

Это препринт Произведения, принятого для публикации в журнале «Письма в  
Астрономический журнал. Астрономия и космическая астрофизика». 2017. Т. 43, № 1.  
Вариант после корректуры 26.09.2016.

© Российская академия наук, 2017 г.

© Редколлегия журнала «Письма в Астрономический журнал», 2017 г.

<http://pleiades.online/>

## ОСЕВАЯ ЗОНА ИЗБЕГАНИЯ В СИСТЕМЕ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ И РАССТОЯНИЕ ДО ЦЕНТРА ГАЛАКТИКИ

© 2016 г. И.И.Никифоров\*, Е.В.Агладзе

*Санкт-Петербургский государственный университет*

Поступила в редакцию 28 сентября 2016 г.

Выполнена проверка существования в системе шаровых скоплений (ШС) Галактики зоны избегания, ориентированной вдоль галактической оси вращения, и проведена параметризация этой зоны в осесимметричном приближении. Возможность наличия подобной структуры в форме двойного конуса ранее обсуждалась в литературе. Показано, что на основе максимизации формального конуса избегания (Сасаки, Исидзава, 1978) нельзя сделать однозначный вывод о существовании осевой зоны избегания и ее параметрах из-за дискретности системы ШС. Неоднозначность позволяет преодолеть построение представления пустот в системе ШС множеством меридиональных цилиндрических войдов наибольшего радиуса. В результате структурного исследования этого множества для северных и южных ШС независимо удалось выделить упорядоченные вертикально связанные осевые зоны избегания со сходными характеристиками. Картирование объединенной осевой зоны избегания, выполненное при раздельном и совместном анализе северных и южных войдов, показывает, что эта структура прослеживается на  $|Z| \gtrsim 1$  кпк, по форме она близка к двойному конусу, ось которого пересекает область наибольшей численной плотности ШС, а южная полость зоны имеет менее регулярный вид по сравнению с северной. В результате моделирования распределения галактоцентрических широт ШС определены угол полураствора конуса избегания  $\alpha_0 = 15^\circ 0_{-4.1}^{+2.1}$  и расстояние до центра Галактики  $R_0 = 7.3 \pm 0.5$  кпк (в шкале каталога Харриса, 1996, версии 2010 г.) как расстояние от Солнца до точки пересечения оси конуса с линией центр–антицентр. Коррекция к калибровке шкалы расстояний ШС, полученной в той же версии каталога Харриса по объектам Галактики, приводит к оценке  $R_0 = 7.2 \pm 0.5 \Big|_{\text{стат.}} \pm 0.3 \Big|_{\text{калиб.}}$  кпк. Систематическая ошибка  $R_0$  за счет неполноты выявленности ШС для этого метода незначительна. Вероятность, что зона избегания при найденных характеристиках носит случайный характер, составляет  $\leq 2\%$ . Выявлены признаки вытянутости зоны избегания в направлении, ортогональном оси центр–антицентр, что, как и различие север–юг в этой зоне, может быть обусловлено влиянием Магеллановых Облаков. Обсуждается возможность обнаружения аналогичных зон избегания в системах ШС внешних галактик.

**Ключевые слова:** система шаровых скоплений, пространственное распределение, структура, расстояние от Солнца до центра Галактики, Галактика (Млечный Путь).

**PACS codes:** 98.20.Gm, 98.35.Ln, 98.35.Jk.

---

\* Электронный адрес <nii@astro.spbu.ru>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Шаровые скопления (ШС) традиционно используются для изучения структуры, кинематики, динамики, химической эволюции и других свойств галактического гало и Галактики в целом (см., например, Боркова, Марсаков, 2000; Харрис, 2001; Эшмен, Цепф, 2008; Локтин, Марсаков, 2009). В частности, по ШС, вслед за пионерской работой Шепли (1918), определяют расстояние от Солнца до центра Галактики ( $R_0$ ), причем ШС до недавнего времени были самым популярным типом объектов для этой цели. Как правило, для оценивания  $R_0$  по ШС применяли ту или иную модификацию метода Шепли, который заключается в нахождении расстояния до „центроида“ пространственного распределения ШС, т.е. до геометрического центра или точки наибольшей плотности системы ШС (недавние реализации — в работах Масьеля, 1993; Расторгуева и др., 1994; Харриса, 2001; Бика и др., 2006). Однако развернувшееся обсуждение наблюдательной селекции ШС, обусловленной поглощением света и ведущей к занижению оценок  $R_0$  в классической версии метода Шепли (см. обзоры Рида, 1993, Никифорова, 2003, а также ссылки в табл. 8 настоящей работы), стимулировало поиск других, помимо центральной концентрации, особенностей пространственного распределения ШС, способных дать ограничения на величину  $R_0$  без существенного систематического смещения из-за селекции. Так, Сасаки, Исидзава (1978) предложили для определения  $R_0$  использовать *конус избегания* (КИ) в системе ШС, под которым понимается падение численной плотности или полное отсутствие ШС в двойном конусе, ось которого ортогональна плоскости Галактики, а вершина находится в ее центре.

Райт, Иннанен (1972б) впервые обратили внимание на „видимый дефицит ШС в пределах примерно 15-градусного „конуса избегания“ (cone of avoidance), центрированного на ядро Галактики“, в распределении ШС на плоскости  $XZ$ , сославшись в качестве иллюстрации на рис. 3 в обзоре Оорта (1965). Здесь  $X$  — ось, проходящая через Солнце и центр Галактики;  $Z$  — ось, ортогональная плоскости Галактики; Солнце находится в начале координат. При этом Райт, Иннанен (1972б) предположили связь между наличием КИ и следующим теоретическим результатом. Райт, Иннанен (1972а) исследовали коллапс невращающегося газового сфероида с нулевой массой на массивное точечное ядро без учета давления газа. Они показали аналитически, что в результате коллапса (к моменту центральной сингулярности) газовая оболочка приобретает осесимметричную форму, которая в меридиональном разрезе напоминает знак бесконечности. При этом авторы отметили, что для вращающегося начального сфероида результат должен измениться незначительно, в частности, потому что угловой момент, приходящийся на единицу массы, реальной протогалактики должен быть небольшим вблизи оси вращения. Возникающий в результате коллапса дефицит газа вдоль малой оси сфероида Райт, Иннанен (1972б) и связали с КИ в системе ШС Галактики. Однако вывод о существовании самого конуса носил качественный характер, будучи основанным, по-видимому, лишь на зрительном впечатлении от картины распределения ШС в проекции на плоскость  $XZ$ . Упоминаний о каком-либо статистическом анализе распределения ШС, оценке его параметров краткая заметка

Райта, Иннанена (1972б) не содержит.

Сасаки, Исидзава (1978), основываясь на результатах и идеях Райта, Иннанена (1972а,б), но не затрагивая вопрос о реальности существования КИ в системе ШС Галактики, рассмотрели возможные динамические механизмы формирования этой структуры. Сасаки, Исидзава (1978) численно промоделировали эволюцию первоначально сферически-симметричной системы ШС в поле Галактики и показали, что неустойчивость орбит с малым угловым моментом, а также приливное разрушение ШС в результате прохождения вблизи ядра Галактики могут в совокупности привести к появлению КИ в системе ШС за время порядка 10 млрд. лет; при этом быстрее от ШС „вычищаются“ периферийные области конуса. В той же работе КИ в смысле *полного* отсутствия в нем ШС<sup>1</sup> был впервые использован для определения расстояния до центра Галактики, под которым понималась точка пересечения оси конуса с осью  $X$ . В результате Сасаки, Исидзава (1978) вывели по КИ оценку  $R_0 = 9.2 \pm 1.3$  кпк и оценку угла полураствора КИ  $\alpha_0 = 14.3 \pm 2.8$ .

Нам не удалось найти более поздних работ, посвященных непосредственно ШС, в которых бы исследовался КИ или его существование подвергалось бы сомнению или просто бы упоминалось о нем, хотя интерес к такой структуре, если она реальна, ее учет при решении различных задач представлялись бы очевидными. Вместе с тем, оценка  $R_0$ , полученная Сасаки, Исидзавой (1978) по КИ, традиционно включается в обзоры по проблеме определения  $R_0$  вплоть до настоящего времени (де Вокулёр, 1983; Керр, Линден-Белл, 1986; Рид, 1989, 1993; Сурдин, 1999; Фрэнсис, Андерсон, 2014); она учитывалась при выведении среднего, „наилучшего“, значения  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}}$  во многих вариантах его расчетов (де Вокулёр, 1983; Керр, Линден-Белл, 1986; Рид, 1989, 1993; Сурдин, 1999; Никифоров, 2004; Никифоров, Смирнова, 2013). По сравнению с современными измерениями этого параметра —  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}} = (7.8 \div 8.25) \pm (0.1 \div 0.5)$  кпк (Рид, 1993; Никифоров, 2004; Аведисова, 2005; Генцель и др., 2010; Фостер, Купер, 2010; Никифоров, Смирнова, 2013; Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016), при этом отдельные оценки  $R_0$ , опубликованные с 2000 г., имеют точечные значения, не превышающие 8.9 кпк (Фрэнсис, Андерсон, 2014; Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016), — величина  $R_0 = 9.2$  кпк, выведенная Сасаки, Исидзавой (1978), представляется завышенной.

Ниже мы обсуждаем возможные причины этого расхождения, однако основной целью настоящей работы является проверка самого факта существования осевой зоны избегания в системе ШС Галактики, а также, в случае положительного ответа на этот вопрос, выяснение характерных особенностей геометрии этой зоны и новое

---

<sup>1</sup>Такому определению лучше бы отвечало какое-то другое название, например, „конус пустоты“ или „конус, свободный от шаровых скоплений“. Сасаки, Исидзава (1978) предпочли готовый термин „конус избегания“, введенный Райтом, Иннаненом (1972б) для обозначения *проявления* этой пространственной особенности при проектировании распределения ШС на плоскость  $XZ$ . Мы сохраняем последнее название ради преемственности и потому, что физически более корректно и математически удобнее не исключать *полностью* появление скопления в „запретной зоне“. Райт, Иннанен (1972б) ввели свой термин, видимо, по аналогии с термином „зона избегания“ (zone of avoidance) для галактик вблизи плоскости нашей Галактики, использование которого восходит к Р. Проктору (см. обзор Краана-Кортевега, Лахава, 2000).

определение  $R_0$  с использованием этой пространственной структуры по современным данным о ШС.

Следует отметить, что сам принцип нахождения  $R_0$  по конусу избегания, предложенный Сасаки, Исидзавой (1978), безотносительно систематики его первой реализации, может быть перспективен. Так как положение КИ определяется в основном скоплениями на больших  $|Z|$  (Сасаки, Исидзава, 1978), т.е. на больших  $|b|$ , то эффект селекции должен практически не влиять на результат; менее остра для этих ШС и проблема учета поглощения света при определении расстояний до них. Поэтому следует ожидать, что соответствующие систематические смещения оценки  $R_0$  будут меньше в случае использования КИ как ключевой особенности пространственного распределения ШС, чем в случае опоры на центрoид ШС в методе Шепли.

## 2. ДАННЫЕ О ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЯХ

В качестве базы данных была взята версия 2010 г. каталога Харриса (1996), обозначаемая далее Н10. Для всех 157 скоплений каталога приведены величины гелиоцентрических расстояний, рассчитанные по шкале

$$M_V(\text{HB}) = 0.16 [\text{Fe}/\text{H}] + 0.84, \quad (1)$$

принятой Харрисом на основе его собственной калибровки по новым данным. Здесь  $M_V(\text{HB})$  — средняя абсолютная звездная величина в фильтре  $V$  горизонтальной ветви,  $[\text{Fe}/\text{H}]$  — металличность.

Оценки  $[\text{Fe}/\text{H}]$ , указанные в Н10 для 152 ШС, использовались в настоящей работе только для разделения подсистем скоплений, богатых и бедных металлами. При этом мы принимали граничное значение металличности  $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.8$  (Никифоров, Смирнова, 2013).

## 3. МЕТОД МАКСИМИЗАЦИИ ФОРМАЛЬНОГО КОНУСА ИЗБЕГАНИЯ

Выведенная Сасаки, Исидзавой (1978) оценка  $R_0 = 9.2 \pm 1.3$  кпк была получена для каталога расстояний с калибровкой  $M_V(\text{HB}) = 0^m5$ , которая ярче современных, т.е. дает более длинную шкалу. Пересчет оценки к шкале (1) дает  $R_0 = 8.7 \pm 1.2$  кпк для  $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.3$ , средней металличности для всех ШС, и  $R_0 = 8.8 \pm 1.2$  кпк для  $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.5$ , средней металличности для ШС, бедных металлами (Никифоров, Смирнова, 2013), которые в основном и определяют КИ. Такие значения  $R_0$  явно современным оценкам не противоречат, хотя и находятся вблизи края их диапазона. Однако в работе Сасаки, Исидзавы (1978) приведена еще одна оценка по КИ,  $R_0 = 9.4 \pm 1.2$  кпк, основанная на одной из ранних версий каталога Харриса с более точными расстояниями до ШС и калибровкой  $M_V(\text{HB}) = 0^m6$ . Приведение к шкале (1) данную оценку практически не меняет:  $R_0 = 9.3 \pm 1.2$  кпк и  $R_0 = 9.4 \pm 1.2$  кпк для  $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.3$  и  $-1.5$  соответственно. Последние величины свидетельствуют в

пользу того, что процедура Сасаки, Исидзавы (1978) приводит в целом к завышенным оценкам  $R_0$  по КИ, причем завышение нельзя объяснить эволюцией калибровки шкалы ШС.

В основу своего анализа Сасаки, Исидзава (1978) положили естественный принцип максимизации угла раствора КИ: „истинным“ принимается то значение  $R_0$ , при котором этот угол получается наибольшим. Очевидно, что определенный так КИ в невырожденных случаях задается всего двумя ШС [см. пояснение ниже, после формулы (3)]. Видимо потому, что оптимальное значение  $R_0$  в таком случае основывается только на двух оценках расстояний, имеющих свою неопределенность, Сасаки, Исидзава (1978) не применяли эту процедуру к исходным каталогам расстояний. Вместо этого они максимизировали КИ для каждого из 300 псевдослучайных каталогов ШС, полученных путем варьирования модулей расстояния до ШС по нормальному закону с математическим ожиданием, соответствующим каталожной величине расстояния, и стандартом  $0^m.5$  или  $0^m.3$  для разных исходных каталогов. Пробные значения  $R_0$  брались в промежутке от 6 до 12 кпк. Затем оптимальные значения  $R_0$ , найденные для каждого сгенерированного каталога, усреднялись.

Чтобы выяснить, какова могла быть систематика такой процедуры, рассмотрим полученную по данным Н10 зависимость наибольшей по модулю галактоцентрической широты шаровых скоплений,  $\varphi_0 \equiv \pi/2 - \alpha_0 = \max |\varphi|$ , от принятого значения  $R_0$  (рис. 1а). Здесь галактоцентрическая широта отдельного ШС,  $\varphi$ , при заданном  $R_0$  определяется выражением

$$\varphi = \arctg \frac{Z}{R}, \quad (2)$$

где  $Z$  — возвышение ШС над плоскостью Галактики,  $R$  — расстояние от ШС до оси вращения Галактики (галактоосевое расстояние). В свою очередь,

$$Z = r \sin b, \quad R = \sqrt{R_0^2 + r^2 \cos^2 b - 2R_0 r \cos l \cos b}, \quad (3)$$

где  $r$  — гелиоцентрическое расстояние,  $l$  и  $b$  — галактические долгота и широта ШС. Формулы (2), (3) показывают, что для отдельного ШС функция  $|\varphi|(R_0)$  имеет (единственный) максимум при минимальном  $R$  (т.е. при таком  $R_0$ , при котором формальный радиус-вектор, проведенный к ШС, становится ортогональным оси  $X$ ), минимумов же эта функция не имеет. Каждый сегмент функции  $\varphi_0(R_0)$  на рис. 1а, имеющий для некоторого промежутка значений  $R_0$  непрерывную производную, является сегментом зависимости  $|\varphi|(R_0)$  для того ШС, которое обладает наибольшей величиной  $|\varphi|$ , т.е. определяет  $\varphi_0$ , на данном промежутке  $R_0$ . Отсюда локальный минимум функции  $\varphi_0(R_0)$  может возникнуть только в том случае, если при какой-то величине аргумента  $R_0 = R_0^*$  убывающий участок функции  $|\varphi|(R_0)$  для ШС, определяющего  $\varphi_0$  на  $R_0 < R_0^*$ , получит значение, равное значению возрастающего участка функции  $|\varphi|(R_0)$  для другого ШС, определяющего  $\varphi_0$  на  $R_0 > R_0^*$ . Таким образом, положение каждого минимума  $|\varphi|(R_0)$ , в том числе и глобального, определяется данными всего о *двух* ШС. Т.е. формальная максимизация КИ дает решение, которое в конечном итоге „опирается“ на пару ШС, отобранных в результате этой процедуры.

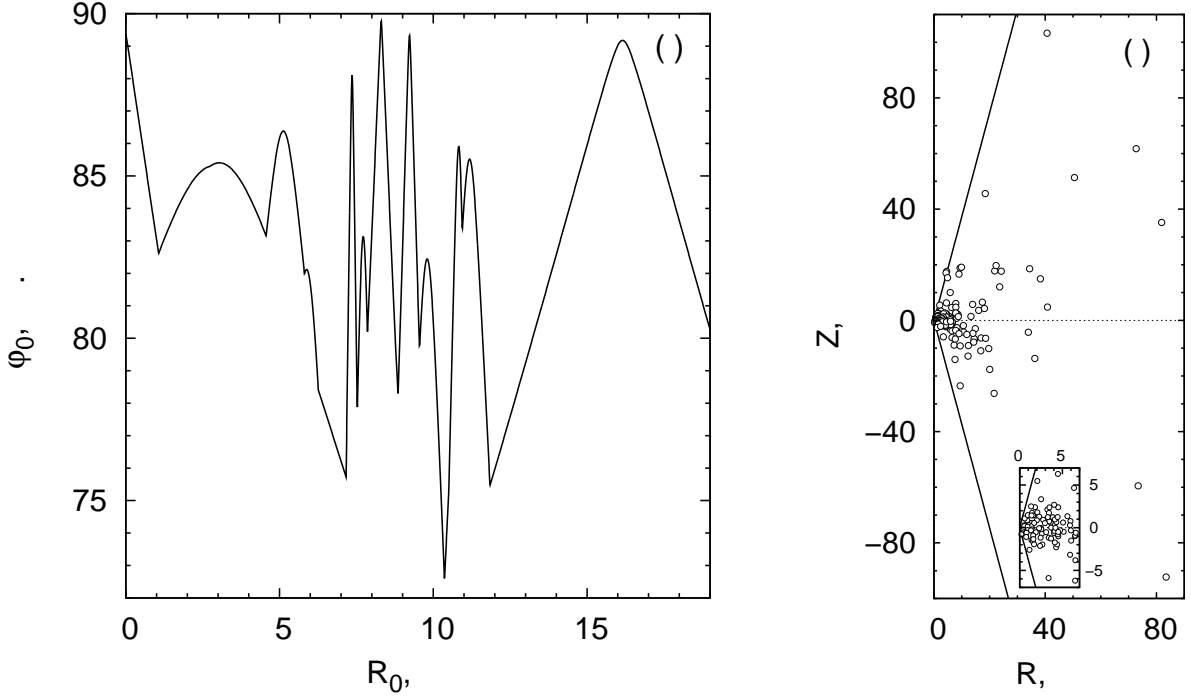


Рис. 1: (а) — Зависимость наибольшей по модулю галактоцентрической широты шаровых скоплений,  $\varphi_0 \equiv \pi/2 - \alpha_0$ , от принятого значения  $R_0$ . (б) — Пространственное распределение шаровых скоплений в координатах  $(R, Z)$ , где  $R$  — галактоосевое расстояние,  $Z$  — высота над плоскостью Галактики, для одного из минимумов зависимости  $\varphi_0(R_0)$  ( $R_0 = 7.16$  кпк); наклонные прямые линии соответствуют границам осевого конуса с углом полураствора  $\alpha_0 = 15^\circ$ .

Конус избегания должен приводить к наличию на графике зависимости  $\varphi_0(R_0)$  минимума глубиной  $\approx \alpha_0$ . Рис. 1а показывает, что в действительности эта зависимость имеет три глубоких минимума (на  $R_0 = 7.16$ ,  $10.36$  и  $11.85$  кпк) с сопоставимыми углами полураствора  $\alpha_0 \gtrsim 15^\circ$  и несколько более мелких. Многочисленные локальные минимумы обусловлены, очевидно, дискретностью системы ШС, которая увеличивается с удалением от центра Галактики, особенно в области за центром, где невыявленность ШС резко возрастает (Никифоров, Смирнова, 2013). В пользу последнего эффекта свидетельствует то, что из трех самых глубоких минимумов два приходятся на  $R_0 > 10$  кпк. Строго говоря, основываясь только на этой зависимости нельзя понять, какой из минимумов соответствует реальному КИ, а какие являются „паразитными“. Распределение ШС на плоскости  $RZ$  с характерной конической областью избегания вдоль оси  $Z$ , приведенное на рис. 1б для минимума на  $R_0 = 7.16$  кпк, получается сходным и для двух других глубоких минимумов.

