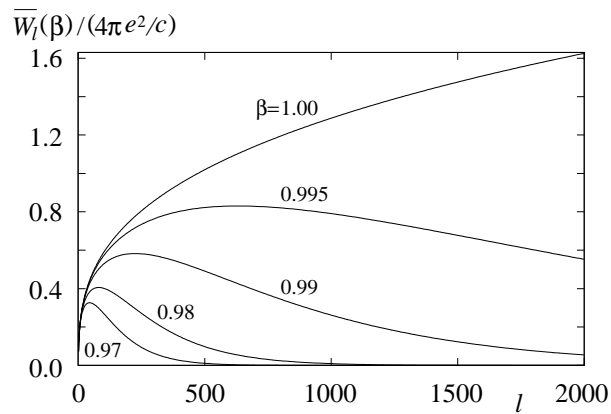


Санкт-Петербургский государственный университет

Д. И. НАГИРНЕР

Электродинамика
для астрономов



Санкт-Петербургский государственный университет

Д. И. НАГИРНЕР

Электродинамика

для астрономов

Учебное пособие

2016

УДК 52-64
ББК 22.632
Н16

Рецензенты:

заведующий сектором теоретической астрофизики Физ.-Тех. ин-та
им. А.Ф.Иоффе член-корреспондент РАН доктор физ.-мат. наук
Д.Г.Яковлев

и профессор кафедры астрономии СПбГУ доктор физ.-мат. наук
С.И.Грачев

Нагирнер Д. И.

Электродинамика для астрономов. Учебное пособие. СПб., 2016. —
374 с. Табл. 5. Илл. 40.
ISBN 978-5-4386-1111-0

В пособии представлены основные положения классической электродинамики. Приводятся и поясняются уравнения Максвелла для свободного пространства и для сплошных сред, диэлектриков и проводников, в их традиционной форме. Излагаются основы теории относительности, приводится релятивистская формулировка уравнений Максвелла. Эти же уравнения выводятся исходя из вариационных принципов. Получены решения уравнений без внешних зарядов и токов в виде плоских и сферических волн в однородных средах, а также волн в неоднородных, диспергирующих и анизотропных средах. Основное внимание уделено классической теории излучения.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов и аспирантов, а также молодых научных работников, изучающих астрофизику высоких энергий, а также интерпретирующих наблюдения таких объектов, как активные ядра галактик, источники рентгеновского и гамма-излучения, аккреционные диски около нейтронных звезд и черных дыр и т. п. Можно надеяться, что книга представит интерес и для астрофизиков со стажем работы.

ББК 22.632

ISBN 978-5-4386-1111-0

© Д. И. Нагирнер, 2016

Введение

Книг, излагающих один из основных разделов теоретической физики — классическую электродинамику, имеется много. Достаточно назвать курс Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица [1, 2], а также двухтомник В.В.Батыгина и И.Н.Топтыгина [3, 4]. Не потеряла своей значимости и книга [5].

В настоящем пособии излагаются исходные уравнения теории, а наряду с ними, в основном, темы, которые читаются в рамках курса лекций студентам астрономического отделения математикомеханического факультета Санкт-Петербургского университета.

В пособии вначале представлены основные положения классической электродинамики. Приводятся и поясняются уравнения Максвелла для свободного пространства и сплошной среды, материальные уравнения, связывающие напряженности и индукции для сплошных сред, диэлектриков и проводников, в их традиционной форме. Приведены энергетические величины и установлена связь между ними. Получены граничные условия для векторов электромагнитного поля.

Излагаются основы теории относительности, приводятся ее основные величины и эффекты, свойства и правила действий с векторами и тензорами четырехмерного пространства. Дается релятивистская формулировка уравнений Максвелла. Эти же уравнения выводятся исходя из вариационных принципов.

Как частные случаи рассматриваются постоянные электрическое и магнитное поля. Получены решения, описывающие движение зарядов в стационарных и однородных электрическом и магнитном полях. Получены также решения уравнений без внешних зарядов и токов в виде плоских и сферических волн, в частности, монохроматических, в однородных средах. Подробно рассмотрены явления поляризации волн и их энергетические характеристики.

Основное внимание уделено классической теории излучения, величинам, определяющим полное излучение, угловую зависимость и спектр излучения зарядов, движущихся с ускорением, в волновой зоне. Рассмотрены случаи медленных и быстрых зарядов, в том числе ультрарелятивистских зарядов. Дается формулировка уравнений, описывающих торможение зарядов при излучении.

Подробно изложена теория магнитотормозного механизма излучения и его предельных случаев: циклотронного и синхротронного излучения. Более кратко дается теория волн в неоднородных,

диспергирующих и анизотропных средах. Описаны явления, демонстрирующие волновые (интерференция и дифракция) и корпускулярные свойства (фотоэффект и комптоновское рассеяние) света.

Большая часть формул выводится, для облегчения восприятия этого в приложениях приведены необходимые математические сведения. В отличие от известных курсов электродинамики здесь даются некоторые исторические сведения о развитии теории, а также вопросы, представляющие интерес для астрономии, например, теория синхротронного излучения, играющего большую роль в астрофизике, проблема наблюдаемых сверхсветовых скоростей и др. Приводятся сведения об электричестве в атмосфере Земли.

Используется нерационализованный вариант системы единиц CGS, сведения о которой приведены в Приложении А. Там же сказано и о международной системе.

Формулы нумеруются независимо в пределах каждой главы. Ссылки на формулы из другой главы предваряются ее номером. Перед ссылкой на формулу из приложения также указывается его обозначение, например, (П4.20) означает формулу номер 20 Приложения 4.

В пособии не дается задач. Большое количество задач имеется в указанных выше курсах, а также в задачнике [6]. Некоторые задачи решены и изложены как теория.

На обложке представлены графики полного излучения в линиях при скоростях электронов, близких к скорости света, точнее это огибающие зависимостей функции $\overline{W}_l(\beta)/(4\pi e^2/c)$ от номера линии l для четырех значений безразмерной скорости $\beta = 0.97, 0.98, 0.99, 0.995$ и предельная кривая для $\beta = 1$ (см. стр. 238–239).

Глава 0. Некоторые сведения из истории электродинамики

1. *Древние века и средневековье.* С электромагнитными явлениями человек был знаком издревле. Самое мощное, самое опасное и самое страшное из них — это, конечно, молнии во время гроз. Их последствия — пожары, дьявольские трубки в песке и смерти от удара молнии — наводили ужас. Смертельные исходы происходят и сейчас несмотря на установку так называемых громоотводов (точнее молниеотводов). И если природа обычной молнии сейчас вполне ясна, то значительно более редкое явление — шаровая молния — до сих пор остается не совсем понятным. Отдаленные молнии, не сопровождающиеся громом, называются зарницами.

Другие явления не столь грозные — огни святого Эльма (холодное свечение, исходящее от некоторых остроконечных предметов в определенных условиях, например, от мачт кораблей перед грозой), полярные сияния (русские пазоры) и т.п. также были непонятны и удивительны.

Еще древним грекам было известно, что в результате трения янтаря шерстью он приобретает свойство притягивать пушинки.

Давно известны и магнитные свойства железа (железной руды). Компас был изобретен в Китае, а с 13 столетия используется в мореплавании, которое перестало быть каботажным (вдоль берега) и позволило осуществить множество путешествий и открытий. Была известна и какая-то непонятная связь между компасом и полярными сияниями (северная поговорка “матка дурит на пазорях”).

Разнообразные типы излучения — это тоже электромагнитные явления. Прежде всего, это свет солнца. К излучению относятся и такие атмосферные явления, как радуга, гало (ореол вокруг источника света), зеленый луч в горах и т.п.

2. *Первые шаги в изучении электричества.* Все указанные явления никак не связывались друг с другом. Они были непонятны, часто вызывали ужас, их относили к проявлению небесных сил, наказаниям за грехи и т.п.

Научное изучение электромагнитных явлений началось только в Новое время. В 1600 году английский врач (лейбмедик королевы Елизаветы I) Вильям Джильберт (Гильберт, 1540–1603) повторил опыты Фалеса Милетского с янтарем и обнаружил, что свойство янтаря не уникально, им обладают драгоценные камни, такие

как алмаз и горный хрусталь, а также сера, смола и другие твердые вещества. Он думал, что существует некая жидкость, которая выдавливается при трении. Именно он придумал термин “электрическая субстанция”, от греческого названия янтаря — электрон. Он создал первый электроскоп в виде легкой стрелки на острие. Этот медик выяснил, что при разделении магнита образуются новые полюса, что железная арматура усиливает магнит, что при нагревании магнитные свойства ослабевают, что Земля сама является магнитом, так как намагничивает проволоку. Земле же он приписал воздействие на магнитную стрелку, а до этого такое воздействие приписывалось небесам.

В течение полутора столетий многие повторяли такие же опыты с разными веществами и разными предметами, подвергавшимися трению. Отто фон Герике (1602–1686) открыл, что пушинка сначала притягивается, а потом отталкивается от потертого вещества, и обнаружил, что полученное свойство пушинки исчезает при соприкосновении ее с землей. Возникло понятие заряда. Он же построил первую электростатическую машину, которая вращала серный шар, а снимал электричество собственными руками. Он наблюдал потрескивание электрического разряда (минигром) и свечение его в темноте (минимолния).

Впоследствии опыты многократно повторялись, было открыто, что на одних веществах заряд сохраняется в том месте, где возник, а по другим растекается, т. е. в природе имеются изоляторы (диэлектрики) и проводники. Опыты с электричеством в XVII–XVIII веках стали модой, они производились не только физиками, но и любителями, и даже в салонах высшей знати.

Изучение атмосферного электричества также началось в начале Нового времени, когда стали не только наблюдать, но и производить опыты. Запуском воздушных змеев вызывали разряды и токи во время и вне гроз, пытаясь понять источник электричества в атмосфере. При такой попытке погиб российский ученый Георг Вильгельм Рихман (1711–1753). Он известен также своими работами по теории испарения и тепла, был одним из создателей калориметра. Он построил прибор, состоящий из железного прута на крыше, провода к первому в мире измерительному электрическому прибору — простому электроскопу-электрометру, связанному также с лейденской банкой (первый конденсатор). В этом приборе количество заряда определялось по величине отклонения ниточки от линейки

при их электризации. Молния (по-видимому, шаровая), поразившая Рихмана, вышла из его прибора среди ясного неба. После этого в Германии и Франции появились брошюры, в которых пытались объяснить такой исход, в частности, мотивировалось утверждение, что его смерть не была наказанием Божьим.

Первые теории атмосферного электричества сейчас выглядят довольно наивными. Например, пытались объяснить полярные сияния циркуляцией зарядов под действием ветра.

Следующим шагом в изучении электричества было обнаружение, что существуют заряды противоположных свойств. Это установил француз Шарль Франсуа Дюфе (1698–1739). Он в электрометре повесил не одну нитку, а две. Нитки расходились или сходились в зависимости от наличия или отсутствия зарядов. Он назвал два рода электричества стеклянным и смоляным, причем выяснил, что однородные отталкиваются, а разнородные притягиваются, а когда разнородные соприкасаются, то исчезают.

Открытие Дюфе вызвало сначала резкий протест. Михаил Васильевич Ломоносов (1711–1765) говорил, что заряды не могут исчезать, так как “Все перемены, в Натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько же присовокупится другому”. Это утверждение отнюдь не является формулировкой закона сохранения энергии, как иногда пытаются представить, и к электричеству применялось неправомерно. В то же время именно Ломоносов увидел в перемещении заряда движение каких-то частиц.

Такой же точки зрения придерживался американский физик, общественный и политический деятель, один из авторов конституции США, Бенджамен (Вениамин) Франклин (1706–1790), портрет которого помещен на сто долларовой купюре. Он построил первый плоский конденсатор (вместо лейденской банки), опытами с воздушными змеями доказал электрическую природу молнии. Заметив, что с острия стекает электричество, он предложил идею молниеотвода, которую реализовал в 1754 году чешский священник Проккоп Дивиш (1696–1765). Франклином же была разработана унитарная теория электричества. Согласно этой теории в каждом теле имеется определенное количество электрической жидкости, если ее больше, чем следует для равновесия, то тело заряжается положительно (стеклянное электричество), если нехватает, то отрицательно (отсюда и возникло понятие о положительных и отрицательных

зарядах). В целом количество электричества (заряд) сохраняется, оно только перетекает.

Немецкий физик Франц Эпинус (1724–1802), приглашенный в 1757 году в Санкт-Петербургскую Академию наук и ставший российским академиком, развил теорию Франклина и распространил ее на магнетизм. Магнитная и электрическая жидкости похожи и взаимодействуют друг с другом. Им же было открыто явление индуцированной электризации тел, т. е. появление зарядов до соприкосновения с несущим заряд телом. Впоследствии было установлено, что на стороне, более близкой к заряженному телу, появляется заряд противоположного знака, а на более далекой — того же знака (поляризация зарядов). Если заряженное тело отдалялось, то наведенные заряды исчезали. При всех этих манипуляциях заряд наводящего тела не изменялся.

Были попытки установить закон дальнего действия электричества. Из факта, что внутри проводника электричества нет (Франклин), по аналогии с потенциалом Ньютона, высказывались предположения (Пристли), что закон тот же, что и закон всемирного тяготения. Окончательные выводы сделал только Генри Кавендиш (1731–1810), исходя из опытов со сферическим конденсатором, внутренняя часть которого соединялась со внешней, но заряд на нее не перетекал. Однако его опыты были опубликованы только спустя 100 лет Максвеллом и закон обратных квадратов связывается с именем Кулона.

Электрические и магнитные явления долго оставались непонятными, иногда приписывались чудесным свойствам зарядов и порождали споры среди естествоиспытателей и философов.

Из изложенного можно сделать такие заключения. Развитие начал физики шло чрезвычайно медленно, каждый следующий шаг обычно совершался новым ученым. Часто они шли по неверному пути, почти всегда исходили из соображений, которые не подтверждались впоследствии, приходилось опровергать заблуждения, например, много усилий потребовало опровержение возможности построения вечных двигателей, попыток объяснить явления вмешательством какой-либо высшей силы и т. п. И все же поступательное развитие неуклонно шло.

3. *Начало современных исследований.* Начало количественного описанию электрических явлений положил Шарль Огюстен Кулон (1736–1806). В 1754 он построил прибор для измерения силы,

называемый крутильными весами. С помощью этого прибора он в 1785 году установил основной закон электростатики, носящий его имя.

Следующий шаг в количественном описании электрических явлений был сделан Семеоном Дени Пуассоном (1781–1840), который результаты теории гравитации применил к электростатике и получил уравнение, носящее его имя. В дальнейшем электростатику развивали Георг (Джордж) Грин (1793–1841) (функция и формула Грина) и Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) (формула Остроградского–Гаусса).

Для дальнейшего изучения электричества понадобилось получать большие количества текущих зарядов. На этом пути значительную роль сыграл так называемый вольтов столб, изобретенный итальянцем Алессандро Вольта (1745–1827). Прибор состоял из перемежающихся металлических и суконных кружков. Электричество возникало в результате химического взаимодействия различных металлов, смоченных нашатырем. Таким образом, появился первый источник постоянного тока.

Работу в этом направлении продолжил российский физик Василий Владимирович Петров (1761–1834), сконструировавший на том же принципе гальваническую батарею. С помощью такого источника Петров изучал явление электролиза, т. е. разложение веществ на составляющие, в частности, разложил воду на водород и кислород. Он обнаружил зависимость силы тока от сечения проводника, установил важность изоляции проводников. Он же открыл электрическую дугу, названную им вольтовой.

Незадолго до Вольта Луиджи Гальвани (1737–1798) открыл явление, названное гальванизмом: электричество вызывает сокращение мышц животного (лягушки), сокращения появляются, если соединить проводником мышцу и нерв лягушки. При этом сокращения становятся более мощными, если проводник сделать из двух различных металлов. Он объяснил это явление наличием животного электричества, которое действительно существует и сейчас интенсивно исследуется, однако, не имеет отношения к обнаруженному Гальвани. Его ошибку исправил Вольта, показавший, что ток возникает от соединения двух металлов, а один проводник, по видимому, не был однороден. На этом пути и был создан вольтов столб.

Была обнаружена связь электрических и магнитных явлений.

Еще в 17 столетии была зафиксирована способность молнии намагничивать железные изделия, а также перемагничивать стрелки компаса. Связь электричества и магнетизма стали изучать ученые.

Ганс Христиан Эрстед (1777–1851) в 1820 году обнаружил, что ток влияет на магнитную стрелку, она отклоняется в ту или другую сторону в зависимости от направления тока. Не называя самого термина, фактически он подразумевал действие тока на расстоянии, т. е. создание поля.

Поле — это не вещество, однако оно столь же материально, т. е. это вид материи. Электрическое поле объективируется, т. е. становится видимым, если в него поместить некоторые частички, например, кристаллики гипса, которые располагаются по силовым линиям поля. Точно так же ведут себя железные опилки в поле магнита.

Работы Эрстеда были продолжены французскими физиками. В том же 1820 году Доминик Франсуа Араго (1786–1853) доказал, что текущий по проводу ток обладает магнитными свойствами. Помещенная внутрь нескольких витков проволока намагнитилась. Аналогичные явления демонстрировал Андре Мари Ампер (1775–1836), который установил правило определения, в какую сторону отклонится магнитная стрелка под действием тока.

Экспериментальные исследования Жана Батиста Био (1774–1862) и Феликса Савара (1791–1841) по воздействию тока на магнитную стрелку были формализованы Пьером Симоном Лапласом (1749–1827). Закон Био–Савара–Лапласа (1820) выражается формулой

$$dF = kim \frac{\sin \theta}{r^2} ds, \quad (1)$$

где dF — элемент силы, которую создает элемент проводника ds с током силой ic , m — масса магнита, на который действует сила, k — коэффициент, зависящий от системы единиц, а θ — угол между элементом тока и направлением на точку измерения, находящуюся на расстоянии r .

Похожая формула была получена Ампером, который сформулировал закон взаимодействия токов, текущих по двум проводникам. Сила их взаимодействия

$$f = \frac{i_1 i_2 s_1 s_2}{r^2} (\cos \varepsilon - \cos \theta_1 \cos \theta_2), \quad (2)$$

где i_1, i_2 — сила тока в двух проводниках на единицу длины, s_1, s_2 — их протяженности, r — расстояние между проводниками, θ_1, θ_2 — углы, образованные проводниками с направлением соединяющей их прямой, ε — угол между проводниками. Из закона следует, что если токи текут в одном направлении, они притягиваются, если в противоположных — отталкиваются.

Ампер является автором теории магнетизма, согласно которой магнитные явления создаются круговыми токами в веществе, аналогично тому, что ток в соленоиде действует как магнит. На основании закона Ампера были сконструированы различные типы приборов, с помощью которых измеряли силу тока. Приборы назывались гальванометрами. Французы ввели термины “электрический ток”, “сила тока”, “электродвижущая сила” и “напряжение”.

Кардинальное открытие, окончательно подтвердившее единство электрических и магнитных явлений, сделал Майкл Фарадей (1791–1867). Он обнаружил, что движущееся магнитное поле вызывает появление тока в проводнике, т. е. происходит — магнитная индукция. Магнитом у него служил соленоид, а проводником сосный ему соленоид. При включении тока в одном соленоиде, превращавшемся в магнит, в другом появлялся ток, отмечаемый гальванометром. Интересно, что многократное повторение опыта долго не позволяло Фарадею зафиксировать эффект. После мучительных размышлений и анализа опыта он понял, что смотреть на гальванометр следует в момент включения тока, а не после этого, как он делал сначала. Явление индукции вызывает и железный магнит. Явление самоиндукции было открыто Джозефом Генри (1797–1878), который сконструировал также сильные магниты и электромагнитный двигатель.

Фарадей экспериментально доказал сохранение заряда. Он же разработал терминологию теории электромагнитных явлений. Он ввел термины электролиз и электролит, анод (ано — вверх и одос — путь по-гречески) и катод (вниз, обратно), переносчики зарядов назвал ионами (странствующие), ионы, идущие к катоду — катионами, к аноду — анионами. На основе электролиза были введены понятия единицы заряда и силы тока.

Эмилий Христианович Ленц (1804–1865) установил правило определения направления движущей силы индукции, а также закон теплового действия тока независимо от Джеймса Джоуля (1818–1889).

Затем был установлен закон, связывающий напряжение и силу тока в проводнике, закон Ома (Георг Симон Ом, 1787–1854). Именно Ом высказал мысль, что ток течет потому, что имеется разность каких-то уровней, названная напряжением, точно так же, как вода в реке течет с более высокого уровня к более низкому.

Многие из приведенных имен и некоторые не упомянутые имена отражены в названиях электромагнитных единиц: количества заряда — кулон, силы тока — ампер, напряжения — вольт, сопротивления — ом, проводимости — сименс (обратный ому), емкости — фарада, напряженности магнитного поля — эрстед и индукции — гаусс и тесла (10^4 Гс), самоиндукции — генри, магнитный поток — вебер. Даже некоторые механические единицы названы в честь физиков и математиков. Эти единицы применяются в определенных разделах физики и производства: длины — ферми (10^{-13} см, в ядерной физике), ускорения — гал (от Галилей, в геофизике), частоты — герц, мощности — джоуль (в теплофизике) и ватт (киловатт, мегаватт, киловаттчас — электротехника, а также производство и сбыт электроэнергии), давления — паскаль (в атмосферной физике), мощность и количество радиации — рентген и кюри.

Построение основ теории электромагнетизма было завершено в результате работ Джеймса Кларка Максвелла (1831–1879), сформулировавшего основные уравнения этой теории. Большой вклад в развитие теории внес Хендрик Антон Лоренц (1853–1928), переписавший уравнения Максвелла для пустого пространства и изучивший их свойства.

4. *Проблема электрона.* Можно сказать, что впервые люди столкнулись с проявлением существования электронов при операциях с ртутным барометром. В запаянную стеклянную трубку наливали ртуть, трубку переворачивали, часть ртути выливалась, а в запаянном конце оставалось безвоздушное пространство с небольшим количеством паров ртути. Оказалось, что если трубку встряхнуть, то возникает слабое свечение. Гипотеза о свечении наподобие фосфора была отвергнута.

Следующее соприкосновение с электронами произошло при наблюдении явлений, сопутствующих электризации трением. Пустой стеклянный шар, из которого был откачен воздух, Ломоносов вращал и натирал его собственными ладонями. Внутри шара при этом появлялось довольно яркое свечение, которое по мнению Ломоносова несомненно имело электрическую природу.

Уже упоминавшийся В.В.Петров пропускал через сосуд электрический ток, одновременно откачивая из сосуда воздух. В сосуде появлялось разноцветное свечение.

Дальнейший путь изучения этого явления связан с возможностью получать все более, как говорят, высокий вакуум. В газоразрядных трубках по мере откачивания воздуха сначала появлялась тонкая светлая нить, потом она расширялась, потом заполняла всю трубку, изменяя цвет. Свечение напоминало сначала огни Эльма, а потом полярные сияния. Когда воздуха становилось совсем мало, свечение исчезало, но образовывалось яркое пятно на стекле напротив катода. При всех этих явлениях в трубке шел ток, названный катодными лучами. Особенно сильные лучи возникали от нагретого катода, а от вогнутого фокусировались. При воздействии магнита луч отклонялся так же, как проводник с током. Наконец, поняли, что катодные лучи — это поток электронов.

Многочисленны теперешние применения таких потоков. Это и электронно-лучевая трубка телевизора, и электронные лампы, и электронная пушка, применяемая в медицине, и электронный микроскоп со значительно большим увеличением, чем обычный световой, и осциллограф, с помощью которого изучают переменные явления, и газоразрядные трубки. Белый свет дают ртутные лампы с люминофором на поверхности, аргоновые — голубой, неоновые — красный, натриевые — желтый. На том же принципе основаны энергосберегающие лампы.

5. *Развитие и приложения теории.* Дальнейшее развитие теории заключалось в решении конкретных задач, а затем в применении результатов к определенным практическим потребностям. Можно отметить самые важные вехи в этом развитии. Самые широкие применения электрического тока общеизвестны.

Доказательство существования (1888) и изучение свойств (интерференция, отражение и преломление, поляризация) электромагнитных волн Генрихом Рудольфом Герцем (1857–1894).

Открытие в 1895 году X-лучей (рентгеновских) Вильгельмом Конрадом Рентгеном (1845–1923). Эти лучи возникали в катодной трубке и обладали свойством проникать через многие предметы, вызывая свечение люминисцирующего экрана. Они не отклонялись магнитом и становились жестче при повышении напряжения в трубке. Сейчас рентгеновские лучи широко применяются в технике и медицине.

Изобретение в 1896 году радио Александром Степановичем Поповым (1859–1906) и в 1900 году Г.Маркони (1874–1937), который в отличие от Попова запатентовал свое изобретение.

В двадцатом веке были изобретены черно-белое, а затем и цветное телевидение, созданы радары, произведена радиолокация планет, наступила эпоха радиоастрономии, а затем и всеволновой астрономии.

Изобретены мазеры и лазеры, электронно-вычислительные машины, а затем компьютеры, все более мощные цифровые носители разнообразной информации, цифровое телевидение и цифровые фото и кино-камеры. В последнее время созданы Интернет, приборы GPS и навигаторы, спутниковое телевидение и сотовые телефоны, для чего потребовалось разработать долгодействующие и миниатюрные источники тока (батареи и аккумуляторы).

При этом очевиден все более убыстряющийся технологический прогресс, новые изобретения в технике и открытия в таких науках, как биология и медицина, происходят почти каждую неделю.

В результате полностью изменяются привычные вещи и привычный образ жизни. Стали почти ненужными книги, приходится выкидывать диапроекторы, долгоиграющие пластинки и аналоговые фотоаппараты, а также фотографии и диапозитивы. Уже устарели дискеты и лучевые мониторы, каждые два года приходится менять компьютеры на новые, более совершенные и мощные.

В основе всех этих изобретений лежит физика, в частности, классическая и квантовая электродинамика. В курсе излагается основная часть классической электродинамики.

Глава 1. Уравнения Максвелла

§ 1. Заряды и токи

1. *Типы распределений зарядов.* Заряды тел представляют собой совокупности заряженных элементарных частиц, т. е. отрицательных электронов и положительных ионов. Однако, заряды этих частиц очень малы и для создания заметного макроскопического заряда необходимо присутствие многих элементарных зарядов. Поэтому при макроскопическом описании электромагнитных явлений заряд можно рассматривать как некоторую жидкость, способную перетекать из одного места в другое.

Заряды могут быть дискретными, распределенными по объему, по поверхности или вдоль линии. Сумма по всем дискретным зарядам

$$\vec{d} = \sum q_n \vec{r}_n \quad (1)$$

называется дипольным моментом системы зарядов относительно точки, от которой отложены векторы \vec{r}_n . Если сумма зарядов этой системы равна нулю, то, как легко показать, дипольный момент не зависит от точки отсчета. В случае двух зарядов противоположного знака $\pm q$ эту точку можно взять между ними. Если расстояние между зарядами h , то дипольный момент направлен от заряда $-q$ к заряду q и равен qh :

$$\vec{d} = q(0, 0, h/2) + (-q)(0, 0, -h/2) = qh(0, 0, 1). \quad (2)$$

Объемная плотность $\rho(\vec{r})$ — это количество заряда в единице объема, т. е. предел количества заряда в объеме при стягивании этого объема в точку и стремлении его величины к нулю.

Пусть заряды расположены тонким слоем на некоторой достаточно гладкой поверхности. Если выделить малую часть поверхности, то ее можно считать плоской. Примем, что это плоскость xy . Построим параллелепипед высотой h и основанием Σ (достаточно малой) площадью S , параллельным плоскости xy , так, чтобы эта плоскость разделяла параллелепипед на две равные части, т. е. аппликата в его пределах $-h/2 \leq z \leq h/2$. Обозначим количество заряда в параллелепипеде через q . Тогда объемная плотность заряда в нем будет равна $\rho_h = q/(Sh) = (q/S)\delta_h(z)$. Если устремить $h \rightarrow 0$, то $\sigma = \lim_{h \rightarrow 0} h\rho_h = q/S$ называется поверхностной плотностью

заряда. При этом объемная плотность

$$\rho(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_h = \sigma \delta(z), \quad (3)$$

так как $\delta_h(z)$ является приближением δ -функции (см. Приложение 2). Заряд параллелепипеда

$$\int_{\Sigma} d^2\Sigma \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \sigma S = q. \quad (4)$$

Другой случай поверхностного распределения — двойной слой (в отличие от него предыдущее распределение называют простым слоем). Если поверхность представляет собой диэлектрик, то на двух частях построенного выше параллелепипеда могут располагаться заряды противоположных знаков. Пусть в части, которая находится с той стороны от поверхности, куда направлена ее внешняя нормаль, имеется (как и выше) положительный заряд $q/2$, а в другой части — отрицательный заряд $-q/2$. Пространственные плотности зарядов в указанных частях параллелепипеда тогда $\rho_h^{\pm} = \pm q/(Sh) = \pm(q/S)\delta_h^{\pm} = \tau\delta_h^{\pm}$ (функции δ_h^{\pm} определены в том же Приложении 2, при $h \rightarrow 0$ функции $\delta_h^{\pm} \rightarrow \delta_{\pm}(z)$). Отношение $\tau = q/S$ назовем плотностью момента диполя (или дипольного момента). Пространственная плотность заряда в параллелепипеде

$$\rho(z) = \begin{cases} \tau\delta_+(z) & z > 0, \\ -\tau\delta_-(z) & z < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Естественно, полный заряд параллелепипеда равен нулю:

$$\int_{\Sigma} d\Sigma \left[-\tau \int_{-h/2}^0 \delta_-(z) dz + \tau \int_0^{h/2} \delta_+(z) dz \right] = -q/2 + q/2 = 0. \quad (6)$$

Аналогично, при распределении заряда вдоль кривой, совместим малый ее участок длиной h , который можно считать прямым, с осью z и построим параллелепипед высотой h с квадратом в основании со сторонами длиной a , параллельными осям x и y , причем так, чтобы ось z проходила по средней линии полученного тела. Количество заряда в параллелепипеде снова обозначим q . Тогда объемная плотность заряда $\rho_a = \lambda/a^2 = \lambda\delta_a(x)\delta_a(y)$, так как $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-a/2 \leq y \leq a/2$. Следовательно,

$$\rho = \lim_{a \rightarrow 0} \rho_a = \lambda \delta(x) \delta(y), \quad \lambda = \lim_{a \rightarrow 0} \rho_a a^2 = q/h. \quad (7)$$

Отношение $\lambda = q/h$ — линейная плотность заряда.

Количество заряда можно характеризовать по-разному, например, числом элементарных (наименьших) зарядов, т. е. зарядов электрона, но числа получатся очень большими. Другие способы зависят от выбора системы единиц (см. Приложение А).

2. *Точечные заряд и ток в свободном пространстве.* Свободное или, как иногда говорят, пустое пространство означает, что в пространстве нет распределенного вещества, т. е. твердых тел, жидкостей или газов (плазмы), а имеются только отдельные заряженные тела (заряды), которые можно считать точечными и которые движутся некоторым известным образом за счет неэлектромагнитных сил. Плотность каждого такого заряда задается дельта-функцией:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad (8)$$

где q — величина заряда, а $r_0(t)$ — радиус-вектор его траектории. Эта плотность всегда пропорциональна единичному заряду (электрона), но обычно число отрицательных электронов или положительных ионов чрезвычайно велико.

Движение заряда порождает ток. Так как заряд точечный, то плотность тока есть просто произведение плотности заряда на его скорость:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{r}'_0(t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \vec{r}'_0(t). \quad (9)$$

Если зарядов несколько, то плотность заряда и плотность тока будут представлять собой суммы по всем имеющимся зарядам. Чтобы найти полный заряд, надо просуммировать по всем носителям заряда. Если распределение зарядов можно считать непрерывным, то надо взять интеграл.

Легко проверить, что приведенные плотности заряда и тока удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (10)$$

Это соотношение называется уравнением неразрывности (или непрерывности). Оно включает в себя закон сохранения заряда, так

как если проинтегрировать его по пространственному объему \mathcal{V} , содержащему заряд, то получится

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad q = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t) d^3r, \quad (11)$$

ибо интеграл от дивергенции преобразуется в поверхностный по формуле Остроградского—Гаусса, а зарядов на поверхности, которая ограничивает достаточно большой объем, включающий все заряды, больше нет. Но уравнение неразрывности утверждает несколько больше, чем просто сохранение заряда. Из него следует, что если в одном месте количество зарядов (распределенных или точечных) убывает, а в другом месте возрастает, то так может происходить только путем перетекания зарядов.

Изложение ведется по учебникам [1, 3].

§ 2. Уравнения Максвелла для свободного пространства

1. *Характеристики электромагнитного поля.* Заряды и токи порождают электромагнитное поле, которое характеризуется двумя напряженностями.

Электромагнитное поле в свободном пространстве описывается двумя векторами: напряженности электрического поля \vec{E} и напряженности магнитного поля \vec{H} . Они определяются следующим образом.

Если в стационарное электрическое поле (не изменяющееся со временем) помещен пробный заряд величиной q_0 , то на него в таком поле согласно опытным данным действует некоторая сила \vec{F}_e . Если силу разделить на величину заряда, то получится величина, называемая напряженностью электрического поля, т. е.

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}, \quad (12)$$

так что напряженность — это сила, действующая на единичный заряд. Существенно, что напряженность поля существует независимо от того, помещен в поле какой-либо заряд или нет.

В частном случае для поля точечного заряда q Ш.Кулон (1785) установил, что сила, действующая на пробный заряд q_0 , может быть записана в виде, аналогичном закону всемирного тяготения Ньютона:

$$\vec{F}_e = k \frac{q_0 q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{E} = k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (13)$$

где \vec{r} — радиус-вектор, соединяющий заряды, $r = |\vec{r}|$ — расстояние между зарядами. Если $qq_0 < 0$, т.е. заряды разных знаков, то они притягиваются, если знаки одинаковые, $qq_0 > 0$, — отталкиваются. Коэффициент k зависит от выбора системы единиц.

В электродинамике принята система единиц измерения, называемая CGS (сантиметр, грамм, секунда, см. Приложение А). В этой системе коэффициент $k = 1$, что и определяет ее привлекательность.

Единичными два равных заряда называются, если каждый из них на расстоянии в 1 см действует на другой с силой в 1 дину (дн=г·см/с²). Из приведенной записи закона Кулона вытекает, что электрический заряд в системе CGS имеет размерность (размерность величины выражается обозначением той же величины, заключенном в квадратные скобки) $[q] = [r] \cdot [F]^{1/2} = \text{см} \cdot (\text{г} \cdot \text{см} / \text{с}^2)^{1/2} = \text{г}^{1/2} \text{см}^{3/2} \text{с}^{-1}$. Заряд электрона отрицателен и по величине равен $4.8 \cdot 10^{-10}$ таких единиц.

Аналогично, если заряд q_0 движется в стационарном магнитном поле со скоростью \vec{v} , т.е. создает электрический ток, то на него поле также оказывает действие с силой \vec{F}_m , причем, и это тоже установлено на опыте, сила перпендикулярна скорости заряда и полю. Силу можно представить формулой

$$\vec{F}_m = \frac{q_0}{c} \vec{v} \times \vec{H}, \quad (14)$$

где здесь и далее $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с — скорость света в пустом пространстве.

Из формул (12) и (14) видно, что обе напряженности имеют одинаковую размерность (таковы и единичные напряженности в принятой системе), а именно, $[\vec{E}] = [\vec{H}] = \text{г}^{1/2} \text{см}^{-1/2} \text{с}^{-1}$.

Если имеются и электрическое и магнитное поля, то на движущийся заряд действуют обе силы, которые объединяются и называются силой Лоренца. Запишем выражения для силы и объемной плотности силы:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + \frac{q_0}{c} \vec{v} \times \vec{H}, \quad \vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{H}. \quad (15)$$

Если заряды изменяются, текут, то изменяются и токи, а тогда изменяются и напряженности. Законы их изменения описываются уравнениями Максвелла.

2. *Уравнения Максвелла.* Напряженности поля подчиняются следующим уравнениям.

$$\text{I.} \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (16)$$

$$\text{II.} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (17)$$

$$\text{III.} \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (18)$$

$$\text{IV.} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (19)$$

3. *Физический смысл уравнений.* Начнем с уравнения III. Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему \mathcal{V} , ограниченному поверхностью Σ :

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} d^3r = \oint_{\Sigma} \vec{E} \vec{n} d^2\Sigma = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho d^3r = 4\pi Q. \quad (20)$$

Здесь \vec{n} — орт внешней нормали к поверхности, а Q — полный заряд, находящийся внутри объема \mathcal{V} . Это теорема Гаусса (1840).

Пусть имеется только один заряд. По симметрии сила, создаваемая им, направлена по прямым, исходящим из него. Если в качестве объема взят шар с центром в заряде, то поверхностный интеграл по сфере оказывается равным величине этого заряда и не зависит от радиуса сферы, т. е. $Q = q$. Поскольку площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$, то напряженность электрического поля заряда равна

$$\vec{E} = \frac{q}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}. \quad (21)$$

Это равенство выражает закон Кулона, который является следствием уравнения III и его обоснованием.

Поскольку в правой части уравнения I стоит нуль, то это уравнение выражает тот простой факт, что напряженность магнитного поля есть вектор соленоидальный, т. е. не имеет ни источников, ни стоков. Источниками электрического поля являются заряды, но магнитных зарядов нет. У магнитов всегда два полюса. Существование монополей, т. е. однополюсных частиц, рассматривалось в теории, но в природе они не обнаружены.

Обратимся к уравнениям с роторами. Проинтегрируем уравнение II по некоторой поверхности Σ , натянутой на замкнутую кривую \mathcal{L} , и применим формулу Стокса:

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{E} \vec{n} d^2\Sigma = \int_{\mathcal{L}} \vec{E} \vec{l} ds = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}, \quad \Psi = \int_{\Sigma} \vec{H} \vec{n} d^2\Sigma. \quad (22)$$

Здесь \vec{l} — орт касательной к кривой, \vec{n} — нормаль к поверхности, направление которой согласовано с направлением касательной, Ψ — магнитный поток через поверхность. Соотношение (22) является обобщением закона Фарадея (1831): сумма электродвижущих сил в контуре равна изменению потока напряженности магнитного поля, протекающего через контур. Обобщение заключается в том, что электрическое поле возникает и тогда, когда никакого реального контура нет.

Что касается четвертого уравнения, то если отбросить первое слагаемое в правой части уравнения (оно обычно мало по сравнению со вторым), то получается соотношение, из которого следуют установленные опытным путем законы Био—Савара—Лапласа, Эрстеда и Ампера. Это утверждение будет доказано в § 2 Главы 3.

4. *Об уравнениях Максвелла.* Итак, четыре уравнения Максвелла, если отвлечься от отброшенного слагаемого в последнем уравнении, равносильны законам, которые были известны до Максвелла из экспериментов. Максвелл сделал две вещи: он объединил уравнения, выражающие эти законы, в систему, оторвавшись от условий экспериментов, и добавил одно слагаемое. Последнее было сделано, исходя из формальных соображений, причем физическая интерпретация добавленного слагаемого, данная Максвеллом, оказалась несостоятельной, так как он исходил из теории эфира, впоследствии отвергнутой.

При введении упомянутого слагаемого Максвелл предположил симметрию в свойствах двух полей: изменение потока одного должно порождать другое, т. е. подобно закону Фарадея изменение электрического поля порождает магнитное. Кроме того, отсутствие такого слагаемого нарушало бы приведенное выше соотношение (10). Это соотношение следует из второй пары уравнений. Если к уравнению IV применить операцию div , а затем воспользоваться уравнением III, то получится

$$\text{div rot } \vec{H} = 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \text{div } \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right), \quad (23)$$

т. е. уравнение неразрывности. Поскольку уравнение неразрывности выполняется для точечных зарядов, оно должно выполняться и для любого распределения зарядов. Слагаемое, не следовавшее из опыта (не замеченное экспериментаторами ввиду его малости, а

в случае магнитостатики оно просто отсутствует), было добавлено для того, чтобы из системы следовало уравнение неразрывности.

Уравнения Максвелла линейны по зарядам и токам и по искомым напряженностям электромагнитного поля. Поэтому поле суммы движущихся зарядов получается как сумма полей слагаемых.

Уравнения Максвелла позволяют по известным зарядам (и токам) находить напряженности электромагнитного поля. Незвестных функций в них 6. Это составляющие двух векторов напряженностей: электрического и магнитного полей. Уравнений же 8: два векторных и два скалярных. То обстоятельство, что число уравнений превосходит число неизвестных, отражает структуру этих уравнений. Они определяют ротор и дивергенцию каждого из искомым векторов. Но имеется теорема векторного анализа, согласно которой вектор может быть восстановлен, если известны его ротор и дивергенция. Конечно, по дифференциальным величинам вектор восстанавливается с точностью до постоянной, но постоянные могут быть определены из начальных и граничных условий, которые необходимо добавить к уравнениям в частных производных при решении конкретных задач.

Как известно, все векторы делятся на полярные и аксиальные. Полярные (обычные) векторы изменяют знак при отражении системы координат, т.е. изменении направлений всех ее осей, что приводит к изменению знака всех координат вектора. Однако если вектор является векторным произведением двух полярных векторов, то его координаты квадратичны по координатам векторов-сомножителей и при отражении системы координат вектор не меняется. Такие векторы называются аксиальными. Вектор электрической напряженности полярный, так как согласно уравнению III при отражении системы и дивергенция и \vec{E} изменяют знак, а вектор напряженности магнитной — аксиальный, что видно, из уравнений II и IV.

Система уравнений, описывающих электромагнитное поле, была написана в 60-е годы 19 столетия. Выдающийся физик двадцатого века Р. Фейнман считал это главным событием в мировой истории той эпохи. Хотя законы, выражаемые уравнениями, были известны до Максвелла и носят имена других физиков, объединение их в систему уже было бы заслугой. Однако Дж. К. Максвелл обобщил их и внес существенное уточнение в один из законов, причем из чисто формальных соображений. Впоследствии были созданы

теория относительности, квантовая механика и квантовая электродинамика. Однако уравнения Максвелла остались неизменными по форме и справедливыми в рамках всех этих теорий.

Следует однако заметить, что уравнения для свободного пространства были записаны Х. Лоренцем.

§ 3. Уравнения Максвелла для среды

1. *Усреднение зарядов и токов в среде.* Если электромагнитное поле распространяется не в пустоте (вакууме), а в некоторой среде, то уравнения Максвелла необходимо модифицировать. В рамках классической (неквантовой) электродинамики распределенное вещество (твердое, жидкое или газообразное) представляет набор большого числа атомов или молекул, состоящих из зарядов — ядер и вращающихся вокруг них электронов. Каждое ядро и каждый электрон представляют определенный заряд. Все такие заряды считаются точечными, так что их плотности представляются дельта-функциями. Движение зарядов порождает токи, плотность которых задается так же, как в предыдущем параграфе.

Заряды в веществе движутся очень быстро, так что плотность их чрезвычайно сложная функция времени и пространственных координат. Между тем приборы, измеряющие напряженности поля, являются макроскопическими объектами с постоянными времени измерения, гораздо большими, чем характерное время изменения плотности движущихся зарядов, и с усреднением по пространству. Поэтому для получения доступных измерительным приборам характеристик полей необходимо произвести усреднение по времени и пространству. В результате из микроскопических величин (*micro*) получатся макроскопические. Уравнения для микроскопических величин остаются теми же, что и в предыдущем параграфе, но их надо усреднить вместе с входящими в них величинами [2, 4].

Начнем усреднение с плотностей заряда и тока. При усреднении необходимо учесть, что в веществе образуется несколько типов зарядов и токов. Могут присутствовать заряды, движимые внешними силами, не связанными с электромагнитным полем. Такие заряды и соответствующие токи называются внешними или сторонними (*ex*). Но могут возникать и другие заряды и токи, которые определяются самими полями. К ним относятся заряды и токи поляризации (*pol*). Например, если на какой-то поверхности уже имеются

заряды, то в веществе другие заряды (противоположного знака) притягиваются к ним и создаются дополнительные заряды. Напротив, заряды того же знака отталкиваются. Так происходит в диэлектриках (например, в конденсаторах). В проводниках имеются свободные заряды, которые не создают объемного заряда, так что плотность таких зарядов равна нулю, но возникает ток проводимости (с). Наконец, в средах с магнитными свойствами молекулы в магнитном поле начинают определенным образом вращаться, в результате чего течет ток намагничивания (m) также без зарядов.

Запишем результат усреднения плотностей заряда и тока в виде

$$\overline{\rho_{\text{micro}}} = \rho_{\text{ex}} + \rho_{\text{pol}}, \quad \overline{\vec{j}_{\text{micro}}} = \vec{j}_{\text{ex}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{c}} + \vec{j}_{\text{m}}. \quad (24)$$

Каждые плотности зарядов и токов удовлетворяют соотношениям неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_{\text{ex}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{ex}} = 0, \quad \frac{\partial \rho_{\text{pol}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{pol}} = 0, \quad \text{div } \vec{j}_{\text{c}} = 0, \quad \text{div } \vec{j}_{\text{m}} = 0. \quad (25)$$

Два последних равенства содержат только плотности тока ввиду отсутствия соответствующих зарядов. Отметим еще раз, что только плотности внешних зарядов и токов являются известными функциями.

Теперь усредним и напряженности.

2. *Усреднение напряженностей и уравнений.* Отмечая напряженности, определяемые исходными уравнениями Максвелла, индексом “micro” и обозначая процесс усреднения чертой сверху, вводим традиционные обозначения:

$$\overline{\vec{E}_{\text{micro}}} = \vec{E}, \quad \overline{\vec{H}_{\text{micro}}} = \vec{B}. \quad (26)$$

Первый из усредненных векторов называется, как и исходный, вектором напряженности электрического поля, второй (по историческим причинам) — вектором магнитной индукции.

Первая пара уравнений Максвелла усредняется очень просто:

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (27)$$

Усреднение второй пары включает усреднение зарядов и токов:

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi(\rho_{\text{ex}} + \rho_{\text{pol}}), \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{ex}} + \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{c}} + \vec{j}_{\text{m}}). \quad (28)$$

В то время как уравнения Максвелла для свободного пространства основаны непосредственно на опыте и справедливы всегда, приведенные усредненные уравнения не обладают такой степенью общности, что видно и из способа их получения. Строго говоря, и масштаб дифференцирования в микроскопических (16), (17), (18), (19) и макроскопических (27)–(28) уравнениях различен. Если в первых приращения пространственных координат и времени при вычислении производных могут быть произвольными, то при выполнении таких же действий во вторых эти приращения должны быть существенно больше масштабов, по которым произведено усреднение. Впрочем, и макроскопические масштабы все равно достаточно малы.

3. *Альтернативная форма уравнений.* Часто наряду с векторами \vec{E} и \vec{B} используют и некоторые другие, связанные с дополнительными зарядами и токами (поляризации и намагничивания).

