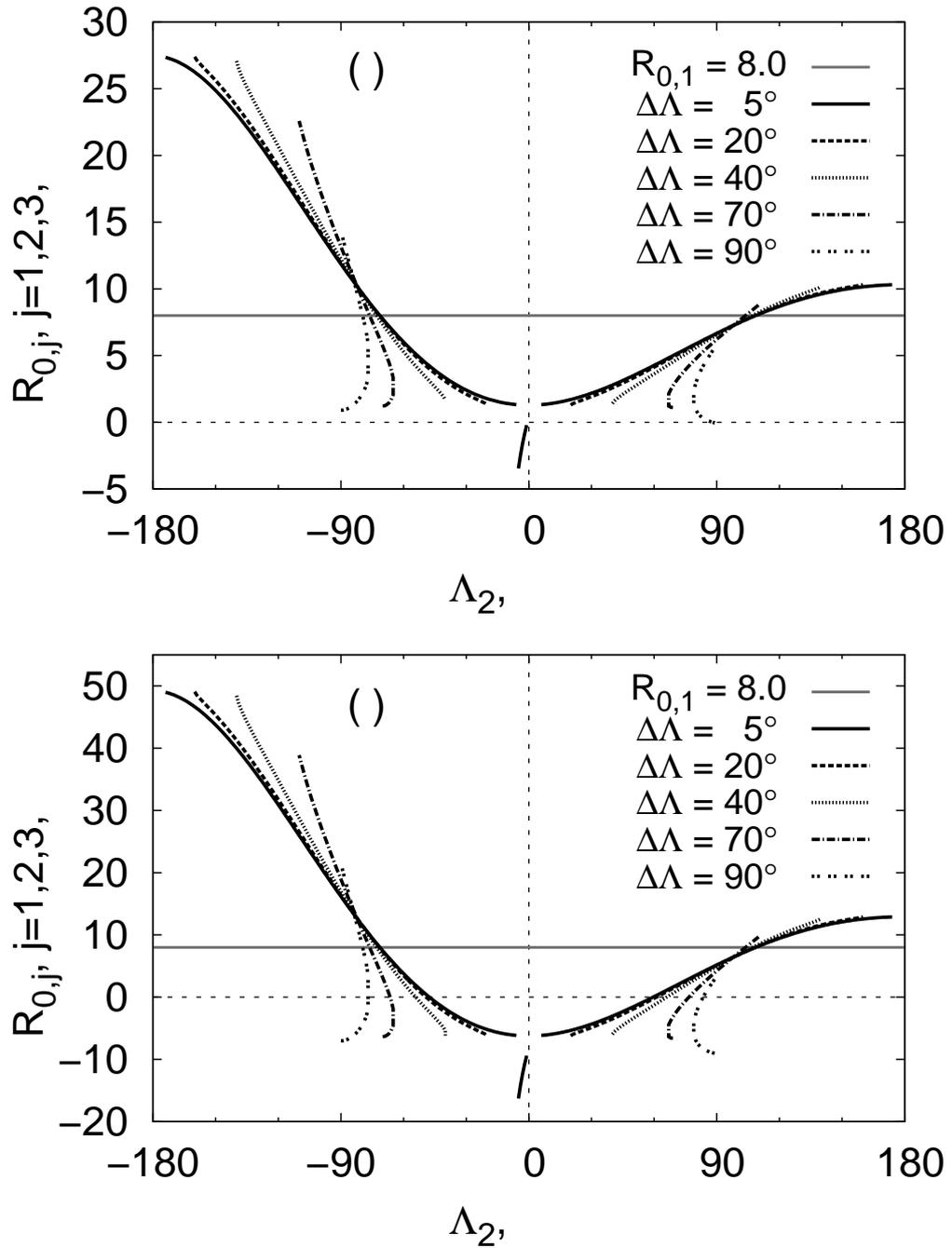


Рис. 4: Ветви решений уравнения  $f(R'_0) = 0$  как функции от долготы центральной точки в тройке при разных  $\Delta\Lambda$  для спиралей, представляющих рукав Стрельца (а) и рукав Персея (б).

ми расстояниями.

Между указанными областями двух корней и областью единственного корня имеются незначительные по площади двумерные области трех корней, ограниченные одна линией  $\Lambda_2 = -\Delta\Lambda$ , другая —  $\Lambda_2 = +\Delta\Lambda$  (рис. 5а). Первая выявляется при  $39^\circ \leq \Delta\Lambda \leq 99^\circ$  для троек с  $\Lambda_{1,n} < -\Delta\Lambda < \Lambda_{2,n} < 0 < \Lambda_{3,n}$ . Вторая — при  $54^\circ \leq \Delta\Lambda \leq 97^\circ$  для троек с  $\Lambda_{1,n} < 0 < \Lambda_{2,n} < \Delta\Lambda < \Lambda_{3,n}$ .

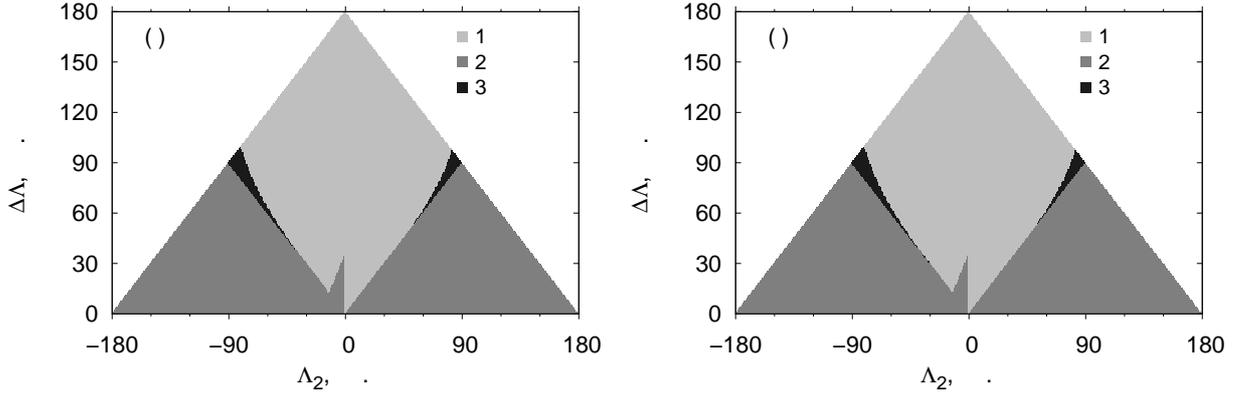


Рис. 5: Зависимость количества корней уравнения (10) от долготы центральной точки  $\Lambda_2$  и расстояния между соседними точками  $\Delta\Lambda$  для спиралей, представляющих рукав Стрельца (а) и рукав Персея (б).

Также при  $\Delta\Lambda \leq 34^\circ$  выявлена небольшая область двух корней, имеющая треугольную форму и ограниченная линиями  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_2 = -\Delta\Lambda$ , но их не включающая (рис. 5а). Область соответствует коротким сегментам, пересекающим ось  $X$  с  $\Lambda_{1,n} < -\Delta\Lambda < \Lambda_{2,n} < 0 < \Lambda_{3,n}$ . Однако даже при  $\Lambda_2 \rightarrow -0$  для фиксированного  $\Delta\Lambda$  дополнительный корень  $R_{0,2}$  много меньше исходного  $R_0 = 8$  кпк, а при уменьшении  $\Lambda_2$  он становится еще меньше; в точке  $\Lambda_2 = -\Delta\Lambda$  зависимость  $R_{0,2}(\Lambda_2)$  терпит разрыв и решение  $R_{0,2}$  скачком переходит на другую ветвь с бóльшими значениями (см. график для  $\Delta\Lambda = 5^\circ$  на рис. 4а). С ростом  $\Delta\Lambda$  ветвь  $R_{0,2}(\Lambda_2)$  на  $-\Delta\Lambda < \Lambda_2 < 0$  резко уходит в отрицательную область, поэтому в промежуток значений  $R_{0,j}$ , показанных на рис. 4а, эта ветвь попала только для  $\Delta\Lambda = 5^\circ$ . При уменьшении нижнего предела поиска корней высота рассматриваемой области двух корней увеличивается за счет смещения вверх ее верхней наклонной границы, но очень медленно (на рис. 5а эта область приведена для  $R'_0 \geq -5000$  кпк). Очевидно, что наличие такой ветви решений, сильно отклоняющейся от исходного значения  $R_{0,1}$ , не создает неоднозначности при выборе корня.

То же верно и на большей части протяженности других ветвей дополнительных корней (рис. 4а), где решения отличимы от исходной спирали и по углу закрутки. Исключение составляют случаи, когда средняя точка сегмента находится вблизи трансверсных направлений:  $\Lambda_{2,n} \approx -80^\circ \div -70^\circ$  и  $+100^\circ \div +115^\circ$  (интервалы пересечений ветвями дополнительных корней линии  $R_{0,1} = 8$  кпк на рис. 4а). При анализе участков спиральных рукавов по мазерам, данные о которых покрывают преимущественно I и II квадранты (например, Рид и др., 2014, см. также раздел 3 настоящей работы), такие ситуации вполне возможны. Это значит, что какой-то алгоритм выбора между корнями  $R_{0,j}$  в общем случае нужен.

Наконец, существуют две вырожденные одномерные области (т.е. линии) двух корней, которым на рис. 4а соответствуют точки слияния/бифуркации ветвей двух дополнительных корней, где эти ветви имеют бесконечные производные. На рис. 5а данные линии образуют границы между областью одного корня и областями трех корней. Имея нулевую площадь, линии двух корней при произвольном сканировании

типа (17) не выявляются и поэтому не отображены на рис. 5а.

Такое же исследование было выполнено для модельной спирали, представляющей рукав Персея, с параметрами  $R_0 = 8.0$  кпк,  $i = -18.7$ ,  $\lambda_0 = 97^\circ$  (Никифоров, Шеховцова, 2001). Полученные результаты (рис. 4б, 5б) показывают, что основные свойства решений уравнения (10) при переходе от внутреннего спирального рукава к внешнему остаются прежними. Отличия касаются лишь некоторых деталей. Для рукава Персея нижние части всех ветвей дополнительных корней находятся в области  $R_0 < 0$  кпк (поскольку у внешнего рукава многие тройки имеют отрицательные координаты  $X_j$ ), разброс значений  $R_{0,2}$  и  $R_{0,3}$  получается бóльшим, левая область трех корней выявляется при  $\Delta\Lambda \geq 31^\circ$  (для рукава Стрельца — при  $\Delta\Lambda \geq 39^\circ$ ). Остальные параметры малых областей двух и трех корней с точностью до  $1^\circ$  такие же, как для рукава Стрельца.

В целом несущественны изменения результатов и при варьировании углов закрутки исходных спиралей. Величина  $i$  влияет лишь на некоторые характеристики малых областей: с уменьшением  $|i|$  область двух корней, прилегающая к линии  $\Lambda_2 = 0$ , уменьшается (при  $i = -10^\circ$  для обоих рукавов  $(\Delta\Lambda)_{\max} = 17^\circ$ ); немного варьируется нижняя по  $\Delta\Lambda$  граница выявления левой области трех корней.