Такая неоднозначность не устраняется варьированием расстояний до скоплений. Для каждого псевдослучайного каталога Сасаки, Исидзава (1978) выбирали то  $R_0$ , которое соответствует самому глубокому из формальных минимумов  $\varphi_0(R_0)$  без попытки отличить осевой (центральный) минимум от внеосевых (периферических). При варьировании расстояний глубина минимумов также варьируется и, если сопо-



ставимых минимумов два или больше, самым глубоким из них может становиться то один, то другой. Следовательно, усреднение формальных решений по всем модельным каталогам либо является фактически усреднением значений  $R_0$  для самых глубоких минимумов исходной зависимости  $\varphi_0(R_0)$ , либо дает среднее положение одного, самого глубокого, минимума, который может оказаться внеосевым. В первом случае среднее  $R_0$  получается, вообще говоря, смещенным, а его дисперсия отражает скорее разброс положений глубоких минимумов, а не влияние ошибок в расстояниях на положение самого глубокого из них. Действительно, формальное усреднение положений трех минимумов на рис. 1а дает величину  $R_0 = 9.8 \pm 1.4$  кпк, близкую к точечным оценкам и неопределенностям результатов Сасаки, Исидзавы (1978). Даже если реализуется второй случай, весьма вероятно, что глобальный минимум  $\varphi_0(R_0)$  окажется внеосевым. Для исходных данных Н10 он таким и получается, приводя к еще большему значению  $R_0 = 10.4$  кпк (рис. 1а). Заметим, что зависимости  $\varphi_0(R_0)$ , построенные нами по более ранним каталогам ШС для различных выборок, сходны по основным особенностям с зависимостью на рис. 1а: всегда имелись два-три сопоставимых глубоких минимума, из которых самый глубокий, как правило, находился на  $R_0 \sim 10$  кпк; со временем лишь усложнялась структура средней части зависимости за счет появления в каталогах большего числа центральных ШС. В работе Сасаки, Исидзавы (1978) кривая  $\varphi_0(R_0)$  приведена не была.

Поскольку за центром Галактики дискретность системы ШС выше из-за селекции (Никифоров, Смирнова, 2013), там выше и вероятность появления глубоких внеосевых минимумов (рис. 1а). Это и объясняет завышенность оценок, полученных Сасаки, Исидзавой (1978).

Таким образом, применение метода максимизации формального КИ в общем случае приводит к неверному результату, безотносительно к тому, варьируются расстояния до ШС или нет. Альтернативой может быть моделирование распределения галактоцентрических широт ШС, при котором оценка  $R_0$  определяется пространственным распределением *всех* ШС выборки. При максимизации КИ используются, в конечном итоге, зависимости  $|\varphi|(R_0)$  лишь для *двух* ШС.

Однако прежде чем заниматься указанным моделированием, следует проверить сам факт существования области избегания, так как одно лишь наличие глубоких минимумов на графике зависимости  $\varphi_0(R_0)$ , строго говоря, данный факт не доказывает: все эти минимумы могут быть внеосевыми, обусловленными дискретностью системы ШС. Если существование области избегания подтвердится, необходимо также установить основные геометрические свойства этой области.

## 4. КАРТИРОВАНИЕ ОСЕВОЙ ЗОНЫ ИЗБЕГАНИЯ В СИСТЕМЕ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ

### 4.1. Представление пустот совокупностью меридиональных цилиндрических войдов



Для того, чтобы изучить области избегания в системе ШС, ориентированные вдоль  $Z$ -координаты, разобьем все пространство на слои, границы которых параллельны плоскости Галактики. Разбиение в северном и южном направлении начнем с плоскости Галактики ( $Z = 0$  кпк), а границы слоев подберем таким образом, чтобы число входящих в каждый слой ШС было не менее 10. В результате разбиения мы получили 14  $Z$ -слоев и, соответственно, выборку ШС. Следуя принципу максимизации области избегания (Сасаки, Исидзава, 1978), будем искать в каждом слое наибольшие пустоты вдоль Местной (проходящей через Солнце) меридиональной плоскости Галактики. С этой целью для каждого  $Z$ -слоя была построена зависимость  $\rho(X)$ , где  $\rho$  — расстояние от точки на оси  $X$  (величина  $X$  — координата точки) до ближайшей из проекций шаровых скоплений на плоскость  $XU$  (плоскость Галактики); ось  $U$  направлена в сторону вращения Галактики. На этой зависимости были найдены локальные максимумы  $\rho_c \equiv \rho(X_c)$ , каждый из которых определяет локально наибольшую по объему цилиндрическую область избегания (в которой отсутствуют ШС) радиусом  $\rho_c$  и с координатой оси  $X_c$  (здесь „с“ означает cylinder). Далее будем называть такие области *цилиндрическими войдами* (ЦВ). Здесь мы ограничиваемся рассмотрением только *меридиональных* ЦВ, чьи оси лежат в Местной меридиональной плоскости Галактики. Совокупность ЦВ была найдена для каждого  $Z$ -слоя. На рис. 2 для примера приведены зависимости  $\rho_c(X)$  для южных  $Z$ -слоев, а на рис. 3 изображены проекции ЦВ, найденных для этих слоев, на плоскость  $XU$ . Также на рис. 3 светлыми кружками изображены ШС, определяющие ЦВ, а темными кружками того же размера — остальные ШС, попавшие в  $Z$ -слой; маленькие темные кружки отмечают положения осей ЦВ.

Картину распределения пустот в целом позволяет представить проекция построенной системы ЦВ на плоскость  $XZ$ . Введем новые термины и обозначения. Как видно из рис. 3, ЦВ могут пересекаться. Если войды (два или больше) пересекаются, т.е. они являются *неизолированными*, в дальнейшем рассматривается образованный ими единый *объединенный войд*. Вертикальными границами последнего в проекции на плоскость  $XZ$  являются самая левая и самая правая из границ составляющих его ЦВ; будем их изображать сплошными линиями. Ребра пересечений ЦВ будем обозначать длинными штрихами, а границы неизолированных ЦВ, попавшие внутрь объединенных войдов, — короткими штрихами. На рис. 4 (нижняя панель) приведен пример проекции одного из  $Z$ -слоев на плоскость  $XZ$ . На верхней и средней панелях рис. 4 для того же  $Z$ -слоя показаны зависимость  $\rho(X)$  и проекции ЦВ на плоскость  $XU$  соответственно. На двух нижних панелях рис. 4, как и на рис. 3, светлыми кружками изображены ШС, определяющие ЦВ, а темными — остальные ШС, попавшие в  $Z$ -слой.

Пользуясь введенными обозначениями, построим общую схему распределения ЦВ в пространстве. На рис. 5 показана проекция на плоскость  $XZ$  всей совокупности ЦВ, выделенных в 14  $Z$ -слоях. Так как высота  $Z$ -слоев сильно растет с  $|Z|$  из-за быстрого падения численной плотности скоплений, на этом и последующих рисунках, представляющих зону избегания, будем использовать логарифмическую шкалу для  $Z$ -координаты:  $\pm \lg(1 + |Z|)$ . Для сравнения на рис. 5 нанесены контуры предполага-

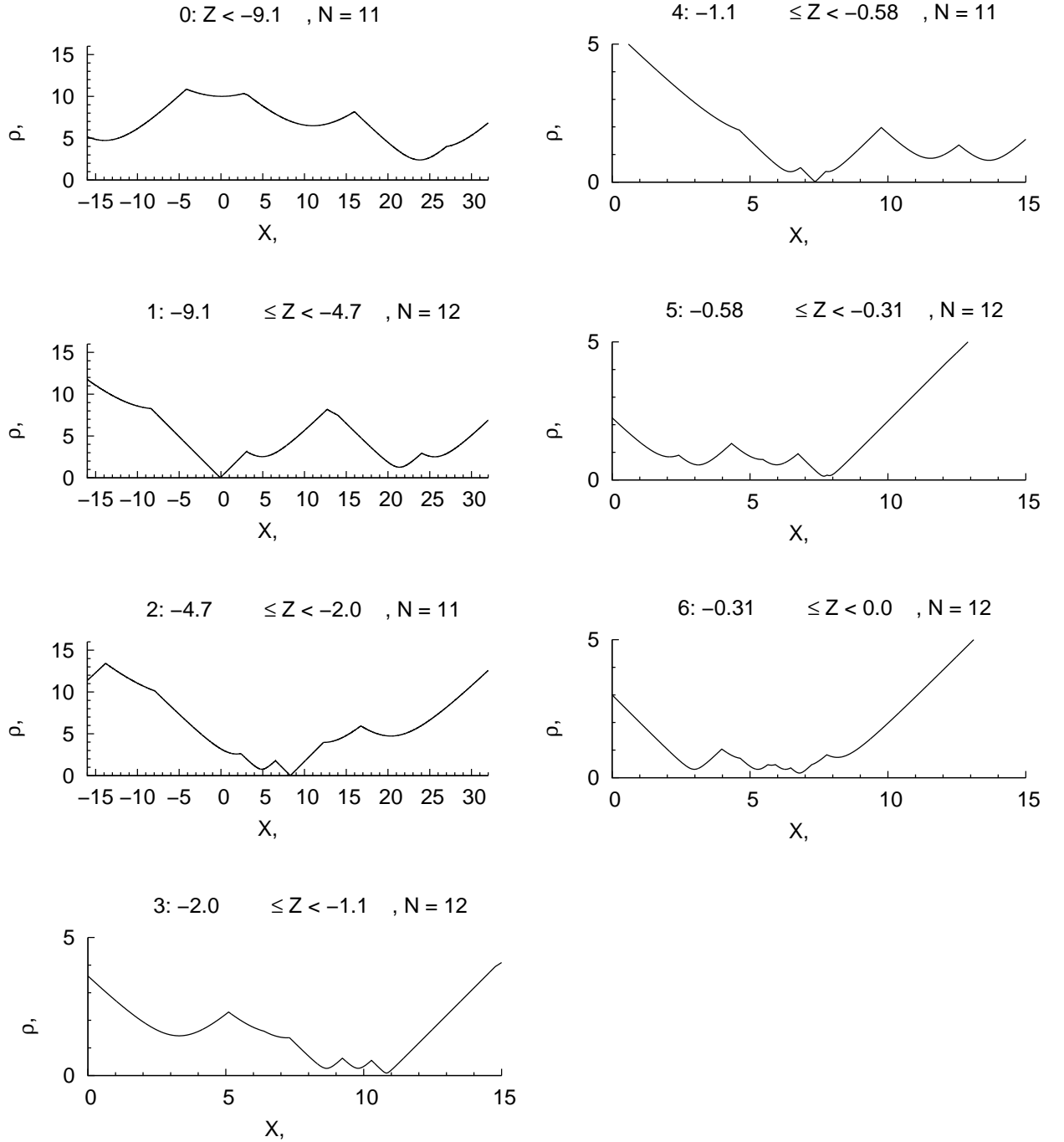


Рис. 2: Расстояние  $\rho$  от точки на оси  $X$  до ближайшей из проекций шаровых скоплений на плоскость Галактики в зависимости от координаты  $X$  этой точки для южных  $Z$ -слоев. Начало отсчета оси  $X$  соответствует положению Солнца.

емых КИ (кривые линии в принятых координатах) с углами полураствора  $\alpha_0 = 14^\circ$  и  $18^\circ$ , соответствующими разбросу оценок этого параметра в работе Сасаки, Исидзавы (1978), здесь  $R_0 = 7.9$  кпк (Никифоров, 2004; Никифоров, Смирнова, 2013).

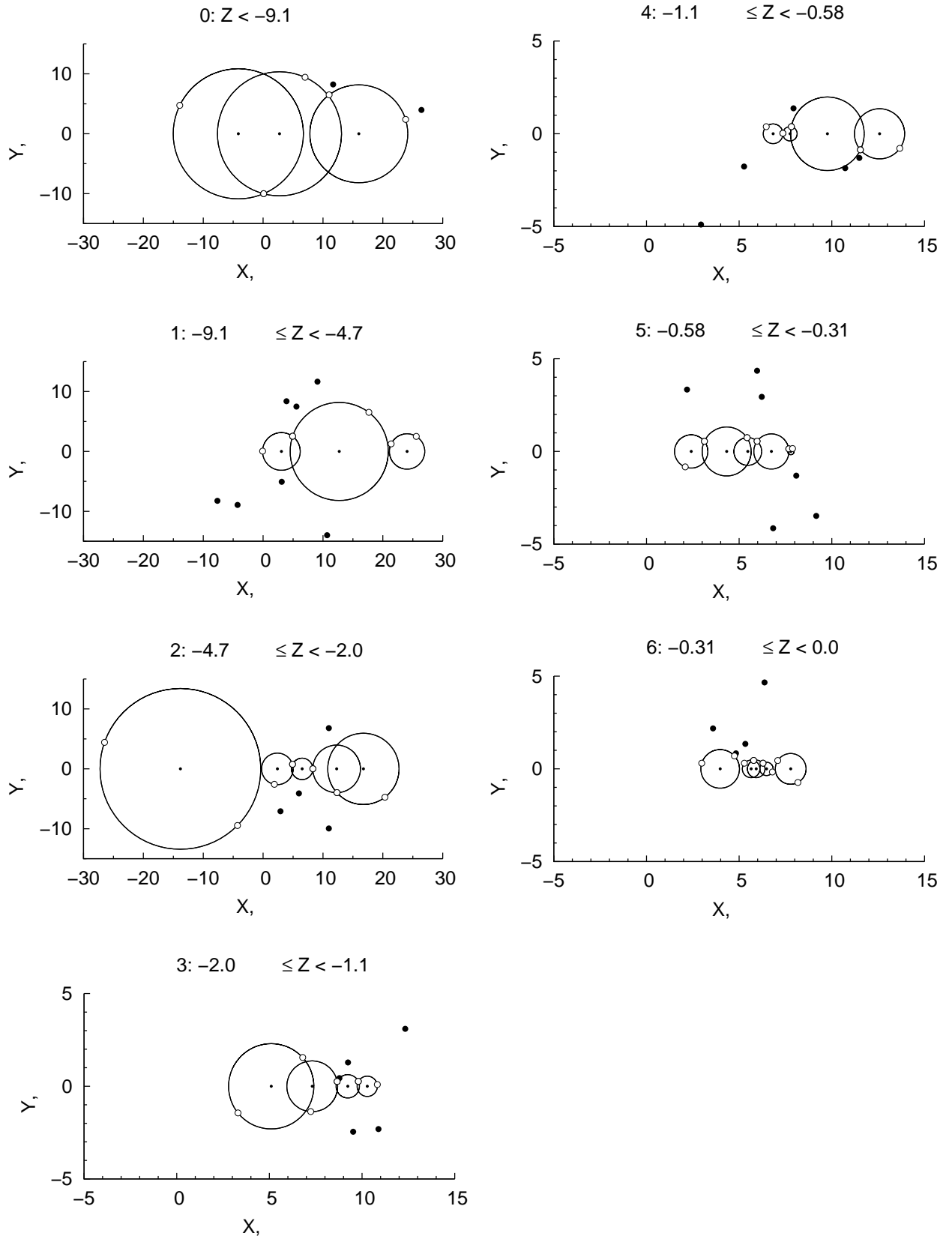


Рис. 3: Найденные цилиндрические войды в проекции на плоскость Галактики ( $XY$ ) для южных  $Z$ -слоев. Светлые кружки — шаровые скопления, определяющие войды; большие темные кружки — остальные скопления, попавшие в  $Z$ -слой; маленькие темные кружки — положения осей войдов. Солнце находится в точке  $(X, Y) = (0, 0)$ .

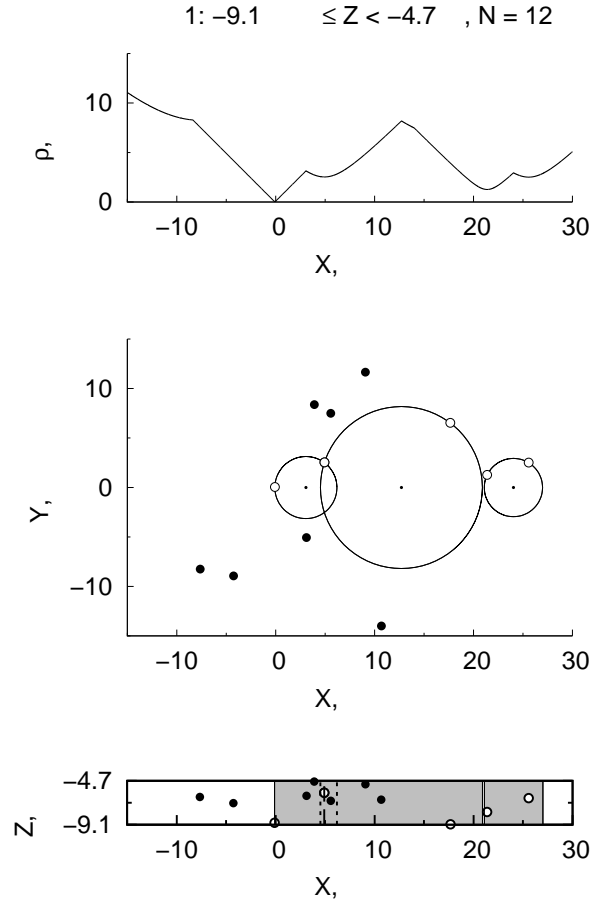


Рис. 4: Нахождение локально максимальных цилиндрических войдов и построение их схемы на примере одного из  $Z$ -слоев. Верхняя панель: функция  $\rho(X)$ , локальные максимумы которой,  $\rho_c \equiv \rho(X_c)$ , определяют координаты ( $X_c$ ) осей и радиусы ( $\rho_c$ ) войдов. Средняя панель: проекция войдов на плоскость  $XY$ . Нижняя панель: проекция  $Z$ -слоя на плоскость  $XZ$ . Серая заливка изображает полости войдов. Обозначения для шаровых скопления те же, что и на рис. 3.

#### 4.2. Выделение осевой зоны избегания в результате раздельного анализа северных и южных войдов

Рис. 5 демонстрирует, что войды образуют структуру конусоподобной формы, но более широкую по сравнению с предполагаемым КИ. Последнее не удивительно, так как из-за дискретности распределения ШС многие из найденных ЦВ являются, очевидно, лишь формальными построениями и не принадлежат искомой *осевой* структуре. Поэтому из всей совокупности ЦВ выделим подмножества войдов, каждое из которых образует *вертикально связную* структуру. Критерием для построения таких структуры и подмножества ЦВ примем наличие промежутка (нулевой длины включительно) на оси  $X$ , на котором все лучи с началами на этой оси, направленные вдоль оси  $Z$  в северном или южном направлении, проходят соответственно все северные или южные  $Z$ -слои только через полости войдов данного подмножества, нигде не пересекая область  $Z$ -слоя, где нет войда. Назовем этот алгоритм *полусквозным*. Таким образом,

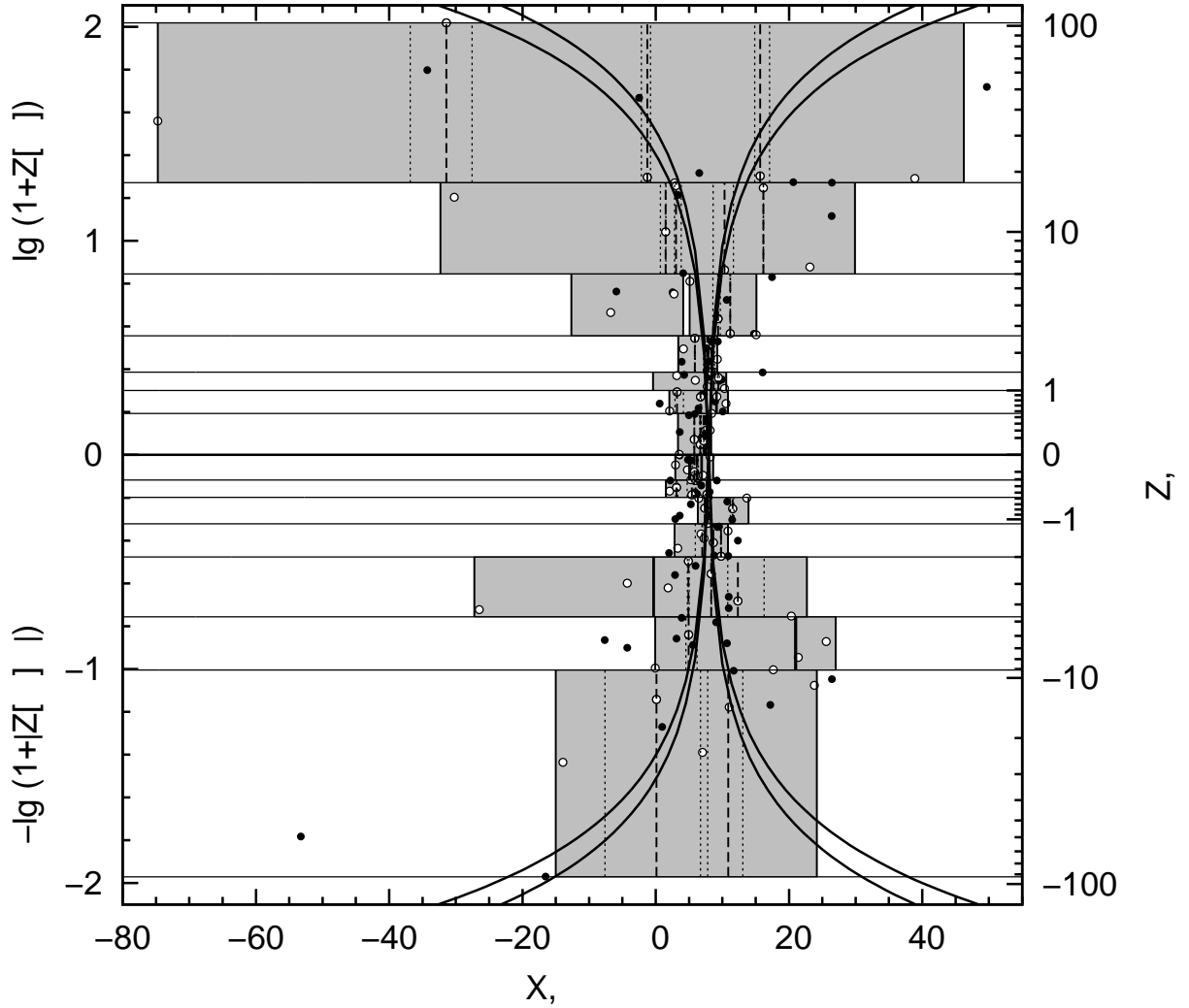


Рис. 5: Схема всей совокупности цилиндрических войдов, выделенных в системе шаровых скоплений. Полости войдов обозначены серой заливкой. Вертикальные линии имеют тот же смысл, что и на нижней панели рис. 4 (см. текст). Кривые линии изображают контуры осевых конусов с  $\alpha_0 = 14^\circ$  и  $18^\circ$  для  $R_0 = 7.9$  кпк. Обозначения для шаровых скоплений те же, что на рис. 3.