Вместо зарядов и токов поляризации вводят вектор поляризации, определяя его равенствами

$$\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad \rho_{\text{pol}} = -\text{div } \vec{P}. \quad (29)$$

При таком определении уравнение неразрывности выполняется. Подставив второе равенство из (29) в первое уравнение (28), содержащее плотность заряда, и введя еще одно обозначение

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad (30)$$

перепишем это уравнение так:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}. \quad (31)$$

Вектор \vec{D} называется вектором электрической индукции (или, иначе, смещения) и определяется только внешними зарядами.

Аналогично вводится вектор намагничивания. Так как плотность тока намагничивания соленоидальна, то полагают

$$\vec{j}_{\text{m}} = c \text{rot } \vec{M}. \quad (32)$$

Подставив выражения для плотностей тока поляризации и намагничивания в последнее уравнение (28) и введя еще один вектор — магнитной напряженности

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}, \quad (33)$$

— перепишем указанное уравнение в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_{\text{ex}} + \vec{j}_c). \quad (34)$$

В это уравнение входят токи внешние и проводимости, вместе называемые свободными.

Все напряженности и индукции в системе CGS имеют одну размерность. Электрические величины не носят особых названий, но единица магнитной напряженности называется эрстед и обозначается Э, а единица магнитной индукции — гаусс, обозначение Гс.

С точки зрения количества искомым функций все равно, какие использовать пары векторов: \vec{j}_{pol} и \vec{j}_m , \vec{P} и \vec{M} , \vec{D} и \vec{H} , \vec{E} и \vec{B} . Однако на практике более удобной оказывается последняя пара.

§ 4. Материальные уравнения

Число неизвестных функций в уравнениях Максвелла для вещества существенно превосходит число уравнений, так что решить их нельзя. Необходимы дополнительные соотношения для замыкания уравнений. Такие соотношения пишутся между векторами индукции и напряженности (отдельно электрическими и магнитными) и между током проводимости и электрической напряженностью на основании опытных данных, по-разному для разных веществ.

Мы перечислим самые жесткие требования к указанным соотношениям и средам, при выполнении которых в совокупности эти соотношения выглядят наиболее просто. Таких требований 7.

1) Линейность соотношений. 2) Однородность соотношений. 3) Мгновенность связи. 4) Локальность связи. 5) Изотропность среды. 6) Стационарность среды. 7) Однородность среды.

Если все эти требования выполняются, то упомянутые соотношения, называемые материальными уравнениями, имеют вид

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j}_c = \sigma \vec{E}, \quad (35)$$

где коэффициенты связи ε , μ и σ — постоянные. Первые два из них безразмерны, последний имеет размерность обратного времени.

Коэффициент ε называется диэлектрической проницаемостью или диэлектрической постоянной. Она не может быть меньше 1. Соответственно коэффициент μ называют магнитной проницаемостью. Она должна быть положительна. Вещества, у которых $\mu < 1$,

называют диамагнетиками, в противоположном случае парамагнетиками. Особый класс составляют ферромагнетики. Коэффициент проводимости $\sigma \geq 0$, пропорциональность тока проводимости электрической напряженности отражает закон Ома.

В случае отсутствия вещества индукции совпадают с напряженностями, т. е. $\vec{D} = \vec{E}$, $\vec{B} = \vec{H}$, а проводимости нет ($\vec{j}_c = 0$), поэтому в пустом пространстве $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$.

Теперь обсудим случаи, когда одно из перечисленных требований нарушается. Начнем с последних и будем двигаться к первому.

Нарушение пунктов 7 и 6 означает соответственно, что коэффициенты зависят от пространственных координат или от времени. Так может быть, если, например, плотность среды изменяется в пространстве или со временем.

Изотропные среды, например кристаллы, имеют различные свойства в разных направлениях. Поэтому для них нет единой зависимости между разными проекциями индукций и напряженностей. Материальные уравнения в этом случае имеют матричный вид:

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z \quad (36)$$

и так далее. Вместо одного числа или функции надо определять матрицу. В зависимости от количества осей симметрии кристалла эта матрица может иметь различное количество характерных чисел (или функций).

Нарушение свойств 3 и 4 называется дисперсией (дисперсия — разброс), соответственно временной и пространственной. Дисперсия означает, что значение индукции определяется не одним значением напряженности в один момент времени или в одной точке пространства, а некоторой совокупностью таких значений, т. е. представляется суммой или интегралом по моментам и точкам влияния. Тогда связывающие индукцию и напряженность величины являются функциями, зависящими, вообще говоря, от двух моментов времени или двух точек пространства. Обычно более важна временная дисперсия. Среда с дисперсией называют диспергирующими.

Наконец, свойства 1 и 2 означают, что связи между величинами линейны, а если одна равна нулю, то и другая. Они нарушаются у некоторых кристаллов по отношению к электрическим величинам и у ферромагнетиков по отношению к магнитным. В некоторых случаях их нарушение приводит к неоднозначности связей. При-

мером является явление гистерезиса, когда при окончании воздействия магнитной напряженности на ферромагнетик, его индукция (т. е. намагничение) не исчезает. В случае электрических величин подобные явления называются электрострикцией.

§ 5. Энергетическое соотношение

В этом параграфе считаем, что диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от времени.

Запишем два уравнения Максвелла с роторами:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_c + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ex}}. \quad (37)$$

Умножим эти уравнения скалярно соответственно на \vec{H} и \vec{E} и вычтем из первого второе. Тогда получим

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j}_c - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ex}} \right). \quad (38)$$

Воспользуемся материальными уравнениями и подставим их в полученное соотношение. Кроме того, введем две величины

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2), \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (39)$$

Тогда, принимая во внимание тождество

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\operatorname{rot} \vec{A}) - \vec{A}(\operatorname{rot} \vec{B}), \quad (40)$$

соотношение (38) после умножения на $c/4\pi$ можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{E} \vec{j}_{\text{ex}} - \sigma E^2. \quad (41)$$

Левая часть равенства имеет вид такой же, как в уравнении неразрывности. Поэтому w и \vec{S} интерпретируются как плотность энергии и плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) электромагнитного поля. Если нет внешнего поля и проводимости, то уравнение неразрывности для энергии выполняется. Наличие проводимости всегда приводит к потерям энергии, так как выделяется так называемое джоулево тепло. Первое слагаемое в правой части (41) описывает

взаимодействие внешнего поля с порождаемым зарядами и токами. Оно может давать положительный или отрицательный вклад в энергию поля в зависимости от того, направлена плотность тока внешнего поля в ту же сторону, что и напряженность создаваемого поля, или в противоположную, т. е. определяется работой внешних сил.

Возьмем какой-нибудь объем \mathcal{V} и проинтегрируем равенство (41) по этому объему:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} w d^3r = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{S} d^3r - \int_{\mathcal{V}} (\vec{E} \vec{j}_{\text{ex}} + \sigma E^2) d^3r. \quad (42)$$

Обозначив полную энергию поля в объеме \mathcal{V} через W , получим для ее изменения со временем

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_{\Sigma} \vec{n} \vec{S} d^2\Sigma - \int_{\mathcal{V}} (\vec{E} \vec{j}_{\text{ex}} + \sigma E^2) d^3r. \quad (43)$$

Равенство (43) выражает закон сохранения энергии. Физический смысл двух последних слагаемых очевиден: это потери энергии поля на работу против внешних сил и на джоулево тепло. Первое же слагаемое справа представляет собой поток вектора Пойнтинга через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем, т. е. энергию, выходящую из объема. Джоулево слагаемое всегда отрицательно, остальные могут иметь любой знак, т. е. могут описывать как потери, так и увеличение энергии.

Первое слагаемое в (43) справа, которое в подавляющем большинстве случаев описывает потери энергии, так как механизмы концентрации энергии редки, позволяет сделать еще один важный вывод. Пусть для простоты нет проводимости и внешнего поля. Если увеличивать размер области, по которой производится интегрирование, т. е. устремить объем к бесконечности, то и площадь поверхности его будет неограниченно возрастать. Считая эту поверхность сферой радиуса R , можно сделать оценку интеграла: $\sim 4\pi R^2 S$. Интеграл будет стремиться к нулю, если величина вектора Пойнтинга S убывает при больших R быстрее, чем $1/R^2$. Если же $S \sim 1/R^2$, то интеграл потока остается конечным и конечная энергия поля проходит через сферу произвольно большого радиуса, т. е. уходит на бесконечность. Это поле, уносящее энергию бесконечно далеко от ее источника, называется излучением, а уносимая им

энергия — лучистой энергией. Впоследствии будет показано, что такая ситуация осуществляется.

§ 6. Потенциалы

1. *Определение потенциалов.* Пусть среда непроводящая, т. е. $\sigma = 0$, а проницаемости диэлектрическая и магнитная постоянны, т. е. не зависят ни от координат, ни от времени. В этом случае можно сократить число искомых функций с шести до четырех.

Выпишем уравнения Максвелла. Так как тока проводимости нет, то у плотностей внешних зарядов и токов можно не писать индексов:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (44)$$

Воспользуемся материальными уравнениями

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (45)$$

причем в качестве основных примем векторы \vec{E} и \vec{B} . Для них уравнения (44) переписутся так:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (46)$$

Поскольку вектор магнитной индукции соленоидальный, то можно положить

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (47)$$

Тогда первое уравнение удовлетворяется тождественно. Подставим это выражение для \vec{B} во второе уравнение и перенесем слагаемое с ним налево:

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (48)$$

Стоящий под знаком ротора вектор потенциальный, так что можно положить

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (49)$$

После этого и второе уравнение будет выполняться тождественно.

Введенные величины называются векторным и скалярным потенциалами. Если известны потенциалы, то напряженности и индукции находятся легко. Обратное неверно.

2. *Калибровочная инвариантность.* Неоднозначность потенциалов связана не только с тем, что характеристики поля выражаются через их производные и, следовательно, к потенциалам можно добавлять любые константы. Легко проверить, что выражения (47) и (49) не изменятся, если потенциалы заменить на штрихованные, связанные с исходными добавлением градиентов некоторой функции:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } \chi, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (50)$$

Это свойство электромагнитного поля называется градиентной или калибровочной (gauge) инвариантностью. Выбор определенной функции χ и тем самым определенных потенциалов называется калибровкой.

Покажем, что можно выбрать такую калибровку, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0. \quad (51)$$

Действительно, пусть это соотношение для штрихованных потенциалов не выполняется, так что

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \text{div } \vec{A}' = b(\vec{r}, t) \neq 0. \quad (52)$$

Подставив выражения (50) в (52) и выбрав такую функцию χ , чтобы

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta \chi = b(\vec{r}, t), \quad (53)$$

убедимся, что для нештрихованных потенциалов соотношение (51) выполняется. Нам нужна всего лишь одна функция χ . Так как при любых функциях $b(\vec{r}, t)$ (как мы увидим в дальнейшем) можно найти функцию, удовлетворяющую уравнению (53), то к соотношению (51) можно перейти всегда. Калибровка потенциалов этим соотношением называется калибровкой Лоренца, а само это соотношение условием Лоренца.

Не следует думать, что калибровка (51) полностью определяет потенциалы. В качестве функции χ можно взять и любую другую,

отличающуюся от какой-либо определенной на решение однородного уравнения, соответствующего (53).

3. *Уравнения для потенциалов.* Перейдем теперь к решению двух оставшихся уравнений. Подставляя в них выражения (47)–(49) и принимая во внимание соотношение (51), находим, что потенциалы определяются уравнениями

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (54)$$

Введем обозначение

$$v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (55)$$

Эта величина имеет размерность скорости. Введем также оператор

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (56)$$

называемый волновым оператором или оператором Даламбера. Тогда уравнения для потенциалов запишутся коротко

$$\square \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (57)$$

Итак, уравнения Максвелла свелись к решению четырех одно-типных уравнений для четырех потенциалов, подчиненных дополнительному условию Лоренца (51).

Заметим, что если под знаком оператора Даламбера применить к потенциалам условие Лоренца, то справа получится выражение, пропорциональное уравнению неразрывности. Поэтому можно считать, что условие Лоренца является отражением этого уравнения.

4. *Функция Грина волнового уравнения и ее преобразование Фурье.* Получим частные решения уравнений (57), которые называются неоднородными волновыми уравнениями. Поскольку все четыре уравнения имеют один вид, рассмотрим уравнение

$$\square \varphi = 4\pi f(\vec{r}, t). \quad (58)$$

Представим его решение так:

$$\varphi(t, \vec{r}) = 4\pi v \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3 r_1 f(t_1, \vec{r}_1) G(t - t_1, \vec{r} - \vec{r}_1). \quad (59)$$

Функция $G(t - t_1, \vec{r} - \vec{r}_1)$ определяется уравнением (это доказывается прямой подстановкой (59) в (58))

$$\square G(t - t_1, \vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{1}{v} \delta(t - t_1) \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (60)$$

и называется функцией Грина волнового уравнения. Множитель v здесь и далее вводится для того, чтобы время входило только в виде произведения vt , имеющего размерность длины, как и координаты. Поскольку всюду в уравнении входит только разность аргументов, можно положить $t_1 = 0, \vec{r}_1 = 0$, и решать уравнение

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(t, \vec{r}) = \frac{1}{v} \delta(t) \delta(\vec{r}). \quad (61)$$

Представим искомую функцию в виде разложения в интеграл Фурье:

$$G(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{G}(\varkappa_0, \vec{\varkappa}) e^{-i(\varkappa_0 vt - \vec{\varkappa} \vec{r})} d\varkappa_0 d^3 \varkappa, \quad (62)$$

где

$$\tilde{G}(\varkappa_0, \vec{\varkappa}) = v \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3 r e^{i(\varkappa_0 vt - \vec{\varkappa} \vec{r})} G(t, \vec{r}). \quad (63)$$

Разложим и дельта-функции в интегралы Фурье:

$$\delta(t) = \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa_0 vt} d\varkappa_0, \quad \delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \varkappa e^{i\vec{\varkappa} \vec{r}}. \quad (64)$$

Подставив разложения в уравнение (61), получим уравнение для преобразования функции Грина:

$$(\varkappa^2 - \varkappa_0^2) \tilde{G}(\varkappa_0, \vec{\varkappa}) = 1. \quad (65)$$

5. *Обращение преобразования Фурье.* Нельзя просто поделить на множитель $\varkappa^2 - \varkappa_0^2$, так как он обращается в нуль. Для обращения преобразования следует вещественную величину \varkappa_0 превратить в комплексную и рассматривать на комплексной плоскости. Для получения определенного решения необходимо регуляризовать дробь. Разные способы регуляризации дают различные решения. Чтобы получить нужные нам потенциалы, добавим к \varkappa_0 малую мнимую величину, т. е. обойдем полюса дроби сверху от вещественной оси (рис. 1а). Перепишем функцию Грина (62) в виде

$$G(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \varkappa e^{i\vec{\varkappa} \vec{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varkappa_0}{\varkappa^2 - (\varkappa_0 + i0)^2} e^{-i\varkappa_0 v t} \quad (66)$$

и рассмотрим внутренний интеграл

$$I_0(\varkappa, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varkappa_0}{\varkappa^2 - (\varkappa_0 + i0)^2} e^{-i\varkappa_0 v t}. \quad (67)$$

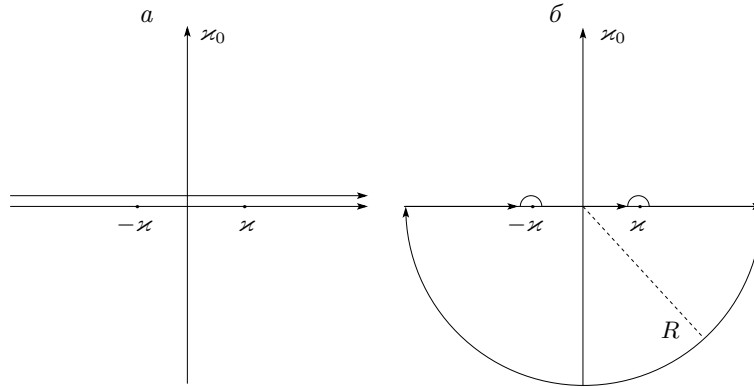


Рис. 1: Преобразование контура интегрирования.

Для значений $t > 0$, которые нас только и интересуют, контурный интеграл по вещественной оси должен быть преобразован путем замыкания его полуокружностью (см. рис. 1б) в нижней полуплоскости комплексной плоскости \varkappa_0 (так как при $t > 0$ экспонента стремится к нулю при $\varkappa_0 \rightarrow -i\infty$) и взятия вычетов в расположенных в этой полуплоскости полюсах $\varkappa_0 = \pm \varkappa$. Для $t < 0$

он равен нулю, так как тогда интеграл должен замыкаться в верхней полуплоскости, а там подинтегральная функция особенностей не имеет. В обоих случаях интеграл по полуокружности радиуса R при $R \rightarrow \infty$ по лемме Жордана стремится к нулю, и интеграл сводится к вычетам в полюсах. В результате при $t > 0$ найдем

$$I_0(\varkappa, t) = (-2\pi i) \left(-\frac{e^{-i\varkappa_0 v t}}{2\varkappa_0} \Big|_{\varkappa_0=-\varkappa} - \frac{e^{-i\varkappa_0 v t}}{2\varkappa_0} \Big|_{\varkappa_0=\varkappa} \right) = \frac{2\pi}{\varkappa} \sin(\varkappa v t). \quad (68)$$

Для любого знака времени можно написать

$$I_0(\varkappa, t) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(t)}{2} 2\pi \frac{\sin(\varkappa v t)}{\varkappa}. \quad (69)$$

Теперь четверной интеграл в выражении (66) для функции Грина с интегралом (68) примет вид

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 \varkappa}{\varkappa} e^{i\varkappa \vec{r}} \sin(\varkappa v t) &= 2\pi \int_0^\infty \varkappa d\varkappa \sin(\varkappa v t) \int_{-1}^1 e^{i\varkappa r \eta} d\eta = \\ &= \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty d\varkappa \sin(\varkappa v t) \sin(\varkappa r) = \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty d\varkappa [\cos \varkappa (v t - r) - \cos \varkappa (v t + r)] = \\ &= \frac{2\pi^2}{r} [\delta(v t - r) - \delta(v t + r)]. \end{aligned} \quad (70)$$

Поскольку вторая дельта-функция существенна только при отрицательных t , она исчезает после подстановки. Окончательно формула для функции Грина содержит лишь одну дельта-функцию:

$$G(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4} 2\pi \frac{2\pi^2}{r} \delta(v t - r) = \frac{1}{4\pi r} \delta(v t - r). \quad (71)$$

6. *Запаздывающие потенциалы.* Теперь несложно получить решение уравнения (58), подставив функцию Грина в (59):

$$\varphi(\underline{r}) = 4\pi v \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int d^3 r_1 f(t_1, \vec{r}_1) \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta(v(t - t_1) - |\vec{r} - \vec{r}_1|). \quad (72)$$

Взяв интеграл от дельта-функции, найдем выражение для решения неоднородного волнового уравнения:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} f(t_1, \vec{r}_1). \quad (73)$$

Поясним приведенную формулу, считая f плотностью заряда. Произведение плотности заряда на элемент объема равно заряду этого объема. Так как элемент объема бесконечно мал, заряд можно считать точечным. Как уже отмечалось, неподвижный точечный заряд q создает поле напряженности согласно закону Кулона (21). Этой напряженности соответствует кулоновский потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r}, \quad (74)$$

т. е. потенциал точечного заряда равен величине этого заряда, деленной на расстояние от него до точки измерения (положения пробного заряда).

Чтобы найти полный потенциал, надо просуммировать по всем зарядам, т. е. взять интеграл по распределению зарядов. Особого пояснения требует лишь момент времени t_1 , в который надо вычислять плотность заряда, чтобы наблюдатель смог почувствовать его влияние в точке \vec{r} в момент времени t . Будем называть t_1 моментом влияния. Этот момент определяется равенством

$$v(t - t_1) = |\vec{r} - \vec{r}_1|. \quad (75)$$

Равенство (75) интерпретируется следующим образом. Плотность заряда надо вычислять в такой момент времени, чтобы сигнал, вышедший в этот момент и движущийся со скоростью v , дошел до наблюдателя в момент наблюдения. Такие решения волнового уравнения называются запаздывающими потенциалами.

Конечно, в решения могут входить решения однородных уравнений, которые мы рассмотрим в Главе 4.

§ 7. Граничные условия для электромагнитных полей в свободном пространстве и в веществе

1. *Граничные условия для электрической напряженности в свободном пространстве.* Поскольку, как предполагается, в свободном пространстве нет ничего кроме свободных же зарядов, то граничные условия могут возникнуть только, если принять, что заряды расположены настолько плотно, что их можно считать распределенными непрерывно. Таким образом, граничные условия появляются как следствие приближения. Однако, такое приближение оправдано, так как элементарный заряд, а это заряд электрона,

чрезвычайно мал ($e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ CGS единицы), так что для создания макроскопически заметного заряда требуется присутствие огромного числа отдельных зарядов.

На поверхности, где распределены заряды, происходит разрыв в пространственном распределении зарядов, поверхность разбивает окружающее пространство на две части, нижнюю (1) и верхнюю (2). Поэтому в точках поверхности неприменимы дифференциальные уравнения электромагнитного поля и, чтобы выяснить поведение их решений, надо вывести граничные условия, исходя из интегральных соотношений. Эти соотношения для электростатики получаются из уравнения (22) при помощи формулы (П1.20) и в обычных обозначениях имеют вид

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \vec{l} ds = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \vec{n} d^2 \Sigma = 0, \quad \oint_{\Sigma} \vec{E} \vec{n} d^2 \Sigma = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho d^3 r = 4\pi q. \quad (76)$$

Считая поверхность достаточно гладкой, рассмотрим точку на такой поверхности вместе с ее достаточно малой окрестностью. Из выбранной точки проведем орт $\vec{\tau}$, касательный к поверхности, орт нормали к поверхности \vec{n} и орт \vec{b} так, чтобы три вектора $\vec{\tau}$, \vec{b} и \vec{n} составляли ортонормальный базис.

Пусть на поверхности задано распределение заряда с не зависящей от времени плотностью σ . Отдельно рассмотрим компоненты электрической напряженности, касательную и нормальную по отношению к поверхности. Примем, что $\vec{E} \vec{b} = 0$.

1) Касательные компоненты. Построим около произвольной точки поверхности прямоугольный контур \mathcal{L} , плоскость которого перпендикулярна поверхности, основание параллельно касательному орту $\vec{\tau}$, а нормалью служит вектор \vec{b} (рис. 2a). Основание контура пусть равно a , а высота h . Вычислим циркуляцию напряженности вдоль этого контура. Так как обе стороны прямоугольника малы, то интеграл можно выразить через проекции поля на орты:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \vec{l} ds = (E_{2\tau} - E_{1\tau})a - E_{2n} \frac{h}{2} - E_{1n} \frac{h}{2} + E_{1n} \frac{h}{2} + E_{2n} \frac{h}{2} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \vec{b} d^2 \Sigma = 0. \quad (77)$$

Циркуляция равна нулю, так как магнитного поля нет. Слагаемые с h сокращаются, точнее, их сумма — бесконечно малая более высокого порядка, чем h . Делая a бесконечно малым, но не равным нулю,

получаем, что касательная компонента напряженности непрерывна.

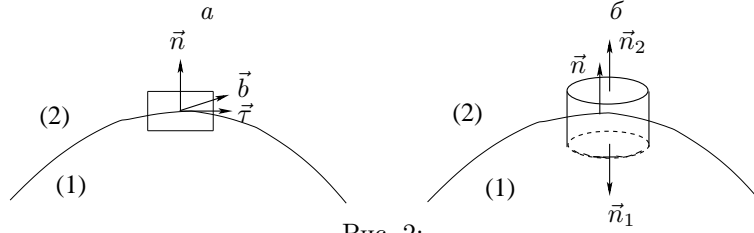


Рис. 2:

Компоненты электрической напряженности на границе сред.
а. Касательная компонента. *б.* Нормальная компонента.

2) Нормальные компоненты. Теперь обратимся к рис. 2б. Там показан построенный прямой круговой цилиндр, основания которого параллельны поверхности. Обозначим радиус основания цилиндра R , а его высоту h , считая обе величины малыми. Тогда, применив формулу Остроградского—Гаусса, найдем (нормаль $\vec{n} \parallel \vec{n}_2$, т. е. направлена из (1) в (2))

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \vec{n} d^2\Sigma = (\vec{n}_1 \vec{E} + \vec{n}_2 \vec{E}) \pi R^2 + E_{\tau} 2\pi h = (E_{2n} - E_{1n}) \pi R^2 + E_{\tau} 2\pi h = 4\pi \sigma \pi R^2. \quad (78)$$

Устремим $h \rightarrow 0$, притом так, чтобы оба основания стремились слиться с поверхностью, и считая R бесконечно малым, но не равным нулю, получим, что нормальная компонента при переходе через заряженную поверхность терпит разрыв. Оба утверждения запишем рядом

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \quad E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (79)$$

2. *Граничные условия для магнитной напряженности.* Поскольку уравнения, определяющие напряженность магнитного поля, хотя и отличаются от уравнений для электрического поля, но все же похожи на них, рассуждения для обоих полей аналогичны и можно использовать те же рисунки 2а и 2б. При этом надо считать, что по поверхности в направлении вектора \vec{b} течет конечный поверхностный ток плотностью $i_b = \lim_{h \rightarrow 0} \vec{j} \vec{b} \cdot h, \vec{i} = i_b \vec{b}$.

Если отсутствует электрическое поле, то уравнения магнито-статике

$$\oint_{\Sigma} \vec{H} \vec{n} d^2\Sigma = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \vec{l} ds = \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma} \vec{j} \vec{b} d^2\Sigma. \quad (80)$$

Применив к первому уравнению рассуждение, основанное на рис. 2б, а ко второму — на 2а, получим, что нормальная компонента \vec{H} непрерывна, а касательная при переходе через поверхность терпит разрыв (и здесь принимаем, что $\vec{H} \vec{b} = 0$):

$$H_{2n} - H_{1n} = 0, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_b. \quad (81)$$

Выведенные граничные условия можно записать в векторной форме:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0, \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \vec{n} = 4\pi\sigma, \quad \vec{n}(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (82)$$

3. *Граничные условия в диэлектрике.* Применять граничные условия может понадобиться в двух случаях, а именно, когда на поверхности диэлектрика имеется распределенный заряд или когда некоторая поверхность разделяет две области с различными диэлектрическими проницаемостями.

Прежде чем рассматривать этот вопрос поясним физический смысл вектора поляризации \vec{P} . Этот вектор был введен формально равенствами (I.29). Он по определению связан с плотностью наведенного заряда ρ_{pol} соотношением $\text{div } \vec{P} = -\rho_{\text{pol}}$. В целом диэлектрик остается нейтральным, т. е.

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{pol}} d^3r = 0. \quad (83)$$

Определим полный электрический дипольный момент диэлектрика. Элемент заряда $\rho_{\text{pol}} d^3r$ создает момент по отношению к некоторому центру $\vec{r} \rho_{\text{pol}} d^3r$, а полный вектор момента

$$\vec{P} = \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \rho_{\text{pol}} d^3r = - \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \text{div } \vec{P} d^3r. \quad (84)$$

Этот вектор не зависит от начальной точки, от которой откладываются векторы. Действительно, если принять другое начало, т. е.

заменить $\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{r}$, то $d^3r' = d^3r$,

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{r}' \rho_{\text{pol}} d^3r' = \int_{\mathcal{V}} (\vec{r}_0 + \vec{r}) \rho_{\text{pol}} d^3r = \vec{r}_0 \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{pol}} d^3r + \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \rho_{\text{pol}} d^3r = \vec{P}. \quad (85)$$

Преобразуем последний интеграл в (84). Для простоты рассмотрим координату x . Запишем тождество и вычислим интеграл по полному объему диэлектрика от обеих частей тождества, применив к интегралу от левой части формулу Остроградского—Гаусса:

$$\text{div}(x\vec{P}) = x \text{div} \vec{P} + P_x, \quad \int_{\mathcal{V}} \text{div}(x\vec{P}) = \oint_{\Sigma} x\vec{P}\vec{n} d^2\Sigma = \int_{\mathcal{V}} x \text{div} \vec{P} d^3r + \int_{\mathcal{V}} P_x d^3r. \quad (86)$$

Здесь Σ — поверхность, охватывающая весь объем диэлектрика, так что интеграл по ней равен нулю, так как вне его наведенного поля нет. Точно такие же равенства справедливы и для других координат. Таким образом,

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{r} \text{div} \vec{P} d^3r = - \int_{\mathcal{V}} \vec{P} d^3r, \quad \vec{P} = \int_{\mathcal{V}} \vec{P} d^3r, \quad (87)$$

откуда следует, что вектор \vec{P} можно рассматривать как электрический момент, рассчитываемый на единицу объема.

Теперь обратимся к граничным условиям. Для электрических напряженности и индукции в стационарном случае выполняются уравнения Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{ex}}, \quad (88)$$

которые можно переписать в интегральной форме

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \vec{l} ds = 0, \quad \oint_{\Sigma} \vec{D} \vec{n} d^2\Sigma = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho_{\text{ex}} d^3r. \quad (89)$$

Уравнения (89) полностью совпадают по виду с (76). Следовательно, касательные компоненты электрической напряженности при переходе через заряженную поверхность остаются непрерывными, а нормальные компоненты индукции терпят разрыв. Оба утверждения можно записать в векторной форме

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0, \quad (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \vec{n} = 4\pi\sigma_{\text{ex}}. \quad (90)$$

Точно такое же рассуждение приводит к соотношению для вектора поляризации: $(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\vec{n} = -\sigma_{\text{pol}}$, где σ_{pol} — поверхностная плотность индуцированного заряда. Но у границы диэлектрика вне его таких зарядов нет, так что, если считать, что диэлектрик находится в области (1), а нормаль внешняя, то $P_n = \sigma_{\text{pol}}$.

Наконец, и в случае поверхности раздела между двумя областями с различными диэлектрическими проницаемостями уравнения (89) остаются в силе, так что справедливы и условия (90). С учетом материального уравнения между индукцией и напряженностью граничные уравнения могут быть переписаны еще и так:

$$\left(\frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} - \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} \right) \times \vec{n} = 0, \quad (\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) \vec{n} = 4\pi \sigma_{\text{ex}}. \quad (91)$$

До сих пор рассматривались стационарные поля. Если электромагнитное поле со временем изменяется, то в уравнениях появляются производные по времени. Однако в реальных физических условиях ни сами характеристики поля, ни даже их производные не возрастают до бесконечности, а остаются ограниченными. Поэтому интегралы от них будут непрерывны во всех случаях. Следовательно, граничные условия от учета нестационарности полей не изменяют своего вида.

Прежде чем получать решения уравнений, обратимся к теории относительности.

Глава 2. Основы теории относительности

§ 1. Основные положения

1. *Принцип относительности.* В 1905 году Альберт Эйнштейн опубликовал статью, в которой сформулировал основные принципы теории относительности, названной впоследствии специальной (или частной) теорией в отличие от созданной в 1916 году тем же Эйнштейном общей теории относительности, которая по существу является теорией гравитации.

Следует отметить, что создателем (частной) теории относительности нельзя признать одного Эйнштейна. Заметный вклад в нее внесли Х.Лоренц, Г.Минковский, А.Пуанкаре и другие. Эйнштейн, можно сказать, завершил построение теории, придав ей наиболее четкую форму.

Основной принцип теории относительности утверждает, что все физические явления происходят одинаково в так называемых инерциальных системах отсчета. Инерциальными же системами называются такие системы координат, которые движутся относительно друг друга прямолинейно и равномерно, т. е. с постоянной скоростью, понимаемой в обычном смысле.

Ускоренные системы исключаются, так как постулируется, что ускорение любой наблюдатель всегда непременно заметит. Мы всегда ощущаем включение ускорения в транспорте. Даже если ускорение мало, оно рано или поздно обнаружится. Например, вращение Земли непосредственно нами не ощущается, однако оно проявляется в пассатах, вращении циклонов и антициклонов, а за длительный промежуток времени — в так называемом явлении Бэра: в северном полушарии у рек правый берег крутой, а левый отлогий.

В рамках основного принципа накладывается условие существования предельной скорости передачи сигналов, которая оказывается совпадающей со скоростью света в пустоте.

Одинаковость протекания явления означает и то, что уравнения, описывающие это явление, во всех системах отсчета должны иметь один и тот же вид, а переход в записи уравнений от одной системы к другой производится посредством линейной замены координат, включая и время, которое в разных системах может течь по-разному. Как говорят, все величины, соотношения и формулы должны быть ковариантны по отношению к таким преобразованиям.

Переход от одной системы отсчета к другой производился и в классической механике, но там преобразовывались только пространственные координаты, а время во всех системах текло одинаково (ньютоновская механика, преобразования Галилея). Впервые с необходимостью преобразования времени при переходе в другую систему отсчета столкнулся Лоренц, когда пытался найти преобразования, которые оставляют неизменным вид уравнений Максвелла. Совершенно ясно, что эти уравнения требовали именно релятивистских преобразований, так как электромагнитное поле и электромагнитные волны являются релятивистскими объектами.

Принцип ковариантности позволяет получать релятивистские обобщения нерелятивистских величин. Для такого обобщения нужно написать величину в явно релятивистском виде, а затем проверить, что в нерелятивистском пределе она принимает правильное значение. Такой же подход применим к соотношениям, формулам, уравнениям и т. п. и мы много раз будем им пользоваться.

2. *События и интервал.* Каждое явление или событие, происходящее в пространстве и во времени (в частности, объект: тело, материальная точка и т. п.), характеризуется в некоторой системе отсчета четырьмя числами: тремя пространственными координатами, образующими трехмерный вектор $\vec{r} = (x, y, z)$, и моментом времени t .

Четыре числа x, y, z, t объединяются вместе и составляют точку пространства Минковского, которую часто и называют событием. В каждой из систем должна быть произведена синхронизация отдельно, так что каждому событию сопоставлен свой момент времени. В разных системах одному событию могут сопоставляться разные моменты времени, и это является правилом, а не исключением. Время в разных системах и течет по-разному. Отсутствие всеобщего единого времени — характерная черта теории относительности.

Наряду с точками пространства Минковского рассматриваются векторы. Вектор, как обычно принимается в геометрии, — это упорядоченная пара точек. Пространство (точнее, пространство-время) четырехмерных векторов вида $\underline{r} = \{c(t_2 - t_1), (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\}$ также называем пространством Минковского. В частности, если одно событие поместить в начало координат (назовем его реперным), а у координат второго опустить индексы, то векторы, исходящие из начала, примут вид $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$. Назовем такие векторы векторами

положения. Векторы пространства Минковского можно умножать на вещественные числа и складывать.

Между двумя событиями определяется “расстояние”, точнее, квадрат интервала

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2. \quad (1)$$

Для векторов с одним концом в начале координат квадрат интервала записывается проще:

$$s^2 = c^2 t^2 - r^2. \quad (2)$$

В частности, для бесконечно малого вектора $\{cdt, d\vec{r}\}$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (3)$$

Если интервал равен нулю, это не означает, что события совпадают. Равенство нулю интервала между ними означает, что такие события могут быть соединены световым сигналом. Так как скорость света одинакова во всех системах отсчета, то равный нулю в одной системе интервал равен нулю во всех инерциальных системах. Величина не равных нулю интервалов между двумя фиксированными событиями также постоянна во всех системах отсчета. Это положение доказывается ниже.

По знаку квадрата интервалы классифицируются следующим образом. Если $s_{12}^2 > 0$, интервал называется времениподобным. Если, напротив, $s_{12}^2 < 0$, интервал пространственно подобен. Когда $s_{12}^2 = 0$, интервал нулевой.

3. Преобразование Лоренца. Преобразование, связывающее две инерциальные системы отсчета, должно быть линейным и коэффициенты его не должны зависеть от координат и времени. Самое общее преобразование может включать повороты осей координат, отражения осей и изменение направления отсчета времени, а также изменение пространственных и временных масштабов. Для того, чтобы выяснить принципиальные особенности теории относительности, достаточно ограничиться теми преобразованиями, которые связаны только с переходом из одной инерциальной системы в другую. Поэтому мы будем считать, что две системы, которые связывает преобразование, совершенно идентичны, а соответствующие их координатные оси параллельны. Все различие между ними сводится к тому, что одна система, в которой находится наблюдатель,

неподвижна по отношению к нему, а другая движется со скоростью, направление и величина которой задается трехмерным вектором \vec{V} . Удобно принять, что начальные моменты в обеих системах совпадают и в этот общий момент совпадают положения начал координат систем, а тем самым и все оси. Координаты и время в первой системе будем обозначать просто \vec{r}, t , а соответствующие величины во второй снабжать штрихом (рис. 3). Для краткости обычно вторую систему называют штрихованной, а исходную — нештрихованной. Коэффициенты такого преобразования могут зависеть только от скорости, так как это единственный имеющийся при этом параметр.

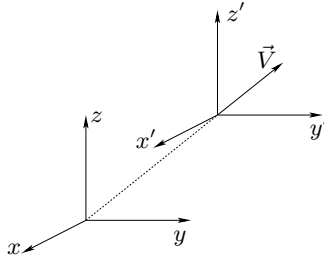


Рис. 3: Две инерциальные системы.

Тогда преобразование, выражающее пространственные координаты и время некоторого события в штрихованной системе через координаты того же события в нештрихованной системе, можно записать в виде

$$t' = \Gamma \left(t - \frac{\vec{V} \vec{r}}{c^2} \right), \quad \vec{r}' = \vec{r} - \Gamma \vec{V} t + (\Gamma - 1) \left(\vec{r} \frac{\vec{V}}{V} \right) \frac{\vec{V}}{V}. \quad (4)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (5)$$

так называемый лоренцевский множитель, который всегда больше единицы ($V \neq 0$). Очевидно, что преобразование (4) не меняет величины интервала, как и преобразование, включающее повороты (которое влияет только на пространственные координаты).

Преобразование координат и времени, связывающее события в различных инерциальных системах называется преобразованием Лоренца. Это преобразование Х. А. Лоренц подобрал из условия,

что они не изменяют вида уравнений Максвелла. По его собственному признанию он не понимал, что такое время t' , появляющееся в открытых им преобразованиях.

Для того, чтобы все координаты четырехмерного вектора имели одну размерность, обычно используется вместо времени t произведение ct . Кроме того, второе равенство в (4) часто удобнее записывать в таком виде, чтобы последнее слагаемое было перпендикулярно вектору скорости. С учетом всего этого преобразование Лоренца можно переписать в виде

$$ct' = \Gamma \left(ct - \frac{\vec{V}}{c} \vec{r} \right), \quad \vec{r}' = \Gamma (\vec{r} - \vec{V} t) + (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r} \right). \quad (6)$$

Отметим свойства такого преобразования. Его определитель равен единице. Обратное преобразование получается заменой вектора \vec{V} на $-\vec{V}$, так как нештрихованная система движется по отношению к штрихованной с противоположной скоростью. Преобразования Лоренца, как правило, некоммутативны, т. е. результат зависит от порядка перехода из одной системы в другую, а затем в третью. Они образуют группу.

Если вектор скорости параллелен одной из координатных осей, то формулы, определяющие преобразование, сильно упрощаются. Пусть $\vec{V} = V(0, 0, 1)$. Тогда

$$ct' = \Gamma(ct - Vz), \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \Gamma(z - Vt). \quad (7)$$

Такое преобразование называется частным преобразованием Лоренца.

Если величина скорости \vec{V} мала по сравнению со скоростью света, т. е. $V \ll c$, то можно положить $\Gamma \approx 1$ и преобразование (4) перейдет в

$$t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} t. \quad (8)$$

Это и есть преобразование Галилея, соответствующее механике Ньютона. Согласно ему во всех системах отсчета время единое, а координаты в двух системах отличаются просто на путь, пройденный началом штрихованной системы в нештрихованной.

Заметим, что при первоначальной формулировке теории относительности часто вместо времени вводилась мнимая координата

$x_4 = ict$ и изменялся знак квадрата интервала, что позволяло формально записать его как положительно определенный. Тогда преобразование получало вид четырехмерного ортогонального преобразования с одним мнимым углом. Впоследствии от этого отказались, так как этот прием приводил к необходимости поворотов на мнимые углы, затушевывая существо дела, кроме того, в релятивистской квантовой механике требовалось осуществлять комплексное сопряжение, а в координате x_4 этого делать нельзя.

§ 2. Простейшие эффекты

1. *Различие между интервалами.* Здесь продемонстрируем различие между времени- и пространственно-подобными интервалами.

а. *Времениподобный интервал.* Если в некоторой системе отсчета при фиксированных t и \vec{r} выполняется $s^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2 > 0$, то в системе, которая движется по отношению к первой со скоростью

$$\vec{V} = \frac{\vec{r}}{t}, \quad V = \frac{r}{t} < c, \quad \Gamma = \frac{ct}{s}, \quad (9)$$

для соответствующих времени и координат будет согласно (4)–(6)

$$t' = \frac{ct}{s} \left(t - \frac{\vec{r}^2}{c^2 t} \right) = \frac{s}{c}, \quad \vec{r}' = \frac{ct}{s} \left(\vec{r} - \frac{\vec{r}}{t} t \right) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в этой, штрихованной системе $s = ct'$, т.е. интервал свелся целиком к промежутку времени, а события произошли в одном месте. Такое положение возможно, когда вектор \vec{r} связан с одним телом. Тогда штрихованная система — это такая система, в которой положение тела в моменты 0 и t' совпадают. Частным случаем этого является то, что тело в штрихованной системе вообще не движется, т.е. система жестко связана с телом.

б. *Пространственно подобный интервал.* Пусть $s^2 < 0$. Теперь выберем штрихованную систему, движущуюся относительно исходной со скоростью

$$\vec{V} = c \frac{ct \vec{r}}{r}, \quad V = c \frac{ct}{r} < c, \quad \Gamma = \frac{r}{\sqrt{-s^2}}. \quad (11)$$

Тогда согласно преобразованию Лоренца

$$t' = \Gamma(t - t) = 0, \quad \vec{r}' = \Gamma \left(\vec{r} - c \frac{ct \vec{r}}{r} \right) = \frac{r}{\sqrt{-s^2}} \frac{\vec{r}}{r} (r^2 - c^2 t^2) = \sqrt{-s^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (12)$$

В этом случае два события произошли в штрихованной системе одновременно, а интервал $s^2 = -(\vec{r}')^2$.

в. Нулевой интервал. Тогда, как отмечалось выше, из одного события можно послать в другое световой сигнал. Все события, которые можно соединить световым сигналом с выбранным, располагаются на конусе в четырехмерном пространстве, который называется световым конусом и разделяет области времени- и пространственно подобных интервалов.

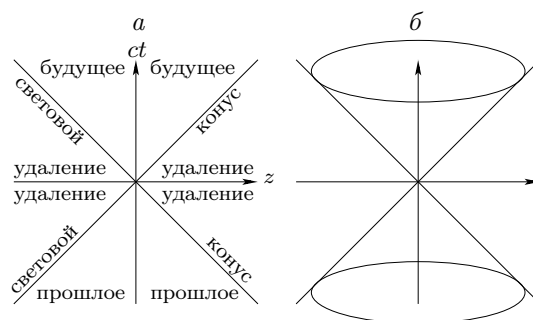


Рис. 4: Характер промежутков в пространстве-времени.

На рис. 4а представлено двумерное сечение четырехмерного пространства, вертикальная ось соответствует координате ct , а горизонтальная — пространственным координатам. Световой конус изображен двумя пересекающимися (более жирными) прямыми. Рис. 4б дает более наглядное представление о конусе, на этом рисунке три пространственные координаты изображены двумя (изобразить конус в четырехмерном пространстве трехмерные люди не могут). Внутри светового конуса при отрицательных t находится абсолютное прошлое, а при положительных — абсолютное будущее по отношению к реперному событию. Вне конуса располагаются события, которые абсолютно удалены от этого события.

2. *Лоренцево замедление времени.* Пусть два события происходят в штрихованной системе в одной точке, т. е. $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_2$. Это зна-

чит, что интервал между ними времени подобен. Выразим моменты их осуществления в нештрихованной системе через штрихованные координаты:

$$t_1 = \Gamma \left(t'_1 + \frac{\vec{V} \vec{r}'_1}{c^2} \right), \quad t_2 = \Gamma \left(t'_2 + \frac{\vec{V} \vec{r}'_2}{c^2} \right). \quad (13)$$

Поскольку их штрихованные пространственные координаты совпадают, то

$$t_2 - t_1 = \Gamma(t'_2 - t'_1). \quad (14)$$

Из последнего равенства следует, что разность в скобках всегда меньше, чем слева. Таким образом, промежуток времени между событиями в системе, в которой они происходят в одной точке, самый малый по сравнению с промежутками во всех других системах. Если с двумя событиями связать одно и то же тело (или точку), то можно сказать, что в той системе, где тело покоится, время для него течет медленнее всего. Такая выделенная система называется собственной по отношению к рассматриваемому телу, а время в этой системе — его собственным временем.

Заметим, что все инерциальные системы полностью эквивалентны только до тех пор, пока мы не выделили среди них класс систем, связанных с каким-либо телом — его собственные системы.

Рассматриваемый эффект называется лоренцевым замедлением времени. Его можно вывести и иначе. Записав квадрат бесконечно малого интервала движения тела, т. е.

$$c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 d\tau^2, \quad (15)$$

мы получаем связь дифференциала собственного времени тела (в системе, где оно покоится,) со временем для него в любой другой системе, где его скорость равна по модулю v , а именно:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < dt. \quad (16)$$

Собственное время тела меньше всех других. Заметим, что скорость \vec{V} и множитель Лоренца Γ системы отсчета мы обозначаем прописными буквами, а эти же величины для тела — $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ и $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — строчными буквами.

На тему путешествий с большой скоростью на длительные периоды времени с возвратом после того, как в исходном месте прошло времени значительно больше, чем для путешественника, имеется много рассуждений и фантазий. Однако реальное осуществление такого путешествия сомнительно из-за необходимости затрат больших энергий на разгон, а затем торможение, и выдерживания неизбежных при этом ускорений.

3. *Лоренцево сокращение.* Пусть теперь два события происходят в один и тот же момент в нештрихованной системе. Тогда для координат их в штрихованной системе имеем

$$\vec{r}'_1 = \Gamma(\vec{r}_1 - \vec{V} t_1) + (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r}_1 \right), \quad (17)$$

$$\vec{r}'_2 = \Gamma(\vec{r}_2 - \vec{V} t_2) + (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times \vec{r}_2 \right). \quad (18)$$

Так как $t_1 = t_2$, то после раскрытия двойного векторного произведения с множителем -1 (в разности $\Gamma - 1$) разность их координат можно записать в виде

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \left(\frac{\vec{V}}{V} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right) \times \frac{\vec{V}}{V} + \Gamma \left(\frac{\vec{V}}{V} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right) \frac{\vec{V}}{V}. \quad (19)$$

Так как разность векторов в нештрихованной системе можно представить в виде суммы двух слагаемых — перпендикулярного и параллельного скорости (что проверяется раскрытием двойного векторного произведения):

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(\frac{\vec{V}}{V} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right) \times \frac{\vec{V}}{V} + \left(\frac{\vec{V}}{V} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right) \frac{\vec{V}}{V}, \quad (20)$$

то видно, что составляющие этих разностей, ортогональные вектору скорости, равны, в то время как проекции их на скорость отличаются на множитель Γ .