### 2.3. О возможности определения параметров логарифмической спирали по четырем точкам

Поскольку трехточечный метод в общем случае дает неоднозначный результат, рассмотрим возможность восстановления параметров спирали по четырем точкам  $M_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , расположенным на одном ее витке. Из четверки точек выделим две произвольные тройки, например,  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_1, M_3, M_4$ , запишем для них уравнения вида (10) и поставим задачу найти решение, одинаковое для обеих троек. Это приводит к уравнению для  $R_0$

$$f_4(R'_0) \equiv |f_{123}| + |f_{134}| = 0, \quad (18)$$

где

$$f_{123}(R'_0) = (\ln R_1 - \ln R_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + (\ln R_3 - \ln R_2)(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (19)$$

$$f_{134}(R'_0) = (\ln R_1 - \ln R_3)(\lambda_3 - \lambda_4) + (\ln R_4 - \ln R_3)(\lambda_1 - \lambda_3). \quad (20)$$

Модули в (18) нужны для того, чтоб избежать посторонних корней при значениях  $R'_0$  таких, что  $f_{123} = -f_{134} \neq 0$ , которым не соответствуют спирали, проходящие через четыре (и даже через три) точки.

Проверка показала, что уравнение (18) действительно имеет единственный корень в точке, где положительно определенная функция  $f_4(R'_0)$  касается оси абсцисс. Однако даже при малом варьировании положения хотя бы одной точки  $M_j$  уравнение (18) в общем случае становится неразрешимым, поскольку произвольные четыре точки не лежат на одном витке спирали. Это делает потенциальный четырехточечный метод неприменимым к псевдослучайным или реальным данным. При дальнейшем увеличении числа начальных точек это свойство сохраняется.

Таблица 1: Данные о спиральных сегментах, выделенных Ридом и др. (2014) по мазерам.  $l_{\min}$ ,  $l_{\max}$ ,  $\Delta l$  — границы и протяженность по галактической долготе

Сегмент	Число мазеров	$l_{\min}$	$l_{\max}$	$\Delta l$
Рукав Щита	17	$6^\circ$	$32^\circ$	$26^\circ$
Рукав Стрельца	18	$-9^\circ$	$52^\circ$	$61^\circ$
Местный рукав	25	$60^\circ$	$239^\circ$	$179^\circ$
Рукав Персея	24	$43^\circ$	$241^\circ$	$198^\circ$
Внешний рукав	6	$75^\circ$	$196^\circ$	$121^\circ$

С другой стороны, произвольная тройка точек лежит на одном витке по крайней мере одной спирали, значит, не менее одного решения при варьировании положений точек существовать будет всегда. Поэтому трехточечный метод может быть применен к реальным данным и в численных экспериментах при условии введения критерия выбора между корнями. Далее мы будем использовать трехточечный метод.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕХТОЧЕЧНОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СПИРАЛИ К ДАННЫМ О МАЗЕРАХ

Формальный аппарат для определения спирали по начальным точкам нужен как простой инструмент для изучения методом численного моделирования возможностей оценивания  $R_0$  по геометрии сегментов спиральных рукавов в зависимости от параметров задачи. Такое исследование будет выполнено в следующей работе.

Однако трехточечный метод также позволяет сразу выполнить апробацию нового подхода на реальных данных. Для решения этой задачи мы выбрали мазерные источники с тригонометрическими параллаксами, поскольку они несомненно удовлетворяют всем трем сформулированным во Введении требованиям для проведения пространственного моделирования отдельных сегментов рукавов, а также имеют абсолютные (не нуждающиеся в калибровке) измерения гелиоцентрических расстояний. Данные были заимствованы из каталога мазеров  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CH}_3\text{OH}$  в массивных областях звездообразования, приведенного в работе Рида и др. (2014). Каталог содержит характеристики 103 мазеров, полученные в рамках РСДБ-обзоров BeSSeL, VERA, VLBI и EVN; средняя точность определения параллаксов составляет 20 мксд. По этим данным Рид и др. (2014) выделили пять спиральных сегментов, отнеся к тому или иному из них подавляющее большинство мазеров в результате сопоставления положений мазеров и эмиссионных деталей CO и HI на диаграмме  $l$ - $V_{\text{LSR}}$ , где  $V_{\text{LSR}}$  — лучевая скорость относительно Местного стандарта покоя. В рамках настоящей работы мы принимаем распределение мазеров по сегментам, предложенное Ридом и др. (2014) (наблюдательные характеристики сегментов см. в табл. 1).

#### 3.1. Алгоритм

Каждая выборка мазеров, отнесенных к одному из сегментов, анализировалась отдельно по алгоритму, основанному на трехточечном методе. На данном этапе

(проверка работоспособности подхода) ошибки расстояний до мазерных источников не учитывались. В выборке мазеров находились все такие наборы трех объектов  $M_{1,j}$ ,  $M_{2,j}$ ,  $M_{3,j}$ , для которых угловое расстояние между соседними объектами  $l(M_{m+1,j}) - l(M_{m,j})$ ,  $m = 1, 2$ , не меньше некоторого принятого значения  $(\Delta l)_{\min}$  (здесь  $j$  — номер набора); величина  $(\Delta l)_{\min}$  оптимизировалась для каждой выборки заново. Для каждой из отобранных троек объектов вычислялись значения  $R_0$  как корни уравнения (10) и соответствующие им параметры  $k$  и  $\lambda_0$  по формулам (11) и (12). Поиск  $R_0$  проводился на отрезке  $[-60.0, 60.0]$  кпк. Было рассмотрено два способа обработки случаев неединственного решения для  $R_0$ : 1) исключение троек с неединственным решением; 2) выбор из корней  $R_{0,1,j}$ ,  $R_{0,2,j}$  и, возможно,  $R_{0,3,j}$  такого, который приводит к наименьшей дисперсии мазеров выборки относительно определяемой им спирали. Первый способ — простой и более надежный, но он применим только при значительной доле троек с единственным решением в общей выборке. Поскольку спиральные ветви по этим данным получаются отстающими (Рид и др., 2014), то тройки, соответствующие лидирующим спиральям (с  $k_j > 0$ ), были исключены из рассмотрения в обоих способах.

При заданном  $(\Delta l)_{\min}$  точечные оценки параметров  $R_0$ ,  $k$  и  $\lambda_0$  для рассматриваемого сегмента определялись как медианы (Me) множеств  $\{R_{0,j}\}$ ,  $\{k_j\}$  и  $\{\lambda_{0,j}\}$ , полученных по всем тройкам  $\{M_{1,j}, M_{2,j}, M_{3,j}\}$ , оставшимся после исключений в рамках одного из указанных выше способов; здесь  $j = 1, \dots, N_{\text{sol}}$ , где  $N_{\text{sol}}$  — число решений, принятых в обработку. Затем в качестве оптимального значения  $(\Delta l)_{\min}^0$  выбиралось то  $(\Delta l)_{\min}$ , для которого дисперсия среднего значения  $\langle R_0 \rangle$  является наименьшей. За окончательный результат для выборки сегмента принимались оценки Me  $R_0$ , Me  $k$ , Me  $\lambda_0$ , найденные для  $(\Delta l)_{\min}^0$ . Границы доверительных интервалов для этих оценок на уровне  $1\sigma$  рассчитывались на основе порядковых статистик (см., например, Кобзарь, 2006).

Для *модельной спирали* (с параметрами Me  $R_0$ , Me  $k$ , Me  $\lambda_0$ , полученными при  $(\Delta l)_{\min} = (\Delta l)_{\min}^0$ ) определялась доверительная область для уровня  $1\sigma$  (см. приложение П1). Ниже мы приводим такую область для рукава Персея; для других сегментов границы доверительных областей, имея менее регулярный характер, не являются информативными. Также для всех сегментов была предпринята попытка оценить природный среднеквадратический разброс  $(\sigma_w)_0$  мазеров поперек спирального рукава (см. приложение П2).

Таким образом были обработаны выборки мазеров для всех пяти сегментов спиральных рукавов Галактики, выделенных Ридом и др. (2014).

### 3.2. Результаты для отдельных спиральных сегментов

Наиболее надежные оценки модельных параметров были получены для выборки из 24 мазеров, приписанных к рукаву Персея. Для данного сегмента тройки мазеров, через которые проходит более одной спирали, исключались из рассмотрения. Значение  $(\Delta l)_{\min}$  варьировалось от  $0^\circ$  (используется полный набор троек) до  $70^\circ$ .

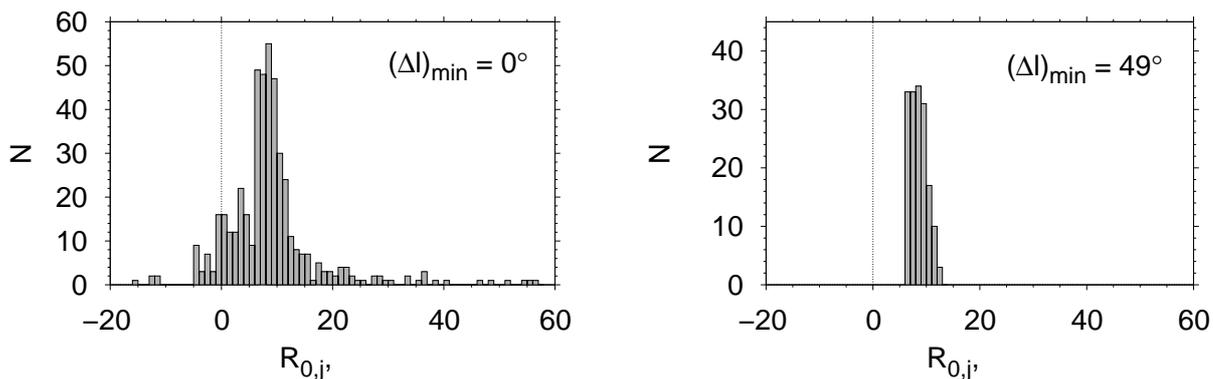


Рис. 6: Функция распределения значений  $R_{0,j}$  для рукава Персея при  $(\Delta l)_{\min} = 0^\circ$  (полный набор всех возможных троек мазеров) и при оптимальном  $(\Delta l)_{\min} = 49^\circ$ .

Сравнение распределений  $R_{0,j}$  при различных значениях  $(\Delta l)_{\min}$  показывает, что с ростом  $(\Delta l)_{\min}$  число отрицательных значений  $R_{0,j}$  уменьшается, как и дисперсия распределения. Для троек с  $(\Delta l)_{\min} \geq 49^\circ$  значения  $R_{0,j}$  лежат в положительной области и группируются на отрезке  $[6, 13]$  кпк (рис. 6).