на этом этапе мы рассматриваем северные и южные войды по отдельности. Если осевая зона избегания в системе ШС реальна, она должна обнаруживаться в северной и южной половине Галактики независимо и со сходными характеристиками.

В результате указанного анализа мы нашли пять северных и три южных вертикально связанных подмножества ЦВ. Выделим те ЦВ, которые являются *общими* для всех северных или всех южных подмножеств. Очевидно, что о существовании осевой зоны избегания можно говорить только в том случае, если такие общие ЦВ найдутся и составят упорядоченную структуру.

Схема выявленных общих войдов (рис. 6) показывает, что и то, и другое имеет место. Общие ЦВ образуют в целом упорядоченную осевую зону избегания, сходную по форме с двойной конической поверхностью. Будем в дальнейшем называть эти вой-

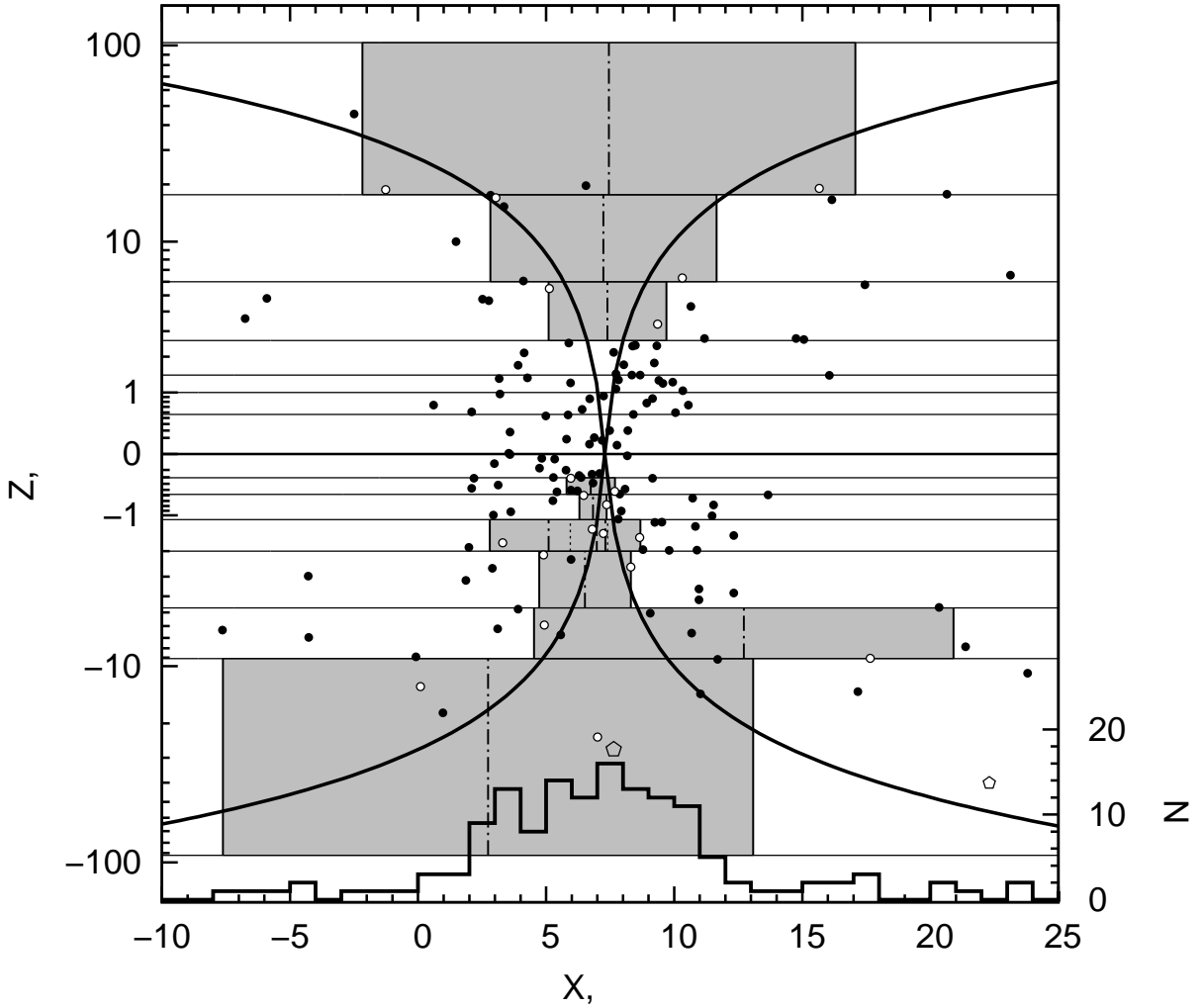


Рис. 6: Осевая зона избегания системы шаровых скоплений по результатам отдельного анализа южных и северных войдов. Заливкой обозначены осевые войды, штрихпунктирные линии — их оси. Кривые сплошные линии — контур осевого конуса с  $\alpha_0 = 15^\circ$  для  $R_0 = 7.3$  кпк (см. раздел 5.3). Гистограмма — распределение шаровых скоплений вдоль оси  $X$ . Пятиугольники — галактики БМО и ММО. Остальные обозначения те же, что на рис. 5.

ды *осевыми*. Как видно из рис. 6, существенных отклонений от конической формы не наблюдается, лишь в южной части Галактики более высока дисперсия границ войдов относительно этой модели, но без очевидного систематического смещения. Также нет признаков какого-либо серьезного наклона оси зоны избегания к плоскости Галактики, в противном случае мы получили бы заметно асимметричную картину границ войдов. Очевидно, что, например, цилиндрическая модель для зоны избегания не подходит, так как радиусы осевых ЦВ в целом растут с увеличением  $|Z|$  (рис. 6).

Сопоставление с распределением ШС вдоль оси  $X$  (гистограмма на рис. 6) показывает, что положение осей как северной, так и южной частей выявленной зоны избегания близко к максимуму численной плотности ШС на  $X \approx 7 \div 8$  кпк. Угол раствора зоны избегания примерно соответствует ожиданиям (рис. 6).

Таблица 1: Характеристики осевой зоны избегания при полусквозном алгоритме ее выделения и среднеарифметическом усреднении координат  $X_c$  осей войдов

Выборка войдов	$N$	$\overline{X_c}$ , кпк	$\sigma_{X_c}$ , кпк	$\overline{\varphi_m}$ , град.	$\sigma_{\varphi_m}$ , град.	$\varphi_0$ , град.
Все	10	$7.00 \pm 0.78$	$2.5 \pm 0.6$	$59.3 \pm 4.2$	$13.2 \pm 3.1$	76.2
$Z > 0$ кпк	3	$7.12 \pm 0.20$	$0.34 \pm 0.17$	$69.7 \pm 3.5$	$6.1 \pm 3.1$	75.8
$Z < 0$ кпк	7	$5.88 \pm 1.20$	$3.2 \pm 0.9$	$48.3 \pm 5.9$	$15.6 \pm 4.5$	68.0

Таблица 2: Характеристики осевой зоны избегания при полусквозном алгоритме и усреднении координат  $X_c$  осей войдов с весами, обратно пропорциональными радиусам войдов

Выборка войдов	$N$	$\overline{X_c}$ , кпк	$\sigma_{0,X_c}$ , кпк $^{\frac{1}{2}}$	$\sigma'_{X_c}$ , кпк	$\overline{\varphi_m}$ , град.	$\sigma_{\varphi_m}$ , град.	$\varphi_0$ , град.
Все	10	$6.84 \pm 0.39$	0.92	$1.2 \pm 0.3$	$57.8 \pm 4.5$	$14.3 \pm 3.4$	76.7
$Z > 0$ кпк	3	$6.97 \pm 0.21$	0.27	$0.29 \pm 0.15$	$70.4 \pm 3.6$	$6.2 \pm 3.1$	76.3
$Z < 0$ кпк	7	$6.76 \pm 0.56$	1.11	$1.4 \pm 0.4$	$51.1 \pm 5.1$	$13.4 \pm 3.9$	68.2

В слоях на малых  $|Z|$  осевая структура однозначно не выделяется, что согласуется с результатами численных экспериментов Сасаки, Исидзавы (1978), показывающими, что КИ „вычищается“ от ШС в первую очередь в периферийных областях, а вблизи центра Галактики ШС должны сохраняться в пределах формального КИ даже на временах порядка 20 млрд. лет.

Координаты осей ( $X_c$ ) выделенных осевых ЦВ были обработаны как ряд равнозначных измерений и как ряд измерений с весами  $p = 1/\rho_c$ , где  $\rho_c$  — радиус ЦВ. Выбор между этими двумя вариантами неоднозначен, так как, с одной стороны, величина  $X_c$  определяется точнее при малом радиусе войда, с другой — сама осевая зона в основном определяется войдами на больших  $|Z|$ , где и радиусы войдов больше. Была рассмотрена вся совокупность осевых войдов, а также северные и южные войды по отдельности. Результаты обработки представлены в табл. 1 и 2. Обозначения:  $N$  — количество войдов,  $\overline{X_c}$  — среднее значение  $X_c$ ;  $\sigma_{X_c}$  — стандарт отклонения  $X_c$  от  $\overline{X_c}$ ;  $\sigma_{0,X_c}$  — средняя ошибка единицы веса;  $\sigma'_{X_c}$  — взвешенный стандарт отклонения  $X_c$  от  $\overline{X_c}$ . Для принятого среднего положения оси  $\overline{X_c}$  в каждом осевом войде формальный КИ задается тем из двух войдообразующих ШС, которое имеет наибольший модуль галактоцентрической широты,  $\varphi_m \equiv \max(|\varphi_1|, |\varphi_2|)$ . В табл. 1 и 2 приведены статистики  $\overline{\varphi_m}$ ,  $\sigma_{\varphi_m}$ ,  $\varphi_0$  — соответственно среднее арифметическое, стандартный разброс и максимальное значение величин  $\varphi_m$ .

Табл. 1 и 2 показывают, что значения  $\overline{X_c}$  для всех вариантов выборок и усреднений различаются лишь в пределах ошибок. При этом  $\overline{X_c} \approx 7$  кпк во всех случаях, за исключением одного варианта (табл. 1,  $Z < 0^\circ$ ), для которого неопределенность  $\overline{X_c}$  велика. Величины  $\overline{X_c} \approx 7$  кпк близки к одному из минимумов на рис. 1а



( $R_0 = 7.16$  кпк); по-видимому, он и соответствует в первом приближении положению оси КИ, остальные минимумы на этом рисунке являются внеосевыми. Величины  $\varphi_0$  ШС также получаются сходными.

Имеется различие север–юг по величине  $\overline{\varphi_m}$ . Войдообразующих ШС с относительно малыми  $|\varphi|$  больше в южной части осевой зоны избегания; к тому же в слое  $-2.0 \leq Z < -1.1$  кпк, т.е. относительно близко к плоскости Галактики, получилось два неизолированных осевых войда, образующих протяженную по  $X$ -координате структуру (рис. 6). Это и обуславливает меньшее значение  $\overline{\varphi_m}$  для  $Z < 0$  кпк. Для северной части зоны неопределенность  $\overline{X_c}$ , как и все другие дисперсионные характеристики, получаются заметно меньшими, чем для южной (табл. 1 и 2), что отражает более регулярный характер северной полости зоны избегания (рис. 6).

В целом полученные результаты свидетельствуют в пользу существования вдоль оси Галактики (за пределами небольшой центральной области) зоны избегания для ШС, по форме близкой к двойному конусу. При этом северная и южная полости КИ проявляются независимо и со сходными параметрами ( $\overline{X_c}$ ,  $\varphi_0$ ). Последнее дает нам основание выполнить в следующем разделе совместный анализ северных и южных ЦВ, чтобы повысить обусловленность выделения осевых войдов.

#### 4.3. Выделение осевой зоны избегания в результате анализа всей совокупности войдов

Вернемся к полной совокупности ЦВ, построенных в разделе 4.1. Выделим из нее подмножества войдов, каждое из которых образует *сквозную* вертикально связную структуру. Т.е. в отличие от полусквозного алгоритма раздела 4.2 здесь критерием выделения подмножества ЦВ примем наличие промежутка (нулевой длины включительно) на оси  $X$ , на котором все прямые, пересекающие эту ось и лежащие параллельно оси  $Z$ , проходят все северные и южные  $Z$ -слои только через полости войдов данного подмножества, нигде не пересекая область  $Z$ -слоя, где нет войда. Назовем этот алгоритм *сквозным*.

В результате такого анализа мы нашли 22 различных комбинации войдов, составляющих сквозные вертикально связные структуры. Выделение ЦВ, являющихся общими для всех этих комбинаций, дает восемь осевых войдов (четыре северных и четыре южных). Схема последних представлена на рис. 7; характеристики образуемой ими осевой зоны приведены в табл. 3 и 4, обозначения в которых те же, что в табл. 1 и 2.

Новые результаты получились в целом сходными с результатами по полусквозному алгоритму. Однако зона избегания, построенная по сквозному алгоритму, — более симметрична, как относительно плоскости Галактики, так и относительно средней оси, и более упорядочена (ср. рис. 6 и 7). Это проявляется, в частности, в том, что, в отличие от результатов предыдущего раздела, число северных и южных осевых войдов получилось одинаковым, среди них нет неизолированных ЦВ, ближайšie к плоскости Галактики  $Z$ -границы однозначного выделения осевой зоны сходны по

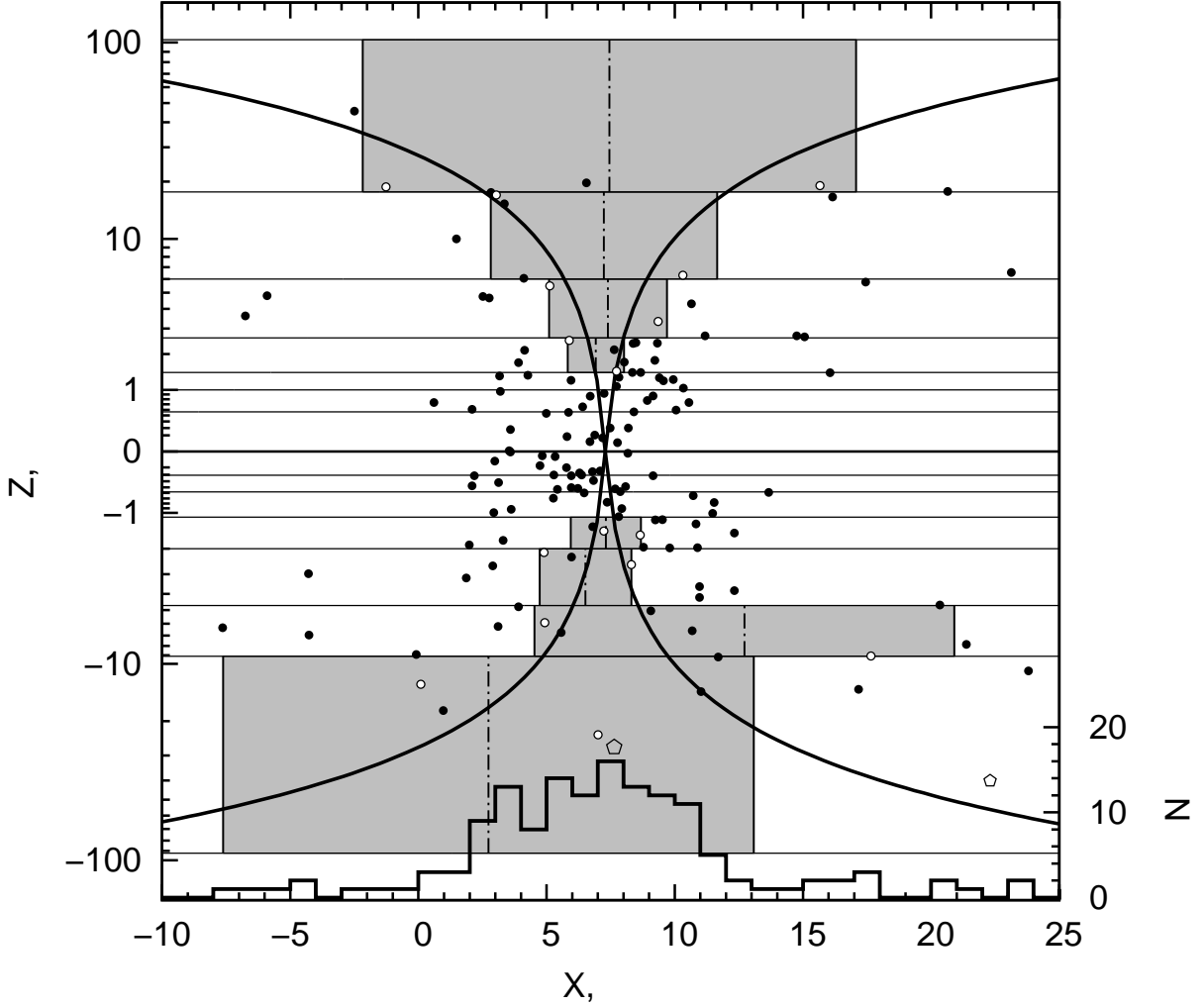


Рис. 7: Осевая зона избегания системы шаровых скоплений по результатам анализа всей совокупности войдов. Обозначения те же, что на рис. 6.

модулю для северной и южной полостей зоны —  $Z_{\text{lim}} = +1.435$  и  $-1.1$  кпк соответственно (в разделе 4.2 получались  $Z_{\text{lim}} = +2.6$  и  $-0.31$  кпк), сильно уменьшилось различие север–юг по величинам  $\overline{\varphi_m}$  и  $\sigma_{\varphi_m}$ , несколько снизилось различие формальных угловых границ  $\varphi_0$  для северного и южного конусов избегания. Кроме того, положения средней оси зоны избегания во *всех* вариантах получились очень близкими ( $7.12 \leq \overline{X_c} \leq 7.3$  кпк), разброс величин  $\overline{\varphi_m}$  в разных вариантах стал сильно меньше ( $60 \div 68^\circ$  против  $48 \div 70^\circ$  в разделе 4.2), в целом снизился и стандарт  $\sigma_{\varphi_m}$  (ср. табл. 3, 4 с табл. 1, 2).

Таким образом, сквозной алгоритм выделяет зону избегания с более регулярной и более близкой к конической структурой. При этом основные различия север–юг, отмеченные в предыдущем разделе, хотя и получаются меньшими, но полностью не исчезают. По-видимому, они отражают объективные свойства пространственного распределения ШС Галактики.