Аналогичные соотношения получаются, если считать, что события одновременны в штрихованной системе. Для вывода, как всегда, надо заменить \vec{V} на $-\vec{V}$.

Полученным соотношениям дается следующая интерпретация. Будем считать нашими событиями два конца одного стержня. Пусть он покоится в штрихованной системе, расположен вдоль

оси z и вместе с системой движется со скоростью $\vec{V} = (0, 0, V)$. Там его длину $l_0 = z'_2 - z'_1$ можно измерять в любой момент. В нештрихованной же системе наблюдатель должен измерять длину стержня $l = z_2 - z_1$, прикладывая измерительный прибор в один и тот же момент времени к обоим концам $t_2 = t_1$. Тогда $l_0 = \Gamma l$. Из написанных формул следует, что длина стержня самая большая в той системе, где он покоится. В системе координат, в которой стержень движется, размер его проекции на скорость меньше в Γ раз. Это и есть лоренцево сокращение. В нашем рассуждении скорость стержня направлена вдоль его длины, тогда сокращение длины стержня наибольшее. Максимальная длина стержня (в его собственной системе отсчета) называется его собственной длиной. Конечно, с самим стержнем ничего не случается, сокращение наблюдается при измерении.

Так как сокращение происходит только в одном измерении, то объем движущегося тела сокращается тоже в Γ раз. Наибольший объем тела, который оно имеет в той системе, где покоится, называется его собственным объемом. Понятно, что в собственной системе отсчета тело имеет наименьшую плотность.

Элемент пространственного объема также самый большой в системе, где он покоится. Собственный элемент d^3r_0 объема связан с элементом в системе, где он движется, равенством

$$d^3r_0 = \Gamma d^3r. \quad (21)$$

4. *Сложение скоростей.* Записав преобразование Лоренца от штрихованной системы к нештрихованной в дифференциальной форме:

$$d\vec{r} = \Gamma(d\vec{r}' + \vec{V} dt') + (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V} \times \left(\frac{\vec{V}}{V} \times d\vec{r}' \right), \quad dt = \Gamma \left(dt' + \frac{\vec{V}}{c^2} d\vec{r}' \right), \quad (22)$$

поделим первое равенство на второе, а получившиеся числитель и знаменатель — на $\gamma dt'$. Так как $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ и $d\vec{r}'/dt' = \vec{v}'$ — скорости движения в нештрихованной и штрихованной системах соответственно, то

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{V} + (1 - 1/\Gamma)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{v}')/V^2}{1 + \vec{V} \vec{v}'/c^2}. \quad (23)$$

Пусть \vec{v} и \vec{v}' — скорости движения одного тела, а \vec{V} — прежнему скорость штрихованной системы относительно нештрихованной. Тогда равенство (23) представляет закон сложения скоростей в релятивистской механике. Тело, движущееся со скоростью \vec{v}' в системе, которая сама движется в другой системе со скоростью \vec{V} , в этой последней будет иметь скорость \vec{v} согласно (23).

Легко проверить, что при сложении любых скоростей, не превосходящих скорости света, результирующая скорость тоже не превзойдет скорости света. Напротив, сложение любой скорости со скоростью света дает скорость света.

Закон сложения скоростей сильно упрощается и становится наглядным, если скорости движения тела и системы коллинеарны. Тогда последнее слагаемое в числителе (23) исчезает, все три скорости направлены вдоль одной прямой и это равенство можно записать в скалярном виде:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}, \quad (24)$$

где величины v , v' и V могут, вообще говоря, быть как положительными, так и отрицательными. Если положить $v = c \cdot \text{th } \chi$, $v' = c \cdot \text{th } \chi'$ и $V = c \cdot \text{th } \chi_0$, то формула (24) превратится в формулу гиперболического тангенса от суммы аргументов:

$$\text{th } \chi = \frac{\text{th } \chi' + \text{th } \chi_0}{1 + \text{th } \chi' \text{th } \chi_0} = \text{th}(\chi' + \chi_0). \quad (25)$$

Эту формулу в начале становления теории относительности интерпретировали так: сложение скоростей равносильно сложению мнимых углов при замене скоростей тангенсами ($\text{tg } \chi = i \text{th}(i\chi)$).

Для полноты приведем формулу сложения перпендикулярных скоростей. Если $\vec{v}' \perp \vec{V}$, то

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'/\Gamma. \quad (26)$$

Здесь поправка к простому сложению скоростей имеет порядок V^2/c^2 .

§ 3. Скаляры и векторы

1. *Скаляры.* Скалярами называются инварианты преобразования Лоренца, т. е. величины, одинаковые во всех инерциальных системах координат.

Скаляры — это не просто постоянные. Скорость света является мировой константой, так же как заряд и масса электрона, постоянная Планка и другие. Скаляры — это величины, которые в разных системах отсчета имеют одинаковый вид (подобные выражения в координатах) и, кроме того, одинаковое значение. Примерами являются квадрат интервала s^2 и элемент четырехмерного объема $d^4r = c dt d^3r$ (и следовательно, сам четырехмерный объем). Их инвариантность может быть проверена непосредственно, исходя из формул (4). Трехмерное расстояние и трехмерный объем скалярами не являются.

Как уже говорилось, если в пространстве имеется некоторое тело или материальная точка (нулевого объема), то из всех систем отсчета выделяется одна (с точностью до поворота вокруг начала координат), которая жестко связана с этим телом — собственная его система. Все величины в этой системе отсчета называются также собственными по отношению к этому телу. В частности, его собственный трехмерный объем и собственное время (в отличие от их значений в других инерциальных системах) являются однозначными величинами, что следует из инвариантности их элементов $d\tau = dt/\Gamma$ и $d^3r_0 = \Gamma d^3r$ (их произведение — уже упоминавшийся скаляр d^4r/c).

2. *Векторы.* Векторами в теории относительности называются элементы четырехмерного пространства, которое мы для простоты будем называть также пространством Минковского. Векторы, как и точки, задаются четырьмя числами-координатами: нулевой (или временной) и тремя пространственными. Векторы рассматриваются как свободные, т. е. не прикрепляются к определенной точке пространства.

Обычно составляющие четырехмерных векторов перечисляют, нумеруя их цифрами 0, 1, 2, 3 или греческими буквами, причем индекс 0 относится к временной координате, а три других — к пространственным, объединяемым латинскими буквами, т. е.

$$\underline{a} = \{a^\mu\} = \{a^0, a^j\} = \{a^0, \vec{a}\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (27)$$

$$\vec{a} = (a^1, a^2, a^3) = (a^j) = (a_x, a_y, a_z). \quad (28)$$

Чтобы четыре числа составляли вектор, они должны при переходе от одной инерциальной системы к другой (от нештрихованной к штрихованной или обратно) преобразовываться согласно преоб-

разованию Лоренца, т. е. так же, как координаты событий:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \cdot \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \vec{a} - a_0 \Gamma \vec{V}/c + (\Gamma - 1)(\vec{V} \cdot \vec{a})\vec{V}/V^2. \quad (29)$$

Это преобразование также можно записать с выделенной частью, перпендикулярной скорости:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \cdot \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \Gamma(\vec{a} - a_0 \vec{V}/c) + (\Gamma - 1)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{a})/V^2. \quad (30)$$

При переходе в другую систему отсчета изменяются составляющие четырехмерного вектора, сам вектор не изменяется. Однако для упрощения записи результата преобразования Лоренца мы будем отмечать соответствующими индексами (штрихами) обозначения не только составляющих, но и самого четырехмерного вектора.

Наряду с контравариантными составляющими используются ковариантные, у которых индексы записываются снизу: a_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Смысл введения двух видов координат станет ясен из следующего рассуждения.

3. *Координаты в неортогональных системах.* Координаты двух видов появляются уже в обычном, евклидовом пространстве, если используется не декартова система ортонормальных ортов, а неортогональные орты. Продемонстрируем различие координат на примере двумерного пространства (плоскости).

Пусть между двумя ортами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образован угол α , т. е. $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \alpha$. Произвольный вектор \vec{a} можно охарактеризовать по отношению к указанным ортам двумя способами. Один способ — разложить вектор по ортам (рис. 5а), т. е. представить его в виде

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2. \quad (31)$$

Это будут контравариантные координаты. Другой способ — спроецировать вектор на орты (рис. 5б) и ковариантными координатами считать проекции (вместе с их знаками):

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1 = a^1 + a^2 \cos \alpha, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2 = a^1 \cos \alpha + a^2. \quad (32)$$

Легко проверить, что квадрат вектора может быть представлен в следующих формах

$$\vec{a}^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + 2 \cos \alpha a^1 a^2 = a^1 a_1 + a^2 a_2 = g_{mn} a^m a^n, \quad (33)$$

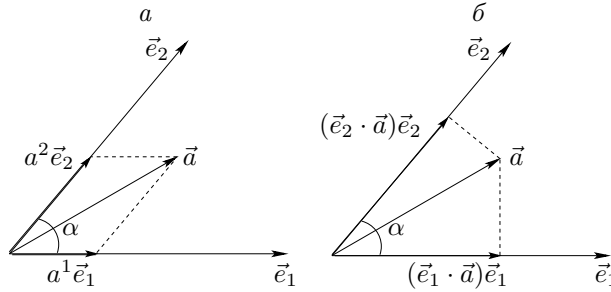


Рис. 5: Контравариантные и ковариантные координаты вектора: a — разложение на составляющие, b — проецирование.

где по повторяющимся индексам $m, n = 1, 2$ подразумевается суммирование, а так называемый метрический тензор представлен компонентами

$$g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = \cos \alpha. \quad (34)$$

Конечно, если угол между ортами прямой $\alpha = \pi/2$, то $\cos \alpha = 0$, внедиагональные элементы метрического тензора тоже нули, так что ковариантные и контравариантные координаты совпадают.

4. *Ковариантные и контравариантные составляющие.* Так как квадрат интервала пространства Минковского содержит только единицу и минус единицы, то отличные от нуля элементы метрического тензора этого пространства

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1, \quad (35)$$

а все внедиагональные элементы равны нулю. Поэтому ковариантные составляющие вектора \underline{a} , обозначаемые $\{a_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, отличаются от контравариантных тем, что пространственные координаты имеют противоположный знак, т. е. $a_0 = a^0, a_k = -a^k, k = 1, 2, 3$. Мы будем пользоваться, в основном, контравариантными составляющими векторов, индексы которых пишутся сверху у обозначения вектора. Ввиду совпадения нулевых составляющих с верхним и нижним индексами в дальнейшем нулевой индекс будем писать внизу, а у пространственных часто будем указывать не номера, а оси проецирования. Как правило, четырехмерные векторы мы будем записывать в виде $\underline{a} = \{a_0, \vec{a}\}$, перечисляя их контравариантные составляющие.

5. *Скалярное произведение.* Для векторов пространства Минковского определяется скалярное произведение. Если два вектора заданы своими координатами: $\underline{a} = \{a^\mu\} = \{a_0, \vec{a}\}$ и $\underline{b} = \{b^\mu\} = \{b_0, \vec{b}\}$, то их скалярное произведение и квадраты мы будем записывать так:

$$\underline{a} \underline{b} = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b}, \quad \underline{a}^2 = a_0^2 - \vec{a}^2, \quad \underline{b}^2 = b_0^2 - \vec{b}^2. \quad (36)$$

Скалярное произведение записывают также в виде $\underline{a} \underline{b} = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, где по повторяющимся индексам (верхнему и нижнему) подразумевается суммирование, т. е.

$$\underline{a} \underline{b} = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a_0 b_0 - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z), \quad (37)$$

что совпадает с (36).

Легко показать, что скалярное произведение векторов и, в частности, квадрат вектора являются скалярами, чем и объясняется название произведения.

Из-за минуса в определении (36) скалярное произведение не является положительно определенным, т. е. квадрат вектора может иметь любой знак, а равенство нулю квадрата вектора не означает, что все его компоненты равны нулю. Поэтому вводится классификация векторов, как и интервалов. Именно, если $\underline{a}^2 > 0$, вектор \underline{a} называется времениподобным, если $\underline{a}^2 < 0$, пространственно подобным, если $\underline{a}^2 = 0$, нулевым.

Ввиду неположительности скалярного произведения нельзя ввести понятия угла между четырехмерными векторами. Однако, если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то говорят, что они ортогональны.

6. *Примеры векторов.*

1) Первым примером вектора служит вектор положения $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$. Его квадрат — квадрат интервала $\underline{r}^2 = c^2 t^2 - \vec{r}^2 = s^2$.

Частицы (или материальные точки) движутся по кривым в четырехмерном пространстве, которые называют мировыми линиями. Дифференциал вектора положения $d\underline{r} = \{cdt, d\vec{r}\}$, взятый вдоль мировой линии, — тоже вектор. Квадрат этого вектора представляет дифференциальную форму интервала

$$(d\underline{r})^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (38)$$

Такой интервал пространственно подобен. Выше были рассмотрены и времениподобные интервалы.

2) Другой вектор, который возникает сразу, — это четырехмерный градиент

$$\underline{\nabla} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right\}. \quad (39)$$

То обстоятельство, что перед трехмерным градиентом надо поставить минус, проверяется непосредственно — иначе это не будет четырехмерным вектором. Однако, в такой необходимости можно убедиться и иначе: скалярное произведение дифференциала вектора положения и вектора градиента согласно определению (36)

$$d\underline{r} \underline{\nabla} = dt \frac{\partial}{\partial t} + d\vec{r} \vec{\nabla} = d \quad (40)$$

есть полный дифференциал и, значит, как известно из математического анализа, инвариант. Все это объясняется тем, что вектор градиента без минуса — ковариантный, а мы записываем контравариантные векторы. Квадрат вектора градиента

$$\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square \quad (41)$$

представляет собой оператор Даламбера.

Компоненты вектора градиента будем также обозначать с индексами:

$$\{\nabla_\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} \text{ или } \{\nabla^\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}. \quad (42)$$

§ 4. Скорость, импульс и ускорение

1. *Скорость.* По аналогии с трехмерной скоростью тела $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ четырехмерная скорость определяется как отношение дифференциалов вектора положения и времени. Однако, чтобы скорость получилась четырехмерным вектором, надо четырехмерный вектор делить (или умножать) на скаляр, т.е. в качестве времени надо брать не время в какой-то произвольной системе отсчета, а собственное время для данного тела (материальной точки, частицы). Таким образом, по определению

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \{ct, \vec{r}\} = \{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \gamma \{c, \vec{v}\}, \quad (43)$$

где \vec{v} — обычная трехмерная скорость. Множитель γ обязательно должен входить в составляющие вектора, но мы часто будем писать его вне фигурных скобок.

Квадрат четырехмерной скорости

$$\underline{v}^2 = c^2 > 0, \quad (44)$$

так что вектор скорости времениподобен.

Часто мы будем использовать обозначение для отношения скорости к скорости света и называть его безразмерной (трехмерной или четырехмерной) скоростью

$$\underline{\beta} = \frac{v}{c} = \{\gamma, \gamma \vec{\beta}\}, \quad \underline{\beta}^2 = 1. \quad (45)$$

2. *Импульс.* Импульс — это просто скорость, умноженная на массу, но для его составляющих вводятся специальные обозначения:

$$\underline{p} = m\underline{v} = m\{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \{p_0, \vec{p}\}, \quad p_0 = mc\gamma, \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma. \quad (46)$$

Ясно, что вектор импульса тоже времениподобен:

$$\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 > 0. \quad (47)$$

Из последнего равенства вытекает выражение нулевой составляющей через пространственный импульс

$$p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + p^2} = mc\gamma, \quad p = |\vec{p}|, \quad (48)$$

а из него выражение лоренцевского множителя через тот же импульс

$$\gamma = \sqrt{1 + (p/mc)^2}. \quad (49)$$

С помощью (49) можно выразить и скорость через импульс:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = c \frac{\vec{p}}{p_0} = c \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}. \quad (50)$$

Нулевая составляющая вектора импульса — это с точностью до множителя — энергия $\mathcal{E} = cp_0$. Удобно ввести обозначение для кинетической энергии релятивистской частицы

$$\mathcal{E}_{\text{kin}}(p) = p_0 c - mc^2 = mc^2(\gamma - 1), \quad p = |\vec{p}|, \quad (51)$$

т. е. вычитать из полной энергии энергию покоя mc^2 . Отметим, что сразу после создания теории относительности большой резонанс вызвало соотношение $E_{\text{kin}}(p) = cp_0 = mc^2\gamma$ между двумя различными физическими величинами — энергией и массой — и массой стали называть произведение $m\gamma$ (масса движения). Мы под термином масса всегда будем понимать массу покоя m .

Легко проверить, что абсолютная величина трехмерной скорости — это производная от энергии по импульсу:

$$v = |\vec{v}| = \frac{d\mathcal{E}(p)}{dp} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{kin}}(p)}{dp} = c \frac{d\sqrt{m^2c^2 + p^2}}{dp} = \frac{cp}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}. \quad (52)$$

Заметим, что четырехмерные векторы импульса (и скорости) не составляют линейного пространства, так как их квадраты фиксированы, а сумма таких векторов нужным квадратом не обладает. Аналогично единичные векторы (орты) также не составляют линейного пространства.

3. Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

1) Если $v \ll c$, т. е. частица движется со скоростью гораздо меньшей скорости света, то $\gamma \sim 1$ и $p \ll mc$. Тогда в нерелятивистском пределе получается

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \mathcal{E}_{\text{kin}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2c^2} - 1 \right) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}, \quad (53)$$

т. е. обычные нерелятивистские соотношения.

2) При $v \sim c$ лоренцевский множитель велик $\gamma \gg 1$, а $p \gg mc$. Тогда $\mathcal{E}_{\text{kin}} \sim pc$.

Соотношение (52) сохраняется в обоих предельных случаях.

4. *Ускорение.* Оно определяется по аналогии со скоростью

$$\underline{w} = \frac{dv}{d\tau} = \gamma \frac{dv}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma \{c, \vec{v}\}. \quad (54)$$

Найдем сначала производную от лоренцевского множителя. При дифференцировании удобно использовать очевидное равенство $\vec{v}^2 = v^2$. Имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \underline{w}}{c^2}. \quad (55)$$

Тогда получаем

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \frac{\vec{v} \vec{w}}{c}, \vec{w} + \gamma^2 \frac{\vec{v} \vec{w}}{c^2} \vec{v} \right\}. \quad (56)$$

Как и скорость, ускорение удобно записать через вектор $\vec{\beta}$:

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma^2 (\vec{\beta} \vec{w}) \vec{\beta} \right\}. \quad (57)$$

Вектор ускорения, как нетрудно убедиться, ортогонален вектору скорости. Действительно, если перемножить скалярно (45) и (57), то получится

$$\underline{\beta} \underline{w} = \gamma^3 \left(\gamma^2 \vec{\beta} \vec{w} - \vec{\beta} \vec{w} - \gamma^2 \beta^2 \vec{\beta} \vec{w} \right) = 0. \quad (58)$$

Это естественное соотношение для вектора скорости, квадрат которого не зависит от времени. Его легко получить, если продифференцировать равенство (44) или (45) по собственному времени. Аналогично трехмерная скорость тела, движущегося по поверхности шара, перпендикулярна центростремительному или центробежному или центростремительному ускорению, имеющему радиальное направление.

5. *Квадрат ускорения.* Эта величина, интересная сама по себе, используется в теории излучения. Поэтому сделаем следующую выкладку.

$$\begin{aligned} \underline{w}^2 &= \gamma^4 \left[\gamma^4 (\vec{\beta} \vec{w})^2 - \vec{w}^2 - \gamma^4 \beta^2 (\vec{\beta} \vec{w})^2 - 2\gamma^2 (\vec{\beta} \vec{w})^2 \right] = \\ &= \gamma^4 \left[-\vec{w}^2 - \gamma^2 (\vec{\beta} \vec{w})^2 \right] = \gamma^6 \left[-\vec{w}^2 + \beta^2 - (\vec{\beta} \vec{w})^2 \right] = \gamma^6 \left[-\vec{w}^2 + (\vec{\beta} \times \vec{w})^2 \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Из третьего выражения в цепочке равенств видно, что вообще говоря, вектор ускорения пространственно подобен. Однако, если пространственное ускорение $\vec{w} = 0$, то и четырехмерный вектор нулевой.

6. *Относительная скорость.* Это важное понятие очень просто вводится в обычной нерелятивистской механике: там относительная скорость равна просто разности скоростей. Ясно, что такое определение не подходит в теории относительности.

Как и в нерелятивистской механике, необходимо различать порядок частиц при определении относительной скорости. Назовем

скоростью второй частицы относительно первой скорость ее в той системе отсчета, где первая покоится.

Пусть скорости частиц в какой-то системе отсчета равны соответственно

$$\underline{v}_1 = \gamma_1 \{c, \vec{v}_1\}, \quad \underline{v}_2 = \gamma_2 \{c, \vec{v}_2\}. \quad (60)$$

Применим преобразование Лоренца со скоростью $\vec{V} = \vec{v}_1$, т.е. перейдем в систему покоя первой частицы. В этой системе

$$\begin{aligned} \underline{v}_{11} &= \left\{ \gamma_1^2 (c - \vec{v}_1^2/c), \gamma_1^2 (\vec{v}_1 - \vec{V}) \right\} = \{c, 0\}, \quad (61) \\ \underline{v}_{21} &= \left\{ \gamma_1 \gamma_2 (c - \vec{v}_1 \vec{v}_2/c), \gamma_2 \vec{v}_2 - \gamma_1 \gamma_2 \vec{v}_1 + (\gamma_1 - 1) \gamma_2 (\vec{v}_1 \vec{v}_2) \vec{v}_1 / v_1^2 \right\}. \quad (62) \end{aligned}$$

Последнее выражение можно записать в виде $\underline{v}_{21} = \gamma_{21} \{c, \vec{v}_{21}\}$, где γ_{21} — лоренцевский множитель, соответствующий скорости второй частицы в системе покоя первой:

$$\gamma_{21} = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \vec{v}_1 \vec{v}_2 / c^2) = \underline{v}_1 \underline{v}_2 / c^2 = \gamma_r = \gamma_{12}. \quad (63)$$

На самом деле он не зависит от порядка частиц и является релятивистским инвариантом, так как выражается через скалярное произведение их четырехмерных скоростей. Для трехмерной же скорости второй частицы относительно первой, исключив из ее выражения

$$v_1^2 = c^2 (1 - 1/\gamma_1^2), \quad \vec{v}_1 \vec{v}_2 = c^2 (1 - \gamma_r / \gamma_1 \gamma_2), \quad (64)$$

найдем

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_2}{\gamma_r} \left[\vec{v}_2 - \gamma_1 \vec{v}_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_r}{\gamma_2} \right) \vec{v}_1 \right] = \frac{1}{\gamma_r} \left(\gamma_2 \vec{v}_2 - \gamma_1 \frac{\gamma_2 + \gamma_r}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 \right). \quad (65)$$

Можно проверить, что квадрат относительной скорости в виде (65) выражается через лоренцевский множитель γ_r : $v_{21}^2 = |\vec{v}_{21}|^2 =$

$$= \frac{c^2}{\gamma_r^2} \left[\gamma_2^2 - 1 + \frac{\gamma_r^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_r \gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1 - 1) - 2 \frac{\gamma_r + \gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_r) \right] = c^2 (1 - 1/\gamma_r^2), \quad (66)$$

и не зависит от системы координат и от порядка частиц. Величину этой скорости можно записать в другом виде, выразив ее через трехмерные скорости частиц:

$$v_r = v_{12} = v_{21} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_r^2}} = c \frac{\sqrt{c^2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}}{c^2 - \vec{v}_1 \vec{v}_2}. \quad (67)$$

Если скорость одной из частиц равна скорости света, то и относительная скорость равна c . Если скорости параллельны, то

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_r} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \quad (68)$$

При перпендикулярных скоростях

$$\gamma_r = \gamma_1 \gamma_2, \quad \vec{v}_{21} = \vec{v}_2 / \gamma_1 - \vec{v}_1. \quad (69)$$

Сумма взаимных относительных скоростей

$$\vec{v}_{12} + \vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_r} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right) - \frac{\gamma_r - 1}{\gamma_r} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right), \quad (70)$$

конечно, симметрична относительно частиц, но равна нулю только в нерелятивистском пределе (приближенно), а также в случае, если скорости обеих частиц совпадают ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, так как тогда $\gamma_1 = \gamma_2$, $\gamma_r = 1$).

§ 5. Импульс фотона

1. *Импульс фотона.* Здесь мы считаем фотон просто частицей, движущейся со скоростью света. Если фотон летит в некоторой системе отсчета (назовем ее системой наблюдателя или нештрихованной) в направлении вектора \vec{l} , то его путь можно охарактеризовать радиусом-вектором

$$\vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}_0 + c\vec{l}(t_{\text{ph}} - t_0), \quad (71)$$

где \vec{r}_0 — место фотона в начальный момент отсчета его времени $t_{\text{ph}} = t_0$. Можно образовать и четырехмерный вектор

$$\underline{r}_{\text{ph}} = \{ct_{\text{ph}}, \vec{r}_{\text{ph}}\} = \left\{ ct_{\text{ph}}, \vec{r}_0 + c\vec{l}(t_{\text{ph}} - t_0) \right\}. \quad (72)$$

Мы можем формально продифференцировать вектор (72) по времени:

$$\frac{d\underline{r}_{\text{ph}}}{dt_{\text{ph}}} = \left\{ c, c\vec{l} \right\}. \quad (73)$$

Однако в результате не получится четырехмерный вектор, так как время в определенной системе отсчета не является инвариантом.

Определения предыдущего параграфа годятся только для частиц с массой покоя, отличной от нуля. Фотон же имеет нулевую массу покоя, для него не существуют собственное время, собственная системы отсчета, и он обязан мчаться в пространстве со скоростью света в любой системе. Для этой частицы невозможно ввести понятие четырехмерной скорости, так как лоренцевский множитель для нее обращается в бесконечность. Следовательно невозможно ввести и импульс так, как это было сделано выше.

Тем не менее, фотон имеет энергию и импульс. Если частота фотона ν , а круговая частота $\omega = 2\pi\nu$, то его энергия равна $h\nu = \hbar\omega$ согласно предположению М. Планка. Здесь $h = 6.67 \cdot 10^{-27}$ и $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \cdot 10^{-27}$ в единицах г·см²/с. А.Эйнштейном был определен и импульс фотона \vec{k} , величина которого, как у ультрарелятивистской частицы, равна энергии, деленной на скорость света, $h\nu/c = \hbar\omega/c$, а направление совпадает с направлением движения фотона.

Тем самым оказывается возможным ввести четырехмерный вектор импульса фотона

$$\underline{k} = \{k, \vec{k}\} = \frac{h}{c} \{\nu, \nu \vec{l}\}, \quad k = \frac{h\nu}{c}, \quad \vec{k} = k \vec{l}, \quad |\vec{l}| = 1. \quad (74)$$

Импульс и энергия фотона являются существенно квантовыми величинами и их выражения содержат постоянную Планка. Если желательно оставаться в рамках классической электродинамики, то вместо векторов импульса можно использовать волновые векторы, а вместо энергии — волновое число:

$$\underline{\varkappa} = \frac{\underline{k}}{\hbar}, \quad \varkappa = \frac{k}{\hbar} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}, \quad \vec{\varkappa} = \frac{\vec{k}}{\hbar} = \varkappa \vec{l}. \quad (75)$$

Здесь $\lambda = c/\nu$ — длина волны, соответствующая частоте ν , а $\tilde{\lambda} = \lambda/2\pi$. Классические величины отличаются от квантовых на постоянные множители и релятивистские свойства у них те же самые.

Применение к импульсу фотона преобразования Лоренца выявляет два важных эффекта.

2. *Эффект Доплера.* Запишем формулу преобразования от нештрихованной системы отсчета к штрихованной, движущейся относительно первой со скоростью $\vec{V} = V\vec{e}$. Как и выше, пусть единичные векторы, в направлении которых летит фотон, обозначаются

\vec{l} и \vec{l}' , а углы, образуемые этими ортами с вектором скорости, θ и θ' . Тогда нулевые составляющие вектора импульса фотона, т. е. его величины или, что в сущности то же самое, его частоты (или энергии) преобразуются следующим образом:

$$\nu' = \nu \Gamma \left(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{V}}{c} \right) = \nu \Gamma \left(1 - \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{l} \right), \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{\Gamma(1 - V \cos \theta / c)}. \quad (76)$$

Обратное преобразование получается, как обычно, заменой скорости на противоположную ($\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$):

$$\nu = \nu' \Gamma \left(1 + \frac{\vec{l}' \cdot \vec{V}}{c} \right) = \nu' \Gamma \left(1 + \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{l}' \right), \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{\Gamma(1 + V \cos \theta' / c)}. \quad (77)$$

Приведенные формулы, если отбросить лоренцевский множитель Γ , выражают обычный классический эффект, установленный в 1842 году Х. Доплером. Если светящийся объект летит к наблюдателю, частота света увеличивается, если от него — уменьшается. Наличие множителей Γ показывает, что даже при перпендикулярном по отношению к наблюдателю движении фотона, происходит сдвиг (увеличение) его частоты. Это явление называется поперечным эффектом Доплера. Он не существует согласно классической теории. Поскольку его поправка имеет порядок V^2/c^2 , т. е. второго порядка малости по отношению к поправке, пропорциональной скорости V/c , поперечный эффект не был замечен до создания теории относительности.

Линейный же эффект имеет простое объяснение, которое подходит и для звуковых колебаний и заключается в том, что движущийся наблюдатель в зависимости от направления своего движения встречает больше или меньше волн (периодов), чем неподвижный. То же происходит, если движется источник. Для звука такое объяснение было известно давно, так как эффект легко замечен даже при не очень больших скоростях.

Дробь, равная отношению частот в (76)

$$D(V, \theta) = \frac{1}{\Gamma(1 - V \cos \theta / c)}, \quad (78)$$

называется множителем Доплера или доплер-фактором. Этот множитель появляется во многих выражениях для разных величин.

Отметим его значения “вперед” и “назад”, а также их отношение:

$$D(V, 0) = \sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}, \quad D(V, \pi) = \frac{1}{D(V, 0)} = \sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}}, \quad (79)$$

$$\frac{D(V, 0)}{D(V, \pi)} = D^2(V, 0) = \frac{1+V/c}{1-V/c}. \quad (80)$$

На рис. 6 представлены диаграммы зависимости этого множителя от угла θ при скоростях $V/c = 0, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995$. Соответствующие значения лоренцевского множителя $\Gamma = 1.67, 2.29, 3.20, 5.03, 7.09, 10.01$, а значения фактора “вперед” $D(V, 0) = 1, 4.36, 6.24, 9.95, 14.11$ и 19.97 . Ширина диаграмм по вертикали равна 2 независимо от значения V/c и достигается между точками, соответствующими углам $\theta = \pm \arccos(V/c) = \pm \arcsin(1/\Gamma)$.

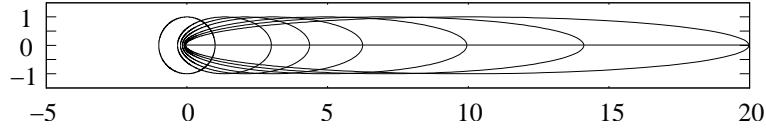


Рис. 6: Зависимость доплер-фактора от направления при скоростях источника $V/c = 0, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995$.

При скоростях, близких к скорости света, диаграммы сильно вытянуты вперед, так что фактически угол θ заключен в узких пределах, порядка $1/\Gamma$. В связи с этим обычно применяется приближенное представление функции $D(V, \theta)$. Разность, заключенную в скобках, заменяют по схеме

$$1 - \frac{V}{c} \cos \theta = \frac{1 - V^2/c^2}{1 + V/c} + \frac{V}{c}(1 - \cos \theta) \sim \frac{1}{2\Gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 + \Gamma^2\theta^2}{2\Gamma^2}. \quad (81)$$

Тогда множитель приобретает вид

$$D(V, \theta) \sim \frac{2\Gamma}{1 + \Gamma^2\theta^2}. \quad (82)$$

Такую замену угла при ультрарелятивистских скоростях мы будем неоднократно применять.

3. *Аберрация.* Преобразование пространственной составляющей импульса фотона при переходе от нештрихованной системы к

штрихованной выглядит так:

$$\nu' \vec{l}' = \nu \vec{l} - \Gamma \nu \frac{V}{c} \vec{e} + (\Gamma - 1) \nu (\vec{e} \cdot \vec{l}) \vec{e}. \quad (83)$$

Отсюда находим закон преобразования ортов направлений распространения фотона:

$$\vec{l}' = \frac{\vec{l} - (\vec{e} \cdot \vec{l}) \vec{e} + \Gamma (\vec{e} \cdot \vec{l} - V/c) \vec{e}}{\Gamma (1 - V \vec{e} \cdot \vec{l}/c)}. \quad (84)$$

Обратное по отношению к (84) преобразование имеет тот же вид, но с заменой $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$

$$\vec{l} = \frac{\vec{l}' - (\vec{e} \cdot \vec{l}') \vec{e} + \Gamma (\vec{e} \cdot \vec{l}' + V/c) \vec{e}}{\Gamma (1 + V \vec{e} \cdot \vec{l}'/c)}. \quad (85)$$

Три вектора \vec{e} , \vec{l} и \vec{l}' лежат в одной плоскости, назовем ее плоскостью абберации.

В числителях дробей в формулах (84) и (85) первые два слагаемых составляют векторы, перпендикулярные вектору \vec{e} , а остальные — параллельные ему. В связи с этим легко написать следующие соотношения:

$$\vec{e} \cdot \vec{l} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{l}' + V/c}{1 + V \vec{e} \cdot \vec{l}'/c}, \quad \vec{e} \times \vec{l} = \frac{\vec{e} \times \vec{l}'}{\Gamma (1 + V \vec{e} \cdot \vec{l}'/c)}, \quad (86)$$

$$\vec{e} \cdot \vec{l}' = \frac{\vec{e} \cdot \vec{l} - V/c}{1 - V \vec{e} \cdot \vec{l}/c}, \quad \vec{e} \times \vec{l}' = \frac{\vec{e} \times \vec{l}}{\Gamma (1 - V \vec{e} \cdot \vec{l}/c)}. \quad (87)$$

Из (83) вытекает также соотношение между векторными произведениями:

$$\omega' \vec{l}' \times \vec{l} = \omega \left[\Gamma V/c - (\Gamma - 1) \vec{e} \cdot \vec{l} \right] \vec{l} \times \vec{e}. \quad (88)$$

Равенства (86) и (87) можно записать через тригонометрические функции:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + V/c}{1 + V \cos \theta'/c}, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - V/c}{1 - V \cos \theta/c}, \quad (89)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\Gamma (1 + V \cos \theta'/c)}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\Gamma (1 - V \cos \theta/c)}. \quad (90)$$

Из этих соотношений или из равенства (88) с учетом (76) следует, что

$$\sin(\theta' - \theta) = \sin \theta \frac{V/c - (1 - 1/\Gamma) \cos \theta}{1 - V \cos \theta/c}. \quad (91)$$

Нетрудно вывести еще одно соотношение между углами:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = D(V, \pi) \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}, \quad (92)$$

которое показывает, что если угол θ' не равен 0 или π , он всегда больше угла θ , т. е. вектор \vec{l} располагается между векторами \vec{e} и \vec{l}' .

Отметим частные и предельные случаи. Понятно, что при $V = 0$ (или даже при $V \ll c$) абберации нет и $\vec{l} = \vec{l}'$. Напротив, если формально положить $V = c$, то вектор \vec{l} сольется с вектором скорости $\vec{l} = \vec{e}$. При $\theta' = \pi/2$ будет $\cos \theta = V/c$, $\sin \theta = 1/\Gamma$, а чтобы оказалось $\theta = \pi/2$ нужно, чтобы было $\cos \theta' = -V/c$, $\sin \theta' = 1/\Gamma$.

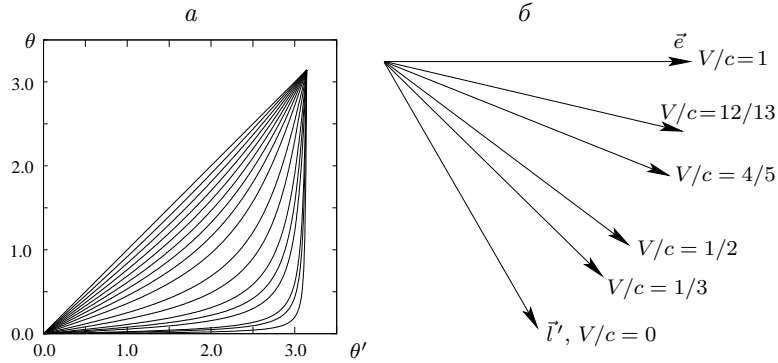


Рис. 7: Зависимость абберации от скорости источника.
а: Зависимость угла θ от угла θ' при различных скоростях.
б: Положения вектора \vec{l} при $\theta' = \pi/3$ и различных скоростях.

Рис. 7*а* дает представление о зависимости между углами θ и θ' при скоростях $V/c = 0(0.1)0.9$, а также $V/c = 0.95, 0.98, 0.99, 0.995, 0.999, 0.9995, 0.9999$. На рис. 7*б* показаны положения вектора \vec{l} при $\theta' = \pi/3$ и $V/c = 0, 1/3, 1/2, 4/5, 12/13$ и 1. Соответствующие значения $\Gamma = 1, 3/(2\sqrt{2}), 2/\sqrt{3}, 5/3, 13/5, \infty$. Крайние значения, как отмечалось, соответствуют векторам \vec{l}' и \vec{e} .

4. *Классическая формула аберрации.* Если в (91) отбросить члены порядка выше первого по скорости, то получится классическая формула аберрации

$$\sin(\theta' - \theta) = \frac{V}{c} \sin \theta. \quad (93)$$

Аберрация, т. е. изменение направления на движущийся объект или восприятие объекта движущимся наблюдателем, проявляется не только для света. Очевидна аберрация дождя: даже если он идет вертикально, человеку, бегущему со скоростью, сравнимой со скоростью падения дождевых капель, эти капли будут попадать в лицо. Конечно, картину портит ветер. На аберрацию звука, по видимому, внимания не обращали, хотя эффект Доплера для звука хорошо известен. Восприятие направления звука человеком не столь определено, как высота звучания, а скорости, сравнимые со скоростью звука, были достигнуты только в эпоху самолетов.

Аберрация света за счет движения Земли была обнаружена в 1727 году Джеймсом Брадлеем (1693–1762) при попытке измерить параллакс звезд, для чего нужно было определить направления на звезды с двух противоположных точек земной орбиты. Оказалось, что все звезды описывают почти одинаковые эллипсы на небе. Он же в 1729 году дал объяснение этому явлению. Воспроизведем это объяснение.

Пусть неподвижный наблюдатель (рис. 8) из точки A видит источник света, находящийся в точке B на достаточно большом расстоянии от него, под углом θ к направлению скорости другого наблюдателя. Тогда движущийся наблюдатель увидит тот же источник под другим углом θ' к той же скорости, так как пока он двигался, свет от источника тоже прошел некоторый путь и наблюдатель воспринял его в точке C . За одно и то же время t наблюдатель продвинулся на расстояние vt , а свет прошел путь ct . В треугольнике ABC угол A равен θ , а внешний угол C — θ' , так что угол B — это их разность $\theta' - \theta$. Проекции этих расстояний на перпендикуляр к стороне AB , т. е. высота из вершины C на эту сторону, должны быть равны:

$$vt \sin \theta = ct \sin(\theta' - \theta), \quad (94)$$

что совпадает с формулой классической аберрации. Интересно отметить, что эффект не зависит от времени t , т. е. от удаленности источника.

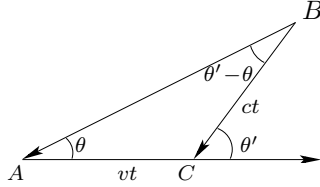


Рис. 8: Объяснение классической аберрации.

Строгую формулу можно вывести только исходя из теории относительности. Точность измерений Брадлея была достаточна для обнаружения аберрации, но недостаточна для ее устранения, так что параллаксы звезд определили другие уже в XIX столетии. Для таких измерений можно обойтись классическими формулами эффекта Доплера и аберрации, так как скорости движения Земли (30 км/с) и большинства звезд существенно меньше скорости света.

5. *Инварианты.* При преобразованиях Лоренца импульса фотона ряд величин остается неизменными. Так из (83) следует, что

$$\nu' \vec{l}' \times \vec{e} = \nu \vec{l} \times \vec{e}. \quad (95)$$

Взяв модуль от обеих частей этого равенства, найдем

$$\nu' \sin \theta' = \nu \sin \theta, \quad (96)$$

так что произведение частоты на синус угла импульса фотона со скоростью системы отсчета является инвариантом.

Другой инвариант связан с элементом объема в пространстве импульсов. Продифференцировав второе из соотношений (89), получим

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{\sin \theta}{\Gamma^2 (1 - \vec{V} \cos \theta / c)^2} d\theta = \left(\frac{\nu}{\nu'} \right)^2 \sin \theta d\theta. \quad (97)$$

Таким образом, инвариантом является произведение $\nu^2 \sin \theta d\theta$, а значит, и $\nu d\theta$.

Инвариантны также элемент объема в пространстве импульса фотона, деленный на частоту (или на величину импульса) $d^3 k / k$, и элемент телесного угла, умноженный на квадрат импульса $k^2 d^2 l$, что проворачивается непосредственно или на основе приведенных в этом

параграфе формул для преобразованных частот и углов. Инвариантом является и отношение dk/k . Заметим, что для частиц с массой инвариантной величиной является только d^3p/p_0 .

§ 6. Тензоры и действия с ними

1. *Определение и типы тензоров.* Тензор — это более сложное понятие, соотносящееся с операторами или квадратными матрицами, так же, как векторы соотносятся со столбцами. В простейшем случае тензор представляет собой диадное произведение векторов (см. Приложение 5). Поэтому и преобразуются тензоры как диады. Общее преобразование для тензоров мы приведем ниже.

Мы будем иметь дело почти исключительно с тензорами первого (векторами) и второго порядков (или, как обычно говорят, рангов). Скаляр может быть назван тензором нулевого ранга.

Представления тензоров, как и векторов, могут быть разных типов. Мы будем пользоваться, в основном, чисто контравариантными представлениями, с обоими верхними индексами $\hat{A} = \{A^\mu{}^\nu\}$. Название типа представления будем относить к самому тензору.

Если надо перейти к смешанному тензору, второй индекс которого является нижним, то этот тензор получается в результате применения метрического тензора $A^\mu{}_\nu = A^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu}$. Этот тензор отличается от исходного полностью контравариантного тем, что у его компонент с нижним вторым пространственным индексом другой знак, т. е. $A^\mu{}_0 = A^{\mu 0}$, $A^\mu{}_k = -A^{\mu k}$, $k = 1, 2, 3$. Так же поднимаются и опускаются и все индексы. У тензоров следует, вообще говоря, различать порядок их индексов, поэтому второй индекс у смешанных тензоров пишется отступя: $\{A^\mu{}_\nu\}$ и $\{A_\mu{}^\nu\}$.

Тензоры могут умножаться на векторы. Так как к контравариантному вектору, чтобы получился снова контравариантный вектор, должен быть применен смешанный тензор, эту операцию изображают так:

$$b^\mu = A^\mu{}_\nu a^\nu. \quad (98)$$

2. *Базисные тензоры.* Среди тензоров выделяется уже упоминавшийся основной метрический тензор, изображаемый диагональной матрицей

$$\hat{g} = \{g_{\mu\nu}\} = \{g^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Эта матрица является обратной самой себе. Поэтому полностью ковариантный и полностью контравариантный тензоры изображаются одной и той же симметричной матрицей \hat{g} . Это утверждение записывается в виде равенств $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma}$, где справа стоит символ Кронекера — единичная матрица.

Если ввести обозначение \check{I} для трехмерной единичной матрицы, то четырехмерная единичная матрица $\hat{\delta}$ и матрица тензора \hat{g} представляются так:

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \check{I} \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\check{I} \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Как уже говорилось, с помощью метрического тензора можно из контравариантных представлений векторов получать ковариантные посредством соотношения вида

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu}a^{\nu}, \quad \underline{a} = \{a^{\mu}\} = \{a_0, \vec{a}\}, \quad \{a_{\mu}\} = \{a_0, -\vec{a}\}. \quad (101)$$

Эта операция называется опусканием индекса, противоположная — поднятием. Опускание или поднятие нулевого индекса не изменяет компоненты, при опускании или поднятии пространственного индекса у компоненты изменяется знак.

Будет использован еще один базисный тензор, обозначаемый $\{e^{\mu\nu\sigma}\}$ и называемый совершенно антисимметричным тензором четвертого ранга. Это единственный в курсе тензор четвертого ранга, но очень простой. Он вводится условием, что все его компоненты, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, $e^{0123} = 1$, а остальные его компоненты равны 1 или -1 в зависимости от четности или нечетности перестановки индексов.

3. *Матричные обозначения.* Для наглядности и облегчения выполнения реальных, а не символических действий с векторами и тензорами будем записывать четырехмерные и в их составе трехмерные векторы в виде столбцов, как это принято в алгебре:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 = a_x \\ a^2 = a_y \\ a^3 = a_z \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Как говорилось выше, переход от контравариантных составляющих к смешанным и ковариантным и обратно производится при помощи матрицы метрического тензора. Так ковариантные составляющие вектора получаются умножением контравариантного вектора: $(\hat{g} \cdot \underline{a})^T = \underline{a}^T \cdot \hat{g}$. Скалярное произведение двух векторов в матричных обозначениях можно записать в виде

$$\{a_\mu b^\mu\} = [\hat{g} \cdot \underline{a}]^T \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{b}. \quad (103)$$

Точка между сомножителями означает матричное умножение (иногда будем ее опускать).

Тензоры второго порядка удобно для наглядности изображать квадратными матрицами. Полностью контравариантный и полностью ковариантный тензоры изображаются так:

$$\hat{A} = \{A^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{10} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{20} & A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{30} & A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}, \quad (104)$$

$$\{A_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} A_{00} = A^{00} & A_{01} = -A^{01} & A_{02} = -A^{02} & A_{03} = -A^{03} \\ A_{10} = -A^{10} & A_{11} = A^{11} & A_{12} = A^{12} & A_{13} = A^{13} \\ A_{20} = -A^{20} & A_{21} = A^{21} & A_{22} = A^{22} & A_{23} = A^{23} \\ A_{30} = -A^{30} & A_{31} = A^{31} & A_{32} = A^{32} & A_{33} = A^{33} \end{pmatrix}. \quad (105)$$

При этом первый индекс нумерует строки, а второй — столбцы тензора. Связь между двумя приведенными матрицами в матричной записи такова: $\{A_{\mu\nu}\} = \hat{g} \hat{A} \hat{g}$. Правые нижние миноры у этих двух представлений тензора совпадают, так как у их элементов пространственные индексы изменены дважды.