Результаты анализа положений мазеров рукава Персея для различных значений  $(\Delta l)_{\min}$  суммированы в табл. 2. Эти результаты показывают, что с увеличением  $(\Delta l)_{\min}$  ошибка среднего значения  $\sigma_{\langle R_0 \rangle}$  и доверительный интервал для медианы  $R_{0,j}$  сначала уменьшаются из-за усечения крыльев распределения  $R_{0,j}$  (см. рис. 6), а после достижения стабилизации дисперсии этого распределения (см. строку стандартов  $\sigma_{R_0}$  в табл. 2) растут вследствие уменьшения объема выборки (числа решений  $N_{\text{sol}}$ ). Это и создает возможность выбора оптимального долготного ограничения  $(\Delta l)_{\min}^0$  по минимуму формальной ошибки среднего  $\sigma_{\langle R_0 \rangle}$  (более устойчивой дисперсной характеристики по сравнению с длиной доверительного интервала медианы). Для рукава Персея найдено  $(\Delta l)_{\min}^0 = 49^\circ$ . Соответствующая этому ограничению модельная спираль в сравнении с положением мазеров представлена на рис. 7.

Аналогичным образом были определены параметры других спиральных сегментов. Все мазеры рукава Щита и почти все мазеры рукава Стрельца находятся по одну сторону от оси  $X$  (рис. 8б, 9б), следовательно, все тройки мазеров в первом случае и почти все во втором дают по два решения для  $R_0$  (см. подраздел 2.2). Тогда для этих сегментов исключение троек с неединственным решением неприменимо, поэтому использовалась альтернативная обработка: для каждой такой тройки выбирался тот из корней, для которого меньше сумма квадратов расстояний от соответствующей ему спирали до остальных мазеров данного сегмента. Так же обрабатывался и Внешний рукав, поскольку он представлен малым количеством объектов ( $N = 6$ ). Полученные для этих трех сегментов при  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$  распределения  $R_{0,j}$  и модельные спирали в сравнении с положением мазеров показаны на рис. 8–10.

Для Местного рукава были рассмотрены оба способа обработки троек с неединственным решением для  $R_0$ . Визуализация полученных результатов представлена на рис. 11, 12. В качестве итоговых для этого сегмента были приняты результаты, полученные при исключении троек с неединственным решением, поскольку в этом случае модельная спираль лучше описывает положение мазеров сегмента (ср. рис. 11б и 12б).

Таблица 2: Результаты применения трехточечного метода к мазерам рукава Персея

$(\Delta l)_{\min}$	0°	5°	15°	30°	40°	49°	50°	60°	70°
$N_{\text{sol}}$	462	445	335	237	213	161	159	104	34
$\langle R_0 \rangle$	8.79	9.26	9.48	8.47	7.75	8.55	8.55	8.54	9.07
$\sigma_{R_0}$	8.74	8.55	7.04	5.28	3.52	1.51	1.52	1.51	1.48
$\sigma_{\langle R_0 \rangle}$	0.41	0.41	0.38	0.34	0.24	0.119	0.121	0.15	0.25
$\text{Me } R_0$	<b>8.11</b>	<b>8.25</b>	<b>8.46</b>	<b>8.23</b>	<b>8.20</b>	<b>8.43</b>	<b>8.41</b>	<b>8.42</b>	<b>8.92</b>
$\sigma^+(\text{Me } R_0)$	+0.22	+0.21	+0.29	+0.20	+0.17	+0.19	+0.21	+0.35	+0.69
$\sigma^-(\text{Me } R_0)$	-0.22	-0.24	-0.23	-0.26	-0.30	-0.20	-0.18	-0.20	-0.55
$\text{Me } i$	<b>-9°69</b>	<b>-9°85</b>	<b>-9°83</b>	<b>-9°76</b>	<b>-9°75</b>	<b>-10°61</b>	<b>-10°43</b>	<b>-10°61</b>	<b>-12°1</b>
$\sigma^+(\text{Me } i)$	+0°35	+0°27	+0°47	+0°91	+1°05	+0°75	+0°57	+0°64	+1°3
$\sigma^-(\text{Me } i)$	-0°23	-0°19	-0°22	-0°64	-0°65	-0°64	-0°95	-1°54	-3°7
$\text{Me } \lambda_0$	<b>78°2</b>	<b>78°7</b>	<b>73°0</b>	<b>73°0</b>	<b>78°4</b>	<b>60°7</b>	<b>61°4</b>	<b>61°1</b>	<b>52°1</b>
$\sigma^+(\text{Me } \lambda_0)$	+7°6	+8°5	+6°1	+6°8	+10°5	+10°0	+9°5	+9°8	+10°6
$\sigma^-(\text{Me } \lambda_0)$	-7°3	-5°7	-8°6	-9°8	-13°3	-2°8	-3°3	-2°9	-10°4
$(\sigma_w)_{\varpi}$	0.23	0.23	0.23	0.24	0.23	0.25	0.25	0.25	0.24
$(\sigma_w)_{\text{obs}}$	0.44	0.48	0.44	0.43	0.45	0.46	0.46	0.45	0.44
$(\sigma_w)_0$	0.37	0.42	0.37	0.35	0.39	0.38	0.39	0.38	0.37

**Примечание.**  $\langle R_0 \rangle$ ,  $\sigma_{\langle R_0 \rangle}$  — среднее арифметическое  $N_{\text{sol}}$  значений  $R_{0,j}$  и его ошибка;  $\sigma_{R_0}$  — стандарт распределения значений  $R_{0,j}$ ;  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  — статистическая неопределенность медианы для доверительного уровня  $1\sigma$  в сторону бóльших и меньших значений соответственно;  $(\sigma_w)_{\varpi}$  — вклад в разброс мазеров поперек сегмента, вносимый неопределенностью параллаксов;  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  и  $(\sigma_w)_0$  — наблюдаемый и природный среднеквадратический разброс поперек сегмента соответственно. Значения  $R_0$ ,  $(\sigma_w)_{\varpi}$ ,  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$ ,  $(\sigma_w)_0$  даны в килопарсеках.

Сводка основных результатов для отдельных сегментов спиральных рукавов Галактики приведена в табл. 3. Отсутствие значения  $(\sigma_w)_0$  для Внешнего рукава и рукава Щита в последней колонке таблицы соответствует получению отрицательной оценки природной дисперсии поперек рукава  $(\sigma_w)_0^2$ . Это означает, что наблюдаемая дисперсия мазеров относительно этих сегментов полностью (и даже с избытком) объясняется каталожными неопределенностями тригонометрических параллаксов, приведенными Ридом и др. (2014) (см. раздел 5).

Поскольку результаты для отдельных сегментов были получены по малым выборкам объектов, важно оценить смещения значений  $R_0$  и других параметров, найденных трехточечным методом, из-за конечности выборки. Это было сделано при помощи метода складного ножа (МСН, jackknife, см. приложение ПЗ), который также позволяет оценить дисперсии параметров. Скорректированные результаты представлены в табл. 4. Сравнение с табл. 3 показывает, что джекнайф-неопределенности

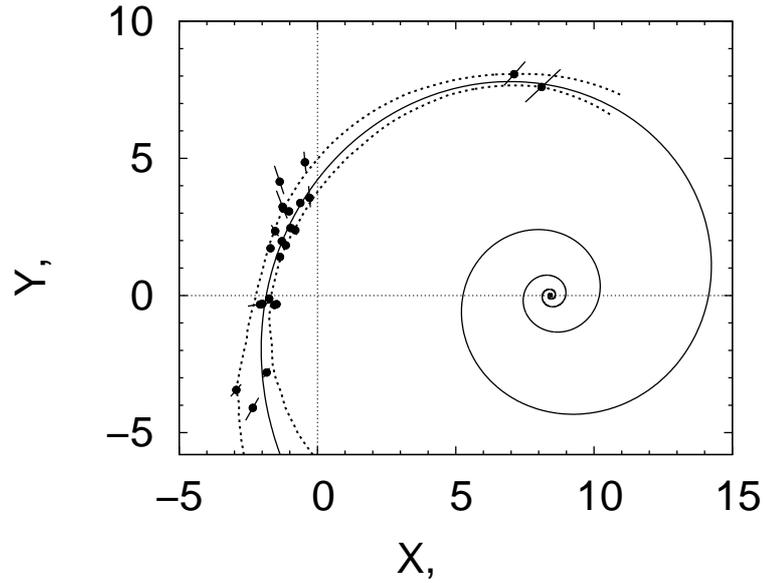


Рис. 7: Распределение мазеров рукава Персея в проекции на плоскость Галактики и модельная спираль, полученная для них трехточечным методом при  $(\Delta l)_{\min}^0 = 49^\circ$ . Бары отражают неопределенность параллаксов. Пунктирные линии обозначают границы доверительной области модельной спирали на уровне значимости  $1\sigma$ .

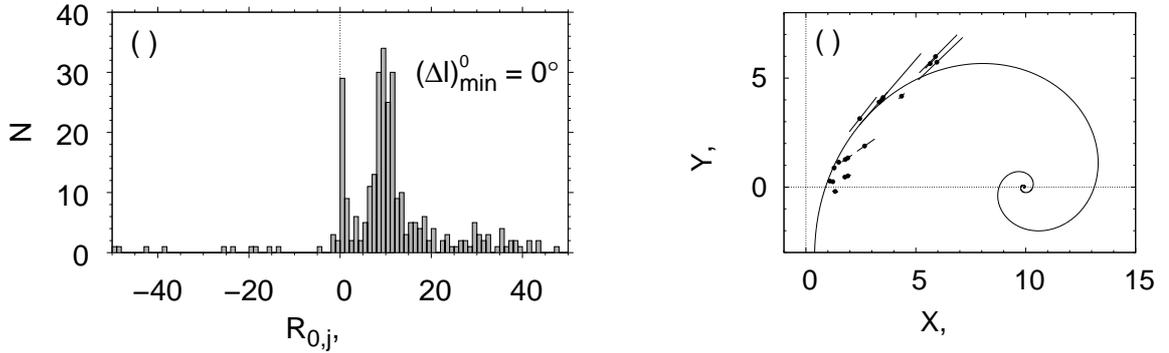


Рис. 8: Визуализация результатов применения трехточечного метода к рукаву Стрельца при  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ . (а) — Распределение значений  $R_{0,j}$ . (б) — Модельная спираль в сравнении с положением отнесенных к этому рукаву мазеров в проекции на плоскость Галактики (бары отражают неопределенность параллаксов).

параметров в подавляющем числе случаев оказались заметно больше формальных неопределенностей медианных оценок. Очевидно, это объясняется тем, что каждый объект выборки, как правило, входит в различные тройки, а это делает результаты по отдельным тройкам не вполне независимыми. Последнее естественным образом учитывается при использовании МСН. Численные эксперименты (см. раздел 4) подтверждают, что джекнайф-оценки дисперсий более адекватны. Для полноты картины мы приводим обе оценки ошибок. Из них для практических целей будем выбирать ту, которая получилась больше.