Отметим, что во всех вариантах в табл. 3, 4 оценки  $\overline{\varphi_m}$  и  $\sigma_{\varphi_m}$  значительно отличаются от соответственно математического ожидания  $M \Phi_m = \pi/4 = 45^\circ$  и стандарта

Таблица 3: Характеристики осевой зоны избегания при сквозном алгоритме ее выделения и среднеарифметическом усреднении координат  $X_c$  осей войдов

Выборка войдов	$N$ кпк	$\overline{X_c}$ , кпк	$\sigma_{X_c}$ , кпк	$\overline{\varphi_m}$ , град.	$\sigma_{\varphi_m}$ , град.	$\varphi_0$ , град.
Все	8	$7.29 \pm 0.95$	$2.7 \pm 0.7$	$63.9 \pm 2.9$	$8.1 \pm 2.2$	75.4
$Z > 0$ кпк	4	$7.25 \pm 0.12$	$0.24 \pm 0.10$	$67.0 \pm 3.3$	$6.6 \pm 2.7$	75.5
$Z < 0$ кпк	4	$7.3 \pm 2.1$	$4.1 \pm 1.7$	$61.5 \pm 4.7$	$9.3 \pm 3.8$	69.1

Таблица 4: Характеристики осевой зоны избегания при сквозном алгоритме и усреднении координат  $X_c$  осей войдов с весами, обратно пропорциональными радиусам войдов

Выборка войдов	$N$	$\overline{X_c}$ , кпк	$\sigma_{0, X_c}$ , кпк $^{\frac{1}{2}}$	$\sigma'_{X_c}$ , кпк	$\overline{\varphi_m}$ , град.	$\sigma_{\varphi_m}$ , град.	$\varphi_0$ , град.
Все	8	$7.14 \pm 0.52$	0.93	$1.4 \pm 0.4$	$64.0 \pm 3.0$	$8.5 \pm 2.3$	75.8
$Z > 0$ кпк	4	$7.12 \pm 0.13$	0.17	$0.22 \pm 0.09$	$68.0 \pm 3.0$	$6.1 \pm 2.5$	75.8
$Z < 0$ кпк	4	$7.2 \pm 1.1$	1.40	$2.0 \pm 0.8$	$60.3 \pm 4.8$	$9.6 \pm 3.9$	68.2

$(D\Phi_m)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi^2-8}}{4} \approx 19^\circ 6$  для сферически-симметричного распределения ШС без КИ (см. приложение П2). Это говорит о неслучайности выбора войдообразующих скоплений при помощи сквозного алгоритма и свидетельствует в пользу реальности выявленных по ним пустот в распределении.

Полученные результаты картирования зоны избегания в системе ШС Галактики подтверждают наличие осевого конуса избегания с углом полураствора  $\alpha_0 = \pi/2 - \varphi_0 \approx 13 \div 15^\circ$  для системы в целом. Заметим, что для всех выборок осевых войдов формальная граница КИ  $\varphi_0$  оказалась устойчивой по отношению к алгоритму выделения зоны избегания и способу обработки координат  $X_c$  осей войдов (табл. 1–4).

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАЛАКТОЦЕНТРИЧЕСКИХ ШИРОТ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ

Подтвердив существование КИ в системе ШС, вернемся к задаче использования этой структуры для определения  $R_0$  в предположении осевой симметрии системы ШС, принимая за центр Галактики точку пересечения оси КИ с линией центр–антицентр. Чтобы преодолеть недостатки метода максимизации формального КИ (см. раздел 3), будем искать  $R_0$  как параметр модельной функции распределения галактоцентрических широт  $\varphi$  ШС. При таком подходе оценка  $R_0$  будет функцией положений всех скоплений выборки, а не двух из них, как в методе максимизации конуса.

При этом в качестве априорной информации можно использовать результаты раздела 4.3, а можно обойтись без этого. Первый метод предполагает моделирование

распределения  $\varphi$  только для войдообразующих ШС, второй — для полной выборки ШС без дополнительных данных о КИ. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. Рассмотрим оба варианта.

### 5.1. Моделирование для войдообразующих шаровых скоплений осевой зоны избегания

Для объектов, находящихся в точности на поверхности КИ, минимум (нулевое значение) дисперсии модулей их галактоцентрических широт,  $\sigma_{|\varphi|}^2$ , достигается при пробном значении  $R_0$ , равном истинному. Если принять, что войдообразующие ШС, выделенные в разделе 4.3, расположены вблизи поверхности КИ, то минимизация  $\sigma_{|\varphi|}^2$  для этих ШС дает оценку  $R_0$  как параметра КИ. Тогда будем рассматривать записанные для  $N$  войдообразующих скоплений условные равенства

$$|\varphi_i(R_0)| = \overline{|\varphi|}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где  $\overline{|\varphi|}$  — среднее значение  $|\varphi|$  при заданном  $R_0$ , а функция  $\varphi(R_0)$  определяется выражениями (2) и (3), как избыточную систему уравнений и решим ее методом наименьших квадратов относительно неизвестных  $R_0$  и  $\overline{|\varphi|}$ . Здесь фактически предполагается, что величины  $|\varphi|$  для указанных скоплений распределены по нормальному закону  $\mathcal{N}(\overline{|\varphi|}, \sigma_{|\varphi|}^2)$ ,  $\overline{|\varphi|} < \varphi_0$ .

Результаты решения системы (4) для полной выборки войдообразующих ШС, а также для северных и южных подвыборок этих объектов представлены в табл. 5. Для  $\overline{|\varphi|}$  и  $\sigma_{|\varphi|}$  указаны их стандартные ошибки. В случае нелинейного параметра  $R_0$  за доверительный интервал принималась проекция двумерной доверительной области с доверительным уровнем  $1\sigma$  на ось параметра  $R_0$  (Пресс и др., 1997). Границы этого интервала находились как корни уравнения

$$\zeta^2(R_0) = \zeta_0^2 \left( 1 + \frac{1}{N_{\text{free}}} \right), \quad (5)$$

где

$$\zeta_0^2 \equiv \min \left[ \sigma_{|\varphi|}^2 \left( R_0, \overline{|\varphi|} \right) \right], \quad \zeta^2(R_0) \equiv \min_{R_0 = \text{const}} \left[ \sigma_{|\varphi|}^2 \left( R_0, \overline{|\varphi|} \right) \right], \quad (6)$$

$N_{\text{free}}$  — число степеней свободы (Никифоров, 1999, 2003; Никифоров, Казакевич, 2009). Зависимость  $\zeta^2(R_0)$  будем называть *профилем целевой функции для параметра  $R_0$* .

Решение найдено для каждой из трех выборок ШС. При этом ошибка  $R_0$  во всех случаях оказалась довольно низкой несмотря на крайне малый объем выборок. Различие оценок  $R_0$  по северной и южной выборкам не показательно из-за низкой его значимости (на уровне  $1.4\sigma$ ) и малого объема выборок. За окончательный результат в рамках данного метода принята оценка по полной выборке войдообразующих ШС:  $R_0 = 7.29_{-0.28}^{+0.29}$  кпк. На рис. 8а представлен профиль целевой функции для параметра  $R_0$  в случае полной выборки. Профиль имеет локальный минимум на  $R_0 = 9.34$  кпк, но он мелкий и находится на доверительном уровне  $3.6\sigma$  (99.97 %) по отношению к глобальному минимуму. Таким образом, доверительная область для последнего вплоть

Таблица 5: Результаты моделирования зоны избегания по войдообразующим шаровым скоплениям осевой зоны избегания

Выборка	$N$	$R_0$ , кпк	$\overline{ \varphi }$ , град.	$\sigma_{ \varphi }$ , град.	$\varphi_0$ , град.
Все	16	$7.29_{-0.28}^{+0.29}$	$57.1 \pm 2.8$	$11.4 \pm 2.1$	75.3
$b > 0^\circ$	8	$7.66_{-0.31}^{+0.37}$	$62.1 \pm 2.4$	$6.7 \pm 1.9$	74.2
$b < 0^\circ$	8	$6.88_{-0.49}^{+0.45}$	$50.7 \pm 4.4$	$12.3 \pm 3.6$	68.2

до этого уровня остается связной. Локальный минимум обусловлен южными ШС: для южной выборки он также имеется и является более глубоким, а для северной он отсутствует.

На рис. 8б для  $R_0 = 7.29$  кпк показано распределение ШС полной выборки в координатах  $(R, Z)$  в сопоставлении с угловыми модельными характеристиками. Критерий исключения объектов с избыточными невязками (Никифоров, 2012) даже в самом строгом варианте ( $L' = 1$ ) не дает оснований для отбрасывания каких-либо из этих скоплений.

Оценки угловых параметров по северной и южной выборкам заметно различаются (табл. 5). Так, разность  $\overline{|\varphi|}_N - \overline{|\varphi|}_S = 11:4 \pm 5:0$  — маргинально значима ( $2.3\sigma$ ). Действительно, распределения северных и южных ШС на рис. 8б представляются несколько различными. Однако это не обязательно означает, что параметры северной и южной полостей КИ неодинаковы, поскольку в указанные различия сильный вклад вносят те южные ШС, которые находятся у дальних по отношению к оси КИ границ войдов, тогда как КИ определяют скопления у ближних границ (рис. 7, 8б). В любом случае эти результаты не являются независимым подтверждением факта различия север–юг для области избегания, отмеченного в разделе 4, будучи полученными по той же самой выборке войдообразующих ШС. Вернемся к этому вопросу после применения второго метода, не требующего отбора скоплений и применимого к их полной выборке.

Заметим, что все величины  $\overline{|\varphi|}$  в табл. 5 существенно и значимо превышают математическое ожидание  $M\Phi = \pi/2 - 1 \approx 32:7$  для сферически-симметричного распределения ШС без КИ (см. приложение П1).

### 5.2. Модельные распределения галактоцентрических широт

Выведем дифференциальный закон распределения галактоцентрических широт  $f(\varphi)$  в предположении, что ШС расположены сферически-симметрично относительно центра Галактики, но полностью отсутствуют в КИ с углом полураствора  $\alpha_0 \equiv \pi/2 - \varphi_0$  и осью, совпадающей с осью Галактики. Тогда функция распределения ШС в галактоцентрических декартовых координатах  $x, y, z$  имеет вид

$$f_1(x, y, z) = f(R_g), \quad R_g = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(X - R_0)^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (7)$$

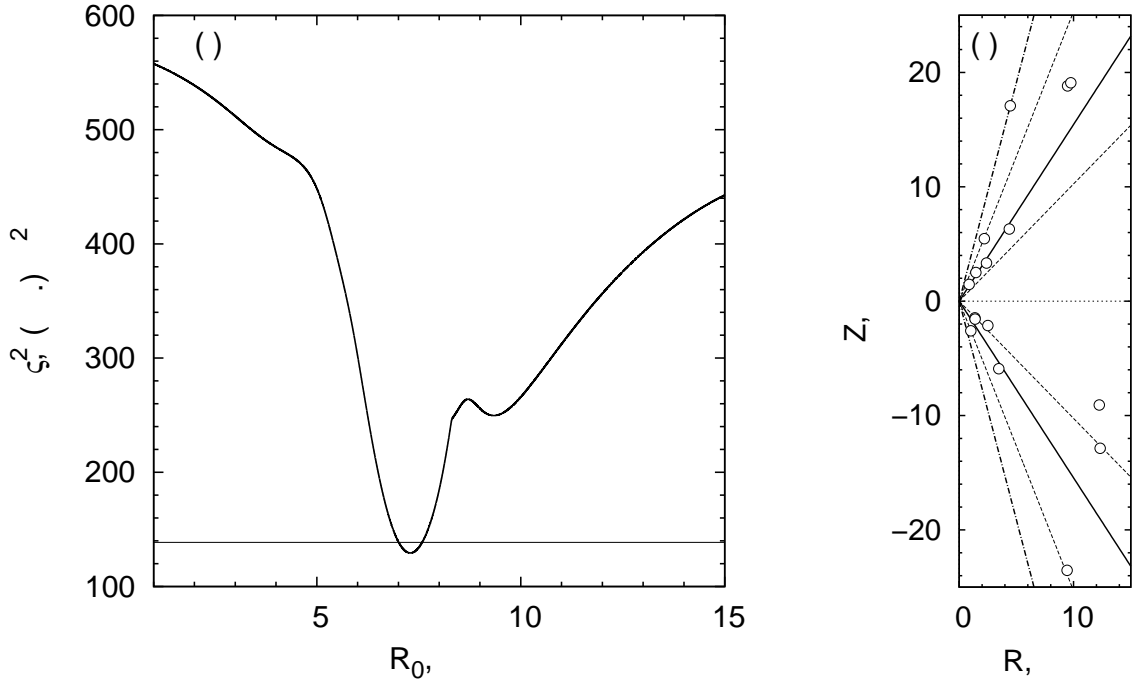


Рис. 8: Решение системы (4) для полной выборки войдообразующих шаровых скоплений. (а) — Профиль целевой функции  $\sigma_{|\varphi|}^2$  для параметра  $R_0$ . Горизонтальная линия обозначает уровень значимости  $1\sigma$ . (б) — Распределение шаровых скоплений выборки в координатах  $(R, Z)$  для  $R_0 = 7.29$  кпк. Наклонные сплошные линии соответствуют „модели“  $|\varphi| = 57^\circ.1$ , пунктирные линии — значениям  $|\varphi| \pm \sigma_{|\varphi|}$ , штрих-пунктирные — формальной границе КИ  $\varphi_0 = 75^\circ.3$ .

Здесь  $R_g$  — галактоцентрическое расстояние;  $X, Y, Z$  — гелиоцентрические декартовы координаты. Введем сферические координаты  $R_g, \varphi, \theta$ :

$$x = R_g \cos \varphi \cos \theta, \quad y = R_g \cos \varphi \sin \theta, \quad z = R_g \sin \varphi. \quad (8)$$

Тогда для функции распределения в координатах  $R_g, \varphi, \theta$  имеем

$$f_2(R_g, \varphi, \theta) dR_g d\varphi d\theta = f_1(x, y, z) dx dy dz = f_1(R_g, \varphi, \theta) J dR_g d\varphi d\theta, \quad (9)$$

где  $J = R_g^2 \cos \varphi$  — якобиан (см., например, Агекян, 1974). Отсюда получаем

$$f_2(R_g, \varphi, \theta) = f(R_g) R_g^2 \cos \varphi. \quad (10)$$

Интегрирование (10) по  $R_g$  и  $\theta$  дает выражение для  $f(\varphi)$  с точностью до нормировочной константы  $c$ :

$$f(\varphi) = 2\pi c I \cos \varphi, \quad I = \int_0^a f(R_g) R_g^2 dR_g. \quad (11)$$

Условие нормировки

$$1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi = 2\pi c I \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos \varphi d\varphi = 4\pi c I \sin \varphi_0 \quad (12)$$

определяет константу:

$$c = \frac{1}{4\pi I \sin \varphi_0}. \quad (13)$$

Используя (11) и (13), получаем искомое модельное распределение углов  $\varphi$  для сферически-симметричного распределения ШС с осевым КИ:

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{\cos \varphi}{2 \sin \varphi_0}, & |\varphi| \leq \varphi_0 \\ 0, & |\varphi| > \varphi_0. \end{cases} \quad (14)$$

Для строго сферически-симметричного распределения ШС (без КИ,  $\varphi_0 = \pi/2$ ) дифференциальный закон (14) принимает вид

$$f(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{2}. \quad (15)$$

Прямое применение простой (однокомпонентной) модели (14) приводит, однако, к ряду затруднений. Так, даже если эта модель идеальна, попадание в процессе оптимизации модели хотя бы одного ШС в „запретную зону“  $|\varphi| > \varphi_0$  при пробных значениях модельных параметров может привести к формально бесконечному значению целевой функции. С другой стороны, даже при правильных значениях параметров модели (14) и при полной адекватности последней ШС может формально оказаться в зоне  $|\varphi| > \varphi_0$  из-за случайной ошибки в гелиоцентрическом расстоянии  $r$ , что довольно вероятно для ШС с малыми  $|\varphi|$  в области  $(X, Y) \approx (R_0, 0)$ . Заметим, что этот эффект несущественен для скоплений с большими  $|\varphi|$ , по которым, собственно, и выявляется КИ (раздел 4). Кроме того, нельзя исключить, что какое-то ШС физически находится в КИ, поскольку попало туда сравнительно недавно и факторы, очищающие КИ, не успели оказать на него воздействие. Наконец, КИ может в реальности не существовать для центральных ШС. На это указывают упомянутые выше результаты численных экспериментов Сасаки, Исидзавы (1978), а также то, что по наблюдаемому распределению ШС осевую зону избегания в слоях на малых  $|Z|$  выделить не удастся (см. раздел 4).

Все эти факторы можно в первом приближении учесть, если предусмотреть в модели составляющую системы ШС, не имеющую КИ. В дальнейшем будем рассматривать двухкомпонентную модель функции распределения галактоцентрических широт

$$f_2(\varphi) = f_b(\varphi) + f_c(\varphi), \quad f_c(\varphi) = \begin{cases} \frac{C \cos \varphi}{2 \sin \varphi_0}, & |\varphi| \leq \varphi_0 \\ 0, & |\varphi| > \varphi_0, \end{cases} \quad f_b(\varphi) = \frac{(1 - C) \cos \varphi}{2}. \quad (16)$$

Здесь  $f_b$  — составляющая балджа, не имеющая КИ („b“ означает bulge);  $f_c$  — составляющая, имеющая КИ („c“ здесь означает cone);  $C$  — доля ШС, приходящаяся на последнюю составляющую ( $1 > C \geq 0$ ). Модель (16) также удобна с вычислительной точки зрения, так как при  $C < 1$  она не исключает *полностью* попадание скоплений в область  $|\varphi| > \varphi_0$ .



### 5.3. Моделирование без априорной информации о конусе избегания

Сопоставление модели (16) с данными о ШС составляет второй метод моделирования. Оптимизация вектора модельных параметров  $\mathbf{a}$  [в общем случае  $\mathbf{a} = (R_0, \varphi_0, C)$ ] позволяет получить решение без дополнительных сведений о КИ, причем для произвольной выборки ШС, сформированной без использования априорных (начальных) значений параметров КИ, в том числе и для полной выборки ШС.

Искались значения параметров, которые минимизируют статистику

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n_b} \frac{(\nu_i - Np_i)^2}{Np_i}. \quad (17)$$

Здесь  $N$  — общее число объектов в выборке;  $n_b$  — число ячеек (bins), на которые разбит промежуток  $[-\pi/2, \pi/2]$  возможных значений  $\varphi$ ;  $\nu_i$  — число объектов, попавших в  $i$ -ую ячейку;  $p_i$  — вероятность того, что объект попадет в  $i$ -ую ячейку, равная

$$p_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_i + \Delta\varphi_i} f_2(\varphi(R_0); \varphi_0, C) d\varphi, \quad i = 1, \dots, n_b, \quad (18)$$

где  $f_2(\varphi)$  — модельное распределение (16),  $\Delta\varphi_i$  — ширина  $i$ -ой ячейки. После пробных вычислений была выбрана постоянная для всех ячеек величина  $\Delta\varphi = 10^\circ$ , которая в среднем отвечает общей рекомендации  $\nu_i \geq 5$  (Свешников, 2008).

Доверительные интервалы для параметров  $R_0$  и  $\varphi_0$  находились способом, аналогичным примененному в секции 5.1. В случае статистики  $\chi^2$  границы доверительного интервала параметра  $a_j$  для доверительного уровня  $k\sigma$  даются уравнением

$$\chi_m^2(a_j) = \chi_k^2 \equiv \chi_0^2 + k^2, \quad (19)$$

где

$$\chi_0^2 \equiv \min \chi^2(\mathbf{a}), \quad \chi_m^2(a_j) \equiv \min_{a_j = \text{const}} \chi^2(\mathbf{a}) \quad (20)$$

(Пресс и др., 1997). На рис. 9 приведены профили  $\chi_m^2(R_0)$  и  $\chi_m^2(\varphi_0)$  для полной выборки ШС.

Попытки решить полную задачу оптимизации параметров модели (16) для разных подвыборок ШС показали, что  $C \rightarrow 1$ . Причем выраженный минимум целевая функция приобретает (т.е. однозначное решение существует) только при доминировании составляющей с КИ ( $C > 0.5$ ) (см. рис. 9). Эти результаты свидетельствуют в пользу существования КИ в системе ШС. Ниже принято значение  $C = 0.99$ : при дальнейшем увеличении  $C$  оценки параметров практически не меняются, но доверительный уровень, на котором доверительная область утрачивает связность, несколько понижается.