Смешанных тензоров может быть два: один с опущенным вторым индексом, другой с опущенным первым. Их также можно представить матрицами и связать с матрицей контравариантного тензора:

$$\{A^\mu{}_\nu\} = \hat{A} \hat{g} = \begin{pmatrix} A^0_0 = A^{00} & A^0_1 = -A^{01} & A^0_2 = -A^{02} & A^0_3 = -A^{03} \\ A^1_0 = A^{10} & A^1_1 = -A^{11} & A^1_2 = -A^{12} & A^1_3 = -A^{13} \\ A^2_0 = A^{20} & A^2_1 = -A^{21} & A^2_2 = -A^{22} & A^2_3 = -A^{23} \\ A^3_0 = A^{30} & A^3_1 = -A^{31} & A^3_2 = -A^{32} & A^3_3 = -A^{33} \end{pmatrix}, \quad (106)$$

$$\{A_\mu{}^\nu\} = \hat{g} \hat{A} = \begin{pmatrix} A^0_0 = A^{00} & A^0_1 = A^{01} & A^0_2 = A^{02} & A^0_3 = A^{03} \\ A^1_0 = -A^{10} & A^1_1 = -A^{11} & A^1_2 = -A^{12} & A^1_3 = -A^{13} \\ A^2_0 = -A^{20} & A^2_1 = -A^{21} & A^2_2 = -A^{22} & A^2_3 = -A^{23} \\ A^3_0 = -A^{30} & A^3_1 = -A^{31} & A^3_2 = -A^{32} & A^3_3 = -A^{33} \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Смешанные формы тензора также имеют совпадающие пространственные части (правые нижние миноры третьего порядка).

Если тензор симметричный, т. е. $B^{\mu\nu} = B^{\nu\mu}$, то тогда $\hat{B} = \hat{B}^T$, $\{B^\mu_\nu\} = \hat{B}\hat{g}$, $\{B_\mu^\nu\} = \hat{g}\hat{B}$. Очевидно равенство $\hat{g}\hat{B} = [\hat{B}\hat{g}]^T$, т. е. $\{B_\mu^\nu\} = \{B^\nu_\mu\}$. Поэтому смешанное представление симметричного тензора можно записывать в виде B^ν_μ . Так уже делалось в отношении тензора $\hat{\delta}$.

Умножение тензора на вектор тоже надо выполнять через матрицу метрического тензора. Равенство (98) следует записать так:

$$\underline{b} = \hat{A} \cdot \hat{g} \cdot \underline{a}. \quad (108)$$

4. *Матричное представление преобразования Лоренца.* В виде матрицы можно записать и преобразование Лоренца. Например, если вектор в контравариантном представлении в нештрихованной и штрихованной системах отсчета изобразить в виде столбцов:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}' = \begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \\ a'^2 \\ a'^3 \end{pmatrix}, \quad (109)$$

то преобразование (29) можно записать в матричном виде сравнительно коротко:

$$\underline{a}' = \hat{\mathcal{A}}_L \underline{a}, \quad (110)$$

где матрица преобразования

$$\hat{\mathcal{A}}_L = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma V_x/c & -\Gamma V_y/c & -\Gamma V_z/c \\ -\Gamma V_x/c & 1 + (\Gamma - 1)V_x^2/V^2 & (\Gamma - 1)V_x V_y/V^2 & (\Gamma - 1)V_x V_z/V^2 \\ -\Gamma V_y/c & (\Gamma - 1)V_x V_y/V^2 & 1 + (\Gamma - 1)V_y^2/V^2 & (\Gamma - 1)V_y V_z/V^2 \\ -\Gamma V_z/c & (\Gamma - 1)V_x V_z/V^2 & (\Gamma - 1)V_y V_z/V^2 & 1 + (\Gamma - 1)V_z^2/V^2 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Исходя из приведенного представления матрицы преобразования Лоренца, легко установить его свойства, отмеченные в § 1. Именно, матрица $\hat{\mathcal{A}}_L$ является симметричной, ее определитель равен 1, а обратная отличается только отсутствием знака минус в трех элементах первой строки и первого столбца.

Матрица преобразования (111) записана как матрица, соответствующая смешанному тензору второго ранга (порядка), и может

быть представлена в виде $\hat{A}_L = \hat{L} \cdot \hat{g}$, аналогичном представлению тензоров. Матрица преобразования Лоренца в контравариантном представлении имеет вид $\hat{L} = \{L^{\mu\nu}\} =$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma V_x/c & -\Gamma V_y/c & -\Gamma V_z/c \\ \Gamma V_x/c -1 - (\Gamma-1)V_x^2/V^2 & -(\Gamma-1)V_x V_y/V^2 & -(\Gamma-1)V_x V_z/V^2 & \\ \Gamma V_y/c -(\Gamma-1)V_x V_y/V^2 & -1 - (\Gamma-1)V_y^2/V^2 & -(\Gamma-1)V_y V_z/V^2 & \\ \Gamma V_z/c -(\Gamma-1)V_x V_z/V^2 & -(\Gamma-1)V_y V_z/V^2 & -1 - (\Gamma-1)V_z^2/V^2 & \end{pmatrix}. \quad (112)$$

Выполняются соотношения $\{L_{\mu\nu}\} = \hat{g}\hat{L}\hat{g} = \hat{L}^T$, $\hat{L}\hat{g} = [\hat{L}\hat{g}]^T = \hat{g}\hat{L}^T$.

Подобные матрицы удобно записывать символически, договорившись об обозначениях. Если использовать обозначение для диадного произведения трехмерных векторов (см. Приложение 5), то формулу (111) можно переписать короче:

$$\hat{A}_L = \hat{L} \cdot \hat{g} = \begin{pmatrix} \Gamma & -\Gamma \vec{V}^T/c \\ -\Gamma \vec{V}/c & \check{I} + (\Gamma-1)\vec{V} \cdot \vec{V}^T/V^2 \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Эту же матрицу можно записать еще в одном виде, если положить $V/c = \text{th } \chi$, $\Gamma = \text{ch } \chi$ и задать вектор скорости сферическими координатами $\vec{V} = V(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}^\mu_\nu\}_L^{(\nu=0,1)} &= \begin{pmatrix} \text{ch } \chi & -\text{sh } \chi \sin \theta \cos \phi \\ -\text{sh } \chi \sin \theta \cos \phi & 1 + 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ -\text{sh } \chi \sin \theta \sin \phi & 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \\ -\text{sh } \chi \cos \theta & 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \\ \{\mathcal{A}^\mu_\nu\}_L^{(\nu=2,3)} &= \begin{pmatrix} -\text{sh } \chi \sin \theta \sin \phi & -\text{sh } \chi \cos \theta \\ 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi & 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ 1 + 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \phi & 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \phi & 1 + 2 \text{sh}^2 \frac{\chi}{2} \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (114)$$

Если $\theta = 0$, то получится матрица частного преобразования (7).

Преобразование Лоренца для векторов в матричном виде через матрицу \hat{L} выглядит так:

$$\underline{a}' = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \underline{a}. \quad (115)$$

а преобразование тензоров изображается матричным соотношением

$$\hat{A}' = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \hat{A} \cdot [\hat{L} \cdot \hat{g}]^{-1} = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \hat{A} \cdot \hat{g} \cdot \hat{L}^{-1}. \quad (116)$$

5. *Действия с тензорами.* Тензоры одинаковой природы, как и векторы, можно складывать, умножать на числа и производить с ними все другие линейные операции, например, дифференцирование или интегрирование по скалярам. Но есть одна операция, применяемая именно к тензорам. Эта операция — свертка, т. е. суммирование по одинаковым индексам тензора. В случае тензора второго ранга она выполняется так:

$$A = A^\mu{}_\mu = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3 = A^{00} - A^{11} - A^{22} - A^{33}. \quad (117)$$

Свертка тензора второго ранга совпадает со взятием следа (шпура) матрицы:

$$\begin{aligned} A = A^\mu{}_\mu &= A_\mu{}^\mu = \text{Sp}(\hat{g} \cdot \hat{A}) = \text{Sp}(\hat{A} \cdot \hat{g}) = \\ &= A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3 = A^{00} - A^{11} - A^{22} - A^{33} = A^\mu{}_\mu. \end{aligned} \quad (118)$$

Часто возникает необходимость векторного дифференцирования тензоров, т. е. выполнения операции, подобной взятию дивергенции:

$$\text{Div } \hat{A} = \{\nabla_\mu A^{\mu\nu}\} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^{0\nu} + \frac{\partial}{\partial x} A^{1\nu} + \frac{\partial}{\partial y} A^{2\nu} + \frac{\partial}{\partial z} A^{3\nu} \right\} = \nabla^T \hat{g} \hat{A}. \quad (119)$$

§ 7. Релятивистские формулы для величин электродинамики

1. *Вектор тока.* Пусть электромагнитное поле создается и распространяется в свободном пространстве. В этом случае описывающим его величинам и соотношениям можно придать релятивистски ковариантный вид. Начнем с плотности заряда и тока.

Исходя из того обстоятельства, что количество заряда является скалярной величиной, напишем цепочку равенств

$$\rho d^3r = \frac{\rho}{\gamma} \gamma d^3r = \frac{\rho}{\gamma} d^3r_0. \quad (120)$$

Здесь ρ — плотность заряда, γ — лоренцевский множитель, связывающий систему отсчета, в которой заряд покоится, с движущейся по отношению к ней со скоростью $v = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$. Так как стоящий слева заряд элементарного объема и множитель справа d^3r_0 —

собственный объем заряда — являются релятивистскими инвариантами, то скаляром является и отношение $\rho/\gamma = \rho_0$, представляющее собой плотность заряда в его собственной системе отсчета.

Если умножить эту скалярную величину на четырехмерный вектор скорости элементарного заряда, то получится снова четырехмерный вектор, называемый вектором плотности заряда-тока или короче вектором тока:

$$\underline{j} = \frac{\rho}{\gamma} \{c\gamma, \vec{v}\gamma\} = \{c\rho, \vec{j}\}. \quad (121)$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов градиента и тока

$$\underline{\nabla} \underline{j} = \underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0 \quad (122)$$

представляет собой уравнение неразрывности.

2. *Потенциалы.* Уравнения, которым удовлетворяют потенциалы

$$\square \varphi = 4\pi\rho, \quad \square \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (123)$$

являются временной и пространственной составляющими одного четырехмерного векторного уравнения

$$\square \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}. \quad (124)$$

Поскольку справа стоит четырехмерный вектор, а оператор Даламбера — скаляр, то и потенциалы образуют вектор

$$\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\}. \quad (125)$$

Скалярное произведение градиента на этот вектор, равное нулю

$$\underline{\nabla} \underline{A} = \underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = 0, \quad (126)$$

отражает условие Лоренца.

§ 8. Вариационный принцип для заряда в электромагнитном поле

1. *Действие и функция Лагранжа для частицы.* В первой главе уравнения Максвелла и сила Лоренца были написаны на основании опытных данных. В этом и следующих параграфах будет дан

их вывод из некоторых основных, а именно вариационных принципов.

Основным вариационным принципом классической механики является принцип наименьшего действия. Он применяется и в релятивистской механике, а выражения для соответствующих величин являются релятивистскими обобщениями классических величин.

Начнем с определения действия для свободной частицы, на которую не действуют никакие силы. Эта величина не должна зависеть от системы отсчета, т. е. быть инвариантом преобразования Лоренца. Поскольку действие представляется интегралом, то этот интеграл должен браться от дифференциала скаляра, а такой для свободной частицы имеется только один: это дифференциал элемента пути, т. е. дифференциал интервала $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2}$. Под знаком корня стоит положительное число, так как частица движется со скоростью, меньшей скорости света. В этом случае $ds = cd\tau = cdt/\gamma$, где τ — собственное время частицы, а $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Закрепляем начальную $\{ct_1, \vec{r}_1\}$ (1) и конечную $\{ct_2, \vec{r}_2\}$ (2) точки четырехмерной траектории частицы, которая называется мировой линией. Тогда действие можно записать в виде

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds. \quad (127)$$

Выбор знака и коэффициента определяется переходом к нерелятивистскому пределу.

Функция Лагранжа определяется как подинтегральная функция в интеграле действия, взятом по времени:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (128)$$

При нерелятивистских скоростях

$$L \sim -mc^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} - mc^2 \quad (129)$$

эта функция с точностью до несущественного слагаемого совпадает с функцией Лагранжа нерелятивистской механики.

2. *Вариационный принцип для свободной частицы.* Запишем действие через дифференциалы координат

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{dx_\mu dx^\mu} \quad (130)$$

и найдем его вариацию:

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta(dx_\mu) dx^\mu + dx_\mu \delta(dx^\mu)}{2ds} = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{dx^\mu \delta(dx_\mu)}{cd\tau} = \\ &= -m \int_{(1)}^{(2)} v_\mu \delta(dx^\mu) = -m \int_{(1)}^{(2)} \underline{v} \delta(\underline{r}). \end{aligned} \quad (131)$$

Проинтегрировав по частям с учетом того, что операции дифференцирования и варьирования перестановочны, получим

$$\delta S = -mv_\mu \delta(x^\mu) \Big|_{(1)}^{(2)} + m \int_{(1)}^{(2)} \delta(x^\mu) \frac{dv_\mu}{ds} ds. \quad (132)$$

При закреплении обеих точек вариации $\delta(x^\mu)_{(1)} = \delta(x^\mu)_{(2)} = 0$, а истинная траектория определяется условием $\delta S = 0$. Тогда получается уравнение $\frac{dv_\mu}{ds} = 0$, т. е. постоянство четырехмерной скорости, что соответствует прямолинейному и равномерному движению, как и должно быть для свободной частицы.

Чтобы найти вариацию действия как функцию координат, надо закрепить одну точку (первую, $\delta(x^\mu)_{(1)} = 0$) и варьировать координаты второй, положив $\delta(x^\mu)_{(2)} = dx^\mu$. При этом интеграл по-прежнему равен нулю, так как траектории рассматриваются только истинные. Таким образом, получаем

$$\delta S = -mv_\mu \delta(x^\mu) = -m \underline{v} \delta(\underline{r}). \quad (133)$$

Четырехмерный вектор производных

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu}, \quad \underline{p} = -\underline{\nabla} S, \quad \vec{p} = \vec{\nabla} S, \quad p_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{E}{c}, \quad (134)$$

совпадает с четырехмерным импульсом, причем градиент и производная по времени от действия так же связаны с импульсом и энергией, как в нерелятивистской механике.

3. *Заряд в электромагнитном поле.* Действие в этом случае складывается из двух частей: действия заряда q как частицы и действия, отражающего влияние на него поля. Эта часть должна быть скалярной линейной функцией дифференциалов координат. Коэффициентами оказываются потенциалы, так что

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mcds - \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu \right) = \int_{(1)}^{(2)} \left(-mcds - \frac{q}{c} \underline{A} dr \right). \quad (135)$$

Через интеграл по времени это выражение записывается в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \vec{v} \right) dt, \quad (136)$$

так что функция Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \vec{v}. \quad (137)$$

Первое слагаемое относится, так сказать, к свободной частице, а два последних описывают взаимодействие заряда с внешним электромагнитным полем, точнее, второе слагаемое — это энергия заряда в электрическом поле со скалярным потенциалом φ , а третье — энергия того же заряда в магнитном поле с векторным потенциалом \vec{A} .

Производные от функции Лагранжа по трехмерным компонентам скорости составляют компоненты обобщенного импульса. Соберем эти производные в градиент по скорости и напишем

$$\vec{\nabla}_{\vec{v}} L = \vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c} \vec{A} = m\vec{v}\gamma + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}, \quad (138)$$

где \vec{p} — обычный импульс частицы. Последнее равенство допускает четырехмерное обобщение:

$$\underline{P} = \underline{p} + \frac{q}{c} \underline{A}, \quad P_0 = mc\gamma + \frac{q}{c} \varphi = p_0 + \frac{q}{c} \varphi. \quad (139)$$

4. *Уравнения движения заряда в поле.* Конечно, поле влияет на движение заряда, но и заряд, порождая при своем движении дополнительное поле, тем самым влияет на поле. Однако, в большинстве случаев это дополнительное поле значительно слабее внешнего и влияние заряда на последнее можно не учитывать (см. ниже § 7 Главы 5). Будем искать уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются с помощью уравнений Эйлера, т. е. варьированием функции Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} L = \vec{\nabla} L. \quad (140)$$

Левая часть этого уравнения известна — это производная по времени от обобщенного импульса заряда. Градиент (частный) функции Лагранжа находится при условии закрепления скорости:

$$\vec{\nabla} L = \frac{q}{c} \text{grad}(\vec{A}\vec{v}) - q \text{grad} \varphi \quad (141)$$

Здесь надо использовать формулу

$$\text{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b}. \quad (142)$$

Следовательно,

$$\vec{\nabla} L = \frac{q}{c} (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \text{rot} \vec{A} - q \text{grad} \varphi. \quad (143)$$

Производную от векторного потенциала по вектору скорости можно исключить, приняв во внимание, что полная производная от потенциала по времени вдоль траектории заряда

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}. \quad (144)$$

Эта полная производная входит в производную от обобщенного импульса и сокращается, так что уравнение (140) принимает вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \text{grad} \varphi + \frac{q}{c} \vec{v} \times \text{rot} \vec{A}. \quad (145)$$

Пользуясь выражениями напряженностей через потенциалы, получим окончательный вид уравнения движения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{H}. \quad (146)$$

Справа стоит выражение для силы Лоренца.

5. *Общее релятивистское уравнение движения.* Выведенное равенство (146) представляет уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Сформулируем теперь более общее уравнение движения частиц.

Рассмотрим движение некоторой частицы, тела или материальной точки. Для определенности будем говорить о частице, так как по отношению к телу возникает вопрос о его искажении при движении.

В уравнении движения производная должна вычисляться по собственному времени частицы τ , а отдельных уравнений должно быть четыре. В нерелятивистском пределе уравнение должно переходить в уравнение Ньютона.

Очевидно, что в трехмерном уравнении

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad (147)$$

произведение массы на ускорение следует заменить на производную от импульса по собственному времени, так что появится множитель γ :

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = m \frac{d\vec{v}}{d\tau} = m\gamma\vec{w} = \gamma\vec{F}. \quad (148)$$

Так определяется релятивистское обобщение трехмерной силы. Четырехмерная сила определяется по аналогии со скоростью. Таким образом, релятивистское уравнение движения получается в виде

$$m\underline{w} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = \underline{F}, \quad \underline{F} = \{\gamma F_0, \gamma\vec{F}\}. \quad (149)$$

Временная и пространственная части силы согласно (149) и (57) могут быть выражены через трехмерные скорость и ускорение. С помощью этих выражений можно легко получить выражения для частных случаев, когда скорость и ускорение параллельны или перпендикулярны. Получается и нерелятивистский предел.

Поскольку $p_0 = \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$, то уравнение для временной составляющей является следствием пространственного:

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{\vec{p}}{p_0} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} = F_0. \quad (150)$$

Это соотношение утверждает, что изменение энергии тела равно работе силы. Из него также следует, что четырехмерные скорость

и сила ортогональны, т. е. $\underline{v} \underline{F} = \gamma^2 (cF_0 - \vec{v} \vec{F}) = 0$. В частности, если это сила Лоренца, то из уравнения (146) следует, что

$$\frac{dp_0}{dt} = q \frac{\vec{v}}{c} \left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right] = q \frac{\vec{v}}{c} \vec{E}, \quad (151)$$

т. е. магнитная часть силы Лоренца работы не совершает.

§ 9. Тензор электромагнитного поля

1. *Определение тензора.* Выведем уже полученные уравнения, используя четырехмерные релятивистские обозначения. Для этого варьируем действие, записанное в виде (135) с первым слагаемым в виде (130). Условие равенства нулю вариации гласит

$$\begin{aligned} \delta S &= -\delta \int_{(1)}^{(2)} \left(mc \sqrt{dx_\mu dx^\mu} + \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu \right) = \\ &= -\int_{(1)}^{(2)} \left(mc \frac{dx_\mu d\delta(x^\mu)}{ds} + \frac{q}{c} A_\mu d\delta(x^\mu) + \frac{q}{c} \delta(A_\mu) dx^\mu \right) = 0. \end{aligned} \quad (152)$$

Проинтегрировав теперь по частям в первых двух слагаемых и введя обозначение для скорости, найдем

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(m dv_\mu \delta(x^\mu) + \frac{q}{c} dA_\mu \delta(x^\mu) - \frac{q}{c} \delta(A_\mu) dx^\mu \right) - \left(mv_\mu + \frac{q}{c} A_\mu \right) \delta(x^\mu) \Big|_{(1)}^{(2)} = 0. \quad (153)$$

Двойная подстановка дает нуль, так как на пределах координаты закреплены. Вариации и дифференциалы потенциалов выражаем через те же операции от координат:

$$\delta(A_\mu) = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta(x^\nu), \quad dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (154)$$

Тогда соотношение (153) примет вид

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(m dv_\mu \delta(x^\mu) + \frac{q}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta(x^\mu) dx^\nu - \frac{q}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta(x^\nu) dx^\mu \right) = 0. \quad (155)$$

Выразив дифференциалы координат через компоненты скорости и собственное время, а также сделав в третьем слагаемом замену индексов $\mu \leftrightarrow \nu$, что возможно, так как по ним производится суммирование, получим

$$\int_{(1)}^{(2)} \left[m \frac{dv_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) v^\nu \right] \delta(x^\mu) d\tau = 0. \quad (156)$$

Ввиду произвольности вариаций координат находим уравнение движения в виде

$$m \frac{dv_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) v^\nu. \quad (157)$$

Далее вводится обозначение для тензора

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (158)$$

который называется тензором электромагнитного поля. Через него уравнение записывается в четырехмерной форме так:

$$m \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu v^\nu. \quad (159)$$

2. *Выражение через напряженности.* Подставив выражения для компонент потенциалов $\{A_\mu\} = \{\varphi, -\vec{A}\}$, получим представление тензора поля через его напряженности. В полностью ковариантном виде, как этот тензор определен в (158), и в полностью контравариантной форме, которая, как и в общем случае, получается поднятием индексов, причем поднятие каждого пространственного индекса сопровождается изменением знака, даются матрицами

$$\{F_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \{F^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (160)$$

Как и в случае общего тензора, правые нижние миноры третьего порядка, содержащие компоненты магнитной напряженности, у

этих форм совпадают. Таким же свойством обладают и смешанные представления:

$$\{F_{\mu}^{\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \{F^{\mu}_{\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (161)$$

3. *Свойства тензора.* Тензор электромагнитного поля является антисимметричным $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$. Антисимметрична и его матрица, т.е. $\hat{F}^T = -\hat{F}$. Его свертка, т.е. след матрицы, равна нулю $F_{\mu}^{\mu} = F^{\mu}_{\mu} = 0$, а свертка произведения самого на себя

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \text{Sp}(\hat{F} \cdot (\hat{g} \cdot \hat{F} \cdot \hat{g})^T) = -F_{\mu}^{\nu} F_{\nu}^{\mu} = -\text{Sp}(\hat{g} \cdot \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{F}) = 2(H^2 - E^2) \quad (162)$$

является скаляром.

С тензором $\epsilon^{\mu\nu\sigma}$ (это полностью антисимметричный относительно перестановок всех компонент тензор, упоминавшийся в § 6) образуется еще одна комбинация, содержащая произведения компонент тензора поля и просто выражающаяся через напряженности:

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\sigma} = 8\vec{E}\vec{H}. \quad (163)$$

Эта комбинация представляет собой инвариант (скаляр), если только не допускаются отражения осей. При отражении же осей она изменяет знак, так как содержит магнитную напряженность, и поэтому называется псевдоскаляром.

Из наличия двух инвариантов поля вытекают два следствия. Если в какой-либо системе отсчета длины векторов электрической и магнитной напряженностей равны, то они равны и во всех системах. Аналогично, если эти векторы ортогональны в какой-то системе отсчета, то они ортогональны и во всех других системах.

При помощи матричных обозначений матрицу (160) можно записать короче:

$$\hat{F} = \begin{Bmatrix} 0 & -\vec{E}^T \\ \vec{E} & \check{H} \end{Bmatrix}, \quad \check{H} = \begin{Bmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{Bmatrix}. \quad (164)$$

Произведение последней (трехмерной) матрицы на трехмерный вектор дает векторное произведение

$$\check{H} \cdot \vec{a} = \vec{H} \times \vec{a}. \quad (165)$$

В матричной форме можно переписать и другие три представления тензора электромагнитного поля, а именно, два смешанных (в (161)) и полностью ковариантное (первое в (164)):

$$\hat{g}\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}^T \\ -\vec{E} & -\check{H} \end{pmatrix}, \quad \hat{F}\hat{g} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^T \\ \vec{E} & -\check{H} \end{pmatrix}, \quad \hat{g}\hat{F}\hat{g} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^T \\ -\vec{E} & \check{H} \end{pmatrix}. \quad (166)$$

Уравнение (159) также можно записать в матричном виде:

$$m \frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{c} \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \vec{E}^T \\ \vec{E} & -\check{H} \end{array} \right\} \underline{v}, \quad \underline{v} = \gamma \left\{ \begin{array}{c} c \\ \underline{v} \end{array} \right\}. \quad (167)$$

Согласно преобразованию Лоренца для компонент тензора (116)

$$\hat{F}' = \hat{L} \cdot \hat{g} \cdot \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{L}^T \quad (168)$$

компоненты поля в штрихованной и нештрихованной системах отсчета связаны равенствами

$$\vec{E}' = \Gamma \vec{E} + \Gamma \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{H} - (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V} \left(\frac{\vec{V}}{c} \vec{E} \right), \quad (169)$$

$$\vec{H}' = \Gamma \vec{H} - \Gamma \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{E} - (\Gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V} \left(\frac{\vec{V}}{V} \vec{H} \right). \quad (170)$$

Нетрудно проверить, что точно такая же связь между напряженностями поля получается, если считать, что они составляют другой тензор

$$\hat{G} = \{G^{\mu\nu}\} = \{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} F_{\lambda\mu}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -\vec{H}^T \\ \vec{H} & -\check{E} \end{array} \right\}, \quad \check{E} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -E_z & E_y \\ E_z & 0 & -E_x \\ -E_y & E_x & 0 \end{array} \right\}. \quad (171)$$

Действительно, преобразования (169)–(170) инвариантны относительно замен $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$. Таким же образом тензор (171) получается из тензора (160).

Свертка произведения \hat{G} на самого себя совпадает со сверткой для тензора \hat{F} . Свертка произведения двух тензоров приводит ко второму скаляру поля:

$$F^{\mu\nu} G_{\nu\mu} = \text{Sp}(\hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \hat{G} \cdot \hat{g}) = 8\vec{E} \cdot \vec{H}. \quad (172)$$

Тот факт, что напряженности входят в тензор по-разному, объясняется следующим обстоятельством. Как уже отмечалось в предыдущей главе, напряженности электрического и магнитного полей имеют различную природу. Напомним, что трехмерные векторы могут быть двух типов. Если при отражении всех осей все координаты вектора и тем самым он сам изменяют знаки на противоположные, то такой вектор называется полярным. Напротив, если отражение осей не приводит к обращению направления вектора, вектор называют аксиальным. Примером является векторное произведение двух полярных векторов, координаты которого состоят из произведений координат векторов-сомножителей. Так как векторный потенциал \hat{A} полярный вектор, то и электрическая напряженность полярный вектор, ибо дифференцирование по времени этого свойства не изменяет. Вычисление же ротора от этого потенциала превращает результирующий вектор, т. е. магнитную напряженность — в аксиальный вектор, так как и сам потенциал и ротор изменяют знаки при отражении осей.

4. *Первая пара уравнений Максвелла.* В явно релятивистской форме можно записать и уравнения для напряженностей. Первая пара уравнений Максвелла записывается через составляющие тензора \hat{F} следующим образом:

$$\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (173)$$

Эти уравнения можно проще записать через тензор \hat{G} :

$$\text{Div } \hat{G} = \{\nabla_\lambda G^{\lambda\mu}\} = (\underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \hat{G})^T = 0. \quad (174)$$

Все индексы должны быть разными. Из этого следует, что независимых уравнений здесь всего четыре. Без нулевого индекса — это уравнение, выражающее отсутствие магнитных зарядов:

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (175)$$

Три остальных получаются круговой подстановкой из одного, которое соответствует $\lambda = 0, \mu = 2, \nu = 3$:

$$\nabla^0 F^{23} + \nabla^2 F^{30} + \nabla^3 F^{02} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0. \quad (176)$$

Объединение трех уравнений в одно векторное дает

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (177)$$

§ 10. Вариационный принцип для поля

1. *Действие для электромагнитного поля.* Полное действие для заряженной частицы в поле и самого поля должно состоять из трех частей. Две части уже были написаны. Это, во-первых, часть (127), относящаяся к частице:

$$S_p = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds. \quad (178)$$

Вторая часть (135) описывает воздействие поля на частицу:

$$S_{pf} = -\frac{q}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_\mu dx^\mu. \quad (179)$$

Третья часть относится к самому полю. Действие должно быть инвариантом, так что оно выражается через инвариант поля (162):

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4r = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) d^3r dt. \quad (180)$$

Поскольку в последнем выражении интеграл берется по четырехмерному объему, преобразуем интеграл в (179) к такому же виду.

Выразим дифференциалы координат через вектор скорости $dx^\mu = v^\mu d\tau = v^\mu dt/\gamma$ и подставим вместо заряда его выражение через плотность заряда (1.11). Получится релятивистски инвариантное выражение

$$\begin{aligned} S_{pf} &= -\frac{1}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_\mu v^\mu \frac{dt}{\gamma} \int d^3r \rho(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \int d^3r dt A_\mu \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\gamma} v^\mu = \\ &= -\frac{1}{c^2} \int d^4r A_\mu j^\mu = -\frac{1}{c^2} \int \underline{A} \underline{j} d^4r. \end{aligned} \quad (181)$$

Итак, полное действие системы заряд в электромагнитном поле равно сумме

$$S = S_p + S_{pf} + S_f = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds - \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d^4r - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4r. \quad (182)$$

2. *Вариация действия.* Теперь проварьируем полное действие по переменным поля, за которые удобнее всего принять потенциалы. При этом следует считать движение частицы уже заданным, т. е. координаты варьировать не нужно, приняв, что они закреплены. Тогда вариация первого слагаемого в сумме (182) равна нулю, а при нахождении вариации второго слагаемого в этой сумме не надо варьировать компоненты тока. Таким образом,

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) + \frac{1}{16\pi} [\delta(F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta(F^{\mu\nu})] \right] d^4 r = \\ &= -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta(F_{\mu\nu}) \right] d^4 r = 0.\end{aligned}\quad (183)$$

При переходе к последнему выражению использовано, что поднятие индексов перестановочно со взятием вариации, так что два последних слагаемых во внутренних квадратных скобках первого выражения равны.

Подставив под знак вариации выражение (158) тензора поля через потенциалы, получим

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta(A_\nu) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) \right) \right] d^4 r = \\ &= -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta(A_\mu) - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) \right] d^4 r.\end{aligned}\quad (184)$$

Здесь сначала в среднем слагаемом сделана замена индексов $\mu \leftrightarrow \nu$, а затем использована антисимметричность тензора поля, что делает два слагаемых равными.

3. *Вторая пара уравнений Максвелла.* На следующем шаге интегрируем во втором слагаемом последнего интеграла по частям, что дает (Σ_ν — трехмерное пространство, ортогональное оси x_ν)

$$\int F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) d^4 r = \int F^{\mu\nu} \delta(A_\mu) d\Sigma_\nu \Big|_{(1)}^{(2)} - \int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \delta(A_\mu) d^4 r.\quad (185)$$

В первом слагаемом интеграл берется на некоторых пределах. По координатам пределы бесконечны, а на бесконечности поле обращается в нуль. По времени же пределы соответствуют моментам, где вариации равны нулю, так как там потенциалы должны быть

заданы. В результате это слагаемое равно нулю и, следовательно,

$$\int \left[\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right] \delta(A_\mu) d^4r = 0. \quad (186)$$

Ввиду произвольности вариаций потенциалов получаются уравнения

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (187)$$

Нулевая компонента этой системы совпадает с уравнением

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (188)$$

а остальные три — с уравнением

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (189)$$

Таким образом, всем уравнениям Максвелла для свободного пространства придан явно релятивистский вид.

§ 11. Тензор энергии–импульса

1. *Определение тензора энергии–импульса.* Выведенное в § 5 предыдущей главы соотношение сохранения энергии можно для свободного пространства также записать в релятивистском виде. Для этого надо ввести тензор энергии–импульса электромагнитного поля, который представляется следующей матрицей: $\hat{T} = \{T^{\lambda\mu}\} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -F^{\lambda\nu} F^\mu{}_\nu + \frac{1}{4} (F^{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}) g^{\lambda\mu} \right\} = \frac{1}{4\pi} \left[\hat{F} \hat{g} \hat{F} + \frac{1}{4} \hat{g} \operatorname{Sp}(\hat{F} \hat{g} \hat{F}) \right] = \\ &= w \hat{g} + \begin{pmatrix} 0 & \vec{S}^T/c \\ \vec{S}/c & -(\vec{E} \cdot \vec{E}^T + \vec{H} \cdot \vec{H}^T)/4\pi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (190)$$

Этот тензор и его матрица симметричны. Матрица смешанного тензора $\{T^\lambda{}_\mu\}$ отличается от (190) тем, что у элементов всех ее столбцов кроме первого знаки противоположные тем, которые имеют элементы матрицы (190), так что свертка тензора (след матрицы) $T^\mu{}_\mu = \operatorname{Sp}(\hat{T} \cdot \hat{g}) = w - 3w + 2w = 0$.

Входящие в определение тензора w и $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = (S^1, S^2, S^3)$ — это плотность и вектор (Пойнтинга) потока энергии. Нижний

правый минор этого тензора образует так называемый (трехмерный) тензор напряжений Максвелла. Его обычно обозначают

$$\check{\sigma} = \{\sigma^{il}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}. \quad (191)$$

Он, как и четырехмерный тензор, симметричен.

2. *Дивергенция тензора.* Найдем дивергенцию введенного тензора, проделав следующую выкладку: $\text{Div } \hat{T} = \{\nabla_\lambda T^{\lambda\mu}\} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -\nabla_\lambda F^{\lambda\nu} F^\mu{}_\nu - F_{\lambda\nu} \nabla^\lambda F^\mu{}_\nu + \frac{1}{4} [\nabla^\lambda F^{\nu\iota} F_{\nu\iota} + \nu\iota \nabla^\lambda F_{\nu\iota}] g^{\lambda\mu} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla_\lambda F^{\nu\lambda} F^\mu{}_\nu + F_{\nu\lambda} \nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} [\nabla^\mu F^{\nu\iota} F_{\nu\iota}] + F^{\nu\iota} \nabla^\mu F_{\nu\iota} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\nabla_\lambda F^{\nu\lambda} F^\mu{}_\nu + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \nabla^\nu F^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} \nabla^\mu F^{\nu\lambda} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{4\pi}{c} F^\mu{}_\nu j^\nu + \frac{1}{2} F_{\nu\lambda} (\nabla^\lambda F^{\mu\nu} + \nabla^\mu F^{\nu\lambda} + \nabla^\nu F^{\lambda\mu}) \right\} = -\frac{1}{c} \{F^\mu{}_\nu j^\nu\}. \quad (192) \end{aligned}$$

При переходе к выражению во второй строчке был изменен порядок индексов у $F^{\lambda\nu}$ в первых двух слагаемых, во втором слагаемом кроме того переименованы верхние и нижние индексы, а в двух последних подняты индексы за счет метрического тензора. При переходе к третьей строчке второе слагаемое было разбито на две части и во второй из них сделаны замены индексов суммирования $\nu \leftrightarrow \lambda$ с последующей переименовкой их порядка. Кроме того, два слагаемых в скобках были объединены путем поднятия и опускания индексов с заменой ι на λ . Наконец, при написании последней строчки были использованы в первом слагаемом вторая пара уравнений, а во втором — первая.

В матричной форме полученному соотношению может быть придан вид

$$(\underline{\nabla}^T \cdot \hat{g} \cdot \hat{T})^T = -\frac{1}{c} \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \underline{j}. \quad (193)$$

Нулевая компонента полученного соотношения в обычной (векторной) записи после сокращения на скорость света (ввиду того, что в свободном пространстве проводимость отсутствует) совпадает с равенством (1.41):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (194)$$

Пространственная часть соотношения может быть записана так:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial S^l}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma^{il}}{\partial x^i} = f^l. \quad (195)$$

Справа стоит плотность силы Лоренца $\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{H}$. Проинтегрировав по объему \mathcal{V} , ограниченному поверхностью Σ , и применив формулу Остроградского—Гаусса, получим

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} S^l d^3r + \oint_{\Sigma} \sigma^{il} n_i d^2\Sigma = \int_{\mathcal{V}} f^l d^3r = F^l. \quad (196)$$

Через n_i обозначены компоненты вектора внешней нормали к поверхности Σ , а через F^l компоненты силы Лоренца, действующей на заряды и токи. Равенство утверждает, что изменение со временем полного импульса поля равно сумме того количества импульса, который вытекает из объема через поверхность, и силы, действующей на источники поля.

3. *Тензор зарядов.* Можно ввести (симметричный) тензор энергии—импульса вещества, если считать, что заряды не взаимодействуют друг с другом:

$$\hat{T}_P = \{\mu_0 v^\lambda v^\mu\} = \mu_0 \underline{v} \underline{v}^T, \quad (197)$$

где μ_0 — пространственная плотность массы зарядов в сопутствующей в данной точке системе отсчета. Эта плотность пропорциональна плотности заряда в той же системе, пропорциональны и четырехмерные векторы плотностей заряда-тока и потока массы:

$$\mu_0 = \frac{m}{e} \rho_0, \quad \mu_0 \underline{v} = \frac{m}{e} \underline{j}. \quad (198)$$

Оба вектора плотности удовлетворяют одному и тому же уравнению неразрывности.

Для нахождения расходимости тензора (197) заметим, что скорость \underline{v} зависит от времени через координаты, так что для ускорения получается

$$\underline{w} = \frac{d\underline{v}}{d\tau} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = (v^\lambda \nabla_\lambda) \{v^\mu\} = (\underline{v}^T \cdot \hat{g} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}. \quad (199)$$

Поэтому (используем уравнение неразрывности)

$$\begin{aligned}\operatorname{Div} \hat{T}_P &= (\nabla_\lambda \mu_0 v^\lambda) \{v^\mu\} + \mu_0 (v^\lambda \nabla_\lambda) \{v^\mu\} = \\ &= \frac{\mu_0}{e} (\nabla_\lambda j^\lambda) \{v^\mu\} + \mu_0 \frac{dv}{d\tau} = \mu_0 \underline{w}.\end{aligned}\quad (200)$$

Принимая во внимание локальное уравнение движения заряда в поле

$$\mu_0 \underline{w} = \frac{1}{c} \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \underline{j}, \quad (201)$$

где справа стоит плотность силы Лоренца, получаем

$$\operatorname{Div} \hat{T}_P = \frac{1}{c} \hat{F} \cdot \hat{g} \cdot \underline{j} = \frac{1}{c} \{F^{\mu\nu} j_\nu\}. \quad (202)$$

Сложив равенства (192) и (200), убедимся в выполнении закона сохранения суммарных энергии и импульса вещества и поля:

$$\operatorname{Div}(\hat{T} + \hat{T}_P) = 0. \quad (203)$$

4. *Сохранение моментов.* У электромагнитного поля имеется и момент, который связывается с моментом движущихся зарядов. Момент поля можно определить так:

$$L^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\mu} x^\nu - T^{\lambda\nu} x^\mu. \quad (204)$$

Его дивергенция

$$\nabla_\lambda L^{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda T^{\lambda\mu} x^\nu - \nabla_\lambda T^{\lambda\nu} x^\mu + T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\sigma (F^{\sigma\mu} x^\nu - F^{\sigma\nu} x^\mu). \quad (205)$$

Два слагаемых без множителей пропадают вследствие симметричности тензора энергии-импульса.

Аналогично (204) определяется и момент для частиц

$$L_P^{\lambda\mu\nu} = T_P^{\lambda\mu} x^\nu - T_P^{\lambda\nu} x^\mu. \quad (206)$$

Его дивергенция находится точно так же. Сложение двух дивергенций демонстрирует выполнение закона сохранения момента:

$$\nabla_\lambda (L^{\lambda\mu\nu} + L_P^{\lambda\mu\nu}) = 0. \quad (207)$$

§ 12. Проявления эффектов относительности

1. *Проявления в физике.* В обычной жизни мы не встречаемся с телами, скорости которых сравнимы со скоростью света. Именно поэтому появившаяся в начале двадцатого века теория относительности произвела сильное впечатление на ненаучную и даже научную общественность, вызвала появление многих объясняющих ее явления статей и книг как физических, так и популярных. За сто лет, прошедших с тех пор, эта теория стала уже привычной, хотя все время возникают тщетные попытки либо опровержения ее, либо уточнения. Никаких явлений, противоречащих теории относительности, не установлено.

Теория относительности давно стала одной из незыблемых и широко используемых разделов физики с теоретической точки зрения, так как почти все другие ее разделы используют аппарат теории относительности. Электродинамика с самого начала была релятивистской, даже до осознания физиками этого факта. К настоящему времени построены релятивистская квантовая электродинамика, релятивистские гидро- и газодинамика, релятивистская статистическая физика и т. д.

Релятивизм проявляется и в практической физике. Многие элементарные частицы имеют очень короткие времена жизни. Они появляются в результате тех или иных реакций взаимодействия между другими элементарными частицами и в своей собственной системе отсчета быстро распадаются. Приведем порядки времен жизни некоторых частиц. Наименьшее время живут частицы, которые распадаются в результате сильного взаимодействия. Это некоторые мезоны и так называемые резонансы. Время их жизни $10^{-23} \div 10^{-22}$ с. Чуть более устойчив нейтральный пион π^0 , время его жизни 10^{-16} с. Другие частицы имеют следующие времена жизни: Λ -гиперон — 10^{-10} , пионы π^\pm — 10^{-8} , мюоны μ^\pm — $2 \cdot 10^{-6}$, нейтрон — 10^3 (все в секундах).

В ускорителях частицы разгоняются до очень высоких энергий и скоростей, в результате чего весьма короткоживущие частицы (даже резонансы), рождающиеся при взаимодействии исходных разгоняемых частиц, благодаря замедлению по сравнению с их собственным временем успевают достаточно долго продержаться и быть вовлеченными в эксперименты. Например, масса мюона равна ≈ 300 масс электрона, т. е. $300 \cdot 9 \cdot 10^{-28}$ г. В космических лучах он может иметь энергию порядка 10^{14} эВ = $10^{14} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} = 1.6 \cdot 10^2$

эрг, соответствующую $\gamma = 10^6$. Таким образом, он может прожить 2 секунды и пройти расстояние $6 \cdot 10^{10}$ см = $6 \cdot 10^5$ км. Это расстояние равно примерно 150 земным экваторам. Поэтому рожденный вблизи Земли мюон, вполне может до нее долететь. Различные частицы летят уже в земной атмосфере, в так называемых ливнях частиц, порождаемых падающими на нее космическими лучами. Они тормозятся в атмосфере, но тем не менее многие из них долетают либо до поверхности, либо улавливаются человеческими приборами, установленными на горах, аэростатах или спутниках.

Обнаружен и подтвержден количественно поперечный эффект Доплера.

Особенную роль релятивистская теория играет в астрофизике. Никакие ускорители не могут произвести частицы столь больших энергий, с какими приходится иметь дело астрофизикам.

2. *Сверхсветовые скорости.* Вообще говоря, скорости, превышающие скорость света, наблюдаются. Например, каждые сутки все галактики обращаются вокруг Земли, но это обращение кажущееся. С очень большими скоростями могут перемещаться световые отблески или зайчики, но они также не передают никаких сигналов, так как при этом перемещаются разные фотоны. Особого рассмотрения требуют сверхсветовые движения в космологии, так там они объясняются расширением пространства, а не передачей сигналов.

Частицы, которые движутся со скоростями, большими скорости света, называются тахионы. Много статей посвящено доказательству, что рассуждать о таких частицах возможно, но их существование недопустимо.

Тем не менее, в астрофизике наблюдаются сверхсветовые перемещения. Из активных ядер галактик (АЯГ) выбрасываются джеты с большими, меньшими, но сравнимыми с c скоростями. Их отдельные сгустки (блобы) летят в некотором направлении и время от времени их наблюдают и измеряют угловое перемещение на небесной сфере. Если известно расстояние до галактики, то угловое расстояние можно перевести в линейное. При этом часто оказывается, что отношение линейного расстояния к промежутку времени между соответствующими, как говорят, эпохам наблюдений, т. е. скорость перемещения блобов, превышает скорость света во много раз. Покажем, что и это явление только кажущееся.

Пусть некоторый источник излучения летит со скоростью \vec{v} и испускает фотоны в сторону наблюдателя, в направлении векто-

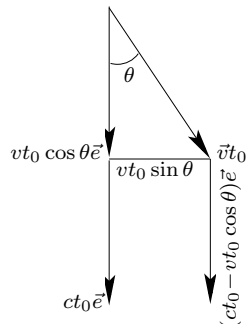


Рис. 9: Кажущееся сверхсветовое движение.

ра \vec{e} . Угол между векторами \vec{e} и \vec{v} пусть будет $\theta \leq \pi/2$, так что (см. рис. 9) $\vec{e} \cdot \vec{v} = v \cos \theta \geq 0$. Пусть два наблюдения этого источника разделены временем t_0 . За это время источник пройдет путь vt_0 и окажется в точке, расположенной ближе к наблюдателю на расстояние $vt_0 \cos \theta$. Проекция пройденного источником пути на картинную плоскость равна $vt_0 \sin \theta$. Сигнал при втором наблюдении придет после первого через время $t_0 - (v/c)t_0 \cos \theta$, так как он вышел на t_0 позже, но идти ему на $(v/c)t_0 \cos \theta$ меньше. Таким образом, наблюдатель увидит второй сигнал на расстоянии от первого $vt_0 \sin \theta$ через $[1 - (v/c) \cos \theta]t_0$, то есть для наблюдателя источник переместился на небесной сфере с кажущейся скоростью (appr – apparent)

$$v_{\text{appr}} = v \frac{\sin \theta}{1 - (v/c) \cos \theta}. \quad (208)$$

Введем обозначение $\beta = v/c$ и рассмотрим функцию

$$\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta) = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (209)$$

На концах промежутка изменения угла θ ее значения равны нулю: $\beta_{\text{appr}}(\beta, 0) = \beta_{\text{appr}}(\beta, \pi) = 0$, в середине $\beta_{\text{appr}}(\beta, \pi/2) = \beta$. Максимальное значение этой функции достигается при $\theta = \arccos(\beta)$ и равно $\gamma\beta$, где множитель Лоренца $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Неравенство $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta) \geq 1$ равносильно условию $\beta\sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4) \geq 1$ или

$$\theta_1(\beta) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}\beta} - \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}\beta} = \theta_u(\beta). \quad (210)$$

Поэтому сверхсветовые скорости могут наблюдаться только при $\beta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Границы по θ в зависимости от β — повернутая и смещенная синусоида — изображены на рис. 10а. Графики функции $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta)$ в зависимости от $0 \leq \theta \leq \pi$ при $\beta = 1/\sqrt{2}, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99$ и 1.0 приведены на рис. 10б. При $\beta \rightarrow 1$ кривые приближаются к предельной кривой $\beta_{\text{appr}}(1, \theta) = \text{ctg}(\theta/2)$, однако все они

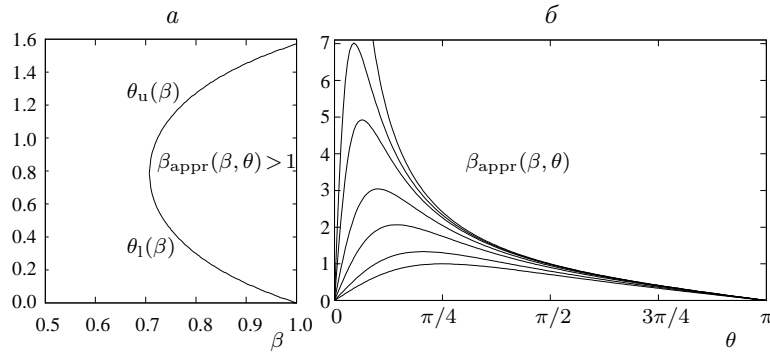


Рис. 10: Условия наблюдения сверхсветовых скоростей.