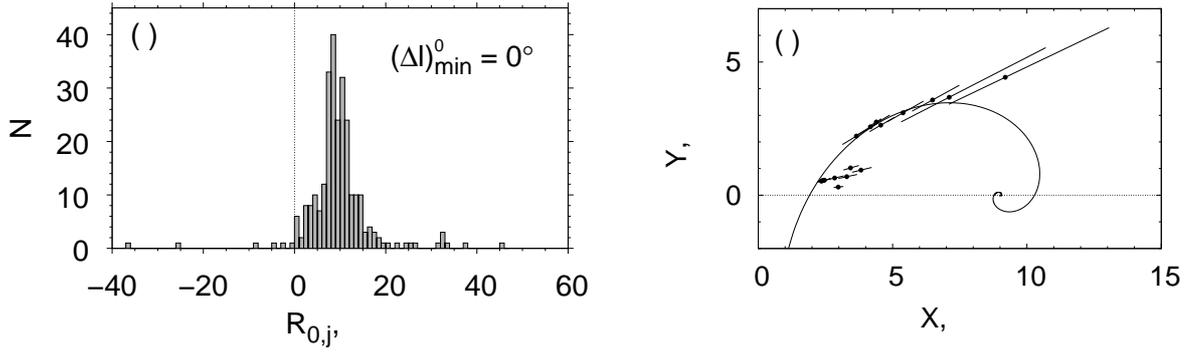


Рис. 9: То же, что на рис. 8, но для рукава Щита.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

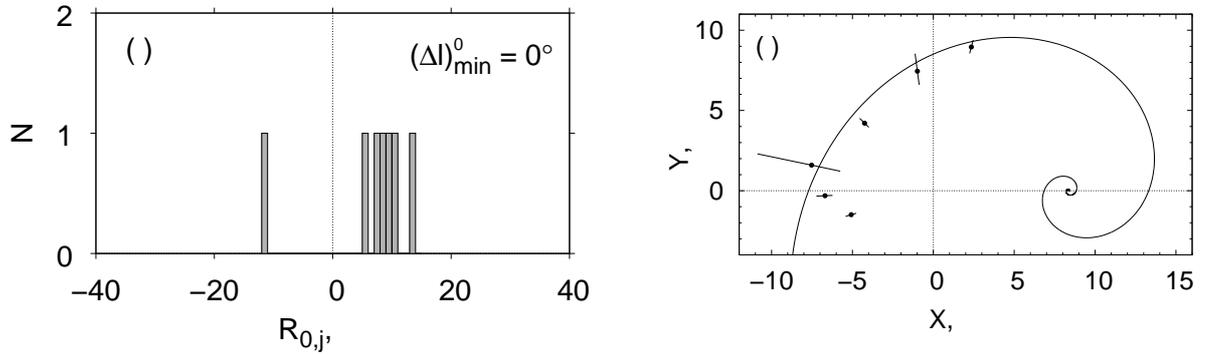


Рис. 10: То же, что на рис. 8, но для Внешнего рукава.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

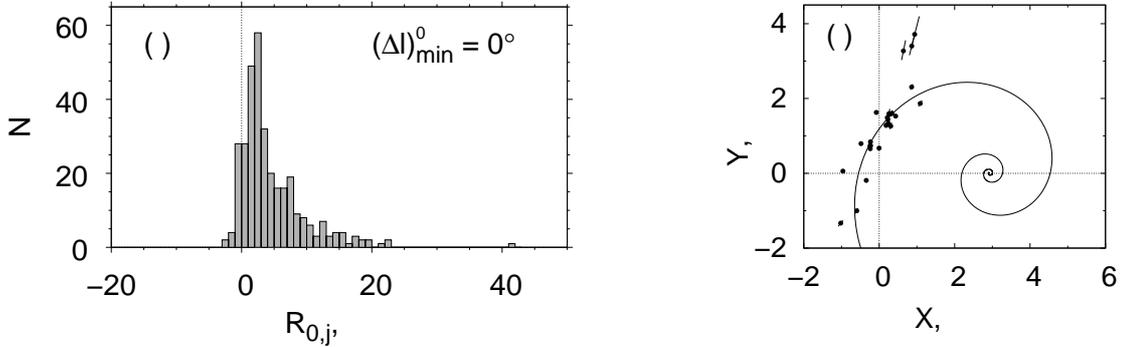


Рис. 11: То же, что на рис. 8, но для Местного рукава. Тройки с кратными корнями уравнения для  $R_0$  исключены из рассмотрения.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

### 3.3. Средняя оценка $R_0$ по результатам применения трехточечного метода к мазерам

Таблица 4 показывает, что результаты для разных сегментов резко различаются по надежности решения. Наихудшие показатели (наибольшие смещения и дисперсии параметров) имеет Внешний рукав, что является следствием очень малого объема выборки мазеров ( $N = 6$ ). Фактически этот сегмент не создает существенных ограничений на величину  $R_0$ , поэтому результат для него не использовался при выведении

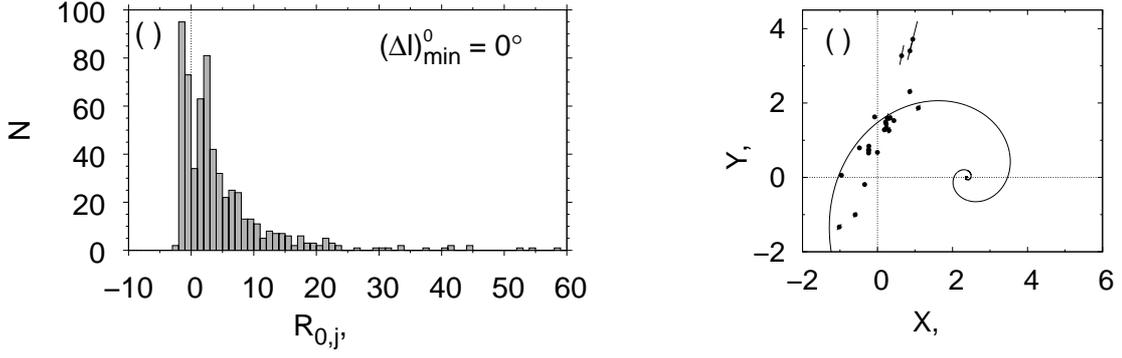


Рис. 12: То же, что на рис. 11, но при выборе из кратных корней решения с наименьшей дисперсией мазеров относительно модельной спирали.  $(\Delta l)_{\min}^0 = 0^\circ$ .

Таблица 3: Результаты применения трехточечного метода к пяти сегментам спиральных рукавов при оптимальных долготных ограничениях  $(\Delta l)_{\min}^0$

Рукав	$N_{\text{sol}}$	$(\Delta l)_{\min}^0$	Me $R_0$ , кПК	Me $i$	Me $\lambda_0$	$(\sigma_w)_0$ , кПК
Sct	267	$0^\circ$	$9.01^{+0.30}_{-0.15}$	$-28^\circ 64^{+1^\circ 40}_{-1^\circ 59}$	$-25^\circ 0^{+3^\circ 5}_{-4^\circ 5}$	0.34
Sgr	306	$0^\circ$	$9.92^{+0.36}_{-0.34}$	$-18^\circ 29^{+0^\circ 99}_{-1^\circ 13}$	$-16^\circ 4^{+2^\circ 4}_{-3^\circ 9}$	
Loc	328	$0^\circ$	$2.93^{+0.35}_{-0.19}$	$-13^\circ 85^{+0^\circ 39}_{-0^\circ 37}$	$+39^\circ 7^{+6^\circ 7}_{-4^\circ 9}$	
Per	161	$49^\circ$	$8.43^{+0.19}_{-0.20}$	$-10^\circ 61^{+0^\circ 75}_{-0^\circ 64}$	$+60^\circ 7^{+10^\circ 0}_{-2^\circ 8}$	
Out	7	$0^\circ$	$8.4^{+5.3}_{-19.6}$	$-20^\circ 6^{+16^\circ 9}_{-58^\circ}$	$+100^\circ +521^\circ_{-56^\circ}$	

Таблица 4: Результаты коррекции методом складного ножа (jackknife) оценок параметров спиральных сегментов

Рукав	$R_{0,\text{corr}} \pm \sigma_{R_{0,J}}$ , кПК	$\Delta R_0$ , кПК	$i_{\text{corr}} \pm \sigma_{i,J}$	$\Delta i$	$\lambda_{0,\text{corr}} \pm \sigma_{\lambda_{0,J}}$	$\Delta \lambda_0$
Sct	$8.62 \pm 0.81$	-0.39	$-27^\circ 2 \pm 5^\circ 4$	$+1^\circ 4$	$-21^\circ 1 \pm 12^\circ 0$	$+3^\circ 9$
Sgr	$10.62 \pm 0.69$	+0.70	$-15^\circ 5 \pm 3^\circ 6$	$+2^\circ 8$	$-12^\circ 8 \pm 8^\circ 7$	$+3^\circ 6$
Loc	$2.17 \pm 1.00$	-0.76	$-12^\circ 3 \pm 4^\circ 6$	$+1^\circ 6$	$+39^\circ 1 \pm 18^\circ 8$	$-0^\circ 6$
Per	$8.36 \pm 0.53$	-0.07	$-11^\circ 5 \pm 2^\circ 2$	$-0^\circ 9$	$+36^\circ 9 \pm 15^\circ 0$	$-23^\circ 8$
Out	$16.0 \pm 7.5$	+7.6	$+3^\circ 5 \pm 25^\circ$	$+24^\circ$	$+84^\circ \pm 40^\circ$	$-16^\circ$

**Примечание.**  $R_{0,\text{corr}}$ ,  $i_{\text{corr}}$ ,  $\lambda_{0,\text{corr}}$  — скорректированные оценки параметров;  $\sigma_{R_{0,J}}$ ,  $\sigma_{i,J}$ ,  $\sigma_{\lambda_{0,J}}$  — джекнайф-оценки неопределенности параметров;  $\Delta R_0$ ,  $\Delta i$ ,  $\Delta \lambda_0$  — джекнайф-поправки к оценкам параметров (разности между скорректированными оценками и медианными значениями в табл. 3)

средней оценки  $R_0$ . Аналогичное решение было принято в отношении рукава Стрельца и Местного рукава. Для рукава Стрельца функция распределения значений  $R_{0,j}$  определенно является бимодальной (рис. 8a), что свидетельствует о неоднозначно-

Таблица 5: Результаты определения параметров  $i$ ,  $\lambda_0$  и дисперсионных характеристик сегментов спиральных рукавов при фиксированной величине  $R_0 = 8.44$  кпк

Рукав	Me $i$	$\sigma_{i,J}$	Me $\lambda_0$	$\sigma_{\lambda_0,J}$	$(\sigma_w)_{\text{obs}}$ , кпк	$(\sigma_w)_0$ , кпк
Sct	$-21^\circ.4^{+0.6}_{-1.0}$	$1^\circ.8$	$-43^\circ.9^{+2.8}_{-5.7}$	$10^\circ.5$	$0.51 \pm 0.26$	
Sgr	$-9^\circ.9^{+1.8}_{-0.8}$	$3^\circ.6$	$-50^\circ.8^{+6.5}_{-16.7}$	$26^\circ$	$0.37 \pm 0.08$	$0.20 \pm 0.04$
Loc	$-16^\circ.5^{+1.4}_{-2.2}$	$5^\circ.1$	$+9^\circ.0^{+0.3}_{-0.2}$	$0^\circ.6$	$0.30 \pm 0.06$	$0.29 \pm 0.04$
Per	$-10^\circ.6^{+0.6}_{-0.4}$	$1^\circ.1$	$+63^\circ.3^{+4.3}_{-2.1}$	$9^\circ.4$	$0.42 \pm 0.08$	$0.34 \pm 0.05$
Out	$-18^\circ.6^{+6.7}_{-5.6}$	$0^\circ.8$	$+98^\circ.0^{+26.0}_{-11.0}$	$2^\circ.0$	$1.19 \pm 0.49$	

**Примечание.**  $\sigma_{i,J}$ ,  $\sigma_{\lambda_0,J}$  — джекнайф-оценки неопределенности медианных значений

сти решения, тогда даже медианная оценка ненадежна (это видно на рис. 8б). Модельные спирали для Местного рукава в обоих вариантах трехточечного метода плохо согласуются с положением мазеров с наибольшей галактоцентрической долготой (рис. 11б, 12б), по идее наиболее ценных для локализации положения полюса спирального сегмента, что и привело к несостоятельному решению.