Вследствие бинирования области определения  $\varphi$  для вычисления вероятностей (18) и чисел  $\nu_i$ , а также наличия резкого усечения на  $|\varphi| = \varphi_0$  в составляющей  $f_c(\varphi)$  модели (16) целевая функция  $\chi^2(R_0, \varphi_0)$  получается негладкой. Так, профиль  $\chi_m^2(R_0)$  (рис. 9а) является, строго говоря, кусочно-постоянной функцией, хотя

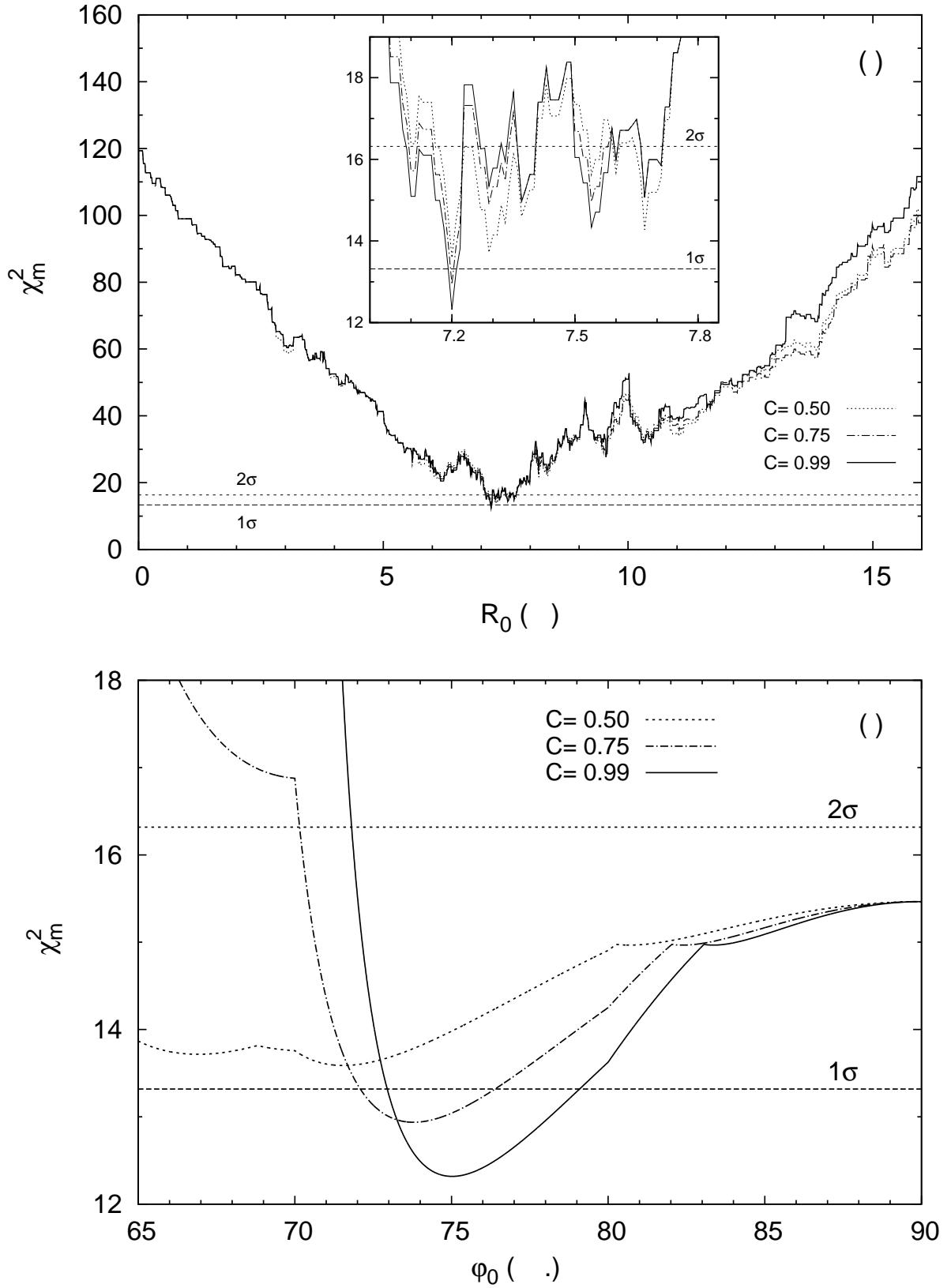


Рис. 9: Профили целевой функции  $\chi^2$  для параметров  $R_0$  (а) и  $\varphi_0$  (б) при фиксированных значениях доли составляющей системы шаровых скопления с конусом избегания  $C = 0.50, 0.75, 0.99$  для полной выборки скопления. Горизонтальные линии обозначают доверительные уровни  $1\sigma$  и  $2\sigma$  для решения при  $C = 0.99$ .

в окрестности глобального минимума участки с постоянным значением  $\chi_m^2$  довольно малы (обычно имеют длину  $\Delta R_0 \lesssim 0.01$  кпк). Кроме того, функция  $\chi_m^2(R_0)$  претерпевает мелкие, но резкие колебания. Однако решение задачи дается узким (формальные ошибки по уровню  $1\sigma - \sigma_{R_0} = 0.01 \div 0.04$  кпк) и довольно глубоким (единственным до доверительного уровня  $1.4\sigma$ ) минимумом (рис. 9а, табл. 6).

Глубина минимума на профиле  $\chi_m^2(\varphi_0)$  лимитирована разностью между значением этой функции на правой границе области определения  $\chi_m^2(\pi/2)$ , которое не зависит от  $C$ , и значением  $\chi_0^2$  в функции от  $C$  (рис. 9б). Значимость минимума получается лишь близкой к маргинальной: так, для полной выборки ШС при  $C = 0.99$  она составляет  $1.8\sigma$  (92.4%) и слабо растет при дальнейшем увеличении  $C$ . Снизу параметр  $\varphi_0$  ограничен значительно сильнее, чем сверху (рис. 9б). Заметим, что при отказе в модели от КИ или просто при сильном снижении вклада составляющей с КИ однозначность определения параметра  $R_0$  утрачивается [см. профиль  $\chi_m^2(R_0)$  при  $C = 0.5$  на рис. 9а].

Метод был применен к полной выборке ШС, к северным ( $b > 0^\circ$ ) и южным ( $b < 0^\circ$ ) ШС по отдельности, к ШС с  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$  и к выборкам с комбинациями этих ограничений. Ограничение  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$  обусловлено тем, что ШС большей металличности образуют сжатую подсистему и могут сместить результаты для сферически-симметричной модели. Результаты, полученные для этих выборок при  $C = 0.99$ , сведены в табл. 6; указаны формальные ошибки параметров для уровня  $1\sigma$ . На рис. 10 приведены распределения галактоцентрических широт для полной выборки и выборки ШС с  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$  в сравнении с построенными для них моделями (16) и с моделью без КИ (15) при оптимальных значениях параметров  $R_0$  и  $\varphi_0$  (доставляющих минимум функции  $\chi^2$ ). Рис. 10 иллюстрирует хорошее согласие наблюдаемых распределений  $\varphi$  с модельными. Применение критерия Пирсона приводит к тому же выводу: для всех рассмотренных выборок при оптимальных параметрах  $\chi_0^2 < N_{\text{free}}$ , где  $N_{\text{free}} = 16$  для выборок ШС без ограничений на  $b$ ,  $N_{\text{free}} = 7$  для выборок северных или южных ШС (см., например, Пресс и др., 1997).

Помимо формальных оценок  $R_0(\chi_0^2)$ , соответствующих глобальному минимуму  $\chi^2$ , найдены также *интервальные* оценки этого параметра, получение которых мы рассматриваем как способ сглаживания колебаний функции  $\chi_m^2(R_0)$ . Здесь мы исходим из следующих соображений. Зависимость  $\chi_m^2(R_0)$  имеет несколько локальных минимумов ниже значения  $\chi_2^2$  (уровень  $2\sigma$ ). Какой именно из них окажется самым глубоким, может быть обусловлено случайными причинами, например, ошибками в расстояниях. При этом характерной особенностью функции  $\chi_m^2(R_0)$  являются ее колебания относительно уровня  $\approx 2\sigma$  в области глобального минимума на сравнительно узком промежутке величин  $R_0$ , за пределами которого  $\chi_m^2$  резко возрастает (рис. 9а). Это дает основание при оценивании  $R_0$  опереться на доверительный интервал для уровня  $2\sigma$ . Сначала мы находили совокупность локальных минимумов  $\chi_m^2(R_0)$ , меньших  $\chi_2^2$ , для которых соответствующие им значения  $\varphi_0$  попадают в формальный  $1\sigma$ -интервал для  $\varphi_0$ , определенный по зависимости  $\chi_m^2(\varphi_0)$ . Далее определялись промежутки значений  $R_0$ , на которых кривые этих локальных минимумов не превы-

Таблица 6: Результаты моделирования распределения галактоцентрических широт шаровых скоплений (минимизация статистики  $\chi^2$  при  $C = 0.99$ )

Выборка	$N$	Оценки $R_0$ , кпк		Результаты для $\varphi_0$			$\chi_0^2$	Аргументы вторичных минимумов профилей $\chi_m^2(R_0)$ и $\chi_m^2(\varphi_0)$ на уровне $<1\sigma$
		Формальная	$2\sigma$ -интервальная	Оценка $\varphi_0$ , град.	$k$	$P_k$		
Все	157	$7.20^{+0.02}_{-0.01}$	$7.34 \pm 0.12$	$75.0^{+4.1}_{-2.1}$	$1.77^+$	92.4%	12.32	
$b > 0^\circ$	76	$7.31^{+0.04}_{-0.03}$	$7.21 \pm 0.19$	$77.9^{+7.3}_{-4.0}$	$1.13^+$	74.1%	1.87	$R_0 = 7.37$ кпк
$b < 0^\circ$	81	$7.20^{+0.02}_{-0.01}$	$7.41 \pm 0.16$	$71.9^{+3.7}_{-1.3}$	$1.48^-$ $1.92^+$	86.1% 94.5%	6.76	$\varphi_0 \leq 65^\circ \Rightarrow R_0 = 6.20, 6.47$ кпк
$[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$	113	$7.22^{+0.01}_{-0.03}$	$7.37 \pm 0.09$	$77.7^{+4.9}_{-3.3}$	$1.02^-$ $0.88^+$	69.2% 62.1%	8.66	$\varphi_0 = 85:4 \Rightarrow R_0 = 7.29$ кпк
$[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8, b > 0^\circ$	57	$7.32^{+0.10}_{-0.04}$	$6.87 \pm 0.36$	$80.0^{+10.0}_{-4.6}$	$0.95^+$	65.8%	1.75	$R_0 = 7.11, 7.38$ кпк
$[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8, b < 0^\circ$	56	$7.84^{+0.02}_{-0.04}$	$7.52 \pm 0.17$	$72.9^{+7.2}_{-1.3}$	$0.53^-$ $1.35^+$	40.4% 82.3%	4.55	$\varphi_0 \leq 65^\circ \Rightarrow R_0 = 6.14$ кпк

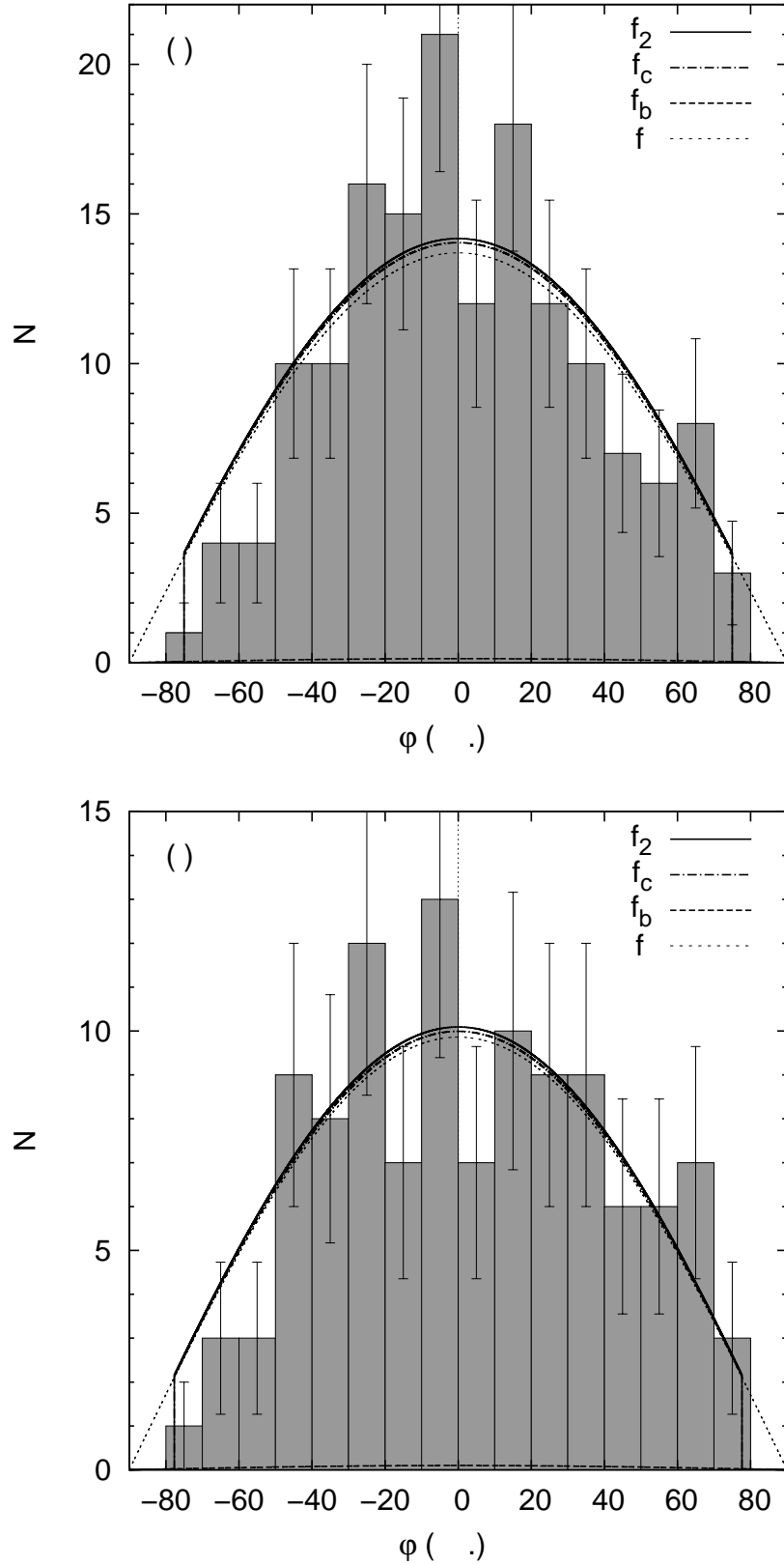


Рис. 10: Распределение шаровых скоплений по галактоцентрическим широтам в сравнении с моделью  $f_2(\varphi)$ , включающей компоненту  $f_c$  с конусом избегания и компоненту  $f_b$  без конуса, и с моделью  $f(\varphi)$  в отсутствии конуса избегания. Значения  $R_0$  и  $\varphi_0$  — минимизирующие  $\chi^2$  при  $C = 0.99$ . (а) — Полная выборка ( $N = 157$ ),  $R_0 = 7.20$  кпк,  $\varphi_0 = 75^\circ.0$ . (б) — Выборка  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$  ( $N = 113$ ),  $R_0 = 7.22$  кпк,  $\varphi_0 = 77^\circ.7$ .

шают  $\chi_2^2$ . Наибольшая и наименьшая из границ этих промежутков принимались за границы  $2\sigma$ -интервала для оценивания  $R_0$ . В качестве интервальной оценки  $R_0(2\sigma)$  бралась середина найденного так интервала, а за  $1\sigma$ -ошибку этой оценки принималась одна четвертая его длины. Интервальные оценки  $R_0$  также приведены в табл. 6.

Далее среди полученных оценок параметров были выявлены очевидно ненадежные. К их числу были отнесены оценки  $R_0$  и  $\varphi_0$  по тем выборкам, для которых функция  $\chi_m^2(\varphi_0)$  не достигает уровня  $1\sigma$  хотя бы в одну сторону от точечной оценки при  $\varphi_0 \geq 65^\circ$  (подвыборки северных и южных ШС низкой металличности). [Для профилей  $\chi_m^2(R_0)$  таких случаев не было.] Как ненадежные также рассматривались оценки  $\varphi_0$  с низкой значимостью минимума  $\chi_m^2(\varphi_0)$  (с доверительной вероятностью  $P_k < 85\%$ ). Величины  $P_k$ , соответствующие уровню  $k\sigma$ ,  $k = \sqrt{\chi_k^2 - \chi_0^2}$ , определялись по значениям функции  $\chi_m^2(\varphi_0) = \chi_k^2$  на границах рассматриваемого интервала ( $\varphi_0 = 65^\circ, 90^\circ$ ) либо в точках ее локальных максимумов справа и слева от точечной оценки. Величины  $k$  и  $P_k$  указаны в табл. 6, где индексы „+“ и „-“ при значениях  $k$  означают точки  $\chi_m^2(\varphi_0)$  правее и левее точечной оценки  $\varphi_0$  соответственно.

Остальные, более надежные, оценки параметров выделены в табл. 6 жирным шрифтом. Основываясь на них, можно сделать следующие выводы в отношении параметра  $R_0$ . Формальные и  $2\sigma$ -интервальные оценки — близки ( $|\Delta R_0| \leq 0.21$  кпк), без явного смещения одних относительно других. Формальная неопределенность оценок получилась низкой (в пределах 0.2 кпк), но как показали численные эксперименты, она занижена, особенно в случае  $R_0(\chi_0^2)$ . Оценки  $R_0$  по северным и южным ШС и по полной выборке отличаются не более, чем на 0.2 кпк. Принимая во внимание более реалистичные ошибки интервальных оценок, это различие незначимо. К тому же, знак различия север–юг в оценках  $R_0$  — разный для формальных и интервальных оценок. В любом случае нет признаков заниженности оценок  $R_0$  по южным ШС в сравнении с оценками по северным. Обратный результат, формально получившийся в секции 5.1 по малым выборкам войдообразующих скоплений, очевидно, носит случайный характер. Исключение ШС, богатых металлами, оценок  $R_0$  практически не изменяет.

Выделенные в табл. 6 оценки  $R_0$  были усреднены с весами, обратно пропорциональными квадратам длин доверительных интервалов. Поскольку эти оценки не являются независимыми, за ошибку среднего значения принят корень квадратный из среднего взвешенного значения квадратов ошибок усредняемых оценок. Под ошибкой здесь понимается положительная или отрицательная части доверительного интервала для уровня  $1\sigma$ , если они различны. Мы нашли среднее из четырех формальных оценок  $\overline{R_0(\chi_0^2)} = 7.21 \pm 0.01$  кпк и среднее из того же числа интервальных  $\overline{R_0(2\sigma)} = 7.35 \pm 0.10$  кпк. Различие значений  $\overline{R_0}$  для двух вариантов оценок незначимо.

Настоящий подход был протестирован методом Монте-Карло. Для каждой исходной модели было сгенерировано по 1000 псевдослучайных каталогов ШС, распределенных сферически симметрично с радиальным законом плотности  $f(R_g) \propto R_g^{-2.5}$  (Расторгуев и др., 1994) при отсутствии КИ ( $\varphi_0 = 90^\circ$ ) и при его наличии. Реальная область избегания, по-видимому, выходит за пределы КИ, с высокой вероятностью яв-

Таблица 7: Результаты численных экспериментов для минимизации  $\chi^2$  как метода моделирования распределения галактоцентрических широт. Исходное значение  $R_0 = 7.2$  кпк

$N$	Исходный параметр	Оценки в экспериментах		
		$R_0(\chi_0^2)$ , кпк	$R_0(2\sigma)$ , кпк	$\varphi_0$ , град.
157	$\varphi_0 = 90^\circ$	$7.20^{+0.73}_{-0.74}$	$7.19^{+0.76}_{-0.77}$	$85.7^{+4.3}_{-2.4}$
	$\varphi_0 = 75^\circ$	$7.20^{+0.55}_{-0.60}$	$7.20^{+0.63}_{-0.67}$	$74.6^{+3.4}_{-2.6}$
	$\beta_0 = 75^\circ$	$7.20^{+0.19}_{-0.24}$	$7.20^{+0.25}_{-0.31}$	$72.0^{+1.4}_{-5.9}$
113	$\varphi_0 = 90^\circ$	$7.20^{+1.03}_{-1.02}$	$7.20^{+1.06}_{-1.2}$	$85.5^{+4.5}_{-6.2}$
	$\varphi_0 = 77.7$	$7.20^{+0.73}_{-0.89}$	$7.18^{+0.89}_{-0.98}$	$76.8^{+3.2}_{-3.9}$
	$\beta_0 = 77.7$	$7.20^{+0.46}_{-0.40}$	$7.19^{+0.57}_{-0.54}$	$72.9^{+3.7}_{-4.2}$
	$\beta_0 = 76^\circ$	$7.20^{+0.38}_{-0.37}$	$7.20^{+0.49}_{-0.50}$	$72.0^{+2.9}_{-6.2}$

ляясь неосесимметричной (см. раздел 6.4), что проявляется в сильном дефиците ШС, видимых в створе КИ в проекции на плоскость  $XZ$  по сравнению с проекцией на плоскость  $YZ$  (см. рис. 11). Поэтому также был рассмотрен в качестве модели предельный случай указанного дефицита — отсутствие ШС в „желобе избегания“  $|\beta| > \beta_0$ , где  $\beta$  — галактоцентрическое угловое возвышение ШС над плоскостью Галактики в проекции на плоскость  $XZ$ . В моделях принято  $R_0 = 7.2$  кпк (средняя оценка в недавних работах по ШС, см. табл. 8), величины  $N$  и  $\varphi_0$  взяты соответственно случаям полной выборки и выборки  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$  (табл. 6). Значение  $\beta_0$  бралось равным  $\varphi_0$  или  $76^\circ$  (соответствует наибольшей величине упомянутого дефицита, см. раздел 6.4). Результаты представлены в табл. 7.

Численные эксперименты показали, что обе оценки  $R_0(\chi_0^2)$  и  $R_0(2\sigma)$  являются несмещенными. Дисперсия оценок сильно зависит от предположений об области избегания. Подтвердилось ожидание, что наличие такой области делает оценки  $R_0$  более эффективными. Неопределенность оценок  $R_0(2\sigma)$  при наличии области избегания примерно на 30% выше, чем неопределенность оценок  $R_0(\chi_0^2)$ . Формальные ошибки  $R_0(\chi_0^2)$  оказались явно не адекватными (заниженными примерно на порядок), очевидно, из-за негладкости целевой функции. Подтвердилось предположение, что формальные ошибки интервальных оценок более реалистичны, но и они занижены.