а. Границы для угла θ в зависимости от β .

б. Зависимость функции $\beta_{\text{appr}}(\beta, \theta)$ от θ при различных β .

исходят из начальной точки при $\theta = 0$, в то время как предельная кривая обращается в ней в бесконечность.

Таким образом, действительно, кажущееся перемещение источника в картинной плоскости может происходить со скоростью, большей световой, если сам источник летит с достаточно большой скоростью и под достаточно малым углом к линии наблюдения. Если наблюдается превышение источником скорости света в a раз, то можно получить связь между реальной скоростью источника и углом, под которым он летит к наблюдателю:

$$\beta = \frac{a}{a \cos \theta + \sin \theta}. \quad (211)$$

3. *Проявление лоренцева сокращения.* В этом пункте обсудим, как проявляется лоренцево сокращение.

Согласно формулам пункта 3 § 2 размер предмета в направлении его движения сокращается, а в перпендикулярном — остается неизменным.

Более 50 лет после создания теории относительности считалось, что наблюдатель и увидит сокращенный предмет. По-видимому, так думал и А.Эйнштейн. Лишь в 1959 году было обращено внимание [7], что наблюдатель не измеряет размеры летящего предмета, одновременно прикладывая измерительный прибор к его концам, как это описано в указанном выше пункте, а воспринимает его через излучение, т. е. как светящийся объект. Изложение истории и интерпретация явления даны в статье [8] (см. также книгу [3]). Здесь рассмотрим движение стержня вдоль его длины.

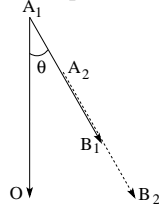


Рис. 11: Наблюдение движущегося стержня.

Пусть стержень движется вдоль своей длины со скоростью $V\vec{e}$, а направление на наблюдателя в системе этого наблюдателя составляет угол θ с направлением движения стержня (рис. 11). В своей собственной системе стержень имеет длину l_0 , а в системе наблюдателя вследствие лоренцева сокращения его длина $A_1B_1 = l_0/\Gamma$, где, как обычно, $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Предположим, что стержень находится от наблюдателя достаточно далеко, так что можно считать, что световые сигналы от всех его точек идут параллельно. Для того, чтобы наблюдатель мог измерить длину стержня, свет от его обоих концов должен дойти до наблюдателя одновременно.

Свет, испущенный из дальнего конца стержня A_1 , дойдет до некоторого пункта O в сторону наблюдателя за время t_0 , пройдя путь $A_1O = ct_0$. За это время стержень пройдет расстояние $A_1A_2 = Vt_0$ и займет положение A_2B_2 (на рисунке это положение показано пунктиром со смещением, чтобы оно не накладывалось на начальное). Точки O и B_2 должны располагаться на одном расстоянии от наблюдателя, т. е. отрезок OB_2 должен быть перпендикулярен линии A_1O . Покажем, что такой промежуток времени t_0 всегда существует. Действительно, очевидно, что тогда $A_1O = A_1B_2 \cos \theta$, т. е.

$$ct_0 = \left(\frac{l_0}{\Gamma} + Vt_0 \right) \cos \theta, \quad ct_0 = \frac{l_0 \cos \theta}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)} = l_0 \cos \theta D(V, \theta), \quad (212)$$

где $D(V, \theta)$ — доплеровский множитель (78).

Расстояние $A_1B_2 = l_0 D(V, \theta)$. Наблюдатель увидит проекцию этого отрезка, т. е. $OB_2 = A_1B_2 \sin \theta$, равную

$$l_0 D(V, \theta) \sin \theta = l_0 \sin \theta / [\Gamma(1 - V \cos \theta / c)] = l_0 \sin \theta'. \quad (213)$$

Поскольку θ и θ' согласно формуле абберации из (89) — это углы, которые стержень образует с направлениями на неподвижного и находящегося в одной со стержнем системе отсчета, проекции стержня для обоих наблюдателей оказываются совершенно одинаковыми. Таким образом, наблюдатель не увидит сокращения движущегося стержня, хотя это не означает, что оно не происходит. Это видно и из приведенного рассуждения.

4. *Форма летящей сферы.* В этом пункте обсудим подробнее, как проявляется лоренцево сокращение. Например, рассмотрим движение сферы. Пусть радиус-вектор точки сферы в сопутствующей ей системе отсчета (это ее собственная система) \vec{r}' . Уравнение точек сферы в этой системе $|\vec{r}'| = R$. Если сфера движется по отношению к системе отсчета наблюдателя со скоростью $\vec{V} = V\vec{e}$, то ее уравнение в его системе будет другим. Действительно, в момент t' точке \vec{r}' соответствует четырехмерный вектор $\underline{r}' = \{ct', \vec{r}'\}$. В системе наблюдателя рассматриваемый вектор преобразуется в $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$. Выражение штрихованных координат через нештрихованные согласно преобразованию Лоренца задается формулой

$$\vec{r}' = \vec{r} - \Gamma V \vec{e} t + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e} = \vec{r} - (\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e} + \Gamma(\vec{e} \cdot \vec{r} - Vt) \vec{e}. \quad (214)$$

Второе выражение разбито на векторы, перпендикулярный и параллельный вектору \vec{e} . Возведя в квадрат это второе выражение и приравняв его квадрату \vec{r}' , получим уравнение летящей сферы:

$$[\vec{r} - (\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e}]^2 + \Gamma^2 (\vec{e} \cdot \vec{r} - Vt)^2 = R^2, \quad \frac{[\vec{r} - (\vec{e} \cdot \vec{r}) \vec{e}]^2}{R^2} + \frac{(\vec{e} \cdot \vec{r} - Vt)^2}{R^2 / \Gamma^2} = 1. \quad (215)$$

Очевидно, что такое уравнение описывает сфероид (эллипсоид вращения), у которого в направлениях, перпендикулярных скорости движения сферы, полуоси равны ее радиусу R , а в направлении движения (и сферы и сфероида) полуось сокращена и равна R/Γ .

Выясним, как видят сферу наблюдатели. Поскольку в перпендикулярном движению направлении сокращения расстояний не происходит, будем рассматривать точки сферы, лежащие в плоскости векторов \vec{e} и \vec{l}' , а значит и \vec{l} . Будем считать, что сфера находится далеко от наблюдателя, так что ее излучение приходит

параллельным потоком. Вместо одного глаза наблюдателя будем подразумевать что-то вроде фотопластинки, на которую все фотоны падают одновременно.

Для удобства рассуждений введем в указанной плоскости (плоскость абберации) несколько базисов и установим между ними связи.

5. *Базисы в плоскости абберации.* Введем в этой плоскости ортогональный базис, взяв в качестве одного из ортов вектор \vec{e} , а в качестве второго перпендикулярный ему

$$\vec{e}_\perp = \frac{\vec{l}' - \cos \theta' \vec{e}}{\sin \theta'} = \frac{\vec{l} - \cos \theta \vec{e}}{\sin \theta}. \quad (216)$$

Возможность двойного представления этого вектора доказывается с помощью формул абберации. Действительно, подставим в первое выражение (216) формулу (85) и формулу для $\cos \theta'$, а затем и для $\sin \theta'$ из (89). Получим

$$\begin{aligned} \vec{e}_\perp &= \frac{1}{\sin \theta'} \left[\frac{\vec{l} - \cos \theta \vec{e} + \Gamma(\cos \theta - V/c) \vec{e}}{\Gamma(1 - V \cos \theta/c)} - \frac{\cos \theta - V/c}{1 - V \cos \theta/c} \vec{e} \right] = \\ &= \frac{\vec{l} - \cos \theta \vec{e}}{\sin \theta' \Gamma(1 - V \cos \theta/c)} = \frac{\vec{l} - \cos \theta \vec{e}}{\sin \theta}. \end{aligned} \quad (217)$$

Орты \vec{l}' и \vec{l} , а также перпендикулярные им, можно представить в виде разложений по введенному базису:

$$\vec{l}' = \cos \theta' \vec{e} + \sin \theta' \vec{e}_\perp, \quad \vec{l} = \cos \theta \vec{e} + \sin \theta \vec{e}_\perp, \quad (218)$$

$$\vec{l}'_\perp = \sin \theta' \vec{e} - \cos \theta' \vec{e}_\perp, \quad \vec{l}_\perp = \sin \theta \vec{e} - \cos \theta \vec{e}_\perp. \quad (219)$$

С помощью формул абберации (89) легко проверить, что справедливо тождество

$$\cos \theta' + \Gamma \frac{V}{c} \sin \theta' \sin \theta = \cos \theta. \quad (220)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \theta' + V/c}{1 + V \cos \theta'/c} = \frac{\cos \theta' (1 + V \cos \theta'/c) + V(1 - \cos^2 \theta')/c}{1 + V \cos \theta'/c} = \\ &= \cos \theta' + \frac{V}{c} \frac{\sin^2 \theta'}{1 + V \cos \theta'/c} = \cos \theta' + \Gamma \frac{V}{c} \sin \theta' \sin \theta. \end{aligned} \quad (221)$$

Это тождество позволяет вывести соотношение между векторами:

$$\vec{l}'_{\perp} - \sin \theta' \vec{e} + \Gamma \sin \theta' \left(\vec{e} - \frac{V}{c} \sin \theta' \vec{l} \right) = \vec{l}_{\perp}, \quad (222)$$

так как

$$\begin{aligned} \vec{l}'_{\perp} &= \sin \theta' \vec{e} - \cos \theta' \vec{e}_{\perp} = \Gamma \sin \theta' \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right) \vec{e} - \left(\cos \theta' + \frac{\Gamma V}{c} \sin \theta' \sin \theta \right) \vec{e}_{\perp} = \\ &= \sin \theta' \vec{e} - \cos \theta' \vec{e}_{\perp} + (\Gamma - 1) \sin \theta' \vec{e} - \Gamma \frac{V}{c} \sin \theta' (\cos \theta \vec{e} + \sin \theta \vec{e}_{\perp}) = \\ &= \vec{l}'_{\perp} - \sin \theta' \vec{e} + \Gamma \sin \theta' \left(\vec{e} - \frac{V}{c} \sin \theta' \vec{l} \right). \end{aligned} \quad (223)$$

6. *Восприятие сферы наблюдателями.* Пусть сфера все время светится одинаково. Зафиксируем одну точку на сфере (точнее, на окружности — сечении сферы плоскостью аберрации) и проведем радиальный вектор $\vec{r}'_0 = R\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$. Посмотрим, отличаются ли восприятия летящей сферы двумя наблюдателями, один из которых летит вместе с ней, назовем его летящим, а другой в полете не участвует, назовем его сторонним.

Наблюдатель (фотопластинка) воспринимает в каждый момент те фотоны, которые дошли до него (нее) в этот момент, а значит вышли от сферы не одновременно, а в зависимости от места выхода. Фотону, выходящему с конца вектора \vec{r}'_0 , требуется пройти путь, отличающийся от пути фотона, который бы вышел из центра сферы, на $\vec{r}'_0 \cdot \vec{l}'$ (большой или меньший в зависимости от знака этой проекции). Очевидно, что этот путь связан с разностью времен t'_0 старта указанных фотонов (чтобы они одновременно пришли к наблюдателю) соотношением

$$ct'_0 = \vec{r}'_0 \cdot \vec{l}' = R\vec{n} \cdot \vec{l}'. \quad (224)$$

Разложим выбранный вектор на две составляющие

$$\vec{r}'_0 = (\vec{r}'_0 \cdot \vec{l}') \vec{l}' + (\vec{r}'_0 \cdot \vec{l}'_{\perp}) \vec{l}'_{\perp} = \vec{l}' ct'_0 + \vec{r}'_*, \quad \vec{r}'_* = r'_* \vec{l}'_{\perp}, \quad r'_* = \vec{r}'_0 \cdot \vec{l}'_{\perp}. \quad (225)$$

Проекция r'_* на орт \vec{l}'_{\perp} может быть как положительной, так и отрицательной.

Пусть два фотона в движущейся вместе с радиусом системе выходят в направлении вектора \vec{l}' , т.е. в сторону наблюдателя.

Один фотон стартует из центра сферы в начальный момент времени, а второй — с конца вектора \vec{r}'_0 , но так, что оба они идут к наблюдателю на одинаковых расстояниях от него (то есть от фотопластинки) и приходят к нему в один и тот же момент t'_{ph} . Тогда проекции их радиусов-векторов на орт \vec{l}' равны, но из центра фотон должен выйти раньше на t'_0 . Траектория второго фотона определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}'_{\text{ph}} = \vec{r}'_0 + c\vec{l}'(t'_{\text{ph}} - t'_0) = \vec{r}'_* + c\vec{l}'t'_{\text{ph}} = r'_*\vec{l}'_{\perp} + c\vec{l}'t'_{\text{ph}}. \quad (226)$$

Момент прихода фотонов к наблюдателю получается при проецировании вектора (226) на направление их движения:

$$ct'_{\text{ph}} = \vec{l}' \cdot \vec{r}'_{\text{ph}} = R\vec{n} \cdot \vec{l}' + ct'_{\text{ph}} - ct'_0, \quad (227)$$

а наблюдаемая форма этого вектора — это проекция его на картинную плоскость, перпендикулярную вектору \vec{l}' , т. е.

$$\vec{r}'_{\text{ph}} \cdot \vec{l}'_{\perp} = \vec{r}'_* \cdot \vec{l}'_{\perp} = r'_*. \quad (228)$$

Составив четырехмерный вектор для траектории фотонов в штрихованной системе

$$r'_{\text{ph}} = \{ct'_{\text{ph}}, \vec{r}'_* + c\vec{l}'t'_{\text{ph}}\} \quad (229)$$

и применив к нему преобразование Лоренца, получим соответствующий вектор в нештрихованной системе $r_{\text{ph}} = \{ct_{\text{ph}}, \vec{r}_{\text{ph}}\}$, где

$$ct_{\text{ph}} = \Gamma \left(ct'_{\text{ph}} + \frac{V}{c} \vec{e} \cdot \vec{r}'_* + V(\vec{e} \cdot \vec{l}')t'_{\text{ph}} \right), \quad (230)$$

$$\vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}'_* + c\vec{l}'t'_{\text{ph}} + \Gamma V \vec{e} t'_{\text{ph}} + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}'_* + c\vec{e} \cdot \vec{l}'t'_{\text{ph}})\vec{e}. \quad (231)$$

Соотношение между временами в двух системах получается таким:

$$t'_{\text{ph}} = \frac{t_{\text{ph}} - \Gamma V \vec{e} \cdot \vec{r}'_*/c^2}{\Gamma(1 + V \cos \theta/c)}, \quad (232)$$

так что траектория фотонов в нештрихованной системе в зависимости от времени в той же системе дается выражением

$$\vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}'_* + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}'_*)\vec{e} + c\vec{l}' \left(t_{\text{ph}} - \Gamma \frac{V}{c^2} \vec{e} \cdot \vec{r}'_* \right), \quad (233)$$

при выводе которого использовано соотношение (85) между векторами \vec{l} и \vec{l}' . Записав вектор (233) в виде

$$\vec{r}_{\text{ph}} = \vec{r}_* + c\vec{l}t_{\text{ph}}, \quad (234)$$

для вектора \vec{r}_* получим с помощью соотношения (222)

$$\begin{aligned} \vec{r}_* &= \vec{r}'_* + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{r}'_*)\vec{e} - c\vec{l}\Gamma\frac{V}{c^2}\vec{e} \cdot \vec{r}'_* = \\ &= r'_* \left[\vec{l}'_{\perp} + (\Gamma - 1)(\vec{e} \cdot \vec{l}'_{\perp})\vec{e} - \Gamma\frac{V}{c}(\vec{e} \cdot \vec{l}'_{\perp})\vec{l} \right] = r'_* \vec{l}_{\perp}. \end{aligned} \quad (235)$$

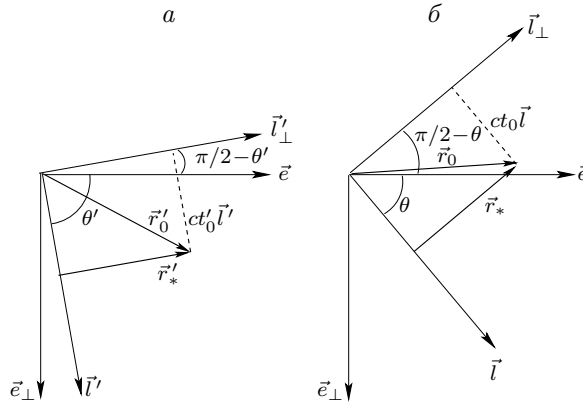


Рис. 12: Поворот радиуса летящей сферы.

Таким образом, сторонний наблюдатель увидит проекцию определенного радиуса летящей сферы точно такого же размера, что и наблюдающий за неподвижной сферой. При этом более удаленные части сферы пошлют свой сигнал раньше, а именно, точка на радиусе, составляющем определенный угол с вектором наблюдения в сопутствующей сфере системе, будет восприниматься сторонним наблюдателем как точка на радиусе с тем же углом, но по отношению к вектору его наблюдения. Сторонний наблюдатель увидит точно такую же картину, что и летящий вместе со сферой. Вся картина, т. е. сфера с исходящими от нее лучами, просто повернется на угол между векторами \vec{l}' и \vec{l} , т. е. на угол $\theta' - \theta$ в соответствии с абберацией, как показано на рис. 12. Приняты значения $\theta' = 80^\circ$,

$V/c = 0.528$, так что поворот линий наблюдения произошел на угол $\theta' - \theta = 30^\circ$. В качестве поворачивающихся треугольников взят египетский со сторонами 3, 4 и 5.

7. *Влияние aberrации.* Как говорилось, aberrацию открыл Дж. Брайдей. С тех пор она хорошо изучена и влияние aberrации, возникающей при движении Земли, устраняется.

В последнее время точность измерения расстояний и углов в астрономии, в частности, ее разделе астрометрии значительно возросла. Потребовалось учитывать релятивистские эффекты при расчете движения больших и малых планет, естественных и даже искусственных спутников и космических аппаратов. Для этого оказалось необходимым построить систему отсчета, опирающуюся на более стационарные объекты, чем объекты Солнечной системы. Были выбраны так называемые квазизвездные объекты, квазары (по английски *quas(i-st)ar*), которые располагаются очень далеко от нашей Галактики и могут считаться неподвижными. Конечно, влияние aberrации вследствие движения Земли по орбите и ее вращения было учтено.

Однако, совсем недавно было обнаружено, что направления на эти удаленные объекты все же меняются по непонятной причине. Вскоре было выяснено, что причиной является движение Солнца по орбите вокруг центра Галактики. Скорость этого движения довольно велика, около 300 км/с, но период обращения Солнца составляет примерно 250 миллионов лет, так что кривизна орбиты незначительна. При движении по прямой aberrация возникает, но изменение направления остается постоянным, что не влияет на возможность использования этого направления как реперного. Однако за время наблюдений порядка нескольких лет кривизна орбиты Солнца все же стала заметной и отразилась на направлении на квазары. Теперь эту погрешность также устраняют.

Глава 3. Постоянные электрическое и магнитное поля

§ 1. Постоянное электрическое поле

1. *Поле одиночного точечного заряда.* Неподвижный точечный заряд q создает стационарное электрическое поле, потенциал φ и напряженность \vec{E} которого определяются согласно закону Кулона, как уже говорилось в Главе 1. Если начало координат совмещено с зарядом, то

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi = q\frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Силовые линии этого поля — это лучи, исходящие из заряда, а поверхности уровня потенциала — это сферы с центром, совмещенным с зарядом.

Потенциал точечного заряда удовлетворяет уравнению Пуассона с дельта-функцией в правой части, которая в соответствии с (1.8) определяет плотность точечного заряда (здесь без зависимости от времени):

$$\Delta \frac{q}{r} = -4\pi q \delta(\vec{r}). \quad (2)$$

Это равенство проще всего проверить, применив к обеим его частям преобразование Фурье. Преобразование оператора Лапласа согласно правилу преобразования производных (ПЗ.73)

$$\int e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3r \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r} = -k^2 \int e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3r}{r}. \quad (3)$$

Преобразование от $1/r$ вычисляем при $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3r}{r} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{r} e^{ikr \cos\theta} = 2\pi \int_0^\infty r dr \int_{-1}^1 e^{ikr\eta} d\eta = \\ &= 2\pi \int_0^\infty r dr \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty \sin(kr) dr. \end{aligned} \quad (4)$$

Последний интеграл, как обычно, понимается как предел

$$\int_0^\infty \sin(kr) dr = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin(kr) dr = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{k}{\alpha^2 + k^2} = \frac{1}{k}. \quad (5)$$

Таким образом, преобразование левой части равно -4π и равно преобразованию правой части, которое находится по свойству трехмерной дельта-функции (ПЗ.59).

2. *Поле диполя.* Картина поверхностей уровня и силовых линий у диполя, т. е. системы двух зарядов значительно сложнее. Потенциал двух зарядов, один из которых $q > 0$ расположен в точке $\vec{r}^{(+)} = (0, 0, a)$, а другой $\pm q$ — в точке $\vec{r}^{(-)} = (0, 0, -a)$, равен сумме потенциалов каждого из зарядов:

$$\varphi_{\pm}(\vec{r}) = q \left(\frac{1}{r_{+}} \pm \frac{1}{r_{-}} \right), \quad \vec{r}_{\pm} = \vec{r} - \vec{r}^{(\mp)} = (x, y, z \pm a). \quad (6)$$

Напряженность поля такого диполя

$$\vec{E} = q \left(\frac{\vec{r}_{+}}{r_{+}^3} \pm \frac{\vec{r}_{-}}{r_{-}^3} \right). \quad (7)$$

Силовые линии диполя — это линии тока напряженности, уравнения этих линий (обозначено $r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm a)^2}$)

$$\frac{dx}{x/r_{+}^3 \pm x/r_{-}^3} = \frac{dy}{y/r_{+}^3 \pm y/r_{-}^3} = \frac{dz}{(z+a)/r_{+}^3 \pm (z-a)/r_{-}^3}. \quad (8)$$

Ввиду осевой симметрии системы можно перейти в плоскость xz , т. е. положить $y = 0$ и отбросить уравнение с dy . Иначе можно ввести цилиндрические координаты $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\phi = \arctg(y/x)$. Тогда из уравнений формально следует, что $\phi = \text{const}$, а уравнения сводятся к одному

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1/r_{+}^3 \pm 1/r_{-}^3}{(z+a)/r_{+}^3 \pm (z-a)/r_{-}^3} dz, \quad r_{\pm} = \sqrt{\varrho^2 + (z \pm a)^2}. \quad (9)$$

Путем несложной, хотя и довольно длинной, выкладки можно проверить, что уравнение (9) равносильно следующему:

$$\frac{d \frac{z+a}{\varrho}}{\left[1 + \left(\frac{z+a}{\varrho} \right)^2 \right]^{3/2}} \pm \frac{d \frac{z-a}{\varrho}}{\left[1 + \left(\frac{z-a}{\varrho} \right)^2 \right]^{3/2}} = 0. \quad (10)$$

В таком виде уравнение интегрируется и в результате получается, что уравнение, определяющее силовые линии напряженности, имеет вид

$$\frac{z+a}{r_+} \pm \frac{z-a}{r_-} = \Phi_{\pm}. \quad (11)$$

Ввиду той же симметрии проще рассматривать два значения $\phi = 0$ и $\phi = \pi$ и вместо ϱ использовать x . Тогда уравнения для силовых линий сохранят свой вид, но радикалы в знаменателях выразятся через x : $r_{\pm} = \sqrt{(z \pm a)^2 + x^2}$.

Рассмотрим одновременно и поверхности уровня потенциала, уравнения которых согласно (6) пишутся в виде $\varphi_{\pm}(\vec{r}) = \varphi_{\pm}$.

Из приведенных уравнений следует, что параметр a не является существенным в том смысле, что его можно принять в качестве геометрического масштаба и все расстояния, в том числе и координаты измерять в этой величине. Формально можно положить $a = 1$. Примем также, что заряды диполя единичные, т. е. $q = 1$. Эти допущения качественно не исказят картины поведения силовых линий и поверхностей уровня.

Итак, рассмотрим два уравнения, описывающих уровни потенциалов диполя:

$$\frac{1}{r_-} \pm \frac{1}{r_+} = \varphi_{\pm}, \quad (12)$$

и два уравнения, определяющих силовые линии:

$$\frac{z+1}{r_+^3} \pm \frac{z-1}{r_-^3} = \Phi_{\pm}. \quad (13)$$

Порядок слагаемых в этих выражениях взят таким образом, чтобы разности дробей были положительны при $z > 0$. Другими словами при написании уравнений (12) считается, что положительный заряд помещен в точку $x = 0, z = 1$, а отрицательный — в точку $x = 0, z = -1$, а в уравнении (13) — наоборот. В (12) в правых частях стоят значения поверхностей уровня — их уровни φ_{\pm} . Для краткости правые части двух других уравнений Φ_{\pm} также будем называть уровнями.

Очевидны следующие свойства симметрии уравнений (12)–(13). Изменение знака x их не меняет. Если же заменить z на $-z$, то уравнения с φ_+ и Φ_- не изменятся, а в двух других уравнениях такая замена равносильна изменению знаков φ_- и Φ_+ .

3. *Поверхности уровня диполя.* Для решения уравнений (12) обозначим

$$t^2 = (z - 1)^2 + x^2. \quad (14)$$

Тогда уравнения (12) превращаются в

$$\frac{1}{t} \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4z}} = \varphi_{\pm} \quad (15)$$

и сводятся к решению уравнения четвертой степени:

$$t^4 - ht^3 + 4zt^2 - 4zht + zh^2 = 0, \quad (16)$$

где введено еще одно обозначение $h = 2/\varphi_{\pm}$. Уравнение четвертой степени сводится к двум квадратным уравнениям, так как левая часть уравнения представляется в виде

$$\left[t^2 + (A-h)\frac{t}{2} + y - h\frac{y-4z}{A} \right] \left[t^2 - (A+h)\frac{t}{2} + y + h\frac{y-4z}{A} \right] = 0, \quad (17)$$

где $A = \sqrt{8y + h^2 - 16z}$, а y — корень кубического уравнения

$$y^3 - 2zy^2 - \frac{z}{8}h^4 = 0. \quad (18)$$

Вещественный корень этого уравнения всегда один:

$$y = u + \frac{4}{9}\frac{z^2}{u} + 2\frac{z}{3}, \quad u = \left(\frac{8z^3}{27} + \frac{h^4z}{16} + \sqrt{D} \right)^{1/3}, \quad D = h^4z^2 \left(\frac{h^4}{256} + \frac{z^2}{27} \right). \quad (19)$$

После вычисления для возможных значений z сначала u , а затем y и A решаются квадратные уравнения и находятся корни уравнения (17). Два из них, а именно, корни первого множителя в (17) оказываются комплексными, а два корня второго множителя — вещественны. По найденным значениям t определяются положительные и отрицательные значения x . В результате получаются кривые, представленные на рис. 13 для ряда значений уровней φ_{\pm} . Поверхности получаются в результате вращения этих кривых вокруг оси, на которой находятся заряды.

Рисунок демонстрирует, что около зарядов (большие $|\varphi_{\pm}|$) потенциалы близки к тем, которые имеют одиночные заряды. С удалением от них картины (с уменьшением $|\varphi_{\pm}|$) при одинаковых и противоположных знаках сильно различаются. При одинаковых знаках, начиная с $\varphi_+ = 2$ (соответствующая кривая напоминает знак

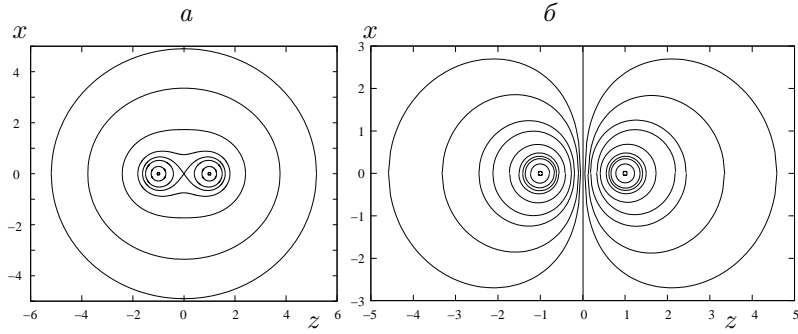


Рис. 13: Уровни потенциала диполя.

- а) Два положительных заряда, $\varphi_+ = 0.4, 4/7, 1.0, 1.6, 2.0, 2.4, 4.0, 20.0$.
б) Заряды противоположных знаков, $|\varphi_-| = 0.1, 0.2, 0.4, 4/7, 1.0, 1.6, 2.0, 2.4, 4.0, 20.0$, положительные φ_- справа, отрицательные слева и предел при $\varphi_{\pm} = 0$.

∞), поверхности сливаются и при малых φ_+ становятся почти сферическими. Действительно, самое малое расстояние точек поверхности от начала координат осуществляется при $z = 0$ и равно

$$x_{\min} = \sqrt{\frac{4}{\varphi_+^2} - 1} \sim \frac{2}{\varphi_+} - \frac{\varphi_+}{4}, \quad (20)$$

а самое большое расстояние — при $x = 0$ и равно

$$z_{\max} = \frac{1}{\varphi_+} + \sqrt{\frac{1}{\varphi_+^2} + 1} \sim \frac{2}{\varphi_+} + \frac{\varphi_+}{2}. \quad (21)$$

Напротив, поверхности уровня потенциала диполя с противоположными знаками зарядов как бы отталкиваются. На рисунке (по принятому условию) знак φ_- совпадает со знаком z . Снова находим при малых $|\varphi_-|$ наибольшее и наименьшее расстояния от начала координат, достигающиеся при $x = 0$:

$$z_{\max} = \sqrt{1 + \frac{2}{|\varphi_-|}}, \quad z_{\min} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_-^2} + 1} - \frac{1}{|\varphi_-|} \sim \frac{|\varphi_-|}{2}. \quad (22)$$

При $\varphi_- \rightarrow 0$ кривые с двух сторон стремятся к оси x и вырождаются в нее при $\varphi_- = 0$.

4. *Силовые линии диполя.* Для второй пары уравнений делаем ту же замену (14), преобразуя уравнения в

$$\frac{z+1}{\sqrt{t^2+4z}} \pm \frac{z-1}{t} = \Phi_{\pm}, \quad (23)$$

из которых получается также уравнение четвертой степени с другими коэффициентами:

$$t^4 - h(z-1)t^3 + (4-h^2)zt^2 - 4hz(z-1)t + h^2z(z-1)^2 = 0, \quad (24)$$

где по аналогии обозначено $h = \pm 2/\Phi_{\pm}$. Здесь уравнение факторизуется сложнее:

$$\begin{aligned} & \left[t^2 + (A - h(z-1))\frac{t}{2} + y - h(z-1)\frac{y-4z}{A} \right] \times \\ & \times \left[t^2 - (A + h(z-1))\frac{t}{2} + y + h(z-1)\frac{y-4z}{A} \right] = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где теперь $A = \sqrt{8y + h^2(z+1)^2 - 16z}$. Уравнение для y также усложняется:

$$y^3 - z \left(2 - \frac{h^2}{2} \right) y^2 - \frac{h^4}{8} z (z^2 - 1)^2 = 0. \quad (26)$$

Параметры уравнения $w^3 + 3pw + 2q = 0$ для $w = y - \frac{z}{3} \left(2 - \frac{h^2}{2} \right)$

$$p = -\frac{z^2}{9} \left(2 - \frac{h^2}{2} \right)^2, \quad q = -\frac{z}{432} [2z^2(1-h^2)(h^2+8)^2 + 27h^4(z^4+1)], \quad (27)$$

а дискриминант

$$D = p^3 + q^2 = \frac{h^4 z^2}{6912} (z^2 - 1)^2 [z^2(256 - 192h^2 - 6h^4 - 4h^6) + 27h^4(z^4 + 1)]. \quad (28)$$

Здесь, в отличие от предыдущих пунктов, дискриминант может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знака выражения, стоящего в квадратных скобках. Относительно z^2 это выражение является квадратным трехчленом с коэффициентами

$$Q(z) = az^4 - 2bz^2 + a, \quad a = 27h^4, \quad b = 2h^6 + 3h^4 + 96h^2 - 128. \quad (29)$$

Дискриминант этого трехчлена раскладывается на множители:

$$H(h) = b^2 - a^2 = 4(h^2 - 4)(h^2 - 1)d(h), \quad d(h) = h^8 + 8h^6 - 48h^4 - 256h^2 + 1024. \quad (30)$$

Множитель $d(h)$ на допустимом для h^2 промежутке $[1, \infty)$ строго положителен. Таким образом, дискриминант $H(h)$ обращается в нуль на границе возможных значений $h = \pm 1$ и меняет знак с отрицательного на положительный при $h = \pm 2$. При $1 \leq h^2 < 4$ трехчлен $Q(z)$, а с ним и дискриминант D положителен при всех $z > 0$, а при $h^2 > 4$ он отрицателен на промежутке между корнями z_- и z_+ трехчлена и положителен вне этих корней. Корни определяются формулами

$$z_{\pm}^2 = \frac{b \pm \sqrt{H(h)}}{a}, \quad z_+ z_- = 1. \quad (31)$$

В отличие от поверхностей уровня потенциала здесь корни могут иметь оба множителя в разложении (25).

В результате решения уравнения (24) при заданном значении $h = 2/\Phi_{\pm}$ получились зависимости x от z , представляющие силовые линии диполя и отраженные на рис. 14. На Рис. 14б для большей наглядности выдержано правильное соотношение масштабов осей, как и на рис. 13а, на других рисунках масштабы не соблюдены из тех же соображений.

Силовые линии диполя с зарядами противоположных знаков возможны только при положительных значениях Φ_- , а при двух положительных зарядах значения $z > 0$ отвечают положительным Φ_- . Как следует из формул и видно из рисунка, критическими значениями уровней являются $\Phi_{\pm} = 2, 1$ и 0 . При $\Phi_+ = \pm 2$ линия состоит из двух лучей: $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$, а при $\Phi_- = 2$ — это луч, соединяющий заряды. С ростом уровней линии выходят из зарядов под различными углами к прямой, их соединяющей. Если при $1 < |\Phi_{\pm}| < 2$ эти углы острые, то при $|\Phi_{\pm}| > 2$ — тупые. При граничном значении $|\Phi_{\pm}| = 2$ кривые выходят перпендикулярно линии зарядов. С удалением от зарядов кривые приближаются к своим прямолинейным асимптотам: $x = az - b/z$, где $a = \sqrt{4/\Phi_+^2 - 1}$, $b = (3a^4 + 7a^2 + 4)/[2a(1 + a^2)^2]$. Чем меньше Φ_+ , тем быстрее это приближение. При $\Phi_+ = 0.1$ уже при $z \geq 1$ формулы обеспечивают пять верных значащих цифр. При $|\Phi_+| \rightarrow 0$ кривые переходят в предельные конфигурации. Для $\Phi_+ = +0$ эта конфигурация изображена на рисунке: она состоит из отрезка $[0, 1]$ на оси z и всей

оси x , как будто линия выходит из заряда в сторону другого заряда, но в точке между ними расходится под прямыми углами в противоположные стороны. При зарядах противоположных знаков картина силовых линий совершенно другая. Кривые замкнутые. С уменьшением Φ_- крайние точки кривых удаляются от зарядов: при $z = 0$ из уравнения с Φ_- находим $x = \pm\sqrt{(2/|\Phi_-|)^2 - 1}$.

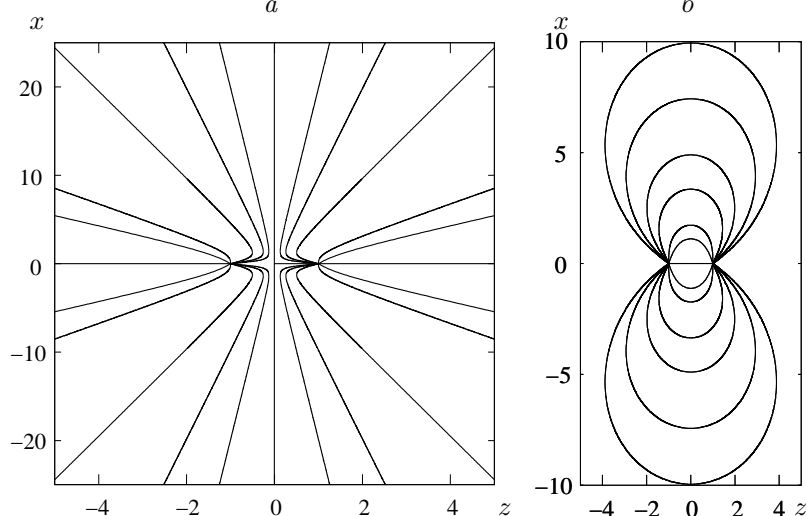


Рис. 14: Силовые линии диполя.

a) Два положительных заряда, $|\Phi_+| = 2.0, 4/3, 1.0, 0.4, 0.2, 0.1$, справа $\Phi_+ > 0$, слева $\Phi_+ < 0$, предельное положение при $\Phi_+ = 0$ показано только справа. *б)* Заряды противоположных знаков, $\Phi_- = 2.0, 4/3, 1.0, 4/7, 0.4, 4/15, 0.2$,

5. *Потенциалы распределенных зарядов.* Приведем еще потенциалы зарядов, распределенных по объему или по поверхности. Не претендуя на математическую строгость для простоты считаем поверхности и плотности распределений зарядов достаточно гладкими. Для определения потенциалов зарядов на поверхности требуется, чтобы поверхность была двусторонней, причем надо договориться, какая из сторон является, так сказать, внешней, а какая внутренней, что определяется выбором направления нормали к поверхности, которая идет от внутренней стороны к внешней.

Если заряд заполняет объем \mathcal{V} с пространственной плотностью $\rho(\vec{r})$, то потенциал совпадает по виду с ньютоновским потенциалом

силы тяжести:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (32)$$

С помощью уравнения для точечного заряда (2) доказывается, что такой потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (33)$$

При поверхностном распределении зарядов рассматриваются два случая: простой слой и двойной слой. Потенциал простого слоя дается интегралом

$$V(\vec{r}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2\Sigma, \quad (34)$$

где σ — поверхностная плотность заряда, распределенного по поверхности Σ .

Потенциал двойного слоя определяется интегралом, содержащим плотность диполя τ и производную по внешней нормали \vec{n} к поверхности:

$$W(\vec{r}) = \int_{\Sigma} \tau(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2\Sigma = \int_{\Sigma} \tau(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{n} d^2\Sigma. \quad (35)$$

Появление производной объясняется предельным переходом при определении потенциала диполя при бесконечном сближении зарядов противоположных знаков. Если заряд q находится в точке $\vec{r}_0 + \vec{r}_*/2$, а заряд $-q$ симметрично относительно точки \vec{r}_0 , т. е. в точке $\vec{r}_0 - \vec{r}_*/2$, то потенциал такого диполя в точке \vec{r}

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= q \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0 + \vec{r}_*/2|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{r}_*/2|} \right) = \\ &= q \left(\frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + \vec{r}_*(\vec{r} - \vec{r}_0) + r_*^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - \vec{r}_*(\vec{r} - \vec{r}_0) + r_*^2/4}} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Если $r_* \ll |\vec{r} - \vec{r}_0|$, то с точностью до первого порядка малого отношения $r_*/|\vec{r} - \vec{r}_0|$

$$\varphi(\vec{r}) \sim -q \frac{\vec{r}_*(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = qr_* \frac{\vec{r}_*}{r_*} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (37)$$

При расположении зарядов с двух сторон поверхности произведение qr_* — это дипольный момент, а отношение \vec{r}_*/r_* — внешняя нормаль.

Свойства потенциалов подробно изучаются в курсах математической физики (см., например, [9]).

При достаточно гладких плотностях и поверхностях потенциалы также являются достаточно “хорошими” функциями координат, например, имеют производные различных порядков. Отметим только без доказательства основные предельные соотношения. Если перемещать точку \vec{r} и приближать ее к поверхности, то при пересечении потенциалы терпят определенные разрывы.

Возьмем точку \vec{r}_0 на поверхности Σ и устремим точку \vec{r} к точке \vec{r}_0 вдоль нормали. Если это перемещение производится в направлении внешней нормали, то будем писать $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 + 0$, если в противоположном направлении, то пишем $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 - 0$. Потенциал двойного слоя сам разрывен согласно формулам:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 \pm 0} W(\vec{r}) = W(\vec{r}_0) \pm 2\pi\tau(\vec{r}_0). \quad (38)$$

У потенциала простого слоя разрывной оказывается первая производная, которая вычисляется по направлению внешней нормали:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0 \pm 0} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n} = \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n} \Big|_{\vec{r}_0} \mp 2\pi\sigma(\vec{r}_0). \quad (39)$$

При нахождении значений потенциала $W(\vec{r}_0)$ и производной $\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n} \Big|_{\vec{r}_0}$ в точке на поверхности может потребоваться вычисление несобственных интегралов.

Приведем простой пример. Пусть поверхность — это круг на плоскости xy с центром в начале координат и радиусом R , нормаль — это вектор $\vec{n} = (0, 0, 1)$, а все плотности постоянны и равны σ_0 и τ_0 . В качестве точки, в которой вычисляются потенциалы, возьмем точку на оси аппликат $\vec{r} = (0, 0, z)$, а в качестве предельной точки — начало координат $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$. Тогда оба поверхностных интеграла легко вычисляются:

$$V(\vec{r}) = \sigma_0 \int \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pi\sigma_0 \int_0^{R^2} \frac{du}{\sqrt{u + z^2}} = 2\pi\sigma_0 \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right], \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
W(\vec{r}) &= \tau_0 \int \frac{(0, 0, z) - (x, y, 0)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (0, 0, 1) dx dy = \\
&= \tau_0 z \int \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \pi \tau_0 z \int_0^{R^2} \frac{du}{(u + z^2)^{3/2}} = 2\pi \tau_0 z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).
\end{aligned} \tag{41}$$

Так как $\frac{z}{|z|} = \text{sgn}(z)$ и $\frac{d|z|}{dz} = \text{sgn}(z)$, то соответствие пределов при $z \rightarrow \pm 0$ формулам (38) и (39) очевидно.

Приведенные потенциалы используются в математической физике при решении краевых задач Неймана и Дирихле.

§ 2. Законы Био—Савара—Лапласа, Эрстеда и Ампера

1. *Четвертое уравнение Максвелла.* Рассмотрим это уравнение в стационарном случае, когда поля и токи не зависят от времени:

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \tag{42}$$

Проинтегрируем это уравнение по некоторой поверхности Σ , ограниченной замкнутой кривой \mathcal{L} . Получится соотношение

$$\int_{\Sigma} \vec{n} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}) d^2 \Sigma = \oint_{\mathcal{L}} \vec{H}(\vec{r}) \vec{l} ds = \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma} \vec{j}(\vec{r}) \vec{n} d^2 \Sigma. \tag{43}$$

Покажем, что из полученного соотношения вытекают законы, установленные экспериментально Эрстедом, Био и Саваром в формулировке Лапласа, а также Ампером.

2. *Закон Эрстеда.* Пусть постоянный ток течет вдоль бесконечной прямой, совместим с ней ось z . Напряженность \vec{H} также постоянна. Так как она должна быть ортогональна току и радиус-вектору точки $\vec{r} = (x, y, z)$, то она должна быть пропорциональна вектору $(-y, x, 0)$, т. е. направлена по касательным к окружностям в плоскости xy с центрами на оси z . Взяв в качестве поверхности круг с центром в начале координат и радиусом R , получим, что $s = R\phi$, $\vec{r} = R(\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $\vec{l} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$, где ϕ — полярный угол, $\vec{n} = \vec{e}_z = (0, 0, 1)$. Тогда

$$\vec{H}(\vec{r}) = H\vec{l}, \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{H}(\vec{r}) \vec{l} ds = 2\pi R H. \tag{44}$$

Плотность тока выберем, считая, что он течет по бесконечно тонкому проводнику, т. е.

$$\vec{j}(\vec{r}) = I\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z, \quad (45)$$

или равномерно распределен по площади проводника сечением $S = \pi R^2$, так что

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{I}{S}\vec{e}_z & \text{при } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases} \quad (46)$$

В обоих случаях

$$\int_{\Sigma} \vec{j}(\vec{r})\vec{n}d^2\Sigma = I. \quad (47)$$

Таким образом, соотношение (43) примет вид

$$H = \frac{2}{c} \frac{I}{R}. \quad (48)$$

Это равенство выражает закон Эрстеда (1826). Здесь размерности $[I] = \text{г}^{1/2}\text{см}^{3/2}\text{с}^{-2} = [q]/\text{с}$, где q — заряд, так что I — это количество заряда, протекающего в единицу времени через все сечение проводника (в последней формуле c — это секунда, а не скорость света).

3. *Закон Био—Савара—Лапласа и его обобщение.* Закон, установленный экспериментально Био и Саваром и сформулированный Лапласом (1820), выражается формулой

$$dF = kim \frac{\sin \theta}{r^2} ds, \quad (49)$$

где dF — элемент силы, которую создает элемент проводника ds с током силой ci , m — масса магнита, на который действует сила, k — коэффициент, зависящий от системы единиц, а θ — угол между элементом тока и направлением на точку измерения, находящуюся на расстоянии r . Если массу пробного магнита считать равной единице, то сила, действующая на магнит единичной массы и есть напряженность создаваемого током магнитного поля.

Если ток, текущий в некотором объеме \mathcal{V} , постоянен во времени, но течет не по прямой и его плотность зависит от координат,

то такой ток создает магнитное поле напряженностью

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int_{\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{r}') \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'. \quad (50)$$

Это равенство является обобщенной формулировкой закона Био—Савара. Действительно, если подставить в (50) выражение (45) для плотности тока и, кроме того, считать, что поле создает лишь элемент проводника с током протяженностью ds около точки $z' = 0$, то получится

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \vec{e}_z \int \delta(x') \delta(y') dx' dy' \int_0^{ds} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dz' = \frac{I}{c} \vec{e}_z \frac{\vec{r}}{r^3} ds = \frac{I \sin \theta}{c r^2} ds. \quad (51)$$

Результат совпадает с формулой (49).