Значительно надежнее результаты для рукавов Персея и Щита: оценки  $R_0$  по ним обладают наименьшими смещениями и приемлемыми дисперсиями. Это, очевидно, объясняется преимущественно тем, что сегмент рукава Персея имеет наибольшую протяженность (и по  $l$ , и по  $\Lambda$ ) и содержит относительно много мазеров, а рукав Щита (с умеренным числом мазеров) — самый внутренний, значит лучше обуславливающий положение полюса спирали при прочих равных (табл. 1, рис. 13).

По указанным причинам средняя оценка  $\langle R_0 \rangle$  данным методом определялась на основе скорректированных значений  $R_0$  для рукавов Персея и Щита, приведенных в табл. 4, как средневзвешенная величина с весами, обратно пропорциональными определенным МСН дисперсиям  $\sigma_{R_0,J}^2$ :

$$\begin{aligned} \langle R_0 \rangle &= (8.36/0.53^2 + 8.62/0.81^2) / (1/0.53^2 + 1/0.81^2) = 8.44 \text{ кпк}, \\ \sigma_{\langle R_0 \rangle} &= (1/0.53^2 + 1/0.81^2)^{-1/2} = 0.45 \text{ кпк}. \end{aligned} \quad (21)$$

При фиксированном значении  $R_0$  трехточечный метод становится двухточечным методом определения угла закрутки  $i$  и позиционного параметра  $\lambda_0$  сегмента. Таким способом при  $R_0 = 8.44$  кпк для всех пяти сегментов были оценены величины  $i$  и  $\lambda_0$ : для каждого сегмента эти параметры определялись как медианы значений, полученных по всевозможным парам мазеров сегмента с минимальным расстоянием между объектами пары  $(\Delta l)_{\text{min}}^0$ , определенным при применении трехточечного метода к этому сегменту. Результаты представлены в табл. 5.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХТОЧЕЧНОГО АЛГОРИТМА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО И ИТОГОВОЕ РЕШЕНИЕ ПО МАЗЕРАМ

В качестве моделей спиральных рукавов рассматривались логарифмические спирали с параметрами  $i$ ,  $\lambda_0$  и  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$ , представляющими рукава Персея и Щита в предположении  $R_0 = 8.44$  кпк (табл. 5).

Псевдослучайные каталоги объектов генерировались следующим образом. Положение каждого объекта  $O_j$  смещалось относительно модельной точки  $M_j$ , являющейся ортогональной проекцией номинального положения (согласно исходному каталогу)  $j$ -ого объекта на модельную спираль; смещение выполнялось вдоль прямой, перпендикулярной к модельной спирали в точке  $M_j$ . При этом расстояние  $\rho_j \equiv |O_j M_j|$  варьировалось по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартом  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$ . Для каждого из двух сегментов было создано  $n_{\text{MC}} = 1000$  каталогов.

Для каждого псевдослучайного каталога параметры спирального сегмента определялись трехточечным методом, причем значение минимального расстояния по галактической долготе  $(\Delta l)_{\text{min}}$  между соседними точками («объектами») в наборе из трех точек оптимизировалось так же, как и для реальных данных. Т.е. за наилучшую принималась та величина  $(\Delta l)_{\text{min}}$ , при которой статистическая ошибка среднего значения  $R_0$ , вычисленного по всем подходящим тройкам, являлась минимальной. Решением для каждого каталога считались медианные значения параметров с вычисленной для них оценкой дисперсии  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  при оптимальной величине  $(\Delta l)_{\text{min}}$ . Обработка  $n_{\text{MC}}$  каталогов показала, что для рукава Персея смещение  $\text{Me } R_0 - R_0 = -0.66 \pm 0.04$  кпк, а для рукава Щита  $\text{Me } R_0 - R_0 = -0.08 \pm 0.03$  кпк.

Полученные в подразделе 3.3 оценки  $R_{0,\text{corr}}$  для рукавов Персея и Щита (табл. 4) были исправлены за систематическую ошибку, найденную методом Монте-Карло, что привело к точечным оценкам  $R_0 = 9.02$  кпк для рукава Персея и  $R_0 = 8.70$  кпк для рукава Щита. За итоговую оценку применения трехточечного метода к мазерам было принято средневзвешенное этих двух величин:

$$\langle R_0 \rangle = (w_1 \cdot 9.02 + w_2 \cdot 8.70) / (w_1 + w_2) = 8.8 \text{ кпк.} \quad (22)$$

Здесь веса  $w_1 = 1/(1.50^2 + 0.08^2)$ ,  $w_2 = 1/(1.32^2 + 0.06^2)$  учитывают длины доверительных интервалов для двух исходных оценок (границы интервалов были определены как порядковые статистики массива значений, полученных методом Монте-Карло для  $N_{\text{MC}} = 1000$  каталогов) и для величин их смещений. Неопределенность итоговой оценки найдена как средняя ошибка средневзвешенного до уравнивания (Агемян, 1972):

$$\sigma_{\langle R_0 \rangle} = (2\sqrt{w_1 + w_2})^{-1} = 0.5 \text{ кпк.} \quad (23)$$

Параметры сегментов спиральных рукавов были оценены двухточечным методом при фиксированном значении  $R_0 = 8.8$  кпк (табл. 6). В целях получения модельной спирали, аппроксимирующей номинальное распределение мазеров, джекнайф-коррекции здесь не вводились. Различие значений  $i$ ,  $\lambda_0$  и  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  при  $R_0 = 8.8$  кпк

Таблица 6: Результаты определения параметров  $i$ ,  $\lambda_0$  и дисперсионных характеристик сегментов спиральных рукавов при итоговой величине  $R_0 = 8.8$  кпк

Рукав	Me $i$	$\sigma_{i,J}$	Me $\lambda_0$	$\sigma_{\lambda_0,J}$	$(\sigma_w)_{\text{obs}}$ , кпк	$(\sigma_w)_0$ , кпк
Sct	$-23^\circ.7^{+1.1}_{-3.7}$	1°:1	$-36^\circ.9^{+3.1}_{-6.5}$	5°:7	$0.48 \pm 0.23$	
Sgr	$-9^\circ.9^{+0.5}_{-2.0}$	3°:1	$-44^\circ.4^{+3.2}_{-9.7}$	22°	$0.39 \pm 0.09$	$0.29 \pm 0.08$
Loc	$-16^\circ.8^{+1.2}_{-1.3}$	5°:4	$+8^\circ.5^{+0.2}_{-0.8}$	0°:5	$0.30 \pm 0.06$	$0.30 \pm 0.05$
Per	$-11^\circ.8^{+0.7}_{-0.4}$	1°:5	$+57^\circ.2^{+5.3}_{-1.2}$	3°:8	$0.42 \pm 0.10$	$0.35 \pm 0.05$
Out	$-19^\circ.2^{+2.5}_{-2.9}$	0°:9	$+91^\circ.6^{+18.1}_{-5.3}$	2°:3	$1.19 \pm 0.48$	

**Примечание.**  $\sigma_{i,J}$ ,  $\sigma_{\lambda_0,J}$  — джекнайф-оценки неопределенности медианных значений

Таблица 7: Коэффициенты линейной корреляции  $\kappa(p_1, p_2)$  параметров спиральных сегментов, полученные методом Монте-Карло для рукавов Персея и Щита

$(p_1, p_2)$	$(R_0, i)$	$(R_0, \lambda_0)$	$(R_0, (\sigma_w)_{\text{obs}})$	$(i, \lambda_0)$	$(i, (\sigma_w)_{\text{obs}})$	$(\lambda_0, (\sigma_w)_{\text{obs}})$
Рукав Персея						
$\kappa(p_1, p_2)$	-0.421	-0.738	-0.545	0.735	-0.063	0.514
$P_\kappa$	$6.41 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$7.97 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	0.0466	$7.54 \cdot 10^{-4}$
Рукав Щита						
$\kappa(p_1, p_2)$	-0.469	+0.437	-0.300	-0.843	-0.344	0.311
$P_\kappa$	$6.97 \cdot 10^{-4}$	$6.59 \cdot 10^{-4}$	$5.15 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$5.59 \cdot 10^{-4}$	$5.26 \cdot 10^{-4}$

**Примечание.**  $P_\kappa \equiv P(|\varkappa| > |\kappa(p_1, p_2)|)$  — вероятность в случае нуль-гипотезы получить коэффициент корреляции  $\varkappa$  по модулю больше измеренного  $|\kappa(p_1, p_2)|$  для пары параметров  $(p_1, p_2)$

и  $R_0 = 8.44$  кпк (табл. 5) обусловлено корреляцией этих параметров с величиной  $R_0$  (см. табл. 7). Приведенные в табл. 7 для рукавов Персея и Щита коэффициенты линейной корреляции  $\kappa(p_1, p_2)$  и вероятности  $P_\kappa \equiv P(|\varkappa| > |\kappa(p_1, p_2)|)$  получить коэффициент корреляции по модулю больше измеренного  $|\kappa(p_1, p_2)|$  при отсутствии корреляции между случайными величинами  $p_1$  и  $p_2$  (см. Пресс и др., 1997) были определены в результате моделирования методом Монте-Карло для указанных выше модельных спиралей при  $R_0 = 8.44$  кпк. Все вероятности  $P_\kappa$  получились меньше 0.05, т.е. все коэффициенты  $\kappa$  в табл. 7 значимы. В большинстве случаев корреляция между параметрами умеренная, за исключением некоторых пар параметров, в которые входит  $\lambda_0$ .

На рис. 13 для всех пяти сегментов представлены модельные спирали с параметрами, указанными в табл. 6, и распределение приписанных к этим сегментам мазеров в проекции на плоскость Галактики. Контур галактического бара на рис. 13 даны для эллипсоидальной его модели с полуосями  $3.14 : 1.178 : 0.81$  кпк и позиционным углом  $\varphi = 20^\circ$  (Касетти-Динеску и др., 2013; Жилкова и др., 2012).