Усреднение оценок по реальным данным  $\overline{R_0(\chi_0^2)}$  и  $\overline{R_0(2\sigma)}$  с весами  $(1.3)^2$  и 1, соответственно, дает значение  $\overline{R_0} = 7.26$  кпк. Принимая во внимание, что реальная область избегания ближе к модели „желоба“ (раздел 6.4), а случай  $N = 113$  отвечает выборке  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$ , более адекватной предположению о сферической симметрии, на основании численных экспериментов мы принимаем неопределенность этой оценки  $\pm 0.5$  кпк. Окончательно получаем оценку настоящим методом  $\overline{R_0} = 7.3 \pm 0.5$  кпк.

Табл. 7 показывает, что в численных экспериментах параметр  $\varphi_0$  восстанавливается в пределах ошибок, уровень которых близок к формальным (табл. 6).

Хотя все реализованные в данной работе подходы приводят к положительной



разности  $\varphi_0$  по северным и южным ШС,  $\Delta\varphi_0 \equiv \varphi_{0,N} - \varphi_{0,S} = +(6^\circ \div 8^\circ)$  (табл. 1–6), при непосредственном моделировании распределения галактоцентрических широт эта разность не получается значимой. Самые надежные результаты (для выборок  $b > 0^\circ$  и  $b < 0^\circ$ ) дают  $\Delta\varphi_0 = +6:0 \pm 4:2$  ( $1.4\sigma$ ). (Заметим, что для северных ШС значимость минимума  $\chi_m^2(\varphi_0)$  низка только в смысле ограничения на  $\varphi_0$  сверху, но не снизу.) Таким образом, нет оснований считать, что северная и южная полости конуса избегания значимо различаются по угловому размеру. На рис. 10 можно усмотреть некоторый дефицит южных ШС на  $\varphi \lesssim -50^\circ$ , однако тест Колмогорова–Смирнова показывает, что распределения по  $\varphi$  северных и южных ШС различаются незначимо: нуль-гипотеза отвергается лишь на уровне 68% для полной выборки и 77% для выборки ШС, бедных металлами.

Оценка  $\varphi_0 = 75:0^{+4.1}_{-2.1}$  по всем ШС была принята за окончательную как имеющая наибольшую значимость  $P_k$  минимума  $\chi_m^2(\varphi_0)$ . Усреднение по той же процедуре, что и для  $R_0$ , трех оценок  $\varphi_0$  с наибольшими  $P_k$  (по всем ШС и по выборкам  $b > 0^\circ$ ,  $b < 0^\circ$ ) дает меньшее значение  $\overline{\varphi_0} = 73:6^{+4.1}_{-1.6}$  ввиду того, что оценка по южным ШС ( $\varphi_0 = 71:9^{+3.7}_{-1.3}$ ) формально точнее. Однако последнее не показательно, так как случайное смещение оценки  $\varphi_0$  в *меньшую* сторону и должно приводить к большей формальной обусловленности: из общих соображений более широкий КИ выявляется с большей достоверностью, чем более узкий, при том же объеме выборки ШС (см. также табл. 6).

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ

Подходы, рассмотренные в настоящей работе (разделы 4.2, 4.3, 5.1, 5.3), дают в целом сходные результаты. Обсудим, какие выводы они позволяют сделать и каковы дальнейшие перспективы метода.

### 6.1. Существование осевой зоны избегания

Существование такой зоны в системе ШС Галактики выявляется в ходе анализа распределения локально максимальных цилиндрических войдов (раздел 4) и подтверждается результатами моделирования распределения галактоцентрических широт (раздел 5.3). В рамках последнего подхода минимизация  $\chi^2$  требует доминирования составляющей с КИ и только при условии такого доминирования решение задачи получается однозначным. Отчетливые минимумы  $\chi_m^2(\varphi_0)$  для наиболее надежных решений также подтверждают существование КИ.

Вероятность, что при сферически-симметричном распределении ШС, т.е. при законе распределения (15), ни одно из  $N$  ШС не попадет в двойной КИ с углом полураствора  $\alpha_0$ , составляет  $P_N(0) = \cos^N \alpha_0$ , так как  $2 \int_0^{\pi/2 - \alpha_0} \frac{\cos \varphi}{2} d\varphi = \cos \alpha_0$ . Тогда  $P_{157}(0) = 0.43\%$ ,  $P_{118}(0) = 1.7\%$  (выборка без ШС с  $[\text{Fe}/\text{H}] > -0.8$ , имеющих сжатое распределение вдоль оси  $Z$ ). Однако полагаться только на статистики распределения  $\varphi$  при каком-то фиксированном  $R_0$  в этом вопросе недостаточно, так как

критерий Пирсона, примененный к такому распределению не отвергает и альтернативную модель — отсутствие КИ: вероятность получить наблюдаемые или большие отклонения от такой модели составляют 51% и 87% для распределений соответственно на верхней и нижней панелях рис. 10, хотя статистика  $\chi^2$  в отсутствии КИ все же хуже (16.23, 10.69 соответственно), чем при его наличии (12.32, 8.66). Вместе с тем, определяющее значение имеет величина  $R_0$ , которая получается в результате общей оптимизации.

Используя результаты численных экспериментов (раздел 5.3), нуль-гипотезу можно проверить, определив при отсутствии области избегания вероятность получить такой же, как по реальным данным, или более широкий КИ и при этом значение  $R_0$ , столь же близкое, как по реальным данным, или более близкое к среднему значению  $\langle R_0 \rangle_{\text{ГС}}$  по работам, основанным на анализе пространственного распределения ШС (см. табл. 8). Для  $\langle R_0 \rangle_{\text{ГС}} = 7.18$  кпк (по работам 1989–2014 гг.) эти вероятности при  $N = 113$  равны 1.1% и 2.1% для  $R_0(\chi_0^2)$  и  $R_0(2\sigma)$  соответственно, для  $\langle R_0 \rangle_{\text{ГС}} = 7.32$  кпк (по работам 1975–2014 гг.) — 1.6% и 1.0%. При  $N = 157$  эти вероятности еще меньше: <0.0%, 0.4%, 0.5% и 0.1% соответственно. Таким образом, гипотеза об отсутствии области избегания отвергается по крайней мере на уровне 98%. Заметим, что при наличии конуса или желоба избегания гипотезы о получении аналогичных результатов по случайности не отвергаются (вероятности для  $N = 113$  получаются в промежутках 5.4–16% и 18–41% соответственно).

Таким образом, случайная реализация зоны избегания маловероятна. Еще менее вероятно, что при этом ее ось по случайности окажется ортогональной плоскости Галактики (рис. 7).

Заметим, что даже случайный характер зоны избегания (который полностью исключить нельзя) не отменяет самого факта ее существования в настоящую эпоху, поскольку случайные ошибки в расстояниях до ШС на больших  $|b|$  малы ( $\sim 0^m 1 \approx 5\%$ , см. Н10) по сравнению с размерами выделенных осевых войдов, как не отменяет и факт близости положения оси этой зоны к максимуму плотности ШС (рис. 7, табл. 3, 4).

Если осевая зона избегания все же обусловлена динамически, то насколько она устойчива как структура, принимая во внимание, что некоторые ШС могут двигаться по хаотическим орбитам (например, NGC 6626, см. работу Касетти-Динеску и др., 2013)? В последние годы для многих ШС были измерены собственные движения, что сделало возможным вычисление их орбит (например, Аллен и др., 2006, 2008; Касетти-Динеску и др., 2013). Так, в указанных трех работах орбиты в меридиональной плоскости приведены в общей сложности для 25 ШС. Это дает некоторую статистику для ответа на поставленный вопрос. В ходе орбитального движения 6 ШС из этого числа пересекают область формального КИ с  $\alpha_0 = 15^\circ$ . Однако все эти ШС — относительно близкие к оси Галактики ( $R_{\text{max}} = 3 \div 8$  кпк) и входят в область КИ на небольших расстояниях от плоскости Галактики: 3 ШС (NGC 6316, NGC 6528 и NGC 6626) — на  $|Z| \lesssim 1$  кпк (Аллен и др., 2006; Касетти-Динеску и др., 2013), 2 ШС (NGC 4833 и NGC 6723) — на  $|Z| \lesssim 2$  кпк (Аллен и др., 2006, 2008) и только одно ШС (NGC

5968) — на  $|Z| \lesssim 4$  кпк (Аллен и др., 2008). Причем эти ШС проводят в КИ незначительную долю времени, пересекая его (часто по касательной) вблизи перицентров своих орбит. В любом случае внешние области КИ (по крайней мере на  $|Z| \gtrsim 4$  кпк) с этой точки зрения представляются устойчивыми структурами, лишь внутренние части КИ ( $1 \lesssim |Z| \lesssim 4$ ) кпк могут периодически „замываться“. В слое  $|Z| \lesssim 1$  кпк КИ не выявляется уверенно и в настоящую эпоху в согласии с приведенной статистикой орбит, независимо выделяющей эту границу. Эти результаты во многом объясняются тем, что стохастизацию орбит усиливают бар и спиральная структура, которые преимущественно влияют соответственно на ШС, близкие к центру Галактики, и на ШС с малой энергией вертикальных колебаний (см. указанные работы). А КИ обнаруживается в основном по далеким ШС на больших  $|Z|$ . Заметим, что стохастизация не всегда увеличивает вероятность вхождения ШС в область КИ: так, орбита NGC 5968 в осесимметричном потенциале более плотно пересекает КИ своими витками, чем при учете бара и спиралей (Аллен и др., 2008). Очевидно, что данная статистика орбит, наряду с другими аргументами (см. раздел 5.2), стимулирует методы параметрического моделирования, в которых нахождение скоплений в формальной зоне избегания не исключается полностью, а сама зона не включает центральную область Галактики.

### 6.2. Величина $R_0$

Величина  $R_0$  определялась в работе в результате моделирования распределения галактоцентрических широт ШС двумя методами, каждый из которых имеет свои достоинства, трудности и слабые места. Первый метод (МНК-оптимизация, раздел 5.1) базируется на выборке скоплений, которые в своих  $Z$ -слоях лучше всего ограничивают положение зоны избегания. Другие ШС, в том числе на малых  $|Z|$ , где осевая структура избегания однозначно не выявляется, при этом игнорируются. Это делает первый метод более рафинированным в смысле использования конуса избегания как структурной детали для определения  $R_0$  (здесь информация о пике численной плотности или центроиде скоплений не привлекается). Отсутствие в конечной выборке ШС, близких к плоскости Галактики, создает еще одно преимущество: проблемы селекции и учета поглощения света при определении фотометрических расстояний здесь не являются существенными. Однако этот метод требует предварительного выделения по специальному алгоритму множества тех ШС, которые обрисовывают осевую структуру. При этом метод наследует погрешности работы алгоритма выделения, в частности, попадание в указанное множество объектов с большими отклонениями от итогового осевого направления (рис. 7, 8б) из-за дискретности системы ШС. Кроме того, ограниченное число ШС в Галактике не позволяет выполнить более плотную разбивку на  $Z$ -слои и неизбежно приводит к малому объему выборки ШС, обрисовывающих осевую зону избегания. Последнее, в свою очередь, лимитирует статистическую точность и устойчивость результата (табл. 5).

Второй метод определения  $R_0$  ( $\chi^2$ -минимизация) использует не только КИ, но, опосредованно, и факт концентрации ШС к центру Галактики (наблюдаемое распределение широт  $\varphi$  лучше всего должно согласовываться с модельным в центре системы

даже при отсутствии КИ). Преимущество метода в том, что он не требует априорных данных о зоне избегания, кроме общего вида ее модели. Другое преимущество — применимость метода к широкому классу подвыборок ШС, включая их полную выборку, т.е. возможность использования выборок бóльшего объема. Это приводит к более статистически точным и устойчивым оценкам  $R_0$  (табл. 6) по сравнению с первым методом. Один из недостатков  $\chi^2$ -минимизации — негладкость целевой функции, но это создает лишь вычислительные трудности. Более серьезным в плане систематических ошибок может быть использование ШС вблизи плоскости Галактики. Действительно, неполнота выявления ШС в диске Галактики и в особенности наличие пылевого бара (Шультайс и др., 2014), экранирующего ШС в баре Галактики и за ним по лучу зрения (Никифоров, Смирнова, 2013), может заметно смещать в ближнюю сторону видимый центр симметрии системы ШС и, следовательно, занижать оценку  $R_0$ . Как упоминалось во Введении, это является потенциальным источником систематических ошибок, характерным для пространственных методов определения  $R_0$  по ШС.

Усечение распределения ШС за центром Галактики,  $X > R_0$ , в контрасте с распределением на  $X < R_0$  проявляется для слоя  $-0.58 \leq Z < 1.0$  кпк даже в проекции на плоскость  $XZ$  (рис. 7), причем резкость усечения возрастает с уменьшением  $|Z|$ . При заметном влиянии такой селекции на результат  $\chi^2$ -минимизации можно было бы ожидать, что  $2\sigma$ -интервальные оценки  $R_0$  будут меньше формальных, так как первые прямо не связаны с оптимальным положением КИ, а вторые определяются именно им. В действительности наоборот,  $2\sigma$ -интервальные оценки в среднем получаются даже несколько больше (на  $0.14 \pm 0.10$  кпк) формальных оценок (раздел 5.3). Исключение ШС высокой металличности ( $[\text{Fe}/\text{H}] > -0.8$ ), для которых эффект селекции должен быть сильнее, практически не меняет оценки  $R_0$  (табл. 6). Наконец, первый метод определения  $R_0$  по выборке ШС, среди которых нет объектов с  $|Z| \leq 1.4$  кпк, дает величину  $R_0 = 7.29_{-0.28}^{+0.29}$  кпк, совпадающую с результатом второго метода,  $\overline{R_0} = 7.3 \pm 0.5$  кпк. Все это говорит в пользу того, что неполнота выявления ШС не сильно влияет на результаты  $\chi^2$ -минимизации. Заметим, что в обоих методах минимум целевой функции, устанавливающий оптимальное  $R_0$ , идентифицируется однозначно в отличие от метода максимизации формального КИ (ср. рис. 1а с рис. 8а, 9а).

За оценку  $R_0$  по конусу избегания в шкале расстояний (1) мы принимаем результат второго метода,  $R_0 = 7.3 \pm 0.5$  кпк, основанного на бóльшей статистике и протестированного численно. Шкала (1) была откалибрована в Н10 [каталог Харриса (1996), версия 2010 г.] с использованием данных о ШС в М 31, т.е. в предположении некоторого расстояния до этой галактики. Это делает калибровку отчасти вторичной. Приведем результаты раздела 5.3 к среднему масштабу шкалы

$$M_V(\text{HB}) = 0.165 [\text{Fe}/\text{H}] + 0.86, \quad (21)$$

имеющую первичную калибровку, полученную в Н10 по наиболее прямым измерениям расстояний *в пределах нашей Галактики*, сравнивая шкалы (1) и (21) на средней для всех ШС металличности  $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.3$  и на средней металличности  $[\text{Fe}/\text{H}] = -1.5$  для ШС с  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$ . Тогда  $\overline{R_0}(\chi_0^2) = 7.17$  и  $\overline{R_0}(2\sigma) = 7.31$ . Усредняя эти оценки с

весаами (1.3)<sup>2</sup> и 1, в итоге получаем

$$R_0 = 7.2 \pm 0.5 \Big|_{\text{стат.}} \pm 0.3 \Big|_{\text{калиб.}} \text{ кпк.} \quad (22)$$

Здесь вторая (систематическая) ошибка отражает неопределенность  $\pm 0^m 1$  калибровки шкалы (21) (см. Н10).

Оценка (22) мала по сравнению с современными средними значениями  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}} = (7.8 \div 8.25) \pm (0.1 \div 0.5)$  кпк (см. ссылки в разделе 1), но не по сравнению с другими определениями  $R_0$  по данным о пространственном распределении ШС. В табл. 8 приведена сводка оценок этого класса, опубликованных с 1975 г., и усредненные (см. Никифоров, 2003, 2004) значения,  $\langle R_0 \rangle_{\text{GC}}$  (GC — globular clusters), для некоторых их подмножеств (принята систематическая ошибка методов  $\sigma_{\text{meth}} = 0^m 2$ ). Наш результат хорошо согласуется с величинами  $\langle R_0 \rangle_{\text{GC}}$ , полученными по предыдущим оценкам. Табл. 8 показывает, что, начиная с 1989 г., оценки  $R_0$ , будучи приведенными к единой шкале (21), получаются близкими друг к другу и все не превышают 7.6 кпк. Среднее по ним  $\langle R_0 \rangle_{\text{GC}} = 7.18 \pm 0.24$  кпк очень близко к нашей оценке (22). Усреднение этих оценок с учетом (22), т.е. по более однородной группе результатов 1989–2016 гг., приводит к текущему среднему значению пространственных оценок  $R_0$  по данным о ШС

$$\langle R_0 \rangle_{\text{GC}} = 7.19 \pm 0.22 \Big|_{\text{стат., метод.}} \pm 0.33 \Big|_{\text{калиб.}} \text{ кпк.} \quad (23)$$

Таким образом, анализ пространственного распределения ШС приводит к величинам  $R_0$ , существенно меньшим по сравнению с основной массой результатов, полученных другими методами. Причинами этого расхождения могут быть: 1) заниженность современной шкалы расстояний ШС; 2) неучет эффекта селекции и/или других систематических ошибок анализа пространственного распределения ШС; 3) нереалистичность предположения о симметрии системы ШС и/или смещение центральных пространственных особенностей этой системы относительно „центров“ Галактики, определенных иначе. Попытка объяснить расхождение *только* за счет первой причины приводит к предположению, что шкала ШС (и „родственных“ им по калибровке переменных типа RR Лир) занижена на  $(10 \div 13)\% \pm 5\%$ , т.е. на  $(0^m 20 \div 0^m 26) \pm 0^m 1$ , что представляется сейчас не очень правдоподобным (см. калибровочную зависимость в Н10 и сводку шкал в статье Фрэнсиса, Андерсона, 2014). Вторая причина более вероятна, но близость оценки  $R_0$  по КИ в данной работе с другими недавними пространственными оценками по ШС говорит не в пользу сильного влияния эффекта селекции на величину  $R_0$  в этом классе методов. Заметим, что неучтенная систематика может быть и у других методов, но вряд ли она может сильно сместить (увеличить) „наилучшее“ среднее  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}}$  ввиду разнообразия методов. Третья, гипотетическая, причина, на наш взгляд, не является невероятной. Хотя внутренняя часть Галактики представляется хорошо устоявшейся системой, где пик плотности видимого вещества можно считать близким к барицентру (центру масс), это предположение почти наверняка нарушается на масштабе десятков килопарсек из-за аккреции и взаимодействия с другими галактиками Местной группы, что проявляется, например, в искривлении внешней части диска Галактики (см., например, Блэнд-Хоторн, Герхард, 2016).

Таблица 8: Оценки  $R_0$  пространственными методами по шаровым скоплениям

Ссылка	Метод	Оценка $R_0$ , кпк		Примечание
		Авторская <sup>а</sup>	Приведен. <sup>б</sup>	
Волтьер (1975)	Шепли	$7.9 \pm 1.0$	$7.9 \pm 1.0$	$M_V(\text{RR}) = 0^m6$
де Вокулёр, Бута (1978)	Шепли	$7.0 \pm 0.7 (0.6)$	$7.6 \pm 0.7$	$M_V(\text{RR}) =$ $0.38[\text{m}/\text{H}] + 1.32$
Сасаки, Исидзава (1978)	Конус избегания	$9.2 \pm 1.3$	$8.6 \pm 1.2$	$M_V(\text{HB}) = 0^m5$
		$9.4 \pm 1.2$	$9.2 \pm 1.2$	$M_V(\text{HB}) = 0^m6$
Харрис (1980)	Шепли	$8.0 \pm 1.4$	$8.2 \pm 1.4$	$M_V(\text{HB}) = 0^m6$
	Усечение распределения	$8.5 \pm 1.5$	$9.1 \pm 1.6$	$M_V(\text{HB}) = 0^m9$ (G-скопления)
Френк, Уайт (1982)	Шепли	$6.2 \pm 0.9$	$6.2 \pm 0.9$	$M_V(\text{HB}) = 0^m6$
		$7.2 \pm 1.1$	$8.4 \pm 1.3$	$M_V(\text{HB}) = 1^m1$
Расин, Харрис (1989)	Шепли	$7.5 \pm 0.9 (0.5)$	$7.5 \pm 0.5$	$M_V(\text{HB}) =$ $0.15[\text{m}/\text{H}] + 0.84$
Масьель (1993)	Шепли	$7.5 \pm 0.4 (0.6)$	$7.3 \pm 0.6$	$M_V(\text{HB}) = 0^m6$
		$7.7 \pm 0.4 (0.8)^B$	$7.2 \pm 0.7$	
Расторгуев и др. (1994)	Простран- ственное моделирование	$7.2 \pm 0.5^\Gamma$	$7.6 \pm 0.5$	$M_V(\text{RR}) =$ $0.38[\text{m}/\text{H}] + 1.32$
		$7.0 \pm 0.5$	$6.9 \pm 0.5$	$M_V(\text{HB}) = 0^m6$
		$6.9 \pm 0.5^\Gamma$	$6.9 \pm 0.5$	
Бика и др. (2006)	Шепли	$7.2 \pm 0.3$	$7.1 \pm 0.3$	$M_V(\text{HB}) =$ $0.16[\text{Fe}/\text{H}] + 0.84$
Фрэнсис, Андерсон (2014)	Центральный желоб	$7.4 \pm 0.3 (0.2)$	$7.3 \pm 0.2$	$[\text{Fe}/\text{H}] = -1.3:$ $M_V(\text{HB}) = 0^m609$
Данная работа (2016)	Конус избегания	$7.3 \pm 0.6 (0.5)$	$7.2 \pm 0.5$	$M_V(\text{HB}) =$ $0.16[\text{Fe}/\text{H}] + 0.84$

Средние значения,  $\langle R_0 \rangle_{\text{GC}}$

1975–2014 гг.	$7.40 \pm 0.22$	$N_e = 17, N_p = 11$
1975–2014 гг., без работы Сасаки, Исидзавы (1978)	$7.32 \pm 0.22$	$N_e = 15, N_p = 10$
1989–2014 гг.	$7.18 \pm 0.24$	$N_e = 9, N_p = 6$
1975–2016 гг., без работы Сасаки, Исидзавы (1978)	$7.31 \pm 0.21$	$N_e = 16, N_p = 11$
1989–2016 гг.	$7.19 \pm 0.22$	$N_e = 10, N_p = 7$

<sup>а</sup> В скобках приведена статистическая ошибка (авторская или оценка).