4. *Доказательство закона.* Теперь покажем, что напряженность (50) удовлетворяет уравнению Максвелла (42). Для этого вспомним, что решением уравнения Пуассона с точечным источником $q\delta(\vec{r})$ является q/r , как было проверено в п. 1 § 1 этой главы. С помощью дифференцирования по \vec{r} с использованием решения уравнения Пуассона находим

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = -\vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] = -\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (52)$$

Взяв ротор от второй формулы в (50), после применения формулы двойного векторного произведения найдем

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{r}') 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \quad (53)$$

Можно исходить и из первой формулы в (50), используя тождество

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}. \quad (54)$$

Его применение дает

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r - \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \Delta \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r. \quad (55)$$

Второе слагаемое сразу приводит к нужному результату, а первое обращается в нуль. В самом деле, так как плотность тока не зависит от \vec{r} , то

$$\text{grad div } \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} = -\text{grad} \left(\vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\vec{j}(\vec{r}') \text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{j}(\vec{r}') \left(\frac{3}{r^3} - 3\vec{r} \frac{\vec{r}}{r^4} \right) = 0. \quad (56)$$

5. *Закон Ампера.* Ампер сформулировал закон взаимодействия токов, текущих по двум коротким проводникам. Сила их взаимодействия

$$f = 2 \frac{i_1 i_2 s_1 s_2}{r^2} \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (57)$$

где ci_1, ci_2 — сила тока в двух проводниках, s_1, s_2 — их протяженности, r — расстояние между проводниками, θ_1, θ_2 — углы, образованные проводниками с направлением соединяющего их вектора \vec{r} . Из закона следует, что если токи текут в одном направлении, они притягиваются, если в противоположных — отталкиваются.

Покажем, что формула Ампера следует из формулы (51), примененной к конечным проводникам. Напряженность поля первого в точке, где находится второй, согласно формуле (51)

$$\vec{H}_1 = 2 \frac{I_1}{c} s_1 \vec{e}_1 \times \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (58)$$

Это поле действует на второй проводник с силой Лоренца

$$\begin{aligned} \vec{f}_{12} &= \frac{1}{c} I_2 s_2 \vec{e}_2 \times \vec{H}_1 = \frac{I_1 I_2}{c^2} s_1 s_2 \vec{e}_2 \times \left(\vec{e}_1 \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \\ &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{s_1 s_2}{r^3} [\vec{e}_1 (\vec{e}_2 \vec{r}) - \vec{r} (\vec{e}_1 \vec{e}_2)] = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{s_1 s_2}{r^2} \left(\vec{e}_1 \cos \theta_2 - \frac{\vec{r}}{r} \cos \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь ε — угол между проводниками. Аналогично, второй проводник действует на первый с силой

$$\vec{f}_{21} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{s_1 s_2}{r^2} \left(\vec{e}_2 \cos \theta_1 - \frac{\vec{r}}{r} \cos \varepsilon \right). \quad (60)$$

Обе силы, естественно, ортогональны тем проводникам, на которые они действуют.

Проекции полученных сил на направление между проводниками одинаковы

$$\vec{f}_{12} \frac{\vec{r}}{r} = \vec{f}_{21} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{s_1 s_2}{r^2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \varepsilon). \quad (61)$$

Так как $\varepsilon = |\theta_1 - \theta_2|$, то с точностью до знака величины (61) совпадают с выражением (57), если принять, что $I_1 = ci_1$, $I_2 = ci_2$. Если силы проецировать на направления от одного проводника к другому, то эти проекции будут противоположных знаков в согласии с тем, что действие равно противодействию.

§ 3. Магнитный момент

1. *Определение.* Пусть в однородном и стационарном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$ заряд q за счет каких-то сторонних сил совершает периодическое движение. На заряд действует сила Лоренца

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{\mathcal{H}}. \quad (62)$$

Средняя величина этой силы вследствие периодичности движения заряда равна нулю

$$\overline{\vec{F}} = \frac{q}{c} \overline{\vec{v}} \times \vec{\mathcal{H}} = 0. \quad (63)$$

В то же время момент силы Лоренца

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{q}{c} \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{\mathcal{H}}) \quad (64)$$

в среднем нулю не равен. Для доказательства сперва преобразуем выражение этого момента. Напишем очевидные равенства

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{\mathcal{H}}) &= \vec{v}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}\vec{v}) = \vec{v}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}) - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{H}} \frac{d\vec{r}^2}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{r}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}) - \frac{1}{2} \vec{r}(\vec{v}\vec{\mathcal{H}}) - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{H}} \frac{d\vec{r}^2}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{H}} \times (\vec{v} \times \vec{r}) + \frac{d}{dt} \vec{r}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{H}} \frac{d\vec{r}^2}{dt} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{\mathcal{H}} + \frac{d}{dt} \vec{r}(\vec{r}\vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{H}} \frac{d\vec{r}^2}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

При усреднении слагаемые с полными производными пропадают и получается

$$\vec{K} = \vec{M} \times \vec{H}, \quad (66)$$

где введено понятие и обозначение магнитного момента заряда

$$\vec{M} = \frac{q}{2c} (\vec{r} \times \vec{v}). \quad (67)$$

Определение для точечного заряда легко обобщается на случай суммы зарядов, а также на случай заряда распределенного. Если \vec{j} — плотность тока заряда, то

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d^3 r. \quad (68)$$

Точнее говоря, определенная этим равенством величина называется орбитальным магнитным моментом.

Приведем примеры вычисления магнитных моментов с одновременным сопоставлением их с механическими моментами.

2. *Связь магнитного и механического моментов.* Механический момент частицы массы m относительно того же центра, что и магнитный,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\gamma \vec{r} \times \vec{v}. \quad (69)$$

Очевидно, что два момента пропорциональны:

$$\vec{M} = \frac{q}{2mc\gamma} \vec{L}. \quad (70)$$

Коэффициент пропорциональности $\frac{q}{2mc\gamma}$ называется гиромагнитным отношением. Для нерелятивистской частицы это отношение $q/(2mc)$.

Если некоторая совокупность нерелятивистских частиц с одинаковыми отношениями зарядов к массам движется в постоянном магнитном поле с одним и тем же периодом, то их общие магнитный и механический моменты также пропорциональны, так как выражаются через одну и ту же сумму.

То же верно и для распределенного вещества в теле, если его масса и заряд распределены равномерно по объему, а тело движется

с нерелятивистской скоростью. Тогда магнитный момент

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c} \frac{q}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) d^3r, \quad \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} d^3r. \quad (71)$$

Механический момент при нерелятивистском движении — это также интеграл по объему вида

$$\vec{\mathcal{L}} = \frac{m}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) d^3r. \quad (72)$$

Коэффициент пропорциональности $q/2mc$ по виду совпадает с гиромангнитным отношением, только здесь это отношение полного заряда q и массы тела m .

Например, если однородный шар с полным зарядом q , равномерно распределенным по его объему, радиусом a и массой m вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \Omega(0, 0, 1)$, причем $a\Omega \ll c$, то

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\varrho \cos \phi, \varrho \sin \phi, z), \quad \varrho^2 + z^2 \leq a^2, \quad \vec{v} = \varrho\Omega(-\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ \vec{r} \times \vec{v} &= \varrho\Omega(-z \cos \phi, -z \sin \phi, \varrho). \end{aligned} \quad (73)$$

Оба момента выражаются через интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-a}^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \varrho d\varrho \vec{r} \times \vec{v} &= 2\pi 2\vec{\Omega} \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} d\varrho \varrho^3 = \\ &= \frac{4\pi}{4} \vec{\Omega} \int_0^a (a^2 - z^2)^2 dz = \pi \vec{\Omega} a^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8\pi}{15} a^5 \vec{\Omega}, \end{aligned} \quad (75)$$

так что

$$\vec{\mathcal{L}} = \frac{3m}{4\pi a^3} \frac{8\pi}{15} a^5 \vec{\Omega} = 2m \frac{a^2}{5} \vec{\Omega}, \quad \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c} \frac{3q}{4\pi a^3} \frac{8\pi}{15} a^5 \vec{\Omega} = \frac{q}{c} \frac{a^2}{5} \vec{\Omega} = \frac{q}{2mc} \vec{\mathcal{L}}. \quad (76)$$

Пусть теперь вращается с угловой скоростью Ω заряженная однородная сфера радиусом a , полным зарядом q и массой m , причем $a\Omega \ll c$. Тогда $\phi = \Omega t$ и

$$\vec{r} = a(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad \vec{v} = a\Omega(-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0), \quad (77)$$

$$\text{так что } \vec{r} \times \vec{v} = a^2 \Omega \sin \theta (-\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta). \quad (78)$$

Моменты пропорциональны интегралам того же вида, что и для пара. Интегралы от абсциссы и ординаты снова равны нулю, а от аппликаты

$$a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \sin^2 \theta = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta (1 - \cos^2 \theta) = \frac{8\pi}{3} a^2. \quad (79)$$

Таким образом,

$$\vec{\mathcal{L}} = \frac{m}{4\pi a^2} a^2 \vec{\Omega} a^2 \frac{8\pi}{3} = 2m \frac{a^2}{3} \vec{\Omega}, \quad \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c} \frac{q}{4\pi a^2} a^2 \vec{\Omega} a^2 \frac{8\pi}{3} = \frac{q}{c} \frac{a^2}{3} \vec{\Omega} = \frac{q}{2mc} \vec{\mathcal{L}} \quad (80)$$

с тем же гиромагнитным отношением.

Пусть два нерелятивистских заряда q_1 и q_2 , массы которых m_1 и m_2 , совершают периодическое движение. Их момент вычислим по отношению к их центру масс

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (81)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (82)$$

Импульсы и скорости зарядов

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0, \quad \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = \vec{p}, \quad \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2 = -\vec{p}, \quad (83)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 = \frac{\vec{p}}{m_1}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{\vec{p}}{m_2}, \quad (84)$$

где \vec{p} — импульс относительного движения. Механический момент

$$\vec{\mathcal{L}} = (\vec{r}_1 - \vec{R}) \times \vec{p}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{R}) \times \vec{p}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \vec{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (85)$$

Магнитный момент

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2c} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \frac{\vec{p}}{m_1} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \frac{\vec{p}}{m_2} \right) = \\ &= \frac{1}{2c} \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{m_1 + m_2} \left(q_1 \frac{m_2}{m_1} + q_2 \frac{m_1}{m_2} \right) = \frac{1}{2c} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{q_1}{m_1^2} + \frac{q_2}{m_2^2} \right) \vec{\mathcal{L}}. \quad (86) \end{aligned}$$

Моменты пропорциональны, но их отношение становится равным гиромагнитному только, если $q_1/m_1 = q_2/m_2$.

Заметим здесь, что гиромагнитное отношение электрона в два раза больше, что интерпретируется как невозможность объяснить спин электрона вращением заряда.

Магнитный момент возникает в двух не связанных между собой задачах.

3. *Поле на больших расстояниях.* Найдем средний векторный потенциал совершающего периодическое движение заряда q

$$\vec{A} = \frac{q}{c} \frac{\vec{v}}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|}, \quad (87)$$

где \vec{r} — радиус-вектор заряда, а \vec{R}_0 — радиус-вектор точки наблюдения (измерения потенциала). На большом расстоянии от заряда, т. е. при $R_0 = |\vec{R}_0| \gg r = |\vec{r}|$, разложим потенциал по обратным степеням расстояния R_0 :

$$\frac{1}{|\vec{R}_0 - \vec{r}|} = \frac{1}{R_0 \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{r}\vec{R}_0}{R_0^2} + \frac{r^2}{R_0^2}}} \sim \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{\vec{r}\vec{R}_0}{R_0^2} \right) = \frac{1}{R_0} + \frac{\vec{r}\vec{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0} - \vec{r}\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R_0} \right). \quad (88)$$

Тогда

$$\vec{A} \sim \frac{q}{c} \left[\frac{1}{R_0} \vec{v} - \vec{v} \left(\vec{r}\vec{\nabla} \frac{1}{R_0} \right) \right]. \quad (89)$$

Так как скорость — это производная по времени от радиуса-вектора, то ее среднее значение равно нулю, так что

$$\vec{A} \sim -\frac{q}{c} \vec{v} \left(\vec{r}\vec{\nabla} \frac{1}{R_0} \right) = \frac{q}{c} \frac{1}{R_0^3} \vec{v}(\vec{r}\vec{R}_0). \quad (90)$$

Проведем такую же выкладку, как и при выводе (66), а именно, $\vec{v}(\vec{r}\vec{R}_0) =$

$$= \frac{1}{2} \left(\vec{v}(\vec{r}\vec{R}_0) + \frac{d}{dt} [\vec{r}(\vec{r}\vec{R}_0)] - \vec{r}(\vec{v}\vec{R}_0) \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{R}_0 \times (\vec{v} \times \vec{r}) + \frac{d}{dt} [\vec{r}(\vec{r}\vec{R}_0)] \right). \quad (91)$$

Исходя из последнего выражения, находим

$$\vec{A} \sim \frac{q}{2c} \frac{1}{R_0^3} [\vec{r} \times \vec{v}] \times \vec{R}_0 = \frac{\vec{M} \times \vec{R}_0}{R_0^3} = \vec{\nabla} \frac{1}{R_0} \times \vec{M}. \quad (92)$$

Выразив через магнитный момент векторный потенциал, легко выразить через него и среднюю напряженность магнитного поля. Применив формулу

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{a} (\vec{\nabla} \vec{b}) - \vec{b} (\vec{\nabla} \vec{a}) \quad (93)$$

при постоянном моменте, получим

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = - \left(\vec{M} \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} + \vec{M} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{R}_0}{R_0^3} \right) \right]. \quad (94)$$

Дивергенция в последнем слагаемом

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{R}_0}{R_0^3} \right) = \frac{3}{R_0^3} - \vec{R}_0 \frac{3}{R_0^4} \frac{\vec{R}_0}{R_0} = 0. \quad (95)$$

Производную от вектора по вектору в первом слагаемом находим, как от произведения:

$$\left(\vec{M} \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} \left(\vec{M} \vec{\nabla} \right) \vec{R}_0 + \vec{R}_0 \left[\left(\vec{M} \vec{\nabla} \right) \frac{1}{R_0^3} \right] = \frac{\vec{M}}{R_0^3} - \vec{R}_0 \left(\vec{M} \frac{3}{R_0^4} \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right). \quad (96)$$

Таким образом,

$$\vec{H} = \frac{3\vec{R}_0}{R_0^5} \left(\vec{M} \vec{R}_0 \right) - \frac{\vec{M}}{R_0^3} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \vec{M}) - \vec{M}}{R_0^3}, \quad (97)$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$ — орт в направлении на наблюдателя.

Стационарное магнитное поле, рассчитанное здесь, убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния, т.е. быстрее, чем электрическое поле заряда.

4. *Энергия заряда в однородном магнитном поле.* Как следует из формулы (2.137), энергия заряда в магнитном поле пропорциональна скорости заряда и потенциалу поля: $\frac{q}{c} \vec{A} \vec{v}$. Для однородного магнитного поля \vec{H} достаточно взять векторный потенциал в виде

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{r}. \quad (98)$$

Действительно,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\mathcal{H}} \times \vec{r}) = \vec{\mathcal{H}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - (\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = 3\vec{\mathcal{H}} - \vec{\mathcal{H}} = 2\vec{\mathcal{H}}. \quad (99)$$

Следовательно, энергии заряда в однородном магнитном поле

$$L_{\mathcal{H}} = \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{q}{2c} (\vec{\mathcal{H}} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} = \frac{q}{2c} (\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{r} \vec{v}) = \frac{q}{2c} (\vec{r} \vec{v} \vec{\mathcal{H}}) = \frac{q}{2c} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\mathcal{H}} \quad (100)$$

выражается через его магнитный момент.

В следующем параграфе качественно описываются некоторые структуры магнитного поля.

§ 4. Характерные структуры магнитного поля

1. *Дипольное магнитное поле.* Так называется поле, напряженность которого пропорциональна числителю последней дроби в (97). Проиллюстрируем структуру этого поля.

Примем, что момент параллелен оси z : $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(0, 0, 1)$, а вектор \vec{n} расположен в плоскости xz . Тогда

$$\frac{\vec{H}}{H} = 3 \cos \theta (\sin \theta, 0, \cos \theta) - (0, 0, 1) = (3 \sin \theta \cos \theta, 0, 3 \cos^2 \theta - 1). \quad (101)$$

Зависимость величины и направления поля от угла показана на Рис. 15а вокруг сферы, где отложены эти углы. При $\theta < \pi/2$ напряженности выходят из сферы, при $\theta > \pi/2$ — входят в нее. На экваторе напряженность в два раза меньше, чем на полюсах, к полюсам ее величина увеличивается.

Силовые линии поля в плоскости xz определяются уравнением

$$\frac{dx}{3xz} = \frac{dz}{2z^2 - x^2}. \quad (102)$$

Решение этого уравнения

$$z = \pm x^{2/3} \sqrt{C - x^{2/3}}, \quad C > 0, \quad |x| \leq C^{3/2}. \quad (103)$$

На рис. 15б для шести значений константы $C = 1(1)6$ приведены силовые линии, расположенные в плоскости xz , т. е. при значениях азимута $\phi = 0$ и $\phi = \pi$. При других азимутах линии идут точно так же. Заметим, что зависимость (103) масштабируется:

$$\frac{z}{C^{3/2}} = \pm \left(\frac{x}{C^{3/2}} \right)^{2/3} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{C^{3/2}} \right)^{2/3}}. \quad (104)$$

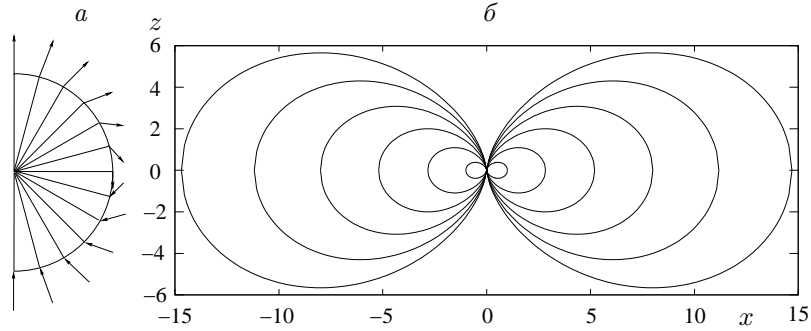


Рис. 15: Дипольное магнитное поле.

- a) Величина напряженности в зависимости от угла.
 б) Силовые линии при $C = 1, 2, 3, 4, 5$ и 6 .

2. *Тороидальное и полоидальное поле.* В векторном анализе даются общие определения таких полей. Тороидальное поле определяется через некоторое скалярное поле Φ формулой

$$\vec{T} = \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{r}) = \left(z \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial z}, x \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial x}, y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right). \quad (105)$$

Конечно, это поле соленоидальное, так как дивергенция от ротора тождественно равна нулю. Выражение через координаты показывает, что формула может быть записана в альтернативной форме:

$$\vec{T} = -\vec{r} \times \vec{\nabla} \Phi = \vec{\nabla} \Phi \times \vec{r}. \quad (106)$$

Применение и к этому выражению дивергенции дает нуль.

Очевидно, что поле Φ не может быть чисто радиальным, так как тогда его градиент пропорционален \vec{r} и векторное произведение оказывается равным нулю.

Полоидальное поле определяется как ротор тороидального:

$$\vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{T} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\Phi \vec{r})). \quad (107)$$

Его тоже можно выразить через другие операции от поля Φ :

$$\vec{P} = 2\vec{\nabla} \Phi - \vec{r} \Delta \Phi + (\vec{r} \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \Phi. \quad (108)$$

В векторном анализе доказывается, что всякое соленоидальное поле можно представить суммой тороидального и полоидального полей.

Равенство (106) в цилиндрических координатах (см. п. 10 Приложения 1) принимает вид

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi \times \vec{r} &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \times (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z) = \\ &= \left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial z} - z \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) \vec{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \left(z \vec{e}_\rho - \rho \vec{e}_z \right).\end{aligned}\quad (109)$$

Отсюда видно, что поле будет иметь только компоненту по ϕ , если $\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0$. Конечно, в этом случае обе другие производные не могут быть равными нулю одновременно.

Если тороидальное поле имеет только азимутальную компоненту, не зависящую от азимута, т. е. $\vec{T} = T(\rho, z) \vec{e}_\phi$, то полоидальное поле

$$\vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{T} = -\frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho T}{\partial \rho} \vec{e}_z, \quad (110)$$

т. е. оно не имеет компоненты по азимуту, что очевидно, так как полоидальное поле всегда ортогонально тороидальному.

3. *Простые примеры.* Для иллюстрации приведем примеры простых полей.

Пример 1. Если скалярное поле зависит только от аппликаты, т. е. $\Phi = \Phi(z)$, то $\vec{\nabla}\Phi = (0, 0, \Phi'(z))$, а $\vec{T} = \Phi'(z)(-y, x, 0) = \frac{\rho}{r} \Phi'(z) \vec{e}_\phi$. Силовые линии такого поля — это окружности в плоскостях, параллельных плоскости xu . Соответственно, $\vec{P} = (x\Phi''(z), y\Phi''(z), 2\Phi'(z))$, его силовые линии задаются уравнениями $y = c_1 x$, $y = c_2 \sqrt{|\Phi'(z)|}$, их можно задать по-другому: $\varphi = \varphi_0 = \text{arctg}(c_1)$, $\rho = c_2 \sqrt{|\Phi'(z)|}$.

В простейшем случае $\Phi_1(z) = z$ получаем

$$\vec{\nabla}\Phi_1 = (0, 0, 1), \quad \vec{T}_1 = \vec{\nabla}\Phi_1 \times \vec{r} = (-y, x, 0), \quad \vec{P}_1 = (0, 0, 2). \quad (111)$$

Силовые линии такого полоидального поля — это прямые, параллельные оси z .

Пример 2. При зависимости исключительно от полярного угла, т. е. при $\Phi = \Phi(\cos \theta) = \Phi(z/r) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right)$ получается

$$\vec{T} = \sin \theta \Phi'(\cos \theta) \vec{e}_\phi, \quad \vec{P} = \frac{\rho}{r^4} (zr\Phi' - \rho^2\Phi'') \vec{e}_\rho + \frac{1}{r^4} [(2z^2 + \rho^2)r\Phi' - z\rho^2\Phi''] \vec{e}_z. \quad (112)$$

Снова возьмем простейшее скалярное поле $\Phi_2 = \cos \vartheta = z/r$.
Для такого поля получится

$$\vec{\nabla}\Phi_2 = \left(-\frac{xz}{r^3}, -\frac{yz}{r^3}, \frac{\rho^2}{r^3} \right), \quad \vec{T}_2 = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0 \right) = \frac{\rho}{r} \vec{e}_\varphi, \quad (113)$$

$$\vec{P}_2 = \frac{z\rho}{r^3} \vec{e}_\rho + \frac{2z^2 + \rho^2}{r^3} \vec{e}_z. \quad (114)$$

Схема расположения векторов тороидальных полей в плоскости $z = 0$ изображена на Рис. 16. Все векторы не имеют проекций на ось аппликат. Векторы закручиваются против часовой стрелки, у второго поля все они имеют одинаковую длину 1, у первого длины векторов пропорциональны расстоянию их начальных точек от начала координат. Векторы \vec{T}_1 одинаковы при всех значениях z , длины векторов \vec{T}_2 убывают с удалением от плоскости одинаково в обе стороны по формуле $\rho/\sqrt{\rho^2 + z^2}$.

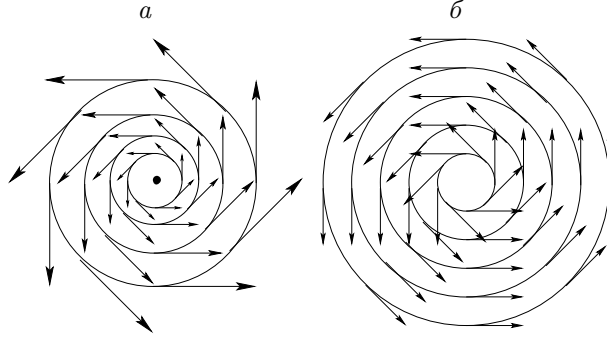


Рис. 16: Тороидальные поля \vec{T}_1 (а) и \vec{T}_2 (б) в плоскости $z = 0$.

Изображения силовых линий полоидального поля \vec{P}_2 , уравнения которых $z = \rho\sqrt{C^2\rho^2 - 1}$, показаны на рис. 17 для семи значений параметра C при $z \geq 0$ и одном значении угла φ . При других значениях φ картина точно та же, при $z < 0$ — симметрична. Линии имеют вертикальную касательную (бесконечная производная по ρ) при пересечении плоскости $z = 0$ при $\rho = 1/C$ и точку перегиба (смену выпуклости вверх на выпуклость вниз) при $\rho = \sqrt{5/2}/C$. Кривые обладают свойством подобия: $Cz = C\rho\sqrt{C^2\rho^2 - 1}$, так что все их можно получить из какой-нибудь одной масштабированием.

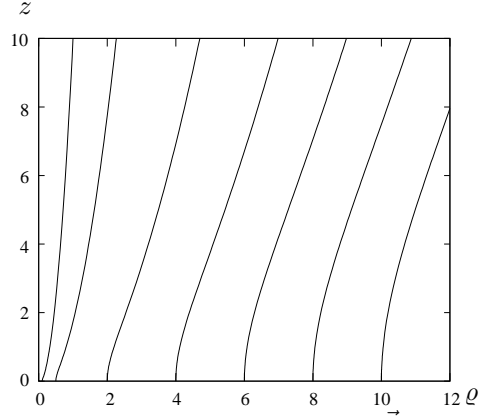


Рис. 17: Силовые линии поля \vec{F}_2 при $C = 10, 2, 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, 1/10$ (слева направо).

В точке с координатами (ρ, z) силовой линии с параметром C касательный вектор напряженности магнитного поля имеет компоненты $\left(\frac{z\rho}{r^3}, \frac{2z^2 + \rho^2}{r^3}\right)$. У всех векторов координата z положительна, т. е. острием они направлены вверх.

По определению тороидальное магнитное поле $\vec{H}_{\text{тор}}$ возникает, если векторный потенциал имеет форму $\vec{A} = \Phi \vec{r}$. Согласно уравнению Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_{\text{тор}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (115)$$

его должна порождать плотность тока, которая является полоидальным полем. Она связана с функцией Φ соотношением

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = 2\vec{\nabla}\Phi - \vec{r}\Delta\Phi + (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{\nabla}\Phi. \quad (116)$$

Для возникновения полей, изображенных на рис. 16, плотности тока должны быть

$$\vec{j}_1 = \frac{c}{2\pi}(0, 0, 1), \quad \vec{j}_2 = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\rho^2 + 2z^2}{r^3} \vec{e}_z - \frac{\rho z}{r^3} \vec{e}_\rho \right). \quad (117)$$

4. *Космические магнитные поля.* В природе не встречаются сильные электрические поля. В планетных атмосферах (о земном

электричестве сказано в Приложении Б), которые (если они имеются) представляют собой диэлектрики, существуют заряды и, следовательно, электрические поля, и напряженность таких полей может достигать тысяч единиц CGS. Но как правило, эти заряды быстро уничтожаются в результате пробоя, проявляющегося в виде молний. Особенно сильные грозы с молниями наблюдаются в атмосфере Юпитера. В ионосферах планет, вещество которых является проводником, текут сильные токи, например, в атмосфере Земли они достигают миллионов ампер.

Что касается магнитных полей, то их величина в атмосферах звезд типа Солнца может быть порядка 10^4 Гс (в пятнах), а у белых карликов и нейтронных звезд она может достигать соответственно 10^8 и 10^{14} Гс. Такие поля могут возникать одним из двух механизмов. Один механизм — это возрастание напряженности поля при сжатии звезды в результате коллапса после взрыва сверхновой. Другой механизм — генерация поля механизмом динамо, т. е. при вращении звезды с внутренними токами в звездной плазме. При этом образуются поля, структуры которых подобны описанным выше [10].

Лучше всего структура магнитного поля изучена на ближайшей к нам звезде — Солнце. Общее поле на поверхности Солнца имеет напряженность около 1 Гс. Поле достигает величины в десятки тысяч Гс в пятнах, которые образуются при выходе магнитных трубок на поверхность.

§ 5. Движение заряда в постоянном поле

1. *Постоянное и однородное электрическое поле.* Пусть электрическое поле направлено вдоль оси x , так что $\vec{E} = E(1, 0, 0)$, где $E > 0$ — постоянная напряженность. Тогда сила Лоренца, действующая на заряд $q > 0$, равна $q\vec{E}$ и уравнения движения имеют вид

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0. \quad (118)$$

Пусть скорость заряда в какой-то момент лежит в плоскости xy , тогда и вся его траектория будет располагаться в этой же плоскости, т. е. $p_z = 0$ и $z = 0$.

Интегрирование уравнений (118) при условии, что в начальный момент импульс имеет составляющую только по оси y , дает

$$p_x = qEt, \quad p_y = p_*. \quad (119)$$

Нулевая компонента вектора импульса

$$p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}. \quad (120)$$

Компоненты скорости заряда согласно формуле (2.50), связывающей ее с импульсом, выражаются через компоненты импульса так:

$$\vec{v} = c \frac{\vec{p}}{p_0}, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = c \frac{p_x}{p_0} = c \frac{qEt}{\sqrt{m^2 c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}}, \quad (121)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = c \frac{p_y}{p_0} = c \frac{p_*}{\sqrt{m^2 c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}}. \quad (122)$$

Можно легко убедиться, что величина скорости движения заряда

$$v = c \frac{\sqrt{p_*^2 + (qEt)^2}}{\sqrt{m^2 c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}} \quad (123)$$

всегда меньше скорости света, хотя стремится к ней при $t \rightarrow \infty$.

Проинтегрируем два полученных уравнения:

$$x = c \int \frac{qEt dt}{\sqrt{m^2 c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}} = \frac{c}{qE} \sqrt{m^2 c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}, \quad (124)$$

$$y = cp_* \int \frac{dt}{\sqrt{m^2 c^2 + p_*^2 + (qEt)^2}} = \frac{cp_*}{qE} \operatorname{arsh} \frac{qEt}{\sqrt{m^2 c^2 + p_*^2}}. \quad (125)$$

Обращение последней зависимости приводит к формуле

$$t = \frac{\sqrt{m^2 c^2 + p_*^2}}{qE} \operatorname{sh} \frac{qEy}{cp_*}, \quad (126)$$

а подстановка формулы для времени в выражение для абсциссы дает траекторию

$$x = \frac{c}{qE} \sqrt{m^2 c^2 + p_*^2} \operatorname{ch} \frac{qEy}{cp_*}. \quad (127)$$

Эта траектория представляется кривой, которая называется цепной линией, так как именно такую кривую принимает тяжелая однородная нить (цепь) в однородном же поле силы тяжести.

2. *Постоянное и однородное магнитное поле.* Пусть теперь заряд движется в магнитном поле $\vec{H} = H(0, 0, 1) = H\vec{e}_3$, где $H > 0$

— постоянная напряженность. Ввиду того, что наибольший интерес представляет электрон, будем считать заряд отрицательным $q < 0$. Сила Лоренца в таком случае равна $-q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}$ и уравнение движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \frac{\vec{p}}{p_0} \times \vec{H}. \quad (128)$$

Из уравнения следует, что

$$\vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(p_0^2 - m^2 c^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dp_0^2}{dt} = 0, \quad (129)$$

т. е. энергия заряда $cp_0 = mc^2 \gamma$, а значит и E_{kin} , во время его движения остаются неизменными, что естественно, так как сила, перпендикулярная скорости, не совершает работы.

Вводится обозначение для частот и вектора угловой скорости:

$$\omega_* = \frac{qH}{mc}, \quad \omega = \frac{qH}{p_0} = \frac{qH}{mc\gamma} = \frac{\omega_*}{\gamma}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_3. \quad (130)$$

Первая частота называется циклотронной, а вторая — ларморовой.

Уравнение движения во введенных обозначениях записывается в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{p} \times \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{p}. \quad (131)$$

Введем в плоскости, перпендикулярной напряженности поля, т. е. вектору \vec{e}_3 , ортогональный базис \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , так, чтобы три вектора составляли правую тройку (правый базис). Тогда можно легко проверить, что решением уравнения (131) может служить

$$\vec{p} = p_{\parallel} \vec{e}_3 + p_{\perp} [\vec{e}_1 \cos(\omega t - \phi_0) + \vec{e}_2 \sin(\omega t - \phi_0)]. \quad (132)$$

Здесь составляющие импульса вдоль поля p_{\parallel} и перпендикулярно ему p_{\perp} , а также начальная фаза ϕ_0 — произвольны.

Выражая через импульс скорость

$$\vec{v} = c \frac{\vec{p}}{p_0} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{p_{\parallel}}{m\gamma} \vec{e}_3 + \frac{p_{\perp}}{m\gamma} [\vec{e}_1 \cos(\omega t - \phi_0) + \vec{e}_2 \sin(\omega t - \phi_0)] \quad (133)$$

и интегрируя, находим траекторию заряда:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{p_{\parallel}}{m\gamma} t \vec{e}_3 + \frac{p_{\perp}}{m\omega\gamma} [\vec{e}_1 \sin(\omega t - \phi_0) - \vec{e}_2 \cos(\omega t - \phi_0)]. \quad (134)$$

Заряд движется равномерно вдоль оси z и вращается вокруг той же оси, т. е. его траектория — это винтовая линия. Скорость его дрейфа вдоль поля равна $v_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{m\gamma}$, а радиус цилиндра, на который

накручена винтовая линия, равен $R = \frac{p_{\perp}}{m\omega\gamma}$ и называется радиусом

Лармора. В этих формулах $\gamma = \frac{p_0}{mc} = \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{m^2c^2}}$.

Если импульс мал по сравнению с mc , т. е. заряд нерелятивистский, то такое движение называется циклотронным, движение релятивистского заряда, если только его перпендикулярная составляющая не мала, называют синхротронным.

Глава 4. Волны в однородных средах

§ 1. Волновые уравнения

1. *Однородные уравнения Максвелла.* Начнем рассмотрение решений уравнений Максвелла с самого простого случая, когда в среде нет источников, т. е. нет зарядов и порождаемых ими токов. Тем не менее и в таком случае поля могут существовать и называются они тогда волнами.

Предполагаем, что среда однородна и неограничена. В ней нет проводимости, т. е. это диэлектрик, но, может быть, с магнитными свойствами. Уравнения Максвелла для такого случая имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (2)$$

Кроме того, выполняются материальные уравнения с постоянными ε и μ :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (3)$$

Материальные уравнения позволяют свести уравнения (1) и (2) к уравнениям для двух неизвестных векторов. Выберем в качестве основных векторы \vec{E} и \vec{B} , исключив \vec{D} и \vec{H} . Первые два уравнения (1) тогда остаются неизменными, а уравнения (2) для \vec{E} и \vec{B} получаются такими:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Можно исключить один из векторов и получить отдельные уравнения для каждого из них.

2. *Волновые уравнения для векторов поля.* Найдем ротор от второго уравнения (1). По формуле для $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ с учетом первого уравнения (4) и с использованием второго уравнения (2) получится

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Введем обозначения, которые уже использовались в Главе 1:

$$v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}, \quad (6)$$

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (7)$$

Оператор (7), как уже говорилось, называется волновым или оператором Даламбера. Через него уравнение (5) можно записать в кратком виде

$$\square \vec{E} = 0. \quad (8)$$

С помощью аналогичной выкладки показывается, что и второй искомый вектор удовлетворяет такому же уравнению:

$$\square \vec{B} = 0. \quad (9)$$

3. *Уравнения для потенциалов.* Однородность среды позволяет ввести потенциалы, как и в Главе 1:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (10)$$

Тогда первые два уравнения Максвелла (1) удовлетворяются тождественно.

Градиентная инвариантность сохраняется, так что при любой функции f потенциалы можно заменить по формулам

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } f. \quad (11)$$

Эта инвариантность всегда дает возможность подчинить потенциалы дополнительному условию, например, условию Лоренца

$$\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0. \quad (12)$$

Для этого надо выбрать некоторую функцию f , являющуюся решением неоднородного волнового уравнения со свободным слагаемым, равным функции, которая получается, если правую часть условия (12) вычислить от не удовлетворяющих этому условию потенциалов (см. Главу 1).

С использованием условия Лоренца из двух оставшихся уравнений Максвелла получаются четыре уравнения для потенциалов, на этот раз однородных:

$$\square \varphi = 0, \quad \square \vec{A} = 0. \quad (13)$$

Однако, в случае однородных уравнений имеется еще одна инвариантность. Потенциалы можно еще раз заменить по тем же формулам

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f_0}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } f_0, \quad (14)$$

но теперь подчинить функцию f_0 волновому уравнению

$$\square f_0 = 0. \quad (15)$$

Тогда волновые уравнения (13) и условие Лоренца будут выполняться и для потенциалов со штрихами. Наличие второй инвариантности дает возможность еще сократить число искомым функций. Обычно приравнивают нулю скалярный потенциал. Так можно сделать, ибо произвольный потенциал φ' тоже удовлетворяет волновому уравнению, так что можно положить $\varphi' = \frac{1}{c} \frac{\partial f_0}{\partial t}$. Тогда остается один векторный потенциал, удовлетворяющий волновому уравнению и условию Лоренца, которое упрощается:

$$\square \vec{A}' = 0, \quad \text{div } \vec{A}' = 0. \quad (16)$$

4. *Другой вывод.* Можно рассуждать иначе и с самого начала положить скалярный потенциал равным нулю (кулонова калибровка), т. е. принять

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (17)$$

Тогда первые два уравнения Максвелла удовлетворяются тождественно. Калибровочная инвариантность заключается в равенстве

$$\vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } f_1. \quad (18)$$

Подстановка (17) во вторую пару уравнений (4) дает два соотношения

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \text{div } \vec{A}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (19)$$

Из первого из них следует, что $\text{div } \vec{A}$ не зависит от времени. Покажем, что ее всегда можно сделать равной нулю. Действительно, пусть потенциал \vec{A}' не удовлетворяет этому условию, т. е.

$$\text{div } \vec{A}' = b(\vec{r}) \neq 0. \quad (20)$$

Подставляя сюда (18), получаем

$$\operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} - \Delta f_1 = b(\vec{r}). \quad (21)$$

Всегда можно найти одну такую функцию, которая является решением неоднородного уравнения

$$\Delta f_1 = -b(\vec{r}), \quad (22)$$

т. е. уравнения Пуассона. Это ньютоновский (или объемный) потенциал. Тогда потенциал \vec{A} будет удовлетворять двум уравнениям (16).

§ 2. Плоские волны

1. *Одномерные волны.* Поскольку уравнения для всех составляющих напряженностей поля и потенциалов одинаковы, т. е. однородные волновые, рассмотрим такое уравнение общего вида

$$\square u = 0, \quad (23)$$

где u — любая из компонент поля или потенциалов. Начнем с некоторых решений частного вида.

Пусть решение волнового уравнения (23) зависит только от одной пространственной координаты, например, x . Тогда уравнение для такого решения упрощается и принимает вид одномерного волнового уравнения

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0. \quad (24)$$

Такое уравнение имеет общее решение, которое можно представить так:

$$u(x, t) = \Phi_r(x - vt) + \Phi_l(x + vt). \quad (25)$$

Это решение называется решением Даламбера. В нем Φ_r и Φ_l — произвольные дважды дифференцируемые функции. Их аргументы — это характеристики волнового уравнения. То, что функция (25) действительно удовлетворяет уравнению (23), проверяется прямой подстановкой. Хотя для такой проверки функции должны иметь вторые производные, однако для нахождения самого решения этого не требуется, поэтому можно объявить обобщенным решением и

такую комбинацию вида (25), в которой Φ_1 и Φ_2 совершенно произвольны. Производные можно понимать в некотором обобщенном смысле, а их плохие (нерегулярные, негладкие, разрывные и т.д.) части сократятся при вычитании после подстановки в уравнение.

Рассмотрим решение, состоящее из одной функции, пусть сначала первой

$$u(x, t) = \Phi_1(x - vt). \quad (26)$$

Ясно, что величина u будет одинакова во всех точках и временах, где $x - vt = x_0 = \text{const}$. С течением времени каждая такая точка (с данным x_0) перемещается по закону

$$x = x_0 + vt, \quad (27)$$

т. е. равномерно вдоль оси x вправо. Поэтому, если в какой-либо начальный момент функцию (26) можно изобразить некоторым графиком, то с течением времени ее график будет ползти вдоль оси x с постоянной скоростью v , не меняя своей формы, что можно истолковать, как распространение плоской волны. Таким образом, v — это скорость распространения волн.

Совершенно ясно, что вторая функция описывает распространение плоской волны в противоположном направлении и ее рассмотрение ничего принципиально нового не дает. Конечно, сумма двух волн, идущих в противоположных направлениях и не разошедшихся друг от друга, может создать сложную интерференционную картину, причудливо меняющуюся со временем.

2. *Одномерные электромагнитные волны.* Теперь посмотрим, как общее решение Даламбера осуществляется в теории электромагнитного поля. Векторный потенциал удовлетворяет волновому уравнению и дополнительному условию, приводящему к существенной особенности таких волн.

Рассматриваем сначала опять одномерные волны, т. е. считаем, что все компоненты потенциала являются функциями только от пространственной координаты x и времени. Уравнения, определяющие векторный потенциал $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, в этом случае принимают вид

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{A} = 0, \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0. \quad (28)$$

Пусть волна распространяется в сторону положительных x . Тогда решение этого одномерного волнового уравнения можно записать в виде

$$\vec{A} = (A_x(x - vt), A_y(x - vt), A_z(x - vt)). \quad (29)$$

Дополнительное условие требует, чтобы первая функция не зависела от x . Но это единственный ее аргумент, поэтому она вообще должна быть постоянной. Так как потенциалы нужны только для вычисления напряженностей, для чего от них берутся производные, то постоянная у них несущественна. Следовательно, можно положить

$$\vec{A} = \vec{A}(x - vt) = (0, A_y(x - vt), A_z(x - vt)). \quad (30)$$

Найдем теперь составляющие поля. Напряженность электрического поля (индексы у составляющих потенциала означают не переменную, по которой берется производная, а ось проецирования, производные берутся по аргументу функций) получается в виде

$$\vec{E} = \frac{v}{c}(0, A'_y(x - vt), A'_z(x - vt)) = \frac{v}{c}\vec{A}'(x - vt). \quad (31)$$

Магнитная индукция в свою очередь (от переменных y и z функции не зависят)

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = (0, -A'_z(x - vt), A'_y(x - vt)). \quad (32)$$

Из (31) и (32) видно, что составляющие поля перпендикулярны направлению распространения волны, а также между собой. Это свойство называется поперечностью. Таким образом, в однородной среде могут существовать только поперечные волны. Причина этого — в выполнении дополнительного условия, которое поэтому называется условием поперечности.

Рассмотрим теперь волны, идущие в произвольном направлении.

3. *Произвольная плоская волна.* Для того, чтобы получить плоскую волну произвольного направления, не надо повторять все рассуждения. Здесь достаточно заметить, что поворотом системы координат всегда можно добиться, чтобы волна шла вдоль оси абсцисс. Тогда можно взять уже полученное решение (29) и повернуть систему координат обратно. При этом, как известно, скалярные произведения остаются инвариантными. Поэтому в произвольной волне вместо аргумента x будет стоять скалярное произведение

трехмерных векторов: вектора положения на орт направления движения волны.

Итак, решение волнового уравнения в виде плоской волны, движущейся в направлении орта \vec{n} , должно быть записано в виде

$$\vec{A} = \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt), \quad (33)$$

где справа стоит вектор-функция, т. е. три обычных функции. Условие поперечности накладывает следующее требование ортогональности:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{n}\vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt) = 0. \quad (34)$$

Составляющие поля находятся, как и выше:

$$\vec{E} = \frac{v}{c}\vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt), \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt). \quad (35)$$

Из этих формул ясно видно, что три вектора: вектор распространения волны \vec{n} , вектор электрической напряженности \vec{E} и вектор магнитной индукции \vec{B} взаимно перпендикулярны. Выполняется в частности, соотношение

$$\vec{B} = \frac{c}{v}\vec{n} \times \vec{E}. \quad (36)$$

Поперечность — это характерное свойство электромагнитной волны в однородной среде без границ. Заметим, что в неоднородных и ограниченных средах это свойство, вообще говоря, теряется.

4. *Энергетические величины.* Получим формулы для величин, характеризующих энергию поля. Сначала найдем напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{\mu}\vec{n} \times \vec{A}'(\vec{n}\vec{r} - vt), \quad \vec{H}^2 = \frac{1}{\mu^2}|\vec{A}'|^2. \quad (37)$$

Заметим, что

$$\varepsilon\vec{E}^2 = \varepsilon\frac{v^2}{c^2}|\vec{A}'|^2 = \varepsilon\frac{1}{\varepsilon\mu}|\vec{A}'|^2 = \frac{1}{\mu}|\vec{A}'|^2 = \mu\vec{H}^2. \quad (38)$$

Поэтому плотность электромагнитной энергии

$$w = \frac{\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon\vec{E}^2}{4\pi} = \frac{\mu\vec{H}^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\mu}|\vec{A}'|^2. \quad (39)$$

Вектор Пойнтинга, т. е. вектор потока энергии, равен

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi\mu} \frac{c}{v} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \\ &= \frac{v^2 \varepsilon \mu}{4\pi\mu v} [\vec{n}(\vec{E})^2 - \vec{E}(\vec{n}\vec{E})] = \frac{v\varepsilon}{4\pi} \vec{n}(\vec{E})^2 = v\nu\vec{n}.\end{aligned}\quad (40)$$

Поток энергии есть просто произведение плотности на скорость ее течения, т. е. энергия не исчезает и не создается, а только перетекает вместе с несущей ее волной.

§ 3. Монохроматические волны

1. *Понятие монохроматической волны.* Это такая волна, которая содержит только одну частоту, т. е. зависит от времени только через синус и косинус от одной частоты: $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Однако в электродинамике принято вместо вещественных функций и амплитуд применять комплексные величины. Договорились представлять все электромагнитные величины, характеризующие поле, пропорциональными экспоненте. Например, напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}.\quad (41)$$

Здесь берется только одна экспонента — с минусом перед фазой, но зато принимается, что амплитуда комплексна $\vec{E}_0 = \vec{E}_R^0 + i\vec{E}_I^0$. Она так и называется: комплексная амплитуда. При этом считается, что физический смысл имеет только вещественная часть комплексного вектора \vec{E} :

$$\text{Re } \vec{E} = \vec{E}_R^0 \cos \omega t + \vec{E}_I^0 \sin \omega t.\quad (42)$$

Проводить выкладки в линейных уравнениях с одной комплексной экспонентой оказывается проще, чем с двумя вещественными функциями. При переходе к физическим величинам надо воспользоваться формулой (42). Однако, часто нет необходимости отделять вещественную часть комплексного вектора напряженности или ее комплексной амплитуды, например, при нахождении средних по времени значений энергетических величин, квадратичных по напряженностям. Действительно, это среднее значение

$$\begin{aligned}\overline{(\text{Re } \vec{E})^2} &= (\vec{E}_R^0)^2 \overline{\cos^2 \omega t} + (\vec{E}_I^0)^2 \overline{\sin^2 \omega t} + 2\vec{E}_R^0 \vec{E}_I^0 \overline{\cos \omega t \sin \omega t} = \\ &= \frac{1}{2} [(\vec{E}_R^0)^2 + (\vec{E}_I^0)^2] = \frac{1}{2} |\vec{E}|^2.\end{aligned}\quad (43)$$

В последнем выражении модуль вектора понимается одновременно в двух смыслах: как модуль вектора и как модуль комплексных чисел, из которых состоят его компоненты.