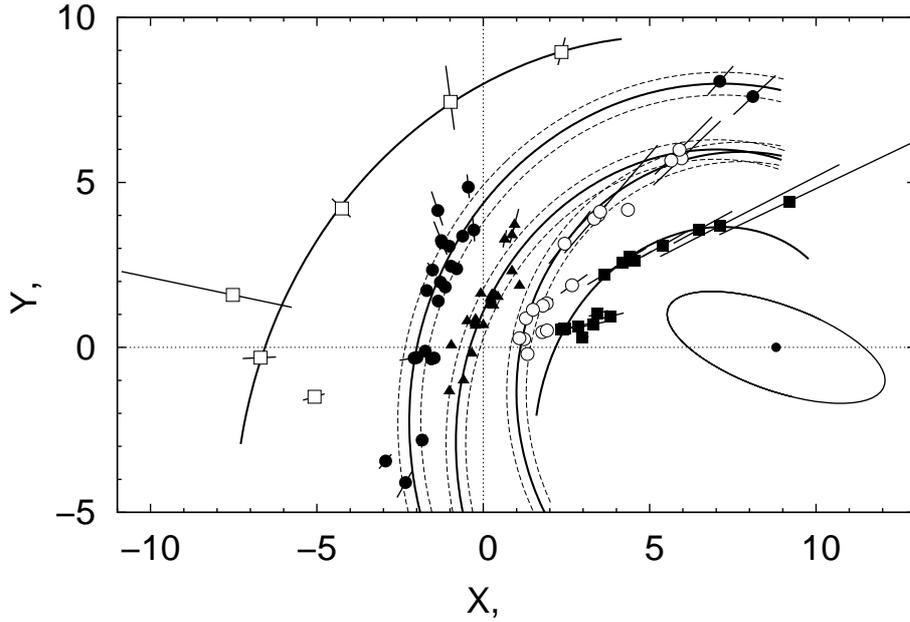


Рис. 13: Модельные спирали (сплошные линии) и положение мазеров в проекции на плоскость Галактики для Внешнего рукава (светлые квадраты), рукава Персея (темные кружки), Местного рукава (темные треугольники), рукава Стрельца (светлые кружки), рукава Щита (темные квадраты) при  $R_0 = 8.8$  кпк. Бары ошибок отражают неопределенность параллаксов. Природный разброс поперек рукавов  $[\pm(\sigma_w)_0]$  относительно моделей] показан пунктирными линиями для сегментов с  $(\sigma_w)_0^2 > 0$ . Эллипс изображает галактический бар, кружок в его центре — центр Галактики.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Трехточечный метод по принципу обобщения *частных* решений для  $R_0$ , в данном случае полученных по тройкам объектов, близок к методу Фиста и Шаттлуорта (1965) в рамках другого — кинематического — подхода к определению  $R_0$ . Метод Фиста–Шаттлуорта, предполагающий построение и анализ функции распределения индивидуальных оценок  $R_0$  по *отдельным* объектам, ранее был довольно популярен (Балона и Фист, 1974; Крэмpton и др., 1976; Локтин, 1979). Такие упрощенные методы менее эффективны в теоретико-вероятностном смысле, чем совместное по всем объектам выборки решение задачи оптимизации параметров, но позволяют просто и наглядно показать работоспособность подхода, судить о наличии решения и его качестве. Поэтому применение подобных методов вполне оправдано на определенном этапе использования того или иного подхода, особенно если он новый. Так, в следующей работе мы предполагаем при помощи трехточечного метода исследовать некоторые свойства оценок расстояния до полюса спиральных рукавов. Однако в дальнейшем для предлагаемого подхода следует, конечно, разработать метод, основанный на поиске экстремума целевой функции.

Заметим, что таким методом не может быть метод наименьших квадратов (МНК), так как он не достаточно корректен для этой задачи. Так, в популярном случае применения МНК для оптимизации в плоскости  $(\Lambda, \ln R/R_0)$  ни одна из ко-

ординат последней не является непосредственно измеряемой величиной или аргументом, поскольку измеряемой (с ошибкой) величиной является характеристика гелиоцентрического расстояния, в случае мазеров это — тригонометрический параллакс  $\varpi$  (величины  $l$  и  $b$  в этой задаче можно считать безошибочными). Значение  $\varpi$  определяет сразу и  $\ln R/R_0$ , и  $\Lambda$ . Это делает последние две величины коррелированными, причем по-разному, в зависимости от положения объекта. К сходной (также сложной) корреляции между  $\ln R/R_0$  и  $\Lambda$  ведет и дисперсия объектов поперек рукава. Учесть эти корреляции трудно, если вообще возможно. Нормально распределенными разумно принять параллаксы  $\varpi$  (они измеряются) и отклонение объекта от спиральной модели в конфигурационном пространстве (в плоскости  $XU$ ). Нет оснований считать величины  $\ln R/R_0$  и  $\Lambda$  нормально распределенными, что предполагается в МНК, как нет оснований считать какую-то из этих переменных безошибочной. В принципе, можно использовать МНК для оптимизации отклонений от спиральной модели в плоскости  $XU$ . Но это, с одной стороны, приводит к резкому усложнению вычислений, с другой — этого все равно будет недостаточно, поскольку МНК не учитывает ошибок в расстояниях (в величинах  $\varpi$ ). Последние нельзя игнорировать: они бывают значительными и по-разному влияют на результат в зависимости от положения объекта (рис. 13). Корректно учесть эти два вида дисперсии можно только в рамках метода наибольшего правдоподобия, хотя этот вариант более сложный и трудоемкий. Работы в этом направлении нами ведутся.

Найденное в настоящей работе значение  $R_0 = 8.8 \pm 0.5$  кпк превышает недавние средние («наилучшие») оценки этого параметра  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}} = (7.9 \div 8.3) \pm (0.1 \div 0.4)$  кпк (Генцель и др., 2010; Фостер, Купер, 2010; Никифоров, Смирнова, 2013; Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016; де Грийс, Боно, 2016), однако не выходит за пределы промежутка, который покрывают точечные оценки  $R_0$  в современных публикациях. Так, До и др. (2013) в результате трехмерного джинсовского моделирования (в рамках метода статистических параллаксов) кинематики звезд центрального скопления Галактики получили  $R_0 = 8.92_{-0.55}^{+0.58}$  кпк, Кэчпул и др. (2016) вывели похожую оценку  $R_0 = 8.9 \pm \sim 0.4$  кпк по миридам в балдже. Наш результат по геометрии спиральных сегментов не противоречит с учетом ошибок оценке  $R_0 = 8.34 \pm 0.16$  кпк по кинематике мазеров на основе той же базы данных (Рид и др., 2014).

Оценки  $i$  в табл. 6 подтверждают различие между разными спиральными рукавами по углу закрутки, найденное Ридом и др. (2014). По нашим результатам это различие значимо при сравнении рукавов Щита и Внешнего, с одной стороны, и рукавов Стрельца и Персея — с другой. Экстраполяция модельной спирали Местного рукава показывает, что он может быть отстающей ветвью рукава Стрельца (рис. 13), по крайней мере, по данным о мазерах. Этот вариант не рассматривался в статье Сюя и др. (2013), посвященной природе Местного рукава.

В случае сегментов с наиболее надежными решениями (рукава Персея и Стрельца) значение  $R_0$  заметно влияет на оценку  $i$  (ср. табл. 5 и 6) в соответствии с коэффициентами корреляции (табл. 7). Это следует иметь в виду при обсуждении результатов различных измерений углов закрутки спиральных рукавов Галактики.

Значения природного разброса  $(\sigma_w)_0$  мазеров поперек рукавов Стрельца, Местного и Персея получились близкими к найденным Ридом и др. (2014). Однако для рукавов Щита и Внешнего — самых далеких от Солнца из выявленных по этим данным — дисперсия  $(\sigma_w)_0^2$  оказалась отрицательной во всех вариантах вычислений. Это может означать завышенность величин неопределенностей параллаксов, указанных Ридом и др. (2014) для мазеров этих двух рукавов. Альтернативной причиной могут быть эффекты селекции при отборе мазеров в выборки этих рукавов. Так, выборка Щита состоит из двух неоднородных по  $(\sigma_w)_{\text{obs}}$  (и по ошибкам параллаксов) групп, одна из которых (на малых  $l$ ) расположена под большим углом к спиральному сегменту и имеет значительную дисперсию относительно него, а другая находится в направлении, почти касательном к сегменту ( $l \sim 30^\circ$ ), в узком промежутке  $l$ , что приводит к разбросу поперек сегмента, много меньшему, чем у первой группы.

Следует заметить, что предположение (номер 5 в нашем списке во Введении) о совпадении полюса спиральных рукавов (в более общем случае — геометрического центра спирального узора) и центра Галактики сейчас является стандартным при параметрическом моделировании спиральной структуры Галактики (см. обзор Ефремова, 2011, и статьи по спиральной структуре, упомянутые во Введении). В настоящее время оно представляется разумным, так как согласуется с наблюдениями внешних спиральных галактик (см., например, Савченко, Решетников, 2013), численными экспериментами (например, Корчагин и др., 2016) и современными представлениями по всей совокупности данных, что внутренняя часть Галактики является динамически «устоявшейся» системой, чьи по-разному определяемые «центры» (наибольшая звездная плотность или иная центральная особенность пространственного распределения, центральный объект, барицентр и другие) практически совпадают (Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016). Точности современных данных пока не хватает, чтобы напрямую установить, насколько совпадают эти «центры» друг с другом и с введенным нами геометрическим центром спиральной структуры, но такие задачи надо иметь в виду в будущем. Отдельно отметим, что мы не используем предположение, что спиральная ветвь продолжается до самого центра Галактики, рассматривая последний лишь как полюс аппроксимирующей спирали наблюдаемого сегмента. Существование реального рукава только вне области бара Галактики или даже на ограниченном промежутке радиусов  $R$  не является помехой в использовании настоящего подхода.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый подход к пространственному моделированию сегментов спиральных рукавов Галактики, включающий определение расстояния до полюса спиральной структуры, т.е. расстояния до центра Галактики  $R_0$ . В целях изучения возможностей этого подхода рассмотрена задача о восстановлении параметров логарифмической спирали как геометрической фигуры по принадлежащим ей точкам в предположении, что направление на полюс спирали известно, а точки представляют сегмент, составляющий менее одного витка спирали. Проведенное численно-аналитическое исследование на примерах репрезентативных спиралей для рукавов Персея и Стрельца позволяет сделать следующие выводы.

1. Задачу восстановления параметров спиральной ветви однозначно решает знание положений четырех точек сегмента. Однако это решение не может быть использовано на практике: при любом малом изменении положений точек решение перестает существовать, так как в общем случае не существует спирали, которая проходит за один виток через четыре произвольные точки.
2. Если известно положение трех точек сегмента, то решение существует всегда, но оно в общем случае неоднозначное: кроме исходного значения  $R_0$  может быть один или два дополнительных корня. При этом
  - а) если сегмент полностью лежит по одну сторону от оси  $X$  (линии центр-антицентр Галактики) или касается крайней точкой этой оси, то корней всегда два;
  - б) если сегмент пересекает ось  $X$ , то обычно корень единственный, за исключением сегментов, *почти* полностью находящихся по одну сторону от оси  $X$  (три корня, в точках бифуркации — два), и коротких сегментов, большая часть протяженности которых приходится на отрицательные долготы  $l$ ,  $\Lambda$  (два корня);
  - в) дополнительные корни обычно сильно отличаются от исходного  $R_0$  (для рукава Персея они зачастую отрицательны) и отличимы от него по углу закрутки, за исключением случаев, когда средняя точка сегмента находится вблизи траверсных направлений ( $\Lambda_2 \approx -80^\circ \div -70^\circ$  и  $\Lambda_2 \approx +100^\circ \div +115^\circ$ );
  - г) область конфигураций троек точек, для которой существует единственное решение, не мала и соответствует сегментам в околосолнечном секторе Галактики, которые обычно и выявляются по трейсерам с надежными расстояниями.