<sup>б</sup> Приведение к среднему масштабу шкалы (21), указана статистическая ошибка.

<sup>в</sup> Выборка  $[\text{Fe}/\text{H}] \leq -1.2$ .

<sup>г</sup> Выборка  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.85$ .

$N_e$  — число оценок  $R_0$  (estimates),  $N_p$  — число работ (papers).

Поэтому асимметрию системы ШС нельзя полностью исключить, по крайней мере на указанном масштабе. Возможно, различие между  $\langle R_0 \rangle_{\text{best}}$  и  $\langle R_0 \rangle_{\text{GC}}$  обусловлено



комбинаций всех этих причин. Вопрос остается открытым.

Заметим, что сравнительно низкие величины  $R_0$  получались недавно не только из анализа пространственного распределения ШС, но и некоторыми другими методами, например, по звездам красного сгущения в балдже  $R_0 = 7.52 \pm 0.10|_{\text{стат.}} \pm 0.35|_{\text{систем.}}$  кпк (Нисияма и др. 2006) и  $R_0 = 7.5 \pm 0.3$  кпк (Фрэнсис, Андерсон, 2014), по кинематике областей звездообразования вблизи солнечного круга  $R_0 = 7.25 \pm 0.32$  кпк (Бобылев, 2013), по кинематике ОВ-звезд  $R_0 = 6.72 \pm 0.39$  кпк (Бранам, 2014).

### 6.3. Параметр $\varphi_0$

За окончательный результат для этого параметра мы принимаем оценку  $\varphi_0 = 75^\circ 0_{-2.1}^{+4.1}$ , выведенную в разделе 5.3. Заметим, что она очень близка к значению  $\varphi_0 = 75^\circ 3$ , полученному другим методом — по войдообразующим ШС осевой зоны избегания (полная выборка, см. раздел 5.1).

Ошибка калибровки шкалы расстояний ШС не искажает геометрию зоны избегания и, следовательно, не приводит к систематической ошибке оценки  $\varphi_0$ . Так как КИ выделяется по ШС на больших  $|Z|$ , эффект селекции для него слаб и может проявляться только в дифференциальной форме: ШС на дальней по отношению к Солнцу части поверхности КИ могут выявляться с меньшей вероятностью, чем на ближней. В принципе это могло бы привести к некоторому завышению  $\varphi_0$  и  $R_0$ . Однако дифференциальная селекция не может быть существенной, поскольку с ростом  $|b|$ , хотя дифференциальный эффект и возрастает, но сама селекция резко уменьшается. Действительно, в дальней (по отношению к КИ) части Галактики на  $|Z| \gtrsim 1$  кпк обнаружено много ШС, причем на больших расстояниях (рис. 5, 7).

### 6.4. Форма зоны избегания

Предположение о существовании КИ в системе ШС Галактики возникло благодаря тому, что в проекции на плоскость  $XZ$  был замечен дефицит скоплений в направлении на область вдоль оси Галактики (Райт, Иннанен, 1972б). На рис. 11а распределение ШС в этой проекции по данным каталога Н10 сопоставлено с контуром КИ для величин параметров  $\alpha_0 = 15^\circ 0$ ,  $R_0 = 7.3$  кпк, найденных в настоящей работе. Действительно, дефицит ШС в осевой биконической области хорошо заметен. Однако в проекции на плоскость  $YZ$ , также параллельную оси КИ, этот дефицит явным образом не проявляется (рис. 11б). Это подтверждается следующей статистикой. Для плоскости  $XZ$  число ШС в створе КИ (т.е. проецирующихся на КИ)  $N_0 = 13$ , а для плоскости  $YZ$   $N_0 = 27$ . После исключения скоплений с  $[\text{Fe}/\text{H}] > -0.8$  эти числа — 12 и 23 соответственно, что дает контраст плотности 1.9. При этом половина ШС в створе КИ на плоскости  $XZ$  находятся очень близко к формальному контуру конуса и во многом формируют видимый абрис последнего. Если исключить такие ШС, т.е. принять  $\alpha_0 = 14^\circ 0$ , то  $N_0^{XZ} = 6$  и  $N_0^{YZ} = 21$  (для плоскостей  $XZ$  и  $YZ$  соответственно), тогда контраст — 3.5. Насколько вероятно получить такие числа  $N_0$  по случайности?



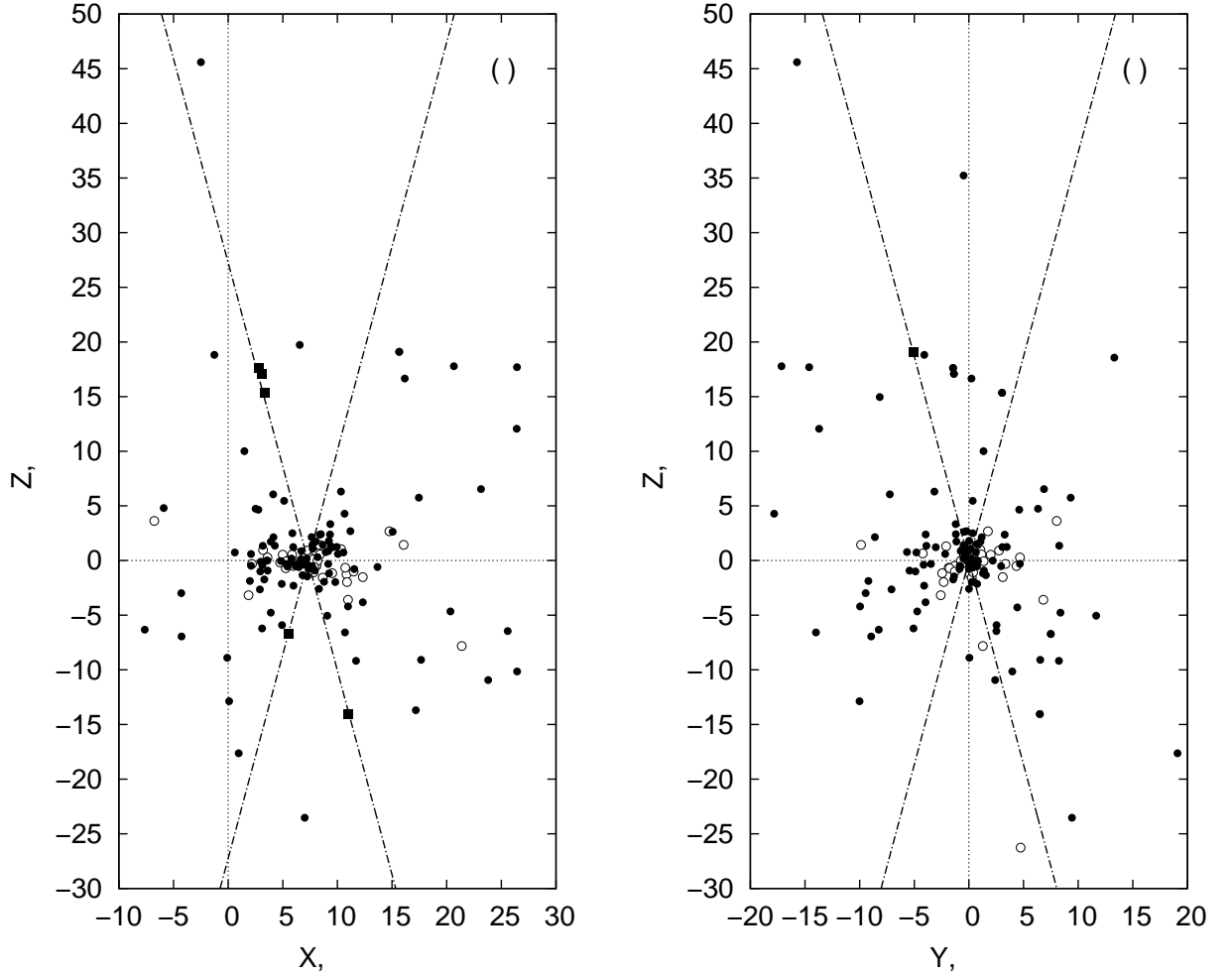


Рис. 11: Распределение шаровых скоплений и контур (штрихпунктирные линии) конуса избегания ( $\alpha_0 = 15^\circ$ ,  $R_0 = 7.3$  кпк) в проекциях на плоскости  $XZ$  (а) и  $YZ$  (б). Светлые кружки — скопления с  $[\text{Fe}/\text{H}] > -0.8$ , черные символы — остальные скопления. Квадратики обозначают скопления, которые проецируются на полость конуса избегания при  $\alpha_0 = 15^\circ$ , но находятся за пределами конуса при  $\alpha_0 = 14^\circ$ . Для каждой из двух проекций имеется по одному скоплению, которое проецируется на конус избегания с  $\alpha_0 = 15^\circ$ , но находится за пределами рисунка.

Математическое ожидание и дисперсия числа скоплений, видимых в створе осесимметричного КИ с углом полураствора  $\alpha_0$ , для распределения (14) составляют

$$M N_0 = N n_0, \quad D N_0 = N n_0 (1 - n_0), \quad n_0 = \frac{2\alpha_0}{\pi \cos \alpha_0} - \frac{1}{\cos \alpha_0} + 1,$$

где  $N$  — общий объем выборки ШС (см. приложение П3). При  $N = 118$  (выборка без ШС с  $[\text{Fe}/\text{H}] > -0.8$ ) и  $\alpha_0 = 14^\circ$  получаем  $M N_0 = 15.3 \pm 3.7$ . Превышение числа  $N_0^{YZ} = 21$  над  $M N_0$  можно объяснить случайностью: вероятность  $P(N_0 \geq 21) = 8.1\%$  (в соответствии с биномиальным распределением) — не мала. Однако заниженность  $N_0^{XZ} = 6$  по отношению к  $M N_0$  более значима:  $P(N_0 \leq 6) = 4.1 \times 10^{-3}$ , т.е. гипотеза об осесимметричном КИ при проектировании на плоскость  $XZ$  отвергается с вероятностью 99.59%. Вероятность при таком КИ получить по случайности такое же или

большее различие для двух проекций приближенно равна  $P(N_0^{XZ} \leq 6) \cdot P(N_0^{YZ} \geq 21) = 3.3 \times 10^{-4}$ .

Эти результаты говорят в пользу того, что осевая зона избегания в системе ШС Галактики не является строго осесимметричной, а вытянута в направлении, примерно ортогональном оси  $X$ , т.е. линии центр–антицентр Галактики. Этой комбинации обстоятельств мы, по-видимому, и обязаны самым фактом обнаружения зоны избегания. Во-первых, если бы последняя в современную эпоху не оказалась бы (случайно) ориентированной параллельно одной из плоскостей общепринятой галактической декартовой системы координат, то, вероятно, была бы замечена гораздо позднее (рис. 116 иллюстрирует, как трудно заподозрить ее наличие при „неудачной“ проекции). Во-вторых, если бы зона избегания была бы в точности осесимметричной (конической), то наблюдаемый контраст  $\tilde{C}_0$  поверхностной плотности ШС, видимых в створе КИ, по отношению к остальной части системы ШС был бы слишком слабым и не отличался бы значимо от единицы даже в проекции на плоскость, параллельную оси КИ:  $M\tilde{C}_0 = 0.80$ ,  $\sigma(\tilde{C}_0) = 0.21$  и  $M\tilde{C}_0 = 0.82$ ,  $\sigma(\tilde{C}_0) = 0.22$  для  $\alpha_0 = 15^\circ 0$  и  $14^\circ 0$  соответственно; здесь указаны математические ожидания и стандартные ошибки оценки  $\tilde{C}_0$  при  $N = 118$  [см. приложение ПЗ, формулы (48), (47)]. При проецировании же на плоскость, наклонную к оси КИ, контраст будет еще слабее, так как центральная, более плотная, область системы ШС займет большую долю площади створа КИ. Таким образом, КИ не был бы заметным в проекции ни на какую плоскость и мог быть обнаружен только при трехмерном анализе. В реальности, благодаря вытянутости зоны избегания, наблюдаемый контраст для плоскости  $XZ$  гораздо более сильный и значимо отличный от единичного —  $\tilde{C}_0 = 0.57 \pm 0.17$  при  $\alpha_0 = 15^\circ 0$  и  $\tilde{C}_0 = 0.29 \pm 0.12$  при  $\alpha_0 = 14^\circ 0$ , — поэтому он и был замечен [здесь использованы формулы (44), (46) приложения ПЗ]. Отметим, что последняя величина  $\tilde{C}_0$  значимо отличается и от  $M\tilde{C}_0 = 0.82$ . Для плоскости  $YZ$  контраст даже обратный —  $\tilde{C}_0 = 1.21 \pm 0.29$  и  $1.18 \pm 0.28$  при  $\alpha_0 = 15^\circ 0$  и  $14^\circ 0$  соответственно, — но он незначимо отличается от единицы.

Обсуждаемая тема тесно связана с вопросом о возможности обнаружения аналогичных областей избегания в системах ШС других галактик, поскольку в этом случае доступен лишь анализ распределения скоплений на картинной плоскости. Будем считать, что область избегания выявляется значимо, если

$$\frac{\sigma(\tilde{C}_0)}{1 - \tilde{C}_0} < \frac{1}{3}. \quad (24)$$

Предположим, что галактика наблюдается с оптимального ракурса, т.е. с ребра. Тогда в случае осесимметричного двойного конуса избегания, подставляя в (24) выражение (47) и, для простоты оценки, формулу (43) для асимптотического значения  $C_0$  наблюдаемого контраста  $\tilde{C}_0$ , получаем ограничение на численность ШС

$$N > N_{3\sigma} = \frac{9 \cos^2 \alpha_0}{(1 - \cos \alpha_0)^2} \cdot \frac{2\alpha_0 + \pi \cos \alpha_0 - \pi}{\pi - 2\alpha_0}. \quad (25)$$

При  $\alpha_0 = 15^\circ 0$  ( $C_0 = 0.7956$ ) минимальная численность ШС  $N_{3\sigma} = 1.15 \times 10^3$ , при  $\alpha_0 = 14^\circ 0$  ( $C_0 = 0.8090$ )  $N_{3\sigma} = 1.43 \times 10^3$ . Таким образом, КИ при условии, что

его ось лежит в картинной плоскости, может быть достоверно обнаружен только в богатых системах ШС, которые редки среди спиральных галактик, в любом случае родительская галактика должна быть массивной — с абсолютной величиной  $M_V \lesssim -21^m$  (см., например, рис. 5.5, 5.6 в книге Эшмена, Цепфа, 2008).

Если зона избегания не осесимметрична (вытянута), то для ее обнаружения не требуется большое  $N$ . Подставляя в (24) выражения (43), (46), выводим ограничение

$$N > N_{3\sigma} = \frac{9n_0}{1 - n_0} \left( \frac{\pi - 2\alpha_0}{2\alpha_0 - \pi n_0} \right)^2. \quad (26)$$

Принимая наблюдаемые контрасты  $C_0 = 0.57$  ( $n_0 = 0.102$ ,  $\alpha_0 = 15^\circ$ ) и  $C_0 = 0.29$  ( $n_0 = 0.0508$ ,  $\alpha_0 = 14^\circ$ ) находим  $N_{3\sigma} = 168$  и 31 соответственно. Т.е. такие зоны избегания в принципе могут быть обнаружены и в системах ШС умеренной населенности, но для этого дополнительно требуется, чтобы луч зрения лежал почти в плоскости, вдоль которой вытянута зона, что резко снижает вероятность обнаружения. Последняя также зависит от причин, вызывающих вытянутость.

Неосесимметричность зоны избегания в системе ШС Галактики может быть обусловлена влиянием Магеллановых Облаков (МО). Это предположение согласуется с некоторыми недавними результатами. Так, имеются данные в пользу связи части ШС гало с Магеллановой плоскостью, или „Обширной Полярной структурой“ (Vast Polar Structure, см., например, Павловски и др., 2014). Янкевич (2014) показала, что ШС Галактики могут даже изменять направление своего вращения на противоположное (ретроградное) под действием гравитационного возмущения со стороны МО. В пользу нашего предположения говорит также то, что в проекции на плоскость  $XZ$  БМО находится в створе зоны избегания, а ММО близко к ее контуру (рис. 6, 7). Возможно, прохождение МО через южную часть гало Галактики в настоящую эпоху объясняет и менее регулярный вид южной полости зоны избегания (см. те же рисунки).

Нельзя исключить, что „центральный желоб“ (central trough) в распределении ШС, ортогональный оси  $X$ , который выделен Фрэнсисом, Андерсоном (2014, далее FA14), есть проявление вытянутой зоны избегания. Однако статус этого результата FA14 не вполне ясен. „Желоб“ был идентифицирован не в ходе пространственного анализа, а как один из провалов в распределении ШС по координате  $X$ , подвергшемся гауссову сглаживанию (Gaussian smoothing). Отчетливым и „центральным“ этот провал выглядит только при использовании авторского каталога расстояний до ШС, но не для каталогов Н10 и Бика и др. (2006): для Н10 провал мелкий и двойной — на  $X_0 \approx -0.2$  и  $-1.0$  кпк ( $X_0 \equiv X - 7.4$  кпк); для каталога Бика и др. (2006) провал выражен лучше, но находится на  $X_0 \approx -0.7$  кпк и тогда  $R_0 = 6.7$  кпк (ср. рис. 3 и 4 в FA14). Шкала расстояний, принятая в FA14, отличается от шкал двух других каталогов в основном тем, что, будучи квадратичной по отношению к металличности, приписывает меньшие расстояния богатым металлами ШС (см. рис. 1 в FA14), находящимся преимущественно в центральной области Галактики. Это сдвигает такие ШС ближе к Солнцу, что в комбинации с невыявленностью ШС в дальней части бара и за баром (Никифоров, Смирнова, 2013) и может привести к „эффекту желоба“. В FA14 прямо не указано, в какой степени „желоб“ обусловлен именно близкими к

центру ШС (ограничения на галактоцентрическое расстояние накладывалось только сверху, самое сильное — 10 кпк), но в пользу нашего предположения говорит то, что для выборки бедных металлами ШС каталога FA14 центральный провал выражен плохо и почти сливается с соседней впадиной на  $X_0 \approx -0.8$  кпк (рис. 3 в FA14). Зона избегания, рассмотренная в настоящей работе, выявляется, напротив, по ШС вне балджа Галактики ( $|Z| > 1$  кпк). К сожалению, в FA14 не рассматривается вопрос о статистической значимости „центрального провала“ как структурной детали для построенных авторами распределений ШС по  $X$ .