Важность таких средних энергетических величин заключается в том, что именно их воспринимают регистрирующие приборы, так как постоянные времени обычных приборов намного больше, чем периоды изменения волн.

2. *Уравнения для комплексных амплитуд.* Таким образом, все напряженности и индукции монохроматической электромагнитной волны пропорциональны $e^{-i\omega t}$. В электродинамике принимается еще одно соглашение, упрощающее запись формул и уравнений. Именно, комплексные амплитуды обозначаются так же, как и сами векторы (т. е. не ставится 0), а различие их выявляется через вид уравнений, которыми определяются соответствующие величины: уравнения для комплексных амплитуд не содержат времени, зато содержат частоту.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд выглядят так:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}, \operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \vec{D}. \quad (44)$$

Материальные уравнения, так же как и уравнения Максвелла без производных по времени, полностью сохраняют свой формальный вид.

Вместо волновых уравнений получаются уравнения, которые называются уравнениями Гельмгольца (Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц, 1821–1894). Например, для векторного потенциала (здесь сохраним индекс)

$$-\varkappa^2 \vec{A}_0 - \Delta \vec{A}_0 = 0, \quad (45)$$

где $\varkappa = \omega/v$ — волновое число. Условие поперечности по форме не изменяется.

3. *Плоские монохроматические волны.* Такая волна должна удовлетворять двум требованиям. Во-первых, быть плоской, т. е. зависимость от координат и времени должна происходить через комбинацию $\vec{n}\vec{r} - vt$. Во-вторых, быть монохроматической, т. е. зависимость от времени должна содержаться только в множителе

$\exp(-i\omega t)$. Надо объединить эти требования. Это делается следующим образом. Множитель, описывающий монохроматичность, представим так:

$$\exp(-i\omega(t - \vec{n}\vec{r}/v)) = \exp(-i\omega t + i\kappa \vec{n}\vec{r}) = \exp(-i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})), \quad (46)$$

где $\vec{\kappa} = \kappa \vec{n}$ — волновой вектор. Таким образом, плоская монохроматическая волна представляется в виде

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp(-i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})), \quad (47)$$

где теперь \vec{A}_0 — постоянный комплексный вектор (не зависящий ни от времени, ни от координат), ортогональный вектору $\vec{\kappa}$.

Напряженности поля выражаются через ту же амплитуду:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})), \quad \vec{E}_0 = i\frac{\omega}{c}\vec{A}_0, \quad \vec{B} = i\vec{\kappa} \times \vec{A}. \quad (48)$$

Напомним, что физический смысл имеют вещественные части напряженностей.

Экспоненциальный множитель можно записать в другом виде. Подставив выражения круговой частоты через обычную и период $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, а также волнового числа через длину волны $\kappa = \frac{\omega}{v} = 2\pi\frac{\nu}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$, получим

$$\exp(-i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})) = \exp\left(2\pi i \left[\frac{t}{T} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{\lambda} \right]\right). \quad (49)$$

§ 4. Сферические волны

1. *Понятие сферических волн.* Плоские волны фактически являются решениями волнового уравнения, которые можно получить разделением переменных в декартовых координатах. По аналогии сферические волны — это такие волны, которые являются частными решениями волнового уравнения в сферических (полярных) координатах. В этих координатах переменные также могут быть разделены.

Для разделения переменных приведем выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}, \quad (50)$$

где радиальная часть оператора

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (51)$$

а угловая часть

$$\Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (52)$$

Уравнение Гельмгольца (45) для каждой комплексной амплитуды потенциалов и напряженностей имеет вид

$$\varkappa^2 u + \Delta u = 0. \quad (53)$$

При разделении переменных в сферических координатах основное разделение происходит между радиальной и угловыми координатами, причем угловые координаты являются аргументами так называемых сферических функций (гармоник), которые иногда называют шаровыми. Приведем здесь их основные свойства.

2. *Сферические гармоники.* Эти функции определяются уравнением

$$\Delta_{\theta\varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (54)$$

Они являются произведениями экспонент от φ вида $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$ и функций $P_{lm}(\cos\theta)$, выражающихся через присоединенные функции Лежандра:

$$P_{lm}(\eta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\eta). \quad (55)$$

Те в свою очередь определяются уравнением

$$\left\{ \frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{d}{d\eta} \right] + l(l+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right\} P_l^m(\eta) = 0 \quad (56)$$

и имеют явное выражение через многочлены Лежандра

$$P_l^m(\eta) = (1-\eta^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\eta^m} P_l(\eta), \quad P_l(\eta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\eta^l} (\eta^2 - 1)^l. \quad (57)$$

Оба числа l и m целые, причем $l = 0, 1, 2, \dots$, а при каждом l число m может принимать значения $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$.

Функции нормированы на единицу (в отличие от функций, обозначаемых $Y_l^m(\theta, \varphi)$), т. е.

$$\int d^2n |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta |P_{lm}(\cos \theta)|^2 = 1. \quad (58)$$

Приведем функции с наименьшими номерами:

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}. \quad (59)$$

3. *Разделение переменных.* Разделим переменные в уравнении (53), т. е. будем искать частное решение его в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (60)$$

Подставив эту функцию в уравнение (53), найдем, что радиальная функция удовлетворяет уравнению

$$\varkappa^2 R(r) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0. \quad (61)$$

Радиальная функция не зависит от числа m , которое не входит в определяющее ее уравнение.

Чтобы привести уравнение (61) к стандартному виду теории специальных функций, сделаем замену

$$R(r) = \frac{w(\varkappa r)}{\sqrt{r}} = r^{-1/2} w(\varkappa r), \quad R'(r) = -\frac{1}{2} r^{-3/2} w(\varkappa r) + r^{-1/2} w'(\varkappa r) \varkappa. \quad (62)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) &= \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{2} r^{1/2} w(\varkappa r) + r^{3/2} w'(\varkappa r) \varkappa \right) = \\ &= -\frac{1}{4} r^{-1/2} w(\varkappa r) + r^{1/2} w'(\varkappa r) \varkappa + r^{3/2} w''(\varkappa r) \varkappa^2 \end{aligned} \quad (63)$$

и уравнение (61) переходит в

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + [z^2 - (l + 1/2)^2] w(z) = 0. \quad (64)$$

Полученное уравнение есть частный случай уравнения Бесселя и определяет функции Бесселя с индексом $l + 1/2$, так что его решения — это функции $J_{l+1/2}(z)$ и $J_{-l-1/2}(z)$. Соответствующие радиальные функции называются сферическими функциями Бесселя. Приведем их свойства [11] (см. также Приложение 4).

4. *Функции Бесселя полуцелого порядка.* Функции Бесселя раскладываются в бесконечные везде сходящиеся ряды по степеням своего аргумента:

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad (65)$$

где в знаменателе стоит гамма-функция. Однако функции с полуцелыми индексами при всех целых l являются элементарными функциями. Они представляются дифференциальными формулами и конечными разложениями:

$$\begin{aligned} J_{l+1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^l z^{l+1/2} \frac{d^l}{(zdz)^l} \left(\frac{\sin z}{z} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^l \frac{(l+n)!}{n!(l-n)!(2z)^n} \cos \left(z + \frac{\pi}{2}(n-l-1) \right), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} J_{-l-1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{l+1/2} \frac{d^l}{(zdz)^l} \left(\frac{\cos z}{z} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{n=0}^l \frac{(l+n)!}{n!(l-n)!(2z)^n} \cos \left(z + \frac{\pi}{2}(n+l) \right). \end{aligned} \quad (67)$$

В обеих суммах косинусы аргумента, зависящего от переменной суммирования, могут быть представлены через $\cos z$ и $\sin z$, при которых множителями будут конечные суммы обратных степеней z .

Приведем снова первые функции:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad (68)$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right), \quad J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(-\sin z - \frac{\cos z}{z} \right). \quad (69)$$

5. *Сферические функции Бесселя.* Согласно формуле (62) они выражаются через рассмотренные функции полуполого порядка. Конкретно определяют три функции, называемые соответственно сферическими функциями Бесселя, Неймана и Ганкеля (или первого, второго и третьего рода) и имеющими следующее асимптотическое поведение при больших аргументах:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) \sim \frac{1}{z} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}(l+1)\right), \quad (70)$$

$$n_l(z) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-l-1/2}(z) \sim \frac{1}{z} \sin\left(z - \frac{\pi}{2}(l+1)\right), \quad (71)$$

$$h_l(z) = j_l(z) + in_l(z) = \frac{e^{iz}}{z^{l+1}} \sum_{n=0}^l \frac{(l+n)!}{n!(l-n)!} \frac{(-1)^n}{(2iz)^n} \sim \frac{i^{-l-1}}{z} e^{iz}. \quad (72)$$

Общее решение уравнения Гельмгольца в сферических координатах складывается из частных:

$$u(r, \theta, \varphi) = \int_0^\infty d\kappa \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) [C_{lm}^+(\kappa) j_l(\kappa r) + C_{lm}^-(\kappa) n_l(\kappa r)]. \quad (73)$$

Наличие в общем решении двух наборов коэффициентов соответствует тому, что это решение уравнения второго порядка. Для определения этих коэффициентов необходимо задать граничные условия, которые описывают действие первичных источников поля.

6. *Функция Грина.* Уравнение для функции Грина уравнения Гельмгольца (53)

$$\kappa^2 G(\vec{r}) + \Delta G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \quad (74)$$

может быть получено из волнового уравнения (1.61) (повторим его)

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) G(t, \vec{r}) = \frac{1}{v} \delta(t) \delta(\vec{r}). \quad (75)$$

путем применения к нему преобразования Фурье по времени:

$$G(\vec{r}) = v \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(t, \vec{r}) dt. \quad (76)$$

Действительно, интеграл от дельта-функции от времени даст единицу, оператор Лапласа времени не содержит, а интеграл от второй производной по времени после двукратного интегрирования по частям добавит множитель $-\omega^2$. Таким образом, функцию Грина уравнения Гельмгольца можно получить из функции Грина волнового уравнения, выведенной в конце Главы 1. Находим

$$G(\vec{r}) = v \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{1}{4\pi r} \delta(vt - r) dt = \frac{1}{4\pi r} e^{i\kappa r}. \quad (77)$$

Функция с аргументом, равным разности векторов источника и приемника, т. е. $G(\vec{r} - \vec{r}_0)$ получается простой подстановкой вместо r модуля разности

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2\vec{r}\vec{r}_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma}, \quad (78)$$

где γ — угол между векторами. Его косинус выражается через сферические углы двух векторов:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (79)$$

Функция Грина раскладывается по сферическим функциям Бесселя:

$$G(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{e^{i\kappa|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{i\kappa}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \gamma) j_l(\kappa r_{<}) h_l(\kappa r_{>}), \quad (80)$$

где $r_{<}$ и $r_{>}$ — меньшее и большее из r и r_0 . Входящие в разложение (80) многочлены Лежандра также раскладываются по сферическим гармоникам:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{2}{2l+1} \sum_{m=0}^l (2 - \delta_{m0}) P_{lm}(\cos \theta) P_{lm}(\cos \theta_0) \cos(m[\varphi - \varphi_0]). \quad (81)$$

7. *Асимптотическое поведение волн.* На больших расстояниях от источников поля, т. е. при $r \rightarrow \infty$ решения упрощаются и принимают характерную форму. Из выражений для сферических функций Бесселя, в частности из формул (80) и (72), следует, что в

этой асимптотической области все решения пропорциональны либо $e^{i\chi r}/r$, либо $e^{-i\chi r}/r$. Угловая же зависимость этих частей может быть различной. Следовательно, асимптотически все характеристики поля ведут себя так:

$$u(\vec{r}) \sim \frac{f_{\text{div}}(\theta, \phi)}{r} \exp(i\chi r) + \frac{f_{\text{con}}(\theta, \phi)}{r} \exp(-i\chi r). \quad (82)$$

Добавив множитель $e^{-i\omega t}$, получим асимптотику монохроматической сферической волны

$$u(t, \vec{r}) \sim \frac{f_{\text{div}}(\theta, \phi)}{r} \exp(-i[\omega t - \chi r]) + \frac{f_{\text{con}}(\theta, \phi)}{r} \exp(-i[\omega t + \chi r]). \quad (83)$$

Первое слагаемое соответствует расходящейся волне, так как с течением времени ее постоянная фаза удаляется от начала координат (в ней $r = r_* + \omega t / \chi = r_* + vt$) и уходит на бесконечность, а второе слагаемое описывает сходящуюся волну ($r = r_* - vt$).

В отличие от плоской волны в показателе экспоненты стоит только радиальное расстояние, а не радиус-вектор, так как экспонента характеризует только радиальную зависимость волны и не зависит от направления ее распространения. Характеристики направления волны, т. е. сферические углы θ и ϕ , входят в асимптотики только в амплитуды сходящейся и расходящейся сферических волн.

§ 5. Поляризация электромагнитных волн

1. *Поляризация монохроматической волны.* Пусть в пространстве распространяется монохроматическая волна. Закрепим точку наблюдения \vec{r} и не будем ее фиксированные координаты указывать в качестве аргументов волны. В этом случае нам безразлично, какая это волна. Будем считать для простоты рассуждений, что волна плоская.

В однородной среде возможны только поперечные волны, так что напряженности колеблются в плоскости, ортогональной направлению распространения волны.

Рассмотрим вектор электрической напряженности, который именно и воспринимает человеческий глаз. Для монохроматической волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (84)$$

Всегда можно выбрать такое число α_0 и такие два вещественных вектора \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , чтобы выполнялись требования

$$\vec{E}_0 = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) \exp(i\alpha_0), \quad \vec{b}_1 \vec{b}_2 = 0. \quad (85)$$

Действительно, отделяя вещественную и мнимую части в равенстве (85), получаем соотношения

$$\vec{E}_R^0 = \vec{b}_1 \cos \alpha_0 - \vec{b}_2 \sin \alpha_0, \quad \vec{E}_I^0 = \vec{b}_1 \sin \alpha_0 + \vec{b}_2 \cos \alpha_0. \quad (86)$$

Предположим, что число α_0 известно. Тогда векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 легко находятся, так как матрица коэффициентов в линейной системе ортогональна. Имеем

$$\vec{b}_1 = \vec{E}_R^0 \cos \alpha_0 + \vec{E}_I^0 \sin \alpha_0, \quad \vec{b}_2 = -\vec{E}_R^0 \sin \alpha_0 + \vec{E}_I^0 \cos \alpha_0. \quad (87)$$

Остается потребовать перпендикулярность этих векторов, т. е.

$$\vec{b}_1 \vec{b}_2 = [(\vec{E}_I^0)^2 - (\vec{E}_R^0)^2] \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + \vec{E}_R^0 \vec{E}_I^0 (\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0) = 0. \quad (88)$$

Такое уравнение всегда имеет решение, так как введя двойной угол, получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\vec{E}_R^0 \vec{E}_I^0}{(\vec{E}_R^0)^2 - (\vec{E}_I^0)^2}, \quad (89)$$

что осмысленно при любых векторах \vec{E}_R^0 и \vec{E}_I^0 (при $(\vec{E}_R^0)^2 = (\vec{E}_I^0)^2$ можно взять $\alpha_0 = \pi/4$).

Значения α_0 , удовлетворяющие уравнению (89), могут отличаться на $\pi/2$. Можно выбрать одно из них, исходя из какого-либо условия, например, чтобы вектор \vec{b}_1 был длиннее, чем \vec{b}_2 , или чтобы эти векторы вместе с направлением волны составляли правую тройку. Сейчас для нас этот выбор несуществен.

Итак, мы представили вектор напряженности в виде

$$\vec{E} = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) \exp(-i(\omega t - \alpha_0)). \quad (90)$$

Вспоминая, что физический смысл имеет лишь вещественная часть вектора (84), находим, что конец этого вектора описывает кривую

$$\operatorname{Re} \vec{E} = \vec{b}_1 \cos(\omega t - \alpha_0) + \vec{b}_2 \sin(\omega t - \alpha_0). \quad (91)$$

Вообще говоря, эта кривая — эллипс.

Таким образом, строго монохроматическая волна всегда полностью эллиптически поляризована. В зависимости от того, составляют векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 правую или левую тройку с направлением движения волны и вращается ли вектор напряженности от \vec{b}_1 к \vec{b}_2 или наоборот, поляризация называется левой или правой (определения разнятся). Направление того из векторов \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , длина которого больше, называется плоскостью поляризации или плоскостью преимущественных колебаний электрического вектора.

Если один из векторов \vec{b}_1 или \vec{b}_2 оказывается нулевым, то вектор (84) зачерчивает отрезок прямой и поляризация — линейная (или плоская). Напротив, если длины векторов совпадают, вектор (84) движется по окружности, а поляризация — круговая (или циркулярная).

Однако, в природе редко осуществляются строго монохроматические волны, а реальные приборы тем более не могут вырезать очень узкую полосу по частоте. Поэтому приходится рассматривать более общий случай и для него вводить специальное описание состояния поляризации.

2. *Почти монохроматическая волна.* Представим проходящую через фиксированную точку пространства волну функцией

$$\vec{E} = \vec{E}_0(t) \exp(-i\omega t). \quad (92)$$

Конечно, так можно изобразить совершенно произвольную вектор-функцию. Здесь будем считать, что амплитуда $\vec{E}_0(t)$ меняется со временем достаточно медленно. Дело в том, что обычно частоты ω очень велики. Например, длине волны $\lambda = 5000$ ангстрем соответствует частота $\omega = 2\pi c/\lambda = 6.28 \cdot 3 \cdot 10^{10}/(5 \cdot 10^{-5}) = 3.6 \cdot 10^{15}$ Гц, так что за 1 секунду проходит 10^{15} периодов гармонической функции. Частота еще больше в УФ и рентгеновском диапазонах. Даже в радиодиапазоне частоты измеряются в мегагерцах. Вот по сравнению с этой быстрой экспонентой амплитуда меняется медленно, колеблясь вокруг какого-либо среднего. Постоянные же времени обычных приборов измеряются долями секунды.

Отличие волн от строго монохроматических может происходить в результате смешения некогерентных (т. е. идущих от независимых источников) волн одной частоты или волн близких частот, не различимых прибором. При широкополосных наблюдениях применяются специальные пластинки, сводящие волны разных частот к одной фазе.

Выберем некоторую декартову систему координат (x, y) в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, так, чтобы оси координат составляли с направлением волны правую тройку. Эту систему можно принять в качестве базиса, который называется поляризационным. Разложим вектор \vec{E} по ортам базиса и представим его в виде столбца

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^0(t) \\ E_y^0(t) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}. \quad (93)$$

Здесь уже невозможно ввести векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , так как фаза α_0 все время меняется. Поэтому описание поляризации такой волны более сложно.

3. *Поляризационная матрица и параметры Стокса.* Определим для почти монохроматической волны следующую матрицу как среднее от диадного произведения (см. Приложение 5)

$$\check{S} = \frac{c}{8\pi} \overline{\vec{E}\vec{E}^\dagger} = \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x^* E_y} \\ \overline{E_x E_y^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Поскольку экспоненциальные множители при перемножении сопряженных проекций вектора исчезают, в этих формулах можно писать, а можно не писать (как мы сделали) нолик у этих проекций, т.е. все равно, что брать: сам вектор или его амплитуду. В обоих случаях (94) получается самосопряженной квадратной матрицей второго порядка с (вообще говоря) четырьмя независимыми параметрами. Заметим, что после усреднения матрицу уже нельзя (опять-таки вообще говоря) представить диадным произведением.

Наряду с поляризационной матрицей состояние поляризации почти монохроматической волны можно описывать параметрами Стокса. Через них матрица (94) выражается так

$$\check{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Здесь элементы матрицы выражены через четыре параметра Стокса I, Q, U, V . Напишем обратные выражения параметров Стокса через элементы матрицы и тем самым через напряженность волны. Эти выражения следующие:

$$I = \frac{c}{8\pi} \left(\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2} \right), \quad Q = \frac{c}{8\pi} \left(\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2} \right), \quad (96)$$

$$U = \frac{c}{8\pi} \left(\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*} \right), \quad V = i \frac{c}{8\pi} \left(\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*} \right). \quad (97)$$

Обычно поляризационные матрицы используются в физических работах. В астрофизике же гораздо более употребительны параметры Стокса. Их преимущество в том, что они все вещественны. Кроме того, их обычно представляют в виде столбца с четырьмя элементами и их линейные преобразования при различных изменениях описания представляются с помощью квадратных матриц 4×4 , а не с помощью тензоров четвертого ранга, как в случае поляризационных матриц. Таким образом, представление поляризации через параметры Стокса значительно более наглядно.

4. *Свойства поляризационной матрицы и параметров Стокса.* Эти свойства связаны с двумя обстоятельствами. Во-первых, с усреднением элементов диадного произведения по времени, а во-вторых, с преобразованиями этих элементов при поворотах ортов поляризационного базиса. Перечислим такие свойства.

1) Выполняется неравенство

$$\det \check{S} = \frac{c^2}{(8\pi)^2} \left[\overline{|E_x|^2} \overline{|E_y|^2} - \left| \overline{E_x^* E_y} \right|^2 \right] \geq 0. \quad (98)$$

Это неравенство, если расписать усреднение через интегралы по времени (т.е. по периоду, деленные на величину этого периода), представляет собой частный случай общего неравенства Коши—Буняковского (или Шварца). Его аналогом является неравенство, выражающее утверждение, что модуль скалярного произведения векторов меньше произведения норм (длин) этих векторов.

Через параметры Стокса неравенство (98) представляется так:

$$4 \det \check{S} = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2 \geq 0. \quad (99)$$

При доказательстве неравенства Коши—Буняковского устанавливается, что равенство в нем может достигаться только тогда, когда усредняемые величины остаются пропорциональными, а это может выполняться, если волна чисто монохроматическая. В противном случае (98) является строгим неравенством. Таким образом,

равенство в (98) (или в (99)) есть необходимое и достаточное условие монохроматичности волны и полной ее поляризации (в общем случае эллиптической).

2) При повороте ортов поляризационного базиса на некоторый угол координаты векторов преобразуются с ортогональной матрицей. Преобразуются и элементы матриц, в частности, поляризационной матрицы. При этом некоторые величины, связанные с матрицами не изменяются. Например, не меняются собственные значения (с.з.) матриц, а также такие комбинации их элементов, которые определяют эти значения. Как известно, коэффициентами характеристического уравнения, из которого находятся с.з., являются след матрицы и ее определитель. У матрицы второго порядка всего два коэффициента, так что указанными двумя величинами исчерпываются инварианты характеристического уравнения.

Итак, инвариантами при повороте осей поляризационного базиса остаются следующие величины.

а) Определитель, т. е. $I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$, комбинация, определяющая монохроматичность или немонохроматичность волны.

б) След матрицы, т. е. интенсивность излучения I .

в) Но у матрицы (95) есть еще один инвариант, связанный с тем, что преобразования, отражающие поворот базиса, вещественны. Поэтому вещественная часть матрицы преобразуется в вещественную, а мнимая — в мнимую. Поскольку мнимой частью матрицы (95) является только параметр V , он также инвариантен.

г) Как следствие инвариантности трех указанных величин оказываются инвариантными и суммы $Q^2 + U^2$ и $Q^2 + U^2 + V^2$.

Более подробное рассмотрение различных преобразований поляризационных матриц и векторов Стокса дается ниже.

5. *Преобразование параметров при повороте базиса.* Инвариантные величины, остающиеся неизменными при повороте поляризационных ортов, нам удалось выявить не выписывая самих преобразований поляризационных параметров. Найдем теперь эти преобразования.

Пусть поляризационные орты повернуты на угол ϕ . Тогда новые (отмечаемые штрихами) и старые орты, как известно, связаны формулами

$$\vec{e}'_1 = \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = -\sin \phi \vec{e}_1 + \cos \phi \vec{e}_2. \quad (100)$$

Составляющие напряженности, т. е. коэффициенты разложения ее

по двум базисам, связаны точно такими же формулами. Оба преобразования можно записать в матричной форме. Для напряженностей это

$$\vec{E}' = \check{\mathcal{L}}(\phi)\vec{E}, \quad (101)$$

где матрица ортогонального преобразования (комплексного вектора)

$$\check{\mathcal{L}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Элементы поляризационной матрицы, построенной как диадное произведение векторов напряженности, преобразуются согласно закону преобразования операторов:

$$\check{\mathcal{S}}' = \check{\mathcal{L}}(\phi)\check{\mathcal{S}}\check{\mathcal{L}}^T(\phi). \quad (103)$$

Поскольку ортогональная матрица вещественна, ее обратная равна эрмитово сопряженной, эрмитово сопряжение сводится к транспонированию, а последнее — к изменению знака у аргумента ϕ .

Перейдя от поляризационной матрицы к параметрам Стокса, убеждаемся, что преобразование вектора этих параметров при повороте поляризационных ортов

$$\begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \hat{L}(\phi) \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (104)$$

осуществляется посредством матрицы, которую принято называть матрицей Чандрасекара:

$$\hat{L}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\phi) & \sin(2\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

При вещественных ортогональных преобразованиях из четырех параметров Стокса преобразуются только два, причем с удвоенным углом. Это согласуется с известной уже инвариантностью параметров I и V , а также суммы $Q^2 + U^2$.

6. *Наблюдаемая интенсивность и поляризация.* Посмотрим теперь, как можно наблюдать поляризацию волны и как отражается наличие поляризации на показаниях приборов.

Измерение интенсивности (точнее потоков) излучения производится при помощи фотометров. Эти приборы сами не могут отличить поляризованное излучение от неполяризованного. Для определения поляризации применяются анализаторы–поляроиды, которые пропускают излучение, поляризованное в одной плоскости, и не пропускают поляризованное в перпендикулярной. Такими поляроидами для видимого света могут служить пластинки из исландского шпата или поляризационные призмы. Гораздо труднее измерять поляризацию в рентгене, там используется эффект Комптона. Здесь при теоретическом рассмотрении явления на приборных проблемах не останавливаемся.

При вращении анализатора через него будут проходить разные доли падающего излучения, следовательно, по показаниям фотометра, стоящего за анализатором, можно судить о состоянии поляризации волны.

Однако, анализатор не в состоянии измерить круговую поляризацию или даже установить ее присутствие, так как круговая поляризация не дает эффекта при вращении анализатора. Надо как–то превратить круговую поляризацию в линейную. Для этого используются пластинки из веществ, вращающих плоскость поляризации, т. е. добавляющих разность фаз между составляющими вектора напряженности. Такими веществами являются кварц и другие кристаллические минералы, а также некоторые органические вещества, например, сахар. Обычно наблюдатели применяют так называемую пластинку в четверть волны, поворачивающую плоскость поляризации на 90° и переводящую круговую поляризацию полностью в линейную. Но в теории будем считать, что добавляемая фаза произвольна.

Итак, пусть почти монохроматическая волна (93) падает на фотометр, предварительно пройдя через пластинку, добавившую ей разность фаз δ между E_x и E_y , и через анализатор, ось которого (т. е. такое направление, что если падает поляризованное в этом направлении излучение, то оно полностью проходит) повернута на угол ψ к оси x . Надо найти, какую интенсивность $I(\psi, \delta)$ в зависимости от ψ и δ измерит фотометр.

После пластинки волна (93) превратится в

$$\vec{E}_\delta = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Через анализатор пройдет не все излучение, а только часть, колебания которой параллельны оси анализатора, т. е. вектор напряженности спроецируется на эту ось. Представим это направление вектором-столбцом

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Тогда прошедшая волна будет иметь напряженность $\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta$. Вспомним, что физический смысл имеет только вещественная часть вектора напряженности, а фотометр измеряет усредненную по времени квадратичную величину:

$$\begin{aligned} I(\psi, \delta) &= \frac{c}{4\pi} \overline{(\text{Re } \vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)^2} = \frac{c}{16\pi} \overline{[\vec{l}^\dagger (\vec{E}_\delta + \vec{E}_\delta^*)]^2} = \\ &= \frac{c}{16\pi} \left[\overline{(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)^2} + \overline{(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^*)^2} + 2\overline{(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^*)} \right]. \end{aligned} \quad (108)$$

Рассмотрим по очереди три слагаемых в последних квадратных скобках. Первые два из них равны нулю, так как квадрат вектора напряженности содержит множитель $e^{-2i\omega t}$, а квадрат сопряженного вектора пропорционален $e^{2i\omega t}$. Обе экспоненты при усреднении дают нуль. Остается только произведение вектора напряженности на его сопряженный.

Так как усреднять надо напряженность, а не вектор \vec{l} или фазу δ , то постараемся вынести эти величины из-под знака усреднения. Для этого преобразуем сомножители. Первый

$$\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta = \cos \psi E_x + \sin \psi E_y e^{i\delta} = \vec{l}_\delta^\dagger \vec{E}, \quad (109)$$

где введено обозначение

$$\vec{l}_\delta = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi e^{-i\delta} \end{pmatrix}. \quad (110)$$

Во втором сомножителе эрмитово сопряженной величиной сделаем вектор напряженности:

$$\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^* = \cos \psi E_x^* + \sin \psi E_y^* e^{-i\delta} = \vec{E}^\dagger \vec{l}_\delta. \quad (111)$$

Произведение этих сомножителей можно представить, воспользовавшись свойством ассоциативности произведения матриц, в виде

$$(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta)(\vec{l}^\dagger \vec{E}_\delta^*) = (\vec{l}_\delta^\dagger \vec{E})(\vec{E}^\dagger \vec{l}_\delta) = \vec{l}_\delta^\dagger (\vec{E} \vec{E}^\dagger) \vec{l}_\delta. \quad (112)$$

Тогда после усреднения согласно определению поляризационной матрицы (94) получится простая формула

$$I(\psi, \delta) = \vec{l}_\delta^\dagger \check{S} \vec{l}_\delta. \quad (113)$$

Выразим эту интенсивность через параметры Стокса. Подставив в (113) выражение (95) и проведя простую, хотя и довольно громоздкую выкладку, получим

$$I(\psi, \delta) = \frac{1}{2}[I + Q \cos 2\psi + U \sin 2\psi \cos \delta - V \sin \psi \sin \delta]. \quad (114)$$

Минус перед параметром V объясняется тем, что дополнительная фаза была введена в E_y , а не в E_x .

7. *Частные случаи поляризации.* Имея общую формулу для наблюдаемой интенсивности, мы можем рассмотреть, какие параметры характеризуют определенную поляризацию. Начнем с самого простого случая, когда излучение неполяризовано.

1) Неполяризованное излучение. Такое излучение называется естественным. В этом случае интенсивность, которую регистрирует фотометр, не зависит ни от угла анализатора, ни от разности фаз, так как направления колебаний электрической напряженности совершенно хаотичны. Ясно, что такое положение возможно лишь при условии, что $Q = U = V = 0$, т. е. все параметры Стокса, кроме интенсивности, равны нулю.

Противоположный случай — полная поляризация, уже рассмотренный выше, когда волна строго монохроматическая. Здесь применим развитый аппарат.

2) Полная эллиптическая поляризация. Зададим векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 координатами в выбранном поляризационном базисе:

$$\vec{b}_1 = b_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = b_2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (115)$$

Числа b_1 и b_2 могут при этом быть как положительными, так и отрицательными.

Тогда поляризационная матрица для напряженности (90)

$$\begin{aligned} \check{S} &= \frac{c}{8\pi} (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)(\vec{b}_1^\dagger - i\vec{b}_2^\dagger) = \\ &= \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} b_1 \cos \alpha + ib_2 \sin \alpha \\ b_1 \sin \alpha - ib_2 \cos \alpha \end{pmatrix} (b_1 \cos \alpha - ib_2 \sin \alpha \quad b_1 \sin \alpha + ib_2 \cos \alpha) = \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} b_1^2 \cos^2 \alpha + b_2^2 \sin^2 \alpha & (b_1^2 - b_2^2) \cos \alpha \sin \alpha - ib_1 b_2 \\ (b_1^2 - b_2^2) \cos \alpha \sin \alpha + ib_1 b_2 & b_1^2 \sin^2 \alpha + b_2^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (116)$$

Соответствующие выражения для параметров Стокса

$$I = \frac{c}{8\pi} (b_1^2 + b_2^2), \quad Q = \frac{c}{8\pi} (b_1^2 - b_2^2) \cos 2\alpha, \quad (117)$$

$$U = \frac{c}{8\pi} (b_1^2 - b_2^2) \sin 2\alpha, \quad V = \frac{c}{8\pi} 2b_1 b_2. \quad (118)$$

Отсюда вытекают подслучаи полной поляризации.

3) Линейная поляризация. Эллипс вырождается в отрезок, когда одна из величин b_1 или b_2 обращается в нуль (оба обратиться в нуль они не могут). И в том и в другом случае их произведение равно нулю и, следовательно, $V = 0$.

4) Круговая поляризация. Напротив, если при отсутствии дополнительной фазы наблюдаемая интенсивность не зависит от положения анализатора, т. е. поляризация круговая, то должно быть $Q = U = 0$.

Во всех других случаях говорят, что поляризация частичная. Ее однако можно свести к рассмотренным случаям, что мы и сделаем ниже, но перед этим рассмотрим, какие изменения поляризации вызывают перемену знаков у параметров Стокса, характеризующих эту поляризацию.

8. *Дискретные преобразования параметров Стокса.* Преобразование параметров Стокса при повороте поляризационного базиса относится к непрерывным преобразованиям, так как угол поворота может быть любым и сколь угодно малым. Дискретные преобразования вызываются отражениями осей координат и переменной их порядка. Здесь рассмотрим именно такие преобразования.

Если мы просто меняем базис при фиксированной поляризации волны, то параметры Стокса изменяются, но описывают они то же самое состояние. Мы же будем считать, что рассматриваются разные состояния при фиксированном базисе, но описываемые параметрами с разными знаками.

Начнем с простых преобразований, считая поляризацию полной и переходя к более сложным по очереди. Параметры Стокса будем располагать в виде вектора-столбца с четырьмя компонентами. Интенсивности двух волн будем считать равными.

Заметим, что отражение обеих осей координат или, что то же самое, изменение знаков обоих чисел b_1 и b_2 сводится к повороту

базиса на угол π и не изменяет параметров Стокса.

1) Два вектора Стокса отличаются только знаками параметров Q и U . Это означает, что числа b_1 и b_2 у двух волн поменяны местами, т. е. эллипсы их имеют одну форму и размер, но повернуты друг относительно друга на угол $\pi/2$.

2) Отличие — в знаках параметра V . У волн противоположные знаки одного из чисел b_1 или b_2 , т. е. противоположны направления одного из векторов \vec{b}_1 или \vec{b}_2 . Значит, векторы электрической напряженности волн вращаются в противоположные стороны.

3) Если у волн противоположны знаки трех параметров Стокса, то это комбинация двух предыдущих случаев. Эллипсы волн повернуты на прямой угол и электрические векторы вращаются в противоположные стороны. Такие поляризации волн называются ортогональными.

9. *Представление общей поляризации через частные случаи.* Как уже говорилось, у некогерентных пучков излучения складываются не напряженности полей, а квадратичные, энергетические характеристики. Это относится и к параметрам Стокса. В этом пункте представим произвольно поляризованный пучок излучения как такую сумму некогерентных пучков с более простой поляризацией.

1) Полностью поляризованный и естественный. Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_d \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + (I - R_d) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (119)$$

где $R_d = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$. Таким образом, произвольно поляризованный пучок излучения можно представить как сумму полностью эллиптически поляризованного пучка и пучка естественного излучения. В силу неравенства (99) интенсивность последнего неотрицательна.

2) Два пучка с взаимно ортогональными поляризациями. Нетрудно также проверить следующее равенство

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{I + R_d}{2R_d} \begin{pmatrix} R_d \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \frac{I - R_d}{2R_d} \begin{pmatrix} R_d \\ -Q \\ -U \\ -V \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Здесь складываются два полностью поляризованных пучка неотрицательной интенсивности. При этом у них все параметры Стокса равны по модулю (точнее пропорциональны), но параметры, характеризующие поляризацию, имеют противоположные знаки, т. е. поляризации ортогональны. У них, как показано выше, противоположны направления вращения вектора напряженности и перпендикулярны положения плоскостей преимущественных колебаний. Складывающиеся пучки при этом предполагаются некогерентными, т. е. независимыми, происходящими от разных источников.

10. *Другие параметры.* Вводятся также и другие параметры, характеризующие состояние поляризации излучения. Это степени общей P , линейной p и круговой p_s поляризации:

$$P = \frac{R_d}{I}, \quad p = \frac{r_d}{I}, \quad p_s = \frac{V}{I}, \quad r_d = \sqrt{Q^2 + U^2}, \quad (121)$$

а также позиционный угол α , т. е. угол между плоскостью преимущественных колебаний и выбранной осью абсцисс, и степень эллиптичности ε_s . Две последние величины определяются через тангенсы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = U/Q, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_s = V/r_d. \quad (122)$$

11. *Дифференциальные инварианты линейной поляризации.* Если из полной поляризационной матрицы (95) вычесть два инварианта, а именно, интенсивность I и параметр круговой поляризации V , то останется матрица линейной поляризации:

$$\check{A} = \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix}. \quad (123)$$

След этой матрицы равен нулю, так что определитель

$$\det(\check{A}) = -(Q^2 + U^2) \quad (124)$$

является единственным алгебраическим инвариантом матрицы \check{A} . Он тоже может оказаться равным нулю, если линейная поляризация отсутствует. Предположим, что это не так, т. е. $Q^2 + U^2 > 0$.

При повороте поляризационного базиса матрица (123) преобразуется точно так же, как и полная матрица, т. е. согласно (103), а

двумерный вектор Стокса линейной поляризации с двумерной матрицей — средней частью матрицы Чандрасекара:

$$\check{A}' = \check{\mathcal{L}}(\phi) \check{A} \check{\mathcal{L}}^T(\phi), \quad \begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ -\sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Координаты по отношению к поляризационному базису x_1, x_2 при повороте базиса преобразуются, как и сами орты. При этом так же преобразуются и компоненты двумерного градиента, так как на плоскости метрика положительно определена. Наряду с метрическим тензором определяется так называемый полностью антисимметричный тензор, в двумерном пространстве имеющий компоненты $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{2,2} = 0$, $\varepsilon_{1,2} = -\varepsilon_{2,1} = 1$. Матрицы указанных двух тензоров

$$\check{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \check{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (126)$$

Тензор $\check{\varepsilon}$ называется также единичным псевдотензором, так как он изменяет знак при перемене обозначения координат. При этом матрица транспонируется вокруг обеих своих диагоналей.

Наряду с алгебраическим инвариантом матрицы можно построить инварианты, содержащие производные ее элементов. Эти инварианты естественно назвать дифференциальными [12]. С производными второго порядка в случае матриц второго порядка таких инвариантов два. Оба они не меняются при поворотах системы координат. Однако один из них — скаляр, не изменяющийся и при перемене осей координат:

$$\mathcal{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_{i,j} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Q + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U. \quad (127)$$

Определение второго содержит единичный псевдотензор

$$\mathcal{P} = \left(\varepsilon_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{i,j} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Q \quad (128)$$

и является псевдоскаляром, т. е. как и псевдотензор изменяет знак при перемене осей координат.

Различие между алгебраическими и дифференциальными инвариантами, очевидно, заключается в том, что первые определяются по однократному измерению параметров Стокса в одной точке. Для определения же дифференциальных инвариантов требуется измерение этих параметров в некоторой области около точки, по крайней мере в ее малой окрестности.

Элементы матрицы линейной поляризации по аналогии с напряженностями электромагнитного поля могут быть выражены через два потенциала — скалярный Ψ и псевдоскалярный Φ :

$$(A_{i,j}) = \left(2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \delta_{i,j} \Delta \right) \Psi + \left(\varepsilon_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} + \varepsilon_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Phi. \quad (129)$$

В матричной записи это определение выглядит так:

$$\check{A} = (2\vec{\nabla}\vec{\nabla}^\dagger - \check{g}\Delta)\Psi + (\check{\varepsilon}\vec{\nabla}\vec{\nabla}^\dagger - \vec{\nabla}\vec{\nabla}^\dagger\check{\varepsilon})\Phi, \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Вычисление матричных произведений дает

$$Q = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad U = 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \quad (131)$$

Для найденных выражений параметров Стокса через инварианты Ψ и Φ инварианты \mathcal{T} и \mathcal{P} находятся в виде

$$\mathcal{T} = \Delta^2 \Psi, \quad \mathcal{P} = \Delta^2 \Phi, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (132)$$

так что скаляр выражается через скаляр, а псевдоскаляр — через псевдоскаляр.

В теории поляризации реликтового излучения (РИ) скалярная составляющая называется E -компонентой (или модой), а псевдоскалярная — B -компонентой, хотя эта терминология чисто внешняя. Если скалярная составляющая поляризации РИ связывается с движениями тел образующейся крупномасштабной структуры Вселенной и уже обнаружена, то псевдоскалярная составляющая, как считается, несет сведения о гравитационных волнах, которые оторвались от остальной материи в самом начале расширения Вселенной, а именно, после окончания периода так называемой инфляции, т. е. экспоненциального расширения пространства. В самое последнее время появились предварительные (пока не подтвержденные) сообщения о регистрации B -моды поляризации. Если обнаружение этой моды подтвердится, то его можно будет расценить как окончательное доказательство верности теории Большого Взрыва и горячей Вселенной.

§ 6. Особые точки поля поляризации

1. *Поле поляризации.* Излучение, идущее от многих природных объектов, поляризовано. В частности, уже давно измеряется поляризация излучения астрофизических объектов. Как правило, эти объекты на небесном своде занимают небольшую область. Поляризовано излучение дневного неба. Однако имеется один объект, который обнимает всю небесную сферу. Это так называемое реликтовое излучение (РИ), оставшееся от предыдущих эпох расширения Вселенной, когда вещество и излучение были горячими. Сейчас это излучение остыло и имеет температуру всего 2.7 К (градусов по шкале Кельвина). РИ было обнаружено в 1964 году и с тех пор интенсивно изучается.

В последнее время появились наблюдения линейной поляризации РИ. Показано, что положение плоскостей поляризации отражает движение вещества в эпоху формирования крупномасштабной структуры Вселенной, т. е. галактик и их скоплений. Пока измерения сделаны лишь в отдельных площадках, но в не очень далеком времени такие измерения покроют все небо. Измерение поляризации РИ позволяет уточнять космологические параметры [13] и детали теории образования крупномасштабной структуры Вселенной.

Известно, что поле направлений линейной (плоской) поляризации может быть весьма сложным. В связи с этим интересно проследить, какие особенности могут существовать в этом поле.

Линейная поляризация в некоторой системе координат x и y описывается параметрами Стокса I , Q и U . Степень линейной поляризации и позиционный угол по отношению к оси x определяются формулами, содержащимися в (121) и (122).

Поле направлений задается уравнением, разрешенным относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (133)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - 1}{\operatorname{tg} 2\alpha}, \quad (134)$$

получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2} - Q}{U}. \quad (135)$$

2. *Особые точки дифференциальных уравнений.* Напомним, что дифференциальные уравнения первого порядка, у которых обращаются в нуль регулярные числитель и знаменатель дроби в правой части, имеют следующие особые точки, характеризующиеся их названиями.

1) “Узел” одного из трех видов: а) $y = y_0x^2$, б) $y = y_0x$, в) $y = (y_0 + \ln|x|)x$. 2) “Седло” с четырьмя асимптотами: $y = y_0/x$. 3) “Центр”: $r = r_0$. 4) “Фокус”: $r = r_0e^\phi$. Рис. 18 отображает поведение интегральных кривых вблизи этих особых точек.

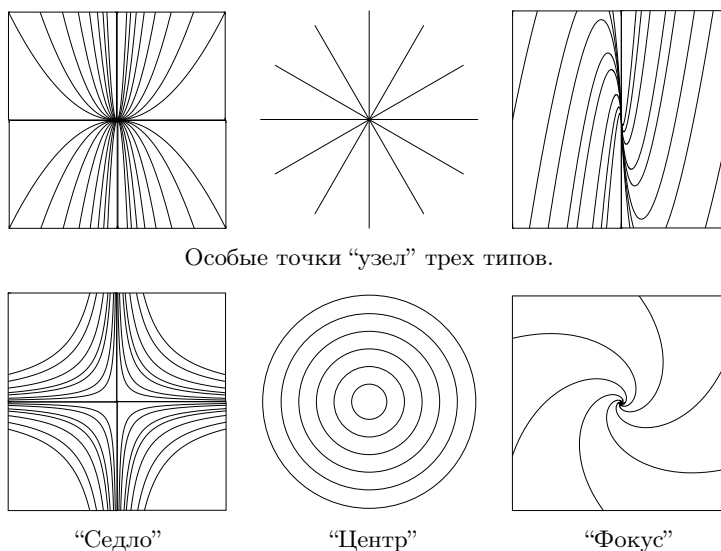


Рис. 18: Типы особых точек дифференциальных уравнений и поведение интегральных кривых вблизи них.

Поля поляризации излучения имеют особые точки совсем другого вида.

3. *Особенности поля поляризации.* Особыми точками уравнения (135) являются такие точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль. Предположим, что такая точка лежит в начале координат, причем в ней функции Q и U регулярны и не все их частные производные первого порядка равны нулю. Это предположение равносильно выполнению равенств (точнее эквивалентностей)

$$Q = q_x x + q_y y, \quad U = u_x x + u_y y. \quad (136)$$

Обратные формулы

$$x = \frac{u_y Q - q_y U}{d}, \quad y = -\frac{u_x Q - q_x U}{d}, \quad d = q_x u_y - q_y u_x. \quad (137)$$

Так как не все коэффициенты u и q равны нулю, без ограничения общности можно принять для определенности, что $u_y \neq 0$. Если все же $u_y = 0$, то $u_x \neq 0$ и оси x и y можно просто поменять местами. Определитель $d \neq 0$ тоже, так как в противном случае рассматриваемая точка не является особой.