Этот, трехточечный, метод может быть применен к реальным данным и в численных экспериментах при условии введения критерия выбора между корнями.

3. При поиске геометрически точного решения и, вероятно, аппроксимационного решения предпочтительны сегменты, пересекающие ось  $X$ , но не центрированные вблизи траверсных направлений.

На основе трехточечного метода построен упрощенный алгоритм определения параметров спирального сегмента по реальным объектам. Применение алгоритма к данным Рида и др. (2014) о мазерах с тригонометрическими параллаксами подтвердило в целом работоспособность нового подхода. Надежные решения удалось получить для рукавов Персея и Щита. Усреднение этих результатов с коррекциями за конечность выборки и смещение эстиматора привело к итоговой оценке  $R_0 = 8.8 \pm 0.5$  кпк по геометрии спиральных сегментов, трассируемых мазерами.

Аналогичным, двухточечным при фиксации  $R_0$ , методом оценены параметры пяти сегментов спиральных рукавов, выявляемых по мазерам. Подтверждено различие в общем случае углов закрутки у разных спиральных рукавов. Полученные

результаты позволяют предположить, что Местный рукав может быть ответвлением от рукава Стрельца. Обнаружена существенная отрицательная корреляция между углом закрутки  $i$  и величиной  $R_0$ . Показано, что наблюдаемая дисперсия мазеров относительно Внешнего рукава и рукава Щита в целом может быть объяснена каталожными неопределенностями тригонометрических параллаксов.

Авторы благодарны рецензентам за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант 6.37.341.2015).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аведисова В.С., Письма в Астрон. журн. **11**, 448 (1985) [V.S. Avedisova, Sov. Astron. Lett. **11**, 185 (1985)].
2. Агемян Т.А., *Основы теории ошибок для астрономов и физиков* (М.: Наука, 1972).
3. Балона, Фист (L.A. Balona and M.W. Feast), MNRAS **167**, 621 (1974).
4. Блэнд-Хоторн, Герхард (J. Bland-Hawthorn and O. Gerhard), Ann. Rev. Astron. Astrophys. **54**, 529 (2016).
5. Бобылев В.В., Байкова А.Т., Письма в Астрон. журн. **39**, 843 (2013) [V.V. Bobylev, A.T. Bajkova, Astron. Lett. **39**, 759 (2013)].
6. Бобылев, Байкова (V.V. Bobylev and A.T. Bajkova), MNRAS **437**, 1549 (2014).
7. Валле (J.P. Vallée), Astron. J. **95**, 750 (1988).
8. Генцель и др. (R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen), Rev. Modern Phys. **82**, 3121 (2010).
9. Грабельский и др. (D.A. Grabelsky, R.S. Cohen, L. Bronfman, and P. Thaddeus), Astrophys. J. **331**, 181 (1988).
10. Дамбис А.К., Бердников Л.Н., Ефремов Ю.Н., Князев А.Ю., Расторгуев А.С., Глушкова Е.В., Кравцов В.В., Тернер Д.Г. и др., Письма в Астрон. журн. **41**, 533 (2015) [A.K. Dambis, L.N. Berdnikov, Yu.N. Efremov, A.Yu. Kniazev, A.S. Rastorguev, E.V. Glushkova, V.V. Kravtsov, D.G. Turner, et al., Astron. Lett. **41**, 489 (2015)].
11. де Грийс, Боно (R. de Grijs and G. Bono), Astrophys. J. Suppl. Ser. **227**, 5 (2016).
12. До и др. (T. Do, G.D. Martinez, S. Yelda, A. Ghez, J. Bullock, M. Kaplinghat, J.R. Lu, A.H.G. Peter, et al.), Astrophys. J. **779**, L6 (2013).
13. Дэйм и др. (T.M. Dame, B.G. Elmegreen, R.S. Cohen, and P. Thaddeus), Astrophys. J. **305**, 892 (1986).
14. Ефремов Ю.Н., Астрон. журн. **88**, 127 (2011) [Yu.N. Efremov, Astron. Rep. **55**, 108 (2011)].
15. Жилкова и др. (L. Jílková, G. Carraro, B. Jungwiert, and I. Minchev), Astron. Astrophys. **541**, A64 (2012).

16. Касетти-Динеску и др. (D.I. Casetti-Dinescu, T.M. Girard, L. Jílková et al.), *Astron. J.* **146**, 33 (2013).
17. Кёнуй (M.H. Quenouille), *Biometrika* **43**, 353 (1956)
18. Кёнуй (M.H. Quenouille), *Ann. Mathemat. Statistics* **20**, 355 (1949).
19. Кобзарь А.И., *Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников* (М.: Физматлит, 2006).
20. Корчагин и др. (V.I. Korchagin, S.A. Khoperskov, and A.V. Khoperskov), *Baltic Astron.* **25**, 356 (2016).
21. Крэмптон и др. (D. Crampton, D. Bernard, B.L. Harris, and A.D. Thackeray), *MNRAS* **176**, 683 (1976).
22. Кэчпоул и др. (R.M. Catchpole, P.A. Whitelock, M.W. Feast, S.M.G. Hughes, M. Irwin, and C. Alard), *MNRAS* **455**, 2216 (2016).
23. Локтин А.В., *Астрон. журн.* **56**, 1188 (1979) [A.V. Loktin, *Sov. Astron.* **23**, 671 (1979)].
24. Никифоров (I.I. Nikiforov), *ASP Conf. Ser.* **316**, 199 (2004).
25. Никифоров И.И., Казакевич Е.Э., *Изв. ГАО* **219**, 4, 245 (2009).
26. Никифоров, Смирнова (I.I. Nikiforov and O.V. Smirnova), *Astron. Nachr.* **334**, 749 (2013).
27. Никифоров, Шеховцова (I.I. Nikiforov and T.V. Shekhovtsova), *Proc. Inter. Conf. "Stellar Dynamics: from Classic to Modern"* (Saint Petersburg, Russia, 21–27 August 2000, Ed. L.P. Ossipkov, I.I. Nikiforov, Saint Petersburg: Saint Petersburg Univ. Press, 2001), p. 28.
28. Павловская Е.Д., Сучков А.А., *Астрон. журн.* **61**, 665 (1984) [E.D. Pavlovskaya, A.A. Suchkov, *Sov. Astron.* **28**, 389 (1984)].
29. Поль и др. (M. Pohl, P. Englmaier, and N. Bissantz), *Astrophys. J.* **677**, 283 (2008).
30. Попова М.Э. Письма в *Астрон. журн.* **32**, 274 (2006) [M.É. Popova, *Astron. Lett.* **32**, 244 (2006)].
31. Попова М.Э., Локтин А.В., Письма в *Астрон. журн.* **31**, 190 (2005) [M.E. Popova, A.V. Loktin, *Astron. Lett.* **31**, 171 (2005)].
32. Пресс и др. (W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery), *Numerical Recipes in C* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1997).
33. Рид и др. (M.J. Reid, K.M. Menten, X.W. Zheng, A. Brunthaler, L. Moscadelli, Y. Xu, B. Zhang, M. Sato, et al.), *Astrophys. J.* **700**, 137 (2009).
34. Рид и др. (M.J. Reid, K.M. Menten, A. Brunthaler, X.W. Zheng, T.M. Dame, Y. Xu, Y. Wu, B. Zhang, et al.), *Astrophys. J.* **783**, 130 (2014).
35. Савченко, Решетников (S.S. Savchenko and V.P. Reshetnikov), *MNRAS* **436**, 1074 (2013).

36. Сюй и др. (Y. Xu, J.J. Li, M.J. Reid, K.M. Menten, X.W. Zheng, A. Brunthaler, L. Moscadelli, T.M. Dame, et al.), *Astrophys. J.* **769**, 15 (2013).
37. Фист, Шаттлуорт (M.W. Feast and M. Shuttleworth), *MNRAS* **130**, 245 (1965).
38. Фостер, Купер (T. Foster and B. Cooper), *ASP Conf. Ser.* **438**, 16 (2010).
39. Фрэнсис, Андерсон (C. Francis and E. Anderson), *MNRAS* **422**, 1283 (2012).
40. Эфрон, Штейн (B. Efron and C. Stein), *Ann. Statistics* **9**, 586 (1981).

ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. Определение доверительной области для модельной спирали, найденной трехточечным методом

Доверительная область на уровне значимости  $1\sigma$  для модельной спирали определялась по следующему алгоритму. Фиксировался луч  $C_0M$ , выходящий из полюса  $C_0$  модельной спирали под углом  $\Lambda$  к оси  $X$  (см. рис. 14а). Для данного  $\Lambda$  определялись точки пересечения  $P_j$  луча  $C_0M$  с каждой из  $N_{\text{sol}}$  спиралей, полученных по тройкам мазеров  $M_{1,j}$ ,  $M_{2,j}$ ,  $M_{3,j}$ .

Выведем уравнение для поиска долготы  $\lambda_j$  точки пересечения  $P_j(X_{P_j}, Y_{P_j})$  спирали и луча с началом на оси  $X$ . Для точки  $P_j$ , принадлежащей спирали с парамет-

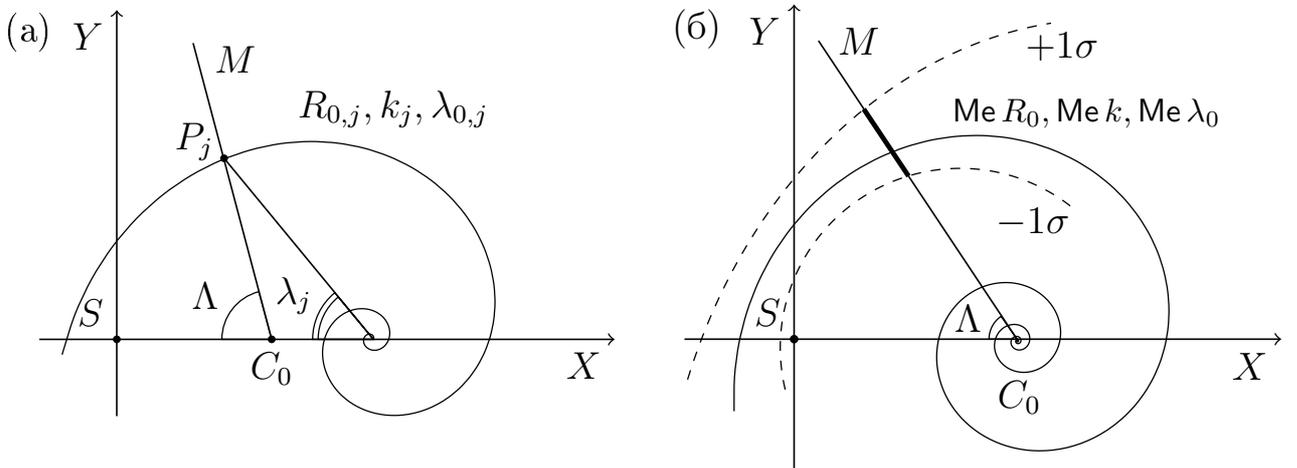


Рис. 14: (а) — К выведению уравнения для поиска долготы  $\lambda_j$  точки пересечения  $P_j$  спирали с параметрами  $R_{0,j}$ ,  $k_j$ ,  $\lambda_{0,j}$  и луча  $C_0M$ . (б) — К определению доверительной области для модельной спирали с параметрами  $\text{Me } R_0$ ,  $\text{Me } k$ ,  $\text{Me } \lambda_0$ ; пунктирные линии обозначают границы этой области для доверительного уровня  $1\sigma$ ; выделенный отрезок на луче  $C_0M$  изображает доверительный интервал для модельного значения  $R$  при заданном  $\Lambda$ .  $C_0$  — полюс модельной спирали,  $S$  — положение Солнца.