### 6.5. Перспективы метода

В дальнейшем было бы желательно использовать процедуры моделирования, не требующие обязательных ограничений на выборку ШС. К таким процедурам относится  $\chi^2$ -минимизация, но для нее целевая функция получается негладкой. Преодолеть этот недостаток можно, перейдя к методу наибольшего правдоподобия (МНП). Попытки его применения для модели (16) (Никифоров, Агладзе, 2013) подтверждают существование области избегания:  $\varphi_0 = 77.4^{+2.5}_{-1.7}$  для полной выборки ШС и  $\varphi_0 = 76.8^{+3.3}_{-1.0}$  для выборки  $[\text{Fe}/\text{H}] < -0.8$ . Однако при этом оценки  $R_0$  оказались в целом смещенными (6.01–7.02 кпк) из-за наличия высокого горба в профиле логарифмической функции правдоподобия  $\mathcal{L}_m(R_0) \equiv -\ln L_m(R_0)$  на несколько бóльших значениях  $R_0$  (т.е. в области наибольшей плотности ШС). При этом профиль  $\mathcal{L}_m(R_0)$  левее точечной оценки не достигает даже уровня  $2\sigma$  [в отличие от профиля  $\chi_m^2(R_0)$ ]. Исследования показали, что причиной первого эффекта является высокая чувствительность функции правдоподобия к нахождению центральных ШС (с малыми  $|Z|$ ) на  $|\varphi|$ , очень близких к  $90^\circ$ . В этом случае при соответствующих  $R_0$  вероятности найти такие скопления согласно модели (16) малы при любых значениях других параметров. Это и дает всплески  $\mathcal{L}_m(R_0)$ . При использовании  $\chi^2$ -минимизации подобного не происходит из-за сглаживания: при  $\varphi_0$  немного больше  $80^\circ$  слагаемые  $\frac{(\nu_i - N p_i)^2}{N p_i}$  для таких ШС не оказываются слишком большими. Второй эффект вызван систематическим падением  $\mathcal{L}_m(R_0)$  при удалении  $R_0$  от истинного значения из-за появления все большего числа ШС на малых  $|\varphi|$ , для которых вероятность появления согласно (16) максимальна. Статистика  $\chi^2$  тестирует форму наблюдаемого распределения  $|\varphi|$ , которое сильно деформируется при удалении значения  $R_0$  от истинного и плохо соответствует модели (16) при любых значениях других параметров; поэтому  $\chi_m^2(R_0)$  не спадает к краям рассмотренного промежутка  $R_0$  (рис. 9а). Таким образом,  $\chi^2$ -минимизация оказалась более эффективным эстиматором при модели (16). На этих основаниях мы не используем в настоящей работе результаты, полученные МНП.

Однако введение более адекватной модели для составляющей балджа системы ШС может сделать МНП работоспособным. Это было бы крайне желательно для решения настоящей задачи в более общем виде.

К негладкости любой целевой функции приводят резкие усечения распределения (16) на  $\varphi = |\varphi_0|$ . Проблему позволило бы решить введение размытых границ

усечения, что может оказаться и более физичным.

Использование гладкой целевой функции позволит решать более сложные задачи (в более общих предположениях), включая моделирование зоны избегания при отказе от предположения об осесимметричности. Заметим, что учет вытянутости зоны избегания не сместит область пересечения с осью  $X$  проекции зоны на плоскость  $XY$ , т.е. не повлияет существенно на оценку  $R_0$ .

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ранее в литературе рассматривалась возможность наличия двойного конуса избегания (КИ) в системе шаровых скоплений (ШС) Галактики, ориентированного вдоль галактической оси вращения. Дальнейшего развития это направление не получило, однако единственное использование этой структурной особенности для определения расстояния до центра Галактики ( $R_0$ ) в работе Сасаки, Исидзавы (1978) продолжало учитываться в контексте проблемы  $R_0$ . Основной целью настоящей работы является проверка факта существования осевой зоны избегания в системе ШС и проведение ее параметризации, включающей новое определение  $R_0$  как ее параметра по современным данным [каталог Харриса (1996) версии 2010 г.].

Мы показали, что применение метода максимизации формального КИ в работе Сасаки, Исидзавы (1978) приводит в общем случае к неверному результату из-за внеосевых конусов избегания, обусловленных дискретностью системы ШС. Наличие нескольких примерно равновеликих формальных КИ, выявляемых методом максимизации, не позволяет уверенно судить о существовании *осевой* зоны избегания.

Для проверки реальности указанной зоны мы получили представление пустот в системе ШС совокупностью меридиональных цилиндрических войдов наибольшего радиуса. В результате отдельного и совместного анализа северных и южных войдов удалось выделить упорядоченную осевую зону избегания, построены карты ее разреза меридиональной плоскостью. Полученные результаты свидетельствуют в пользу существования вдоль оси Галактики (за пределами небольшой центральной области) зоны избегания для ШС, по форме близкой к двойному конусу. При этом северная и южная полости КИ проявляются независимо и со сходными параметрами. Положение вершины КИ близко к положению максимума численной плотности ШС.

Моделирование распределения галактоцентрических широт ШС позволяет однозначно идентифицировать оптимальное положение осевого КИ и приводит к следующим оценкам параметров:  $\varphi_0 = 75^\circ 0_{-2.1}^{+4.1}$ , т.е. угол полураствора КИ  $\alpha_0 = 15^\circ 0_{-4.1}^{+2.1}$ ,  $R_0 = 7.3 \pm 0.5$  кпк. Южная полость КИ может быть шире ( $\alpha_0 \approx 18^\circ$ ), чем северная ( $\alpha_0 \approx 12^\circ$ ), но значимой эта разница не является. Сравнение результатов моделирования для различных методик и выборок ШС показывает, что неполнота выявления ШС на полученную оценку  $R_0$  влияет незначительно. Коррекция к калибровке Н10 шкалы расстояний ШС по объектам Галактики приводит к оценке  $R_0 = 7.2 \pm 0.5 \Big|_{\text{стат.}} \pm 0.3 \Big|_{\text{калиб.}}$  кпк, которая в среднем меньше современных оценок  $R_0$ ,

но хорошо согласуется с величинами  $R_0$ , выведенными из анализа пространственного распределения ШС ( $\langle R_0 \rangle_{\text{ГС}} = 7.19 \pm 0.21 \Big|_{\text{стат., метод.}} \pm 0.33 \Big|_{\text{калиб. кпк}}$ ).

Как свидетельствуют карты зоны избегания, ее южная полость имеет менее регулярный вид по сравнению с северной, что может быть обусловлено влиянием Магеллановых Облаков. Сравнение распределений ШС на двух меридиональных плоскостях выявило признаки вытянутости зоны избегания в направлении, ортогональном оси центр–антицентр. Эта неосесимметричность, возможно, вызвана той же причиной.

Численные эксперименты показали, что при отсутствии области избегания вероятность получить такой же, как по реальным данным, или более широкий КИ и при этом оценки  $R_0$  столь же или более близкие к средним  $\langle R_0 \rangle_{\text{ГС}}$  не превышают 2%.

Во внешних галактиках даже при наблюдении их с ребра осесимметричный КИ можно обнаружить только для богатых систем ШС ( $N_{\text{ГС}} > 10^3$ ). Неосесимметричные зоны избегания в принципе могут быть выявлены и в системах ШС умеренной населенности, но лишь при (удачной) ориентации вытянутости зоны вдоль луча зрения.

Авторы благодарны В.А. Марсакову и другим (анонимным) рецензентам за полезные замечания. Также авторы выражают благодарность К.Э. Прохорову и М.С. Давыденковой за обработку ранних версий каталогов данных и А.В. Веселовой за выполнение вспомогательных расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (грант 6.37.341.2015).



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аведисова В.С., Астрон. журн. **82**, 488 (2005) [V.S. Avedisova, Astron. Rep. **49**, 435 (2005)].
2. Агемян Т.А., *Теория вероятностей для астрономов и физиков* (М.: Наука, 1974).
3. Аллен и др. (C. Allen, E. Moreno, and B. Pichardo), *Astrophys. J.* **652**, 1150 (2006).
4. Аллен и др. (C. Allen, E. Moreno, and B. Pichardo), *Astrophys. J.* **674**, 237 (2008).
5. Бика и др. (E. Bica, C. Bonatto, B. Barbuy, and S. Ortolani), *Astron. Astrophys.* **450**, 105 (2006).
6. Блэнд-Хоторн, Герхард (J. Bland-Hawthorn and O. Gerhard), *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **54** (2016), in press; arXiv:1602.07702.
7. Бобылев В.В., Письма в Астрон. журн. **39**, 115 (2013) [V.V. Bobylev, *Astron. Lett.* **39**, 95 (2013)].
8. Боркова, Марсаков, Астрон. журн. **77**, 750 (2000) [T.V. Borkova, V.A. Marsakov, *Astron. Rep.* **44**, 665 (2000)].
9. Бранам (R.L. Branham Jr.), *Astrophys. Space Sci.* **353**, 179 (2014).
10. Волтьер (L. Woltjer), *Astron. Astrophys.* **42**, 109 (1975).
11. Генцель и др. (R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen), *Rev. Modern Phys.* **82**, 3121 (2010).
12. де Вокулёр (G. de Vaucouleurs), *Astrophys. J.* **268**, 451 (1983).
13. де Вокулёр, Бута (G. de Vaucouleurs and R. Buta), *Astron. J.* **83**, 1383 (1978).
14. Касетти-Динеску и др. (D.I. Casetti-Dinescu, T.M. Girard, L. Jilková, W.F. van Altena, F. Podestá, and C.E. López), *Astron. J.* **146**, 33 (2013).
15. Керр, Линден-Белл (F.J. Kerr and D. Lynden-Bell), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **221**, 1023 (1986).
16. Краан-Кортевег, Лахав (R.C. Kraan-Korteweg and O. Lahav), *Astron. Astrophys. Rev.* **10**, 211 (2000).
17. Локтин А.В., Марсаков В.А., *Лекции по звездной астрономии* (Ростов-на-Дону: Южный фед. ун-т, 2009); <http://www.astronet.ru/db/msg/1245721/index.html>.
18. Масьель (W.J. Maciel), *Astrophys. Space Sci.* **206**, 285 (1993).
19. Никифоров И.И., *Астрофизика.* **42**, 399 (1999) [I.I. Nikiforov, *Astrophysics.* **42**, 300 (1999)].
20. Никифоров И.И. *Пространственно-кинематическое и динамическое моделирование Галактики. Дис. ... кандидата физ.-мат. наук* (СПб.: СПбГУ, 2003); <http://www.astro.spbu.ru/?q=nii>.
21. Никифоров (I.I. Nikiforov), *ASP Conf. Ser.* **316**, 199 (2004).
22. Никифоров (I.I. Nikiforov), *Astron. Astrophys. Trans.* **27**, 537 (2012).

23. Никифоров И.И., Агладзе Е.В. Изв. ГАО. **220**, 429 (2013).
24. Никифоров И.И., Казакевич Е.Э. Изв. ГАО. **219**, 4, 245 (2009).
25. Никифоров, Смирнова (I.I. Nikiforov and O.V. Smirnova), *Astron. Nachr.* **334**, 749 (2013).
26. Нисияма и др. (S. Nishiyama, T. Nagata, Sh. Sato, D. Kato, T. Nagayama, N. Kusakabe, N. Matsunaga, T. Naoi et al.), *Astrophys. J.* **647**, 1093 (2006).
27. Оорт (J.H. Oort), *Galactic Structure (Stars and Stellar Systems, V. 5)* (Ed. A. Blaauw, M. Schmidt, Chicago–London: University of Chicago Press, 1965), p. 455.
28. Павловски и др. (M. Pawlowski, B. Famaey, H. Jerjen, D. Merritt, P. Kroupa, J. Dabringhausen, F. Lüghausen, D.A. Forbes et al.), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **442**, 2362 (2014).
29. Пресс и др. (W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling), *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Second Edition.* (Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1997).
30. Райт, Иннанен (A.E. Wright and K.A. Innanen), *Astron. Astrophys.* **21**, 151 (1972a).
31. Райт, Иннанен (A.E. Wright and K.A. Innanen), *BAAS.* **4**, 267 (1972b).
32. Расин, Харрис (R. Racine and W.E. Harris), *Astron. J.* **98**, 1609 (1989).
33. Расторгуев А.С., Павловская Е.Д., Дурлевич О.В., Филиппова А.А., Письма в Астрон. журн. **20**, 688 (1994) [A.S. Rastorguev, E.D. Pavlovskaya, O.V. Durlevich, A.A. Filippova, *Astron. Lett.* **20**, 591 (1994)].
34. Рид (M.J. Reid), *The Center of the Galaxy, IAU Symp. 136* (Ed. M. Morris, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989), p. 37.
35. Рид (M.J. Reid), *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 345 (1993).
36. Сасаки, Исидзава (T. Sasaki and T. Ishizawa), *Astron. Astrophys.* **69**, 381 (1978).
37. Свешников А.А. (ред.), *Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций* (СПб.: Лань, 2008), с. 295.
38. Сурдин (V.G. Surdin), *Astron. Astrophys. Trans.* **18**, 367 (1999).
39. Фостер, Купер (T. Foster and B. Cooper), *ASP Conf. Ser.* **438**, 16 (2010).
40. Френк, Уайт (C.S. Frenk and S.D.M. White), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **198**, 173 (1982).
41. Фрэнсис, Андерсон (C. Francis and E. Anderson), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **441**, 1105 (2014).
42. Харрис (W.E. Harris), *Star Clusters, IAU Symp. 85* (Ed. J.E. Hesser, Dordrecht: Reidel D., 1980), p. 81.
43. Харрис (W.E. Harris), *Astron. J.* **112**, 1487 (1996); 2010 edition [arXiv:1012.3224].
44. Харрис (W.E. Harris), *Saas-Fee Advanced Courses* (Ed. L. Labhardt, B. Binggeli, Berlin: Springer-Verlag, 2001), **28**, p. 223.



45. Шепли (H. Shapley), *Astrophys. J.* **48**, 154 (1918).
46. Шультайс и др. (M. Schultheis, B.Q. Chen, B.W. Jiang, O.A. Gonzalez, R. Enokiya, Y. Fukui, K. Torii, M. Rejkuba et al.), *Astron. Astrophys.* **566**, A120 (2014).
47. Эшмен, Цепф (K.M. Ashman and S.E. Zepf), *Globular Cluster Systems* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008).
48. Янкелевич (V. Yankelevich), *Astron. Astrophys. Trans.* **28**, 347 (2014).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### П1. Распределение модуля галактоцентрической широты

Очевидно, что плотность вероятности случайной величины  $\Phi$ , модуля галактоцентрической широты  $\varphi$ , для сферически-симметричного распределения ШС без КИ отличается от закона (15) только нормировкой:

$$f(|\varphi|) = \cos \varphi. \quad (27)$$

Тогда математическое ожидание  $\Phi$

$$M \Phi = \int_0^{\pi/2} \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.5708 \approx 32^\circ 70. \quad (28)$$

### П2. Распределение наибольшего из двух модулей галактоцентрических широт

Рассмотрим случайную величину  $\Phi_m = \max(\Phi_1, \Phi_2)$ , где  $\Phi_1, \Phi_2$  — аргументы пары членов (модули широт пары шаровых скоплений), извлеченных случайным образом из генеральной совокупности с аргументом  $\Phi$ , подчиняющимся закону (27). Найдем плотность вероятности  $f(\varphi_m)$  случайной величины  $\Phi_m$ . (Величины  $\varphi_m$ , определяемые для осевых войдов в разделах 4.2 и 4.3 можно рассматривать как значения случайной величины  $\Phi_m$  в случае отсутствия КИ.)

Поскольку порядок в паре членов не важен, назначим индексы в каждой паре  $\phi_1, \phi_2$  значений случайных величин  $\Phi_1, \Phi_2$ , например, по правилу  $\phi_1 \geq \phi_2$ . Тогда  $\varphi_m = \phi_1$ . В силу (27) вероятность, что величина  $\Phi_m$  попадет в промежуток  $[\varphi_m, \varphi_m + d\varphi_m]$ , определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} P(\varphi_m \leq \Phi_m < \varphi_m + d\varphi_m) &= P(\phi_1 \leq \Phi_m < \phi_1 + d\phi_1) = \\ &= P(\phi_1 \leq \Phi_1 < \phi_1 + d\phi_1) \cdot P(\Phi_2 \leq \phi_1) = \\ &= c'_1 \cos \phi_1 \int_0^{\phi_1} \cos \phi d\phi = c_1 \sin 2\phi_1 = c_1 \sin 2\varphi_m, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $c'_1, c_1$  — варианты нормировочных постоянных. Выбор другого правила ( $\phi_2 \geq \phi_1$ ) и перестановка индексов 1 и 2 в (29) не меняет результат. Учитывая нормировку

$$1 = c_1 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi_m d\varphi_m = c_1,$$

окончательно получаем

$$f(\varphi_m) = \sin 2\varphi_m. \quad (30)$$

Тогда математическое ожидание  $\Phi_m$

$$M \Phi_m = \int_0^{\pi/2} \varphi_m \sin 2\varphi_m d\varphi_m = \frac{\pi}{4}, \quad (31)$$

дисперсия  $\Phi_m$

$$D \Phi_m = \int_0^{\pi/2} \left( \varphi_m - \frac{\pi}{4} \right)^2 \sin 2\varphi_m d\varphi_m = \frac{\pi^2 - 8}{16} \quad (32)$$

и стандарт

$$(D \Phi_m)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{4} \approx 0.3418 \approx 19^\circ 59'. \quad (33)$$

*П3. Контраст поверхностной плотности между шаровыми скоплениями в створе конуса избегания и вне его при наблюдении в проекции на плоскость, параллельную оси конуса*

В сферически-симметричной системе ШС с двойным осевым КИ, т.е. с распределением галактоцентрических широт (14), число ШС, видимых в проекции на КИ,  $N_0$ , не зависит от радиального закона плотности  $f(R_g)$ , если плоскость проекции параллельна оси КИ. Действительно, в этом случае радиус, проведенный из центра системы, не может пересечь границу области пространства, проецирующейся на КИ, поскольку эту границу образуют две плоскости, проходящие через центр; радиус может только лежать на границе. Тогда  $N_0$  полностью определяется общим числом ШС в системе,  $N$ , и долей,  $n_0$ , объема системы, проецирующегося на КИ,  $V_0$ :

$$N_0 = N n_0, \quad n_0 = \frac{V_0}{V}, \quad (34)$$

где  $V$  — объем шара без двойного конуса. Если угол полураствора последнего  $\alpha_0$ , то

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 \cos \alpha_0, \quad (35)$$

где  $a$  — радиус системы ШС.

Объем  $V_0$  является разностью между объемом двойного азимутального сектора шара

$$V_{as} = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \frac{4\alpha_0}{2\pi} = \frac{8}{3} a^3 \alpha_0 \quad (36)$$

и объемом двойного шарового сектора

$$V_{ss} = 2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} R_g^2 \cos \varphi dR_g d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - \cos \alpha_0), \quad (37)$$

где  $\varphi_0 = \pi/2 - \alpha_0$ . Тогда

$$V_0 = \frac{4}{3} a^3 (2\alpha_0 + \pi \cos \alpha_0 - \pi), \quad (38)$$

$$n_0 = \frac{2\alpha_0}{\pi \cos \alpha_0} - \frac{1}{\cos \alpha_0} + 1. \quad (39)$$

Отсюда доля объема системы, не проецирующегося на КИ,

$$n_1 = 1 - n_0 = \frac{1}{\cos \alpha_0} - \frac{2\alpha_0}{\pi \cos \alpha_0}. \quad (40)$$

Зная  $n_0$  и  $n_1$ , легко найти поверхностную плотность ШС в створе КИ

$$\mu_0 = \frac{N_0}{S_0} = \frac{Nn_0}{\pi a^2} \cdot \frac{2\pi}{4\alpha_0} = \frac{Nn_0}{2\alpha_0 a^2} \quad (41)$$

и поверхностную плотность вне створа КИ

$$\mu_1 = \frac{Nn_1}{S_1} = \frac{Nn_1}{\pi a^2} \cdot \frac{2\pi}{2\pi - 4\alpha_0} = \frac{Nn_1}{a^2(\pi - 2\alpha_0)}, \quad (42)$$

где  $S_0, S_1$  — площади проекции двойного шарового сектора и проекции части системы ШС вне створа КИ соответственно. Отсюда, учитывая (39) и (40), получаем теоретическое значение контраста поверхностной плотности в створе КИ по отношению к остальной части системы ШС

$$C_0 = \frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\pi - 2\alpha_0}{2\alpha_0} = 1 - \frac{\pi}{2\alpha_0} (1 - \cos \alpha_0). \quad (43)$$

Подсчет ШС, попавших в створ КИ, дает оценку контраста из наблюдений

$$\tilde{C}_0 = \frac{N_0}{N - N_0} \frac{\pi - 2\alpha_0}{2\alpha_0}. \quad (44)$$

Поскольку  $N_0$  как случайная величина подчиняется биномиальному распределению,

$$\mathbf{M} N_0 = Nn_0, \quad \mathbf{D} N_0 = Nn_0(1 - n_0). \quad (45)$$

Используя (45), по формуле распространения ошибок легко найти статистическую ошибку оценки  $\tilde{C}_0$

$$\sigma(\tilde{C}_0) = \frac{\sqrt{n_0}(\pi/2\alpha_0 - 1)}{\sqrt{N}(1 - n_0)^{3/2}}. \quad (46)$$

В общем случае для оценки неопределенности наблюдаемого контраста можно принять  $n_0 = N_0/N$ . В случае КИ, подставляя для  $n_0$  выражение (39), получаем

$$\sigma(\tilde{C}_0) = \frac{\pi \cos \alpha_0}{2\alpha_0 \sqrt{N}} \sqrt{\frac{2\alpha_0 + \pi \cos \alpha_0 - \pi}{\pi - 2\alpha_0}}. \quad (47)$$

Для того же случая, учитывая (43)–(45), находим для математического ожидания наблюдаемого контраста

$$\mathbf{M} \tilde{C}_0(N_0) \approx \tilde{C}_0(\mathbf{M} N_0) + \frac{1}{2} \tilde{C}_0''(\mathbf{M} N_0) \mathbf{D} N_0 = C_0 \left[ 1 + \frac{1}{N(1 - n_0)} \right], \quad (48)$$

т.е.  $C_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{M} \tilde{C}_0$ .