рами  $R_{0,j}$ ,  $k_j$ ,  $\lambda_{0,j}$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned} R(\lambda_j) &= |R_{0,j}| e^{k_j(\lambda_j - \lambda_{0,j})}, \\ X_{P_j} &= R_{0,j} - R(\lambda_j) \cos \lambda_j, \\ Y_{P_j} &= R(\lambda_j) \sin \lambda_j \end{aligned} \quad (24)$$

(см. выражения (3), (6)). Уравнение прямой  $C_0M$  в декартовых координатах имеет вид

$$Y = (\text{Me } R_0 - X) \text{tg } \Lambda. \quad (25)$$

Подставляя выражения (24) для координат  $X_{P_j}$ ,  $Y_{P_j}$  в (25), получаем равенство

$$R(\lambda_j) \sin \lambda_j = [\text{Me } R_0 - R_{0,j} + R(\lambda_j) \cos \lambda_j] \text{tg } \Lambda, \quad (26)$$

справедливое для точки  $P_j$  как пересечения спирали и прямой. Учитывая формулу (24) для  $R(\lambda_j)$ , окончательно получаем уравнение для долготы  $\lambda_j$  искомой точки  $P_j$

$$|R_{0,j}| e^{k_j(\lambda_j - \lambda_{0,j})} \sin \lambda_j - [\text{Me } R_0 - R_{0,j} + |R_{0,j}| e^{k_j(\lambda_j - \lambda_{0,j})} \cos \lambda_j] \text{tg } \Lambda = 0. \quad (27)$$

Корни уравнения (27) вычислялись на отрезке  $\lambda_j \in [-\pi; \pi]$ . Из двух формальных корней выбирался тот, знак которого совпадал со знаком  $\Lambda$ . Величина  $\lambda_j$  определяет точку  $P_j$  согласно формулам (24).

Для заданного  $\Lambda$  находились медиана множества расстояний  $\{R_j\}_{j=1}^{N_{\text{sol}}}$ , где  $R_j = |C_0P_j|$ , и два квантиля распределения  $R_j$ , отсчитываемых от медианы по разные стороны от нее и содержащих вместе долю распределения для доверительного уровня  $1\sigma$ , т.е. по  $\frac{\approx 68.3\%}{2}$  в каждом квантиле. Внешние границы квантилей принимались за границы доверительного интервала для модельной величины  $R(\Lambda)$ , определяемой модельной спиралью для данного  $\Lambda$  (рис. 14б). Решение той же задачи при переборе значений  $\Lambda$  позволяет найти границы доверительной области для модельной спирали с любым разрешением по  $\Lambda$  (рис. 14б, см. также рис. 7).

## *П2. Оценка природного среднеквадратического разброса мазеров поперек спирального сегмента*

Пусть  $M_j$  — номинальное положение мазера в соответствии с измерениями,  $\varpi_j$  и  $\sigma_{\varpi_j}$  — параллакс мазера и его неопределенность, приведенные в каталоге, соответственно. Здесь  $j = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — объем выборки мазеров, отнесенных к данному сегменту. Введем следующие обозначения для расстояний от точек на луче зрения до оснований перпендикуляров, проведенных через эти точки к спирали (рис. 15а):

$$\begin{aligned} \rho_j &= |M_j O_j|, & |M_j S| &= \varpi_j^{-1}, \\ \rho_{j,1} &= |M'_j O'_j|, & |M'_j S| &= (\varpi_j - \sigma_{\varpi_j})^{-1}, \\ \rho_{j,2} &= |M''_j O''_j|, & |M''_j S| &= (\varpi_j + \sigma_{\varpi_j})^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

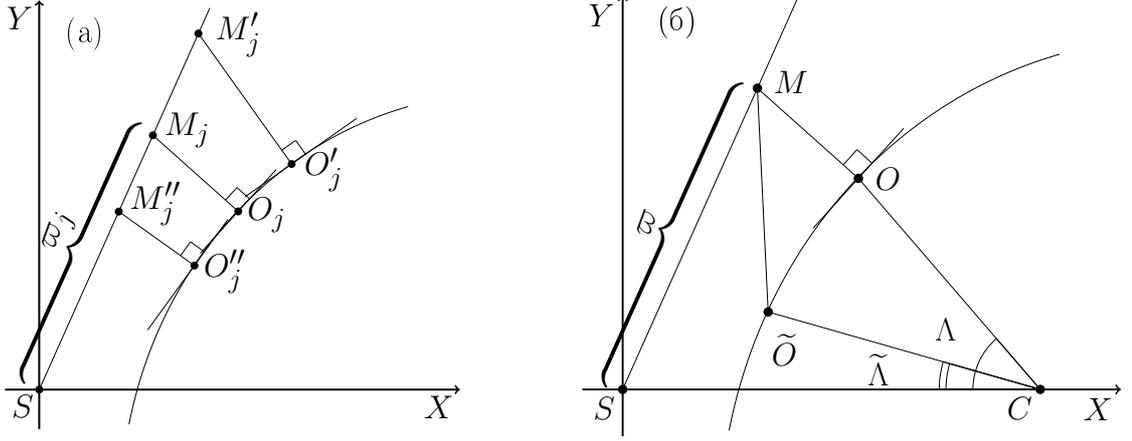


Рис. 15: (а) — К определению разброса поперек сегмента спирального рукава. (б) — К определению расстояния от точки ( $M$ ) до спирали.  $S$  — положение Солнца,  $C$  — полюс спирали.

Здесь  $O_j, O'_j, O''_j$  — точки оснований перпендикуляров, определяемые положением точек  $M_j, M'_j, M''_j$  на луче зрения соответственно;  $S$  — положение Солнца.

Знание расстояний (28) позволяет получить следующие оценки наблюдаемой дисперсии объектов поперек сегмента спирального рукава,  $(\sigma_w)_{\text{obs}}^2$ , вклада в эту дисперсию неопределенностей параллаксов,  $(\sigma_w)_{\varpi}^2$ , и природной дисперсии объектов поперек сегмента,  $(\sigma_w)_0^2$ :

$$(\sigma_w)_{\text{obs}}^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{j=1}^N \rho_j^2, \quad (29)$$

$$(\sigma_w)_{\varpi}^2 = \frac{1}{N-3} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{(\rho_j - \rho_{j,1})^2 + (\rho_j - \rho_{j,2})^2}{2} \right], \quad (30)$$

$$(\sigma_w)_0^2 = (\sigma_w)_{\text{obs}}^2 - (\sigma_w)_{\varpi}^2. \quad (31)$$

Расстояния (28) от точек до спирали вычислялись следующим образом. Пусть  $(X_0, Y_0)$  — декартовы координаты точки  $M$ ;  $\tilde{O}(\tilde{X}, \tilde{Y})$  — произвольная точка спирали, имеющая номинальную галактоцентрическую долготу  $\tilde{\Lambda}$ ;  $R_0, k, \lambda_0$  — параметры спирали. Находилось такое значение долготы  $\Lambda$ , при котором расстояние  $|M\tilde{O}|$  ( $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ ) является наименьшим (рис. 15б).

Выразим координаты точки  $\tilde{O}$  через  $\tilde{\Lambda}$  и параметры спирали:

$$\tilde{X} = R_0 - |R_0| e^{k(\tilde{\Lambda} - \lambda_0)} \cos \tilde{\Lambda}, \quad (32)$$

$$\tilde{Y} = |R_0| e^{k(\tilde{\Lambda} - \lambda_0)} \sin \tilde{\Lambda}. \quad (33)$$

Найдем значение  $\tilde{\Lambda}$ , которое доставляет минимум функции

$$F(\tilde{\Lambda}) \equiv |M\tilde{O}|^2 = [\tilde{X}(\tilde{\Lambda}) - X_0]^2 + [\tilde{Y}(\tilde{\Lambda}) - Y_0]^2. \quad (34)$$

После взятия производной  $F'(\tilde{\Lambda})$  получаем уравнение для определения  $\Lambda$ :

$$(X_0 - R_0)(\sin \Lambda - k \cos \Lambda) + Y_0(k \sin \Lambda + \cos \Lambda) - k|R_0|e^{k(\Lambda - \lambda_0)} = 0. \quad (35)$$

Определив численно корни  $\Lambda$  уравнения (35) на витке  $-\pi \leq \tilde{\Lambda} < \pi$  спирали, вычисляем соответствующие значения  $F(\Lambda)$ . Поскольку на витке существуют два экстремума  $F(\tilde{\Lambda})$ , искомым расстоянием является меньшая из двух величин  $\sqrt{F(\Lambda)}$ .

### *ПЗ. Метод складного ножа*

Метод складного ножа (jackknife technique) используется для оценки дисперсии и смещения эстиматора (статистической оценки) параметра (Кёнуй, 1949, 1956; Эфрон, Штейн, 1981). Имеется в виду смещение, обусловленное конечностью выборки. Приведем формулы метода применительно к медианной оценке  $\text{Me } R_0$  трехточечным методом как к эстиматору.

Пусть медиана  $\text{Me } R_0$  найдена по совокупности троек, сформированной на основе выборки из  $N$  объектов. Рассмотрим  $N$  подвыборок объемом  $N - 1$  каждая, таких что в подвыборке номер  $p$  отсутствует  $p$ -ый объект исходной выборки. Для каждой из подвыборок по всем отобраным тройкам ее объектов определим медиану  $(\text{Me } R_0)_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, N$ . Далее вычислим среднее арифметическое значений  $(\text{Me } R_0)_p$

$$\langle \text{Me } R_0 \rangle_J = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N (\text{Me } R_0)_p. \quad (36)$$

Тогда дисперсия трехточечной оценки  $\text{Me } R_0$  как эстиматора

$$\sigma_{R_0, J}^2 = \frac{N-1}{N} \sum_{p=1}^N [(\text{Me } R_0)_p - \langle \text{Me } R_0 \rangle_J]^2, \quad (37)$$

а скорректированное значение этой оценки

$$R_{0, \text{corr}} = N \text{Me } R_0 - (N-1) \langle \text{Me } R_0 \rangle_J. \quad (38)$$

Смещение оценки дается разностью  $\text{Me } R_0 - R_{0, \text{corr}}$ , поправка к оценке есть смещение с обратным знаком:

$$\Delta R_0 = R_{0, \text{corr}} - \text{Me } R_0. \quad (39)$$