Степень поляризации p , умноженная на интенсивность I , т. е. величина $r = pI$, и позиционный угол играют роль полярных координат:

$$Q = r \cos 2\alpha, \quad U = r \sin 2\alpha. \quad (138)$$

Дифференциалы этих переменных связаны соотношениями

$$dQ = dr \cos 2\alpha - 2r \sin 2\alpha d\alpha, \quad dU = dr \sin 2\alpha + 2r \cos 2\alpha d\alpha. \quad (139)$$

Выразим производную $\frac{dy}{dx}$ через переменные r и α . Тогда уравнение (133) в полярных координатах запишется в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{u_x dQ - q_x dU}{u_y dQ - q_y dU} = \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -\frac{u_x (dr \cos 2\alpha - 2r \sin 2\alpha d\alpha) - q_x (dr \sin 2\alpha + 2r \cos 2\alpha d\alpha)}{u_y (dr \cos 2\alpha - 2r \sin 2\alpha d\alpha) - q_y (dr \sin 2\alpha + 2r \cos 2\alpha d\alpha)}. \end{aligned} \quad (140)$$

Сделав еще одну замену переменной $\operatorname{tg} \alpha = t$ и разрешив (140) относительно производной, получим

$$\frac{d \ln r}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \frac{q_y t^3 + (q_x - 2u_y)t^2 - (q_y + 2u_x)t - q_x}{u_y t^3 + (u_x + 2q_y)t^2 - (u_y - 2q_x)t - u_x} = \frac{N(t)}{D(t)}. \quad (141)$$

Здесь обозначено (в знаменателе $D(t)$ коэффициент при старшей степени t принят равным 1)

$$N(t) = \frac{2}{u_y} [q_y t^3 + (q_x - 2u_y)t^2 - (q_y + 2u_x)t - q_x], \quad (142)$$

$$D(t) = (1+t^2) \left(t^3 + \frac{u_x + 2q_y}{u_y} t^2 - \frac{u_y - 2q_x}{u_y} t - \frac{u_x}{u_y} \right). \quad (143)$$

В общем случае знаменатель дроби $D(t)$ в правой части уравнения (141), кроме очевидных корней $\pm i$, имеет еще три корня. Обозначим их t_1, t_2, t_3 . Тогда

$$D(t) = (1 + t^2)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3). \quad (144)$$

4. *Характер поляризации вблизи особенности.* Для решения уравнения (141) представим правую часть его в виде разложения на простейшие дроби, считая все корни различными:

$$\frac{N(t)}{D(t)} = \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{\nu_1}{t - t_1} + \frac{\nu_2}{t - t_2} + \frac{\nu_3}{t - t_3}. \quad (145)$$

Коэффициенты ν , входящие в эту формулу, определяются выражениями

$$\nu_1 = -\frac{(1+t_1^2)(1+t_2t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}, \nu_2 = -\frac{(1+t_2^2)(1+t_1t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}, \nu_3 = -\frac{(1+t_3^2)(1+t_1t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}. \quad (146)$$

Выразим все другие величины через значения корней многочлена $D(t)$. Коэффициенты его самого:

$$\frac{u_x}{u_y} = t_1t_2t_3, \quad \frac{q_x}{u_y} = \frac{1+t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1}{2}, \quad \frac{q_y}{u_y} = -\frac{t_1+t_2+t_3+t_1t_2t_3}{2}; \quad (147)$$

числитель

$$N(t) = -(t_1 + t_2 + t_3 + t_1t_2t_3)t^3 + (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 - 3)t^2 + (t_1 + t_2 + t_3 - 3t_1t_2t_3)t - (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 + 1); \quad (148)$$

знаменатель в формулах (137)

$$d = q_x u_y - q_y u_x = \frac{u_y^2}{2}(1 + t_1t_2)(1 + t_2t_3)(1 + t_3t_1). \quad (149)$$

Нетрудно проверить, что выполняются соотношения

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = -2, \quad t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + t_3\nu_3 = -(t_1 + t_2 + t_3) - t_1t_2t_3 = 2\frac{q_y}{u_y}. \quad (150)$$

В дальнейшем нам понадобится также соотношение

$$\nu_1\nu_2\nu_3 = \frac{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}{(t_1-t_2)^2(t_2-t_3)^2(t_3-t_1)^2}(1+t_1t_2)(1+t_2t_3)(1+t_3t_1). \quad (151)$$

С использованием разложения (145) уравнение (141) легко интегрируется:

$$r = r_0(1 + t^2) \prod_{j=1}^3 |t - t_j|^{\nu_j}. \quad (152)$$

Перепишем решение в угловой переменной:

$$r = \frac{r_0}{\cos^2 \alpha} \prod_{j=1}^3 |\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_j|^{\nu_j}. \quad (153)$$

Заметим, что обращение множителя, стоящего перед знаком произведения, в бесконечность в точках $\alpha = \pm\pi/2$, компенсируется обращением в этих точках в нуль самого этого произведения, что является следствием первого соотношения (150).

5. *Особенности в различных системах координат.* Формула (153) характеризует поведение поляризационных кривых вблизи особой точки через зависимость параметров Стокса Q и U от угла α . Однако при изменении α от 0 до 2π эти параметры пробегают свои значения по два раза. Поэтому фактически кривые следует описывать функциями от угла $\phi = \frac{\alpha}{2}$.

На самом деле наглядное представление о поведении поляризационных кривых надо демонстрировать не на плоскости параметров Стокса, а в картинной плоскости xy . Для этого определим полярные координаты на этой плоскости

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad (154)$$

и свяжем их с координатами r и ϕ , записав соотношения (136) в обеих системах координат:

$$r \cos \phi = q_x \varrho \cos \varphi + q_y \varrho \sin \varphi, \quad r \sin \phi = u_x \varrho \cos \varphi + u_y \varrho \sin \varphi. \quad (155)$$

Отсюда найдем связь полярных расстояний

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{r}{|d|} \sqrt{(u_x^2 + u_y^2) \cos^2 \phi + (q_x^2 + q_y^2) \sin^2 \phi - 2(u_x q_x + u_y q_y) \cos \phi \sin \phi} = \\ &= \frac{r}{\sqrt{(q_x^2 + u_x^2) \cos^2 \varphi + (q_y^2 + u_y^2) \sin^2 \varphi + 2(q_x q_y + u_x u_y) \cos \varphi \sin \varphi}} \end{aligned} \quad (156)$$

и полярных углов

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{q_x \operatorname{tg} \phi - u_x}{u_y - q_y \operatorname{tg} \phi}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{u_x + u_y \operatorname{tg} \varphi}{q_x \operatorname{tg} \varphi + q_y}. \quad (157)$$

Из полученных формул следует, что тангенсы полярных углов в двух системах связаны неособенным дробно-рациональным преобразованием, а полярные расстояния различаются на множители, не обращающиеся в нуль или бесконечность. Поэтому характер поведения поляризационных кривых в обеих системах полярных координат получится одним и тем же, хотя количественные различия возможны.

6. *Классификация особенностей.* Теперь можно расклассифицировать особые точки.

Будем считать сначала, что все три корня t_j вещественны и различны. Пронумеруем их в порядке убывания: $t_1 > t_2 > t_3$. Тогда

$$\frac{\nu_1}{1 + t_2 t_3} < 0, \quad \frac{\nu_2}{1 + t_3 t_1} > 0, \quad \frac{\nu_3}{1 + t_1 t_2} < 0, \quad (158)$$

т. е. знак ν_2 совпадает со знаком суммы $1 + t_3 t_1$, а знаки ν_1 и ν_3 противоположны знакам соответствующих сумм $1 + t_2 t_3$ и $1 + t_1 t_2$. Возможны следующие случаи.

1) $0 < t_3 < t_2 < t_1$. Тогда все суммы в скобках в (151) положительны и произведение показателей ν_j положительно, $d > 0$. Порядок следования знаков показателей ($\nu_1 \nu_2 \nu_3$) в этом случае $(- + -)$.

2) $t_3 < 0 < t_2 < t_1$. Тогда $1 + t_1 t_2 > 0$ и $\nu_3 < 0$. Знаки двух первых показателей могут различаться в зависимости от величин корней:

а) если $1 + t_3 t_1 > 0$, то и $1 + t_3 t_2 > 0$, $d > 0$ и следование знаков $(- + -)$;

б) если $1 + t_3 t_1 < 0$, но $1 + t_3 t_2 > 0$, то $d < 0$ и знаки $(- - -)$;

в) если и $1 + t_3 t_1 < 0$, и $1 + t_3 t_2 < 0$, то $d > 0$ и знаки $(+ - -)$.

3) $t_3 < t_2 < 0 < t_1$. Тогда $1 + t_2 t_3 > 0$ и $\nu_1 < 0$. Остальные показатели могут иметь любые знаки:

а) если $1 + t_1 t_3 > 0$ и $1 + t_1 t_2 > 0$, то $d > 0$ и знаки $(- + -)$;

б) если $1 + t_1 t_3 < 0$, но $1 + t_1 t_2 > 0$, то $d < 0$, знаки $(- - -)$;

в) если и $1 + t_1 t_3 < 0$, и $1 + t_1 t_2 < 0$, то $d > 0$ и знаки $(- - +)$.

4) $t_3 < t_2 < t_1 < 0$. Здесь опять все суммы в скобках положительны, $d > 0$ и знаки $(- + -)$.

Таким образом, при отрицательном d все показатели отрицательны, а при положительном — один положителен, а два других отрицательны. В первом случае все решения не проходят через особую точку, из которой исходят три асимптоты-сепаратрисы. Во втором случае вдоль одного из трех направлений решения входят в особую точку, а два других направления избегают, т. е. асимптоты только две.

В случае, когда имеется только один вещественный корень $t_1 = c$, а два других комплексно сопряжены $t_2 = a + bi$, $t_3 = a - bi$, такими же будут в общем случае и показатели ν : первый из них вещественный и отрицательный:

$$\nu_1 = -(1 + c^2) \frac{1 + a^2 + b^2}{(a - c)^2 + b^2} < 0, \quad (159)$$

а два остальных — комплексно-сопряженные числа, так что

$$R = \frac{\nu_2 + \nu_3}{2} = \frac{1}{2} \frac{(a^2 + b^2 - 1)(c^2 - 1) + 4ac}{(a - c)^2 + b^2}, \quad (160)$$

$$M = -b \frac{\nu_2 - \nu_3}{i} = \frac{c[(a^2 + b^2)^2 - 1] - a(c^2 - 1)(a^2 + b^2 + 1)}{(a - c)^2 + b^2}. \quad (161)$$

Решение уравнения (141) можно записать в виде

$$r = r_0(t - t_1)^{\nu_1} (1 + t^2)[(t - a)^2 + b^2]^R e^{-M\phi_*(t)}, \quad (162)$$

где

$$\phi_*(t) = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{t - a}. \quad (163)$$

Так как произведение трех последних множителей в (162) не имеет особенностей, то это решение имеет только одну асимптоту. В частных случаях может оказаться, что величина M равна нулю, т. е. все показатели вещественны.

Авторы статьи [14] дали следующие названия особым точкам, возникающим в случае поля направлений поляризации. При вещественных корнях и $d < 0$ точка — “седло” (saddle), но не с четырьмя, а с тремя асимптотами-сепаратрисами. При вещественных корнях и $d > 0$ — “клюв” (beak). Наконец, при одном вещественном корне — “комета” (cometa).

7. *Примеры.* В качестве примеров рассмотрим случаи диагональной зависимости в (136), а именно $Q = qx, U = y, q \neq 0$. Тогда $D(t) = (1 + t^2)t(t^2 + 2q - 1)$, $t_1 = 0$, а показатели $\nu_1 = \frac{2q}{1 - 2q}$, $\nu_2 = \nu_3 = -\frac{1 - q}{1 - 2q}$. Легко убедиться, что при $q < 0$ особая точка — “седло”, при $0 < q < 1/2$ — “клов”, а при $q > 1/2$ — “комета”.

На рис. 19 воспроизводятся характерные черты рассматриваемых особых точек в переменных ϕ, r . Кривые рассчитаны для следующих значений параметра q .

- 1) Для “седла” $q = -1$, $t_2 = \sqrt{3}$, $t_3 = -\sqrt{3}$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = -\frac{2}{3}$, так что $r = \frac{r_0}{|\sin(\phi/2)[\sin^2(\phi/2) - 3\cos^2(\phi/2)]|^{2/3}}$.
- 2) Для “кометы” $q = 1$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$. Здесь числа $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = \nu_3 = 0$ и $r = \frac{r_0}{\sin^2(\phi/2)}$.
- 3) Для “клюва” $q = 1/4$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = -\frac{3}{2}$ и $r = r_0 \frac{|\sin(\phi/2)|}{|\sin^2(\phi/2) - (1/2)\cos^2(\phi/2)|^{3/2}}$.

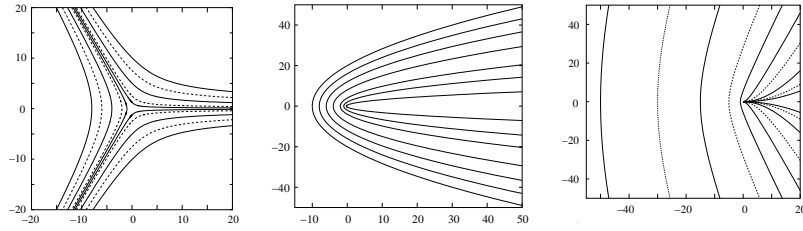


Рис. 19: Поляризационные кривые около особых точек типа “седло”, “комета” и “клов”.

В то время как кривые около особой точки “комета” имеют только одну общую асимптоту, так что каждая из них, соответствующая определенному значению r_0 , непрерывно приходит из бесконечно удаленной точки и, описав дугу, возвращается обратно, кривые около других точек состоят из нескольких ветвей: “клов” из двух, “седло” из трех. Поэтому мы ветви этих кривых изобразили по очереди непрерывными и пунктирными линиями. Установить соответствие ветвей друг другу нетрудно.

8. *Особые случаи.* Общим рассмотрением не охвачены случаи, когда у многочлена (143) кратные корни или когда одна из величин Q и U в окрестности особой точки имеет порядок малости выше линейного. Этот последний случай реализуется в условиях предыдущего пункта при $q = 0$. Тогда $r = r_0/|\cos(\phi/2)|$, что изображается прямыми, параллельными оси y .

При $q = 1/2$ получается трехкратный корень. Тогда $D(t) = (1 + t^2)t^3$, $N(t) = -3t^2 - 1$ и

$$r = \frac{r_0}{\sin^2(\phi/2)} e^{(1/2) \operatorname{ctg}(\phi/2)}. \quad (164)$$

Кривые около особой точки идут качественно так же, как в случае кометы, но из-за дополнительного экспоненциального множителя скорость роста полярного расстояния при приближении к особому направлению (углу) существенно выше. Этот тип особой точки можно назвать “метеором” (meteor).

Двукратный корень возникает при $Q = (x - y)/2$, $U = y$. При таких коэффициентах $D(t) = (1+t^2)t^2(t-1)$, $N(t) = -(t^3+3t^2-t+1)$,

$$r = \frac{r_0}{[\cos(\phi/2) - \sin(\phi/2)]^2} e^{-\operatorname{ctg}(\phi/2)}. \quad (165)$$

Этот вариант особой точки имеет сложную структуру: кривые при углах, близких к нулю, выходят из начала координат, уходят на бесконечность вдоль некоторой прямой, возвращаются и снова уходят на бесконечность при приближении угла к значению 2π . Назовем такую точку “сохой” (plough).

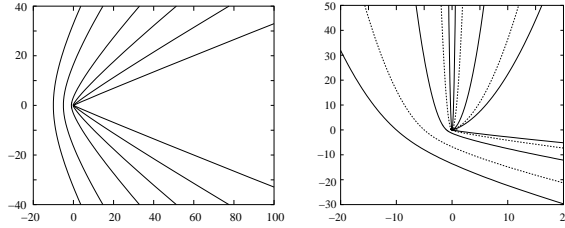


Рис. 20: Поляризационные кривые около особых точек “метеор” и “соха”.

Поведение поляризационных кривых вблизи особых точек последних двух типов отражено на рис. 20. Здесь опять кривые около точки “метеор” связны, а в случае “сохи” состоят из двух ветвей.

§ 7. Энергетические характеристики электромагнитных волн

1. *Тензор энергии-импульса волны.* В этом параграфе вернемся к описанию волн в свободном пространстве, так что $\varepsilon = \mu = 1$. Для наглядности сохраним размерные величины. Кроме того, большая часть этого параграфа будет выдержана в явно релятивистских обозначениях. В частности, калибровка принимается лоренцевская.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля волны определим так:

$$T_{\text{MW}}^{\lambda\mu} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}. \quad (166)$$

Сравним это определение с общим определением тензора энергии-импульса, данным в § 8 Главы 2:

$$T^{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\lambda\nu} F_\nu^\mu + \frac{1}{4} (F^{\nu\iota} F_{\nu\iota}) g^{\lambda\mu} \right). \quad (167)$$

Во-первых, скаляр $(F^{\nu\iota} F_{\nu\iota}) = 8(H^2 - E^2)$ в случае волны равен нулю, так как в свободном пространстве модули напряженностей электрического и магнитного полей волны равны. Во-вторых, выразим сначала тензор (167) с учетом сказанного через потенциалы:

$$\begin{aligned} 4\pi T^{\lambda\mu} &= F_\nu^\lambda F^{\nu\mu} = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \right) \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} \right) = \\ &= \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \end{aligned} \quad (168)$$

Затем составим разность двух выражений (сокращается второе слагаемое в общем определении с выражением (166))

$$4\pi(T^{\lambda\mu} - T_{\text{MW}}^{\lambda\mu}) = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \quad (169)$$

Полученную разность представим через дивергенцию некоторого тензора:

$$\begin{aligned} 4\pi(T^{\lambda\mu} - T_{\text{MW}}^{\lambda\mu}) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[A^\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\lambda} - A^\mu \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} + A^\lambda \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right] - \\ &- A^\mu \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \partial x_\lambda} + A^\mu \frac{\partial^2 A^\lambda}{\partial x_\nu \partial x^\nu} - A^\lambda \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu \partial x_\mu}. \end{aligned} \quad (170)$$

Три последних слагаемых равны нулю, так как

$$\frac{\partial^2 A^\lambda}{\partial x_\nu \partial x^\nu} = \square A^\lambda = 0, \quad \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (171)$$

Первое равенство выражает волновое уравнение для потенциалов, а второе — условие Лоренца.

Таким образом, разность выражений равна дивергенции. Оба выражения симметричны по индексам. Это означает, что они оба одинаково подходят в качестве тензоров энергии-импульса волны, так как от него требуется правильное выражение через напряженности и равенство нулю дивергенции от него, выражающее законы сохранения. Обращение в нуль дивергенции (167) было доказано в общем случае. В нуль обращается дивергенция и от разности (170). Действительно, вычисление производной от нее по x^μ приводит снова к появлению двух равенств (171). Добавление же дивергенции какого-либо тензора к тензору энергии-импульса не мешает выполнению законов сохранения, так как вычисление интеграла по пространству или другим пространственно подобным поверхностям четырехмерного пространства Минковского, дающее эти законы, приводит к интегралам от дивергенции, которые выражаются через сами потенциалы и поэтому обращаются в нуль на используемых поверхностях.

2. *Потенциалы и напряженности плоских волн.* Пусть плоская почти монохроматическая волна описывается четырехмерным вектором потенциалов

$$\underline{A} = \underline{a} e^{-i \underline{\kappa} r} = \underline{a} e^{-i(\kappa ct - \vec{\kappa} \vec{r})}, \quad \kappa = \frac{\omega}{c}, \quad \vec{\kappa} = \kappa \vec{n}. \quad (172)$$

Представим комплексную амплитуду волны в виде разложения

$$\underline{a} = a^{(0)} \underline{e}_{(0)} + a^{(1)} \underline{e}_{(1)} + a^{(2)} \underline{e}_{(2)} + a^{(3)} \underline{e}_{(3)} = a^{(\lambda)} \underline{e}_{(\lambda)}, \quad (173)$$

где $\underline{e}_{(\lambda)}$ — поляризационный базис. Как и всякий четырехмерный базис он подчиняется соотношениям

$$\underline{e}_{(\lambda)} \underline{e}_{(\lambda')} = g_{\lambda \lambda'}. \quad (174)$$

Поляризационный базис, отвечающий волновому вектору $\underline{\kappa}$, можно представить так:

$$\underline{e}_{(0)} = \{1, 0\}, \quad \underline{e}_{(1)} = \{0, \vec{e}_1\}, \quad \underline{e}_{(2)} = \{0, \vec{e}_2\}, \quad \underline{e}_{(3)} = \{0, \vec{e}_3\}, \quad (175)$$

где трехмерные орты правого базиса (правой тройки ортов)

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), & \vec{e}_2 &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \vec{e}_3 &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).\end{aligned}\quad (176)$$

Заметим, что \vec{e}_0 времениподобен, остальные орты — пространственноподобны. Очевидно, что \vec{e}_1 и \vec{e}_2 перпендикулярны волновому вектору $\vec{\kappa}$, а \vec{e}_3 параллелен ему, т.е. $\vec{\kappa}\vec{e}_1 = \vec{\kappa}\vec{e}_2 = 0$, а так как нулевые компоненты четырехмерных ортов \underline{e}_1 и \underline{e}_2 равны нулю, то и $\underline{\kappa}\underline{e}_1 = \underline{\kappa}\underline{e}_2 = 0$. Следовательно, $a^{(\lambda)}$ — амплитуды четырехмерного вектора потенциала по его ортам, т.е. скалярный ($a^{(0)}$), два поперечных ($a^{(1)}$ и $a^{(2)}$) и продольный ($a^{(3)}$) потенциалы. Заметим, что амплитуды не являются компонентами четырехмерного вектора, они коэффициенты при таких векторах и поэтому не изменяются при преобразовании Лоренца, т.е. это скаляры.

Вектор потенциалов должен удовлетворять условию поперечности (условию Лоренца)

$$\nabla \underline{A} = -i \underline{\kappa} \underline{A} = 0, \text{ или } \underline{\kappa} \underline{a} = \kappa a^{(0)} - \vec{\kappa} \vec{a} = 0, \vec{\kappa} \vec{a} = \kappa a^{(0)}. \quad (177)$$

В силу свойств поляризационного базиса из (173) и (177) следует

$$\underline{\kappa} \underline{a} = \kappa a^{(0)} - \vec{\kappa} \vec{a} = \kappa a^{(0)} - \kappa \vec{e}_3 a^{(3)} = [\underline{\kappa} \underline{e}_{(0)}][a^{(0)} - a^{(3)}] = 0, \quad a^{(0)} = a^{(3)}. \quad (178)$$

Выражения для напряженностей поля такой волны

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_0} - \nabla A_0 = i(\kappa \vec{a} - \vec{\kappa} a^{(0)})e^{-i\kappa r}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A} = i\vec{\kappa} \times \vec{a} e^{-i\kappa r}. \quad (179)$$

3. *Плотность и поток энергии.* Квадрат электрической напряженности

$$\begin{aligned}\vec{E} \vec{E}^* &= \kappa^2 (\vec{a} \vec{a}^* + a^{(0)} a^{(0)*}) - \kappa (a^{(0)} \vec{a}^* - a^{(0)*} \vec{a}) \vec{\kappa} = \\ &= \kappa^2 (a^{(1)} a^{(1)*} + a^{(2)} a^{(2)*} + a^{(3)} a^{(3)*} + a^{(0)} a^{(0)*} - 2a^{(0)} a^{(0)*})\end{aligned}\quad (180)$$

с учетом второго соотношения в (177)

$$|\vec{E}|^2 = \vec{E} \vec{E}^* = \kappa^2 (|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2). \quad (181)$$

Выражение для квадрата магнитной напряженности точно такое же:

$$\begin{aligned}|\vec{H}|^2 &= \vec{H} \vec{H}^* = (\vec{\kappa} \times \vec{a})(\vec{\kappa} \times \vec{a}^*) = \kappa^2 \vec{a} \vec{a}^* - (\vec{\kappa} \vec{a})(\vec{\kappa} \vec{a}^*) = \\ &= \kappa^2 (\vec{a} \vec{a}^* - a_0 a_0^*) = \kappa^2 (|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2).\end{aligned}\quad (182)$$

Плотность энергии получается в виде

$$w = \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2}{8\pi} = \frac{\varkappa^2}{4\pi} \left(|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2 \right). \quad (183)$$

У вектора потока энергии

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{c}{4\pi} \left[\left(\varkappa \vec{a} - \vec{\varkappa} a^{(0)} \right) \times \left(\vec{\varkappa} \times \vec{a}^* \right) \right] = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left[\vec{\varkappa} \left(\varkappa \vec{a} \vec{a}^* - \vec{\varkappa} \vec{a}^* a^{(0)} \right) - \vec{a}^* \left(\varkappa \vec{\varkappa} \vec{a} - \varkappa^2 a^{(0)} \right) \right] \end{aligned} \quad (184)$$

слагаемое во вторых круглых скобках второй строчки равно нулю, а в первых согласно (177) снова приводится к сумме квадратов поперечных амплитуд, так что

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \varkappa \vec{\varkappa} \left(|a^{(1)}|^2 + |a^{(2)}|^2 \right) = cw \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}, \quad (185)$$

т. е. энергия просто течет.

Квадраты напряженностей и энергетические величины не зависят от продольно-скалярной амплитуды $a^{(0)} = a^{(3)}$, так что она несущественна и можно положить $a^{(0)} = a^{(3)} = 0$.

Равенство нулю скалярных и продольных компонент напряженностей волн, т. е. их поперечность является характерной чертой волн в свободном пространстве. Заметим здесь, что таким же свойством обладают фотоны. Они наряду с энергией и импульсом обладают собственным моментом — спином. Спин фотона равен 1, но возможных проекций спина у фотона, как доказывается в квантовой электродинамике, только две: они ортогональны его импульсу. Скалярные и продольные фотоны в природе невозможны.

4. *Выражение тензора через амплитуды потенциалов.* Если плоская волна почти монохроматическая, то многие формулы предыдущего пункта остаются в силе, но при нахождении квадратичных величин требуется усреднение по времени, так как коэффициенты $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ рассматриваются как медленно меняющиеся функции времени. При этом физическими надо считать вещественные части векторов. Например, найдем такое среднее от потенциала. Вычисляем его, как при выводе равенства (43):

$$\overline{(\operatorname{Re} \underline{A})^2} = \frac{1}{2} \left(\overline{\underline{a}_R^2} + \overline{\underline{a}_I^2} \right) = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{A}^* = \frac{1}{2} \overline{(a_R + i a_I)(a_R - i a_I)}. \quad (186)$$

Квадрат вещественной части потенциала выражается через поперечные составляющие:

$$\begin{aligned} \underline{a}_R^2 &= \left(a_R^{(\lambda)} \underline{e}_{(\lambda)} \right) \left(a_R^{(\lambda')} \underline{e}_{(\lambda')} \right) = a_R^{(\lambda)} a_R^{(\lambda')} g_{\lambda\lambda'} = \\ &= \left(a_R^{(0)} \right)^2 - \left(a_R^{(1)} \right)^2 - \left(a_R^{(2)} \right)^2 - \left(a_R^{(3)} \right)^2 = - \left(a_R^{(1)} \right)^2 - \left(a_R^{(2)} \right)^2. \end{aligned} \quad (187)$$

Точно то же справедливо и для мнимой части и, следовательно,

$$\underline{A} \underline{A}^* = \underline{a} \underline{a} = - \left(a_R^{(1)} \right)^2 - \left(a_R^{(2)} \right)^2 - \left(a_I^{(1)} \right)^2 - \left(a_I^{(2)} \right)^2 = -|a^{(1)}|^2 - |a^{(2)}|^2. \quad (188)$$

Отрицательность этого выражения означает, что вектор потенциалов пространственно подобен.

В качестве тензора энергии-импульса надо принять

$$T_{\text{MW}}^{\lambda\mu} = - \frac{1}{4\pi} \overline{\frac{\partial \underline{A}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \underline{A}^*}{\partial x_\mu}}, \quad (189)$$

где черта сверху означает усреднение по времени и, возможно, по пространству. Производные по координатам вычисляются так:

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x_\lambda} = \underline{a} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} e^{-i\mathcal{K}^\nu x_\nu} = -i\mathcal{K}^\lambda \underline{a} e^{-i\mathcal{K}^\nu x_\nu} = -i\mathcal{K}^\lambda \underline{A}, \quad (190)$$

так что

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \underline{A}^*}{\partial x_\mu} = \mathcal{K}^\lambda \mathcal{K}^\mu \underline{A} \underline{A}^*. \quad (191)$$

Таким образом,

$$T_{\text{MW}}^{\lambda\mu} = - \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}^\lambda \mathcal{K}^\mu \overline{\underline{A}^* \underline{A}} = \frac{\mathcal{K}^\lambda \mathcal{K}^\mu}{4\pi} \left(\overline{|a_1|^2} + \overline{|a_2|^2} \right). \quad (192)$$

В частности, составляющие нулевой строчки

$$T_{\text{MW}}^{00} = \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}^2 \left(\overline{|a_1|^2} + \overline{|a_2|^2} \right) = \frac{|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2}{8\pi} = w, \quad (193)$$

$$T_{\text{MW}}^{0k} = \frac{1}{4\pi} \mathcal{K}^2 \frac{\mathcal{K}^k}{\mathcal{K}} \left(\overline{|a_1|^2} + \overline{|a_2|^2} \right) = w \frac{\mathcal{K}^k}{\mathcal{K}} = \frac{S^k}{c}, \quad (194)$$

суть пространственная плотность и плотность потока (деленная на c) энергии поля волны.

Если волна идет вдоль одной из осей координат, то отличны от нуля только четыре компоненты тензора. Например, если это ось x , то не равны нулю T^{00} , $T^{01} = T^{10}$ и T^{11} .

Глава 5. Классическая теория излучения

§ 1. Потенциалы точечного заряда

1. *Постановка задачи.* Пусть точечный заряд e движется в свободном пространстве. Его радиус-вектор в некоторой системе отсчета является известной функцией времени, определенного в этой системе:

$$\vec{r} = \vec{r}_0(t). \quad (1)$$

Тогда плотности заряда и тока определяются формулами

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{r}'_0(t). \quad (2)$$

Движущийся заряд создает вокруг себя электромагнитное поле. Найдем его. Начнем с вычисления потенциалов.

Пусть в точке с радиусом-вектором \vec{r} находится наблюдатель, который измеряет потенциалы в момент времени t . Конечно, никакого наблюдателя там может и не быть. Измерения понимаются как потенциально возможные. Величины \vec{r} и t считаем фиксированными, обозначим $\vec{R}_0 = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1)$ (рис. 21, о моменте времени t_1 скажем ниже).

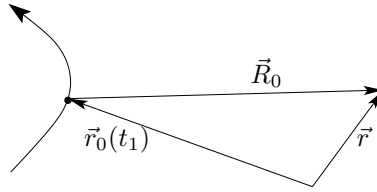


Рис. 21: Геометрия излучения заряда.

Как известно, потенциалы определяются неоднородными волновыми уравнениями

$$\square \varphi = 4\pi \rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3)$$

где оператор Даламбера

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (4)$$

Их решения — запаздывающие потенциалы, определяемые формулами (см. п. 6 в § 6 Главы 1)

$$\varphi = \int \rho(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r_1'}{|\vec{r} - \vec{r}_1'|}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (5)$$

При этом в формулах для потенциалов время t_1 — время влияния, которое меньше времени наблюдения, так как сигнал от источника поля до наблюдателя должен успеть дойти со скоростью распространения, равной скорости света. Таким образом, в (5) момент времени t_1 определяется соотношением

$$c(t - t_1) = |\vec{r} - \vec{r}_1|. \quad (6)$$

Эти общие формулы надо применить к случаю точечного заряда, т. е. подставить туда выражения (2). Тогда для скалярного потенциала получится

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (7)$$

Поскольку под знаком интеграла стоит δ -функция, то фактически в каждый момент времени t интеграл должен браться по одной точке, а соответствующий момент влияния определяется из уравнения

$$c(t - t_1^0) = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|. \quad (8)$$

Поэтому можно вынести значение знаменателя в (7) в этой точке и написать

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0(\vec{r}, t_1^0)} \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3 r_1. \quad (9)$$

где введен вектор, соединяющий положение заряда в момент влияния с положением наблюдателя (рис. 21):

$$\vec{R}_0 = \vec{R}_0(\vec{r}, t_1^0) = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0), \quad R_0 = R_0(\vec{r}, t_1^0) = |\vec{R}_0| = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|. \quad (10)$$

Точно так же в интеграле для векторного потенциала можно вынести два множителя и получить

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0} \vec{r}'_0(t_1^0) \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3 r_1. \quad (11)$$

Таким образом, дело сводится к вычислению одного интеграла от δ -функции. Однако, этот интеграл равен единице, только если величина \vec{r}_0 постоянна, т. е. для неподвижного заряда. В случае движущегося заряда это не так.

2. *Вычисление потенциалов.* Нам надо вычислить интеграл в (9) при условии (8). Ввиду важности результата и нетривиальности его получения мы дадим четыре способа вычисления указанного интеграла.

1) Непосредственное вычисление. Сделаем замену переменных интегрирования

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c) = \vec{r}_2. \quad (12)$$

Найдем якобиан преобразования, т. е. определитель, составленный из производных от составляющих \vec{r}_2 по составляющим \vec{r}_1 . Матрица этих производных получается следующей:

$$1 - \frac{1}{c|\vec{r} - \vec{r}_1|} \begin{pmatrix} x'_0(x-x_1) & x'_0(y-y_1) & x'_0(z-z_1) \\ y'_0(x-x_1) & y'_0(y-y_1) & y'_0(z-z_1) \\ z'_0(x-x_1) & z'_0(y-y_1) & z'_0(z-z_1) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где единица впереди означает единичную матрицу, а производные вычисляются в момент $t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c$. Разности координат в матрице — это не аргументы производных, а множители. Определитель этой матрицы

$$1 - \frac{\vec{r}'_0 \vec{R}_0}{c R_0} = \frac{s}{R_0}, \quad s = R_0 - \vec{\beta} \vec{R}_0, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{r}'_0}{c}. \quad (14)$$

После вычисления якобиана интеграл от δ -функции берется просто и мы находим

$$\int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3 r_1 = \int \delta(\vec{r}_2) d^3 r_2 \frac{R_0}{s} = \frac{R_0}{s}. \quad (15)$$

Заметим, что в промежуточных выкладках этого пункта ввиду наличия под интегралом δ -функции безразлично, какой указывать аргумент функций, связанных с зарядом: t_1 или t_1^0 .

2) Вычисление через функцию Грина. Подставляя в формулу (1.59) выражение для функции Грина (1.71) и беря сначала интеграл по координатам, а затем по времени, находим

$$\varphi(\vec{r}, t) = 4\pi e \int d^3 r_1 c dt_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|} \delta(c(t-t_1) - |\vec{r} - \vec{r}_1|) =$$

$$\begin{aligned}
&= e \int dt_1 \frac{\delta(t_1 - t + |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|} = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|} \int d\tau \delta(\tau) \frac{dt_1}{d\tau} = \\
&= \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|} \int d\tau \frac{\delta(\tau)}{1 - \vec{\beta} \vec{R}_0/R_0} = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|} \frac{1}{1 - \vec{\beta} \vec{R}_0/R_0}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Здесь при выводе была произведена замена переменной интегрирования и найдена производная от τ по t_1 :

$$\tau = t_1 - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|}{c}, \quad \frac{d\tau}{dt_1} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\vec{r}'_0(t_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_1)|}. \quad (17)$$

3) Релятивистский способ. Выражения для потенциалов можно получить, исходя из двух следующих соображений. Во-первых, они вместе должны составлять четырехмерный вектор $\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\}$. Во-вторых, в пределе неподвижного заряда должен получаться известный результат:

$$\varphi = \frac{e}{R_0}, \quad \vec{A} = 0. \quad (18)$$

Искомые выражения надо сконструировать из имеющихся четырехмерных векторов. Таких векторов у нас два. Это вектор перемещения влияния заряда

$$\underline{R}_0 = \{c(t - t_1^0), \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)\} = \{R_0, \vec{R}_0\} \quad (19)$$

и вектор скорости заряда

$$\underline{v} = c\{\gamma_0, \gamma_0 \vec{\beta}\}, \quad \gamma_0 = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (20)$$

Первый вектор нулевой, так как он описывает распространение сигнала, которое происходит со скоростью света. Второй вектор времени подобен, как и должно быть для вектора скорости.

Очевидно, что вектор потенциалов \underline{A} должен быть пропорционален вектору скорости \underline{v} , ибо у обоих этих векторов в случае неподвижного заряда пространственные составляющие обращаются в нули. В знаменатель же надо поместить инвариантное выражение, обращающееся в этом же случае в R_0 . Таким выражением является скалярное произведение векторов \underline{v} и \underline{R}_0 . Окончательно получаем

$$\underline{A} = \frac{e}{\underline{v} \underline{R}_0} \underline{v} = \frac{e}{s} \{1, \vec{\beta}\}. \quad (21)$$

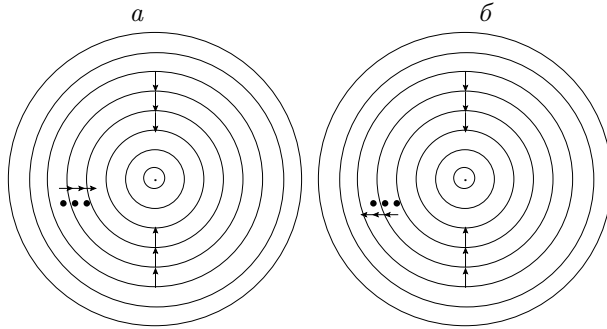


Рис. 22: Пересечение заряда сферой влияния при их движении:
 a — в одном направлении, $б$ — навстречу.

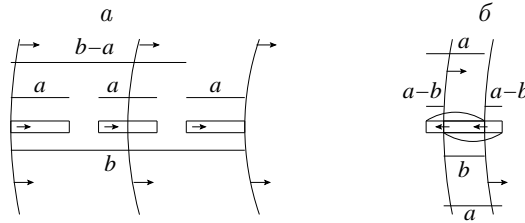


Рис. 23: Движение заряда и сферы:
 a — в одном направлении, $б$ — навстречу.

4) Наглядный. Наконец, четвертый способ вывода — наименее формальный из всех. Уравнение (6) при закрепленных значениях \vec{r} , t и t_1 представляет сферу с центром в точке \vec{r} радиусом $c(t - t_1)$, точки \vec{r}_1 лежат на поверхности сферы. Если на сфере оказывается заряд, он дает вклад в интеграл. Назовем эту сферу сферой влияния. При $t_1 = -\infty$ сфера имеет бесконечный радиус, так что заряд находится внутри нее. С ростом t_1 радиус сферы уменьшается и при $t_1 = t$ сфера обращается в точку, совпадающую с положением наблюдателя. Радиус сферы уменьшается со скоростью света, а заряд движется с меньшей скоростью, рано или поздно сфера пересечет заряд. При этом заряд может лететь либо в ту же сторону, что и сфера (рис. 22а), либо навстречу ей (рис. 22б).

Для наглядности откажемся от точечности заряда. Пусть заряд имеет постоянное поперечное сечение и длину a , а скорость его направлена прямо на наблюдателя (рис. 23). В какой-то момент сфера догонит заряд, т. е. коснется его заднего сечения, а потом пе-

регонит его, т. е. коснется переднего его сечения (рис. 23а). Вклад в интеграл заряд будет давать только в те моменты, когда сфера его пересекает. Если бы заряд был неподвижен, этот промежуток времени был бы пропорционален a . Из-за движения заряда в ту же сторону, что и сфера, промежуток времени влияния увеличивается. Обозначим расстояние, на котором происходит влияние заряда, через b . Тогда за одно и то же время заряд проходит расстояние $b - a$, а сфера b . Поделив эти расстояния на скорости и приравняв результаты, получим

$$\frac{b}{c} = \frac{b - a}{v} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{1 - v/c}. \quad (22)$$

Это как раз тот дополнительный множитель, на который отличается величина интеграла в (9) от единицы, так как в (22) v — это проекция скорости заряда на направление на наблюдателя.

Аналогично рассматривается противоположный случай, когда заряд движется навстречу сфере (рис. 23б). Тогда получаются соотношения

$$\frac{b}{c} = \frac{a - b}{v}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{1 + v/c}. \quad (23)$$

Здесь v — проекция скорости заряда на направление от наблюдателя, так что формула фактически та же.

Мы считали заряд неточечным. Однако поправочный множитель не зависит от a и остается тем же при $a \rightarrow 0$.

Итак, потенциалы точечного движущегося заряда, называемые обычно потенциалами Лиенара—Вихерта, определяются формулами (21) или подробнее (напомним, что $\vec{R}_0(\vec{r}, t_1) = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1)$)

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{s}, \quad \vec{A} = \frac{e \vec{r}_0'(t_1)}{c s}, \quad s = R_0(\vec{r}, t_1) - \vec{r}_0'(t_1) \vec{R}_0(\vec{r}, t_1)/c. \quad (24)$$

Здесь для краткости у аргумента t_1^0 , определяемого (8), опущен нулик, т. е.

$$c(t - t_1) = R_0(\vec{r}, t_1). \quad (25)$$

Теперь можно найти напряженности электрического и магнитного полей.

§ 2. Поле точечного заряда

1. *Соотношения между переменными, связанными с зарядом и с наблюдателем.* По потенциалам движущегося точечного заряда (24), где момент влияния определяется равенством (25), найдем напряженности создаваемого им электромагнитного поля.

Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через потенциалы при помощи обычных формул

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi, \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (26)$$

Трудность вычисления напряженностей по этим формулам заключается в том, что производные в них берутся по времени t и координатам x, y, z , а потенциалы (24) зависят от времени t_1 . При этом зависимость потенциалов от пространственных координат двойная. Во-первых, эти координаты входят непосредственно через вектор \vec{r} , во-вторых, от них зависит и время t_1 . Поэтому сначала надо найти производные от t_1 по времени t и по координатам, а затем дифференцировать потенциалы как сложные функции.

Найдем прежде всего производные по t_1 , что не представляет труда:

$$\frac{\partial \vec{R}_0}{\partial t_1} = -\vec{r}'_0(t_1) = -c\vec{\beta}, \quad \frac{\partial R_0}{\partial t_1} = \frac{1}{2R_0} \frac{\partial \vec{R}_0^2}{\partial t_1} \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial t_1} = -\frac{\vec{R}_0}{R_0} \vec{r}'_0(t_1) = -\frac{\vec{R}_0}{R_0} c\vec{\beta}. \quad (27)$$

Вторая производная по времени t_1 — это ускорение заряда:

$$\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t_1} = \vec{\beta}' = \frac{\vec{r}_0''(t_1)}{c}. \quad (28)$$

Нам понадобится также производная

$$s' = \frac{\partial s}{\partial t_1} = \frac{\partial R_0}{\partial t_1} - \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial t_1} \vec{\beta} - \vec{R}_0 \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t_1} = -c\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + c\beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}'. \quad (29)$$

Теперь найдем производную от времени t_1 по времени наблюдения. Для этого продифференцируем равенство (25) по t . Получим

$$\frac{\partial R_0}{\partial t} = \frac{\partial R_0}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t_1}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{R_0}{s} = \frac{1}{1 - \vec{\beta} \vec{R}_0 / R_0}. \quad (30)$$

Так же находится и обратная производная:

$$\frac{\partial R_0}{\partial t_1} = c \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} - 1 \right) = -c\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0}, \quad \frac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0}. \quad (31)$$

Интересно отметить, что производная от t_1 по t и производная от t по t_1 взаимно обратны. Для частных производных такая связь в

общем случае не имеет места. То, что она выполняется для времен t и t_1 , является исключительным случаем.

Перейдем к производным по координатам. При этом, как уже говорилось, дифференцировать надо дважды: непосредственно по координатам — через вектор \vec{r} — и через время t_1 . Поэтому сначала найдем градиент t_1 . Для этого возьмем градиент от обеих частей равенства (25):

$$\vec{\nabla} R_0 = \frac{\vec{R}_0}{R_0} + \frac{\partial R_0}{\partial t_1} \vec{\nabla} t_1 = -c \vec{\nabla} t_1, \quad \vec{\nabla} t_1 = -\frac{\vec{R}_0}{c R_0} \frac{1}{1 - \vec{\beta} \vec{R}_0 / R_0} = -\frac{\vec{R}_0}{c s}. \quad (32)$$

Аналогично находим

$$\vec{\nabla} s = \frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} + s' \vec{\nabla} t_1, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\beta} = \vec{\nabla} t_1 \times \vec{\beta}'. \quad (33)$$

Теперь у нас есть все, чтобы найти напряженности.

2. *Вычисление напряженностей.* Для этого придется проделать довольно длинные выкладки. Сначала для напряженности электрического поля.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = e \left[\frac{1}{s^2} \vec{\nabla} s - \frac{1}{c} \frac{\partial t_1}{\partial t} \left(\frac{1}{s} \vec{\beta}' - \frac{1}{s^2} s' \vec{\beta} \right) \right] = \\ &= \frac{e}{s^2} \left[\frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} - \frac{\vec{R}_0}{c s} (c \beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' - c \vec{\beta}) - \frac{R_0 \vec{\beta}'}{c} + \frac{R_0}{c s} \vec{\beta} (c \beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' - c \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0}) \right] = \\ &= -\frac{e}{s^3} \left[\left(\frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} \right) s - \vec{R}_0 \beta^2 + \vec{R}_0 \left(\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right) + R_0 \vec{\beta} \beta^2 - \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{R}_0) + \frac{\vec{R}_0}{c} (\vec{R}_0 \vec{\beta}') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c} R_0 s \vec{\beta}' - \frac{1}{c} R_0 \vec{\beta} (\vec{R}_0 \vec{\beta}') \right] = -\frac{e}{s^3} \left[\vec{R}_0 - R_0 \vec{\beta} + \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{R}_0) - \vec{R}_0 \beta^2 - \frac{\vec{R}_0}{R_0} (\vec{\beta} \vec{R}_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\vec{R}_0}{R_0} (\vec{\beta} \vec{R}_0) + R_0 \vec{\beta} \beta^2 - \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{R}_0) + \frac{1}{c} (\vec{R}_0 (\vec{R}_0 \vec{\beta}') - R_0^2 \vec{\beta}' + R_0 (\vec{\beta} \vec{R}_0) \vec{\beta}' - \right. \\ &\quad \left. - R_0 \vec{\beta} (\vec{R}_0 \vec{\beta}') \right] = \frac{e}{s^3} (\vec{R}_0 - R_0 \vec{\beta}) (1 - \beta^2) + \frac{e}{s^3 c} \vec{R}_0 \times [(\vec{R}_0 - R_0 \vec{\beta}) \times \vec{\beta}']. \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь для магнитного поля.

$$\vec{H} = e \vec{\nabla} \times \frac{\vec{\beta}}{s} = e \left[\vec{\nabla} \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \vec{\nabla} \times \vec{\beta} \right] = e \left[-\frac{1}{s^2} \vec{\nabla} s \times \vec{\beta} + \frac{1}{s} \vec{\nabla} t_1 \times \vec{\beta}' \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{s^2} \left(\frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{\beta} + s' \vec{\nabla}_{t_1} \times \vec{\beta} + s \vec{\nabla}_{t_1} \times \vec{\beta}' \right) = \frac{e}{s^2} \left[\frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{\beta} - \left(c\beta^2 - c\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{R}_0 \vec{\beta}' \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{c} \vec{R}_0 \times \vec{\beta}' \right] = -\frac{e}{s^3} \left[\frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{\beta} (R_0 - \vec{\beta} \vec{R}_0) - \beta^2 \vec{R}_0 \times \vec{\beta} + \left(\vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right) \vec{R}_0 \times \vec{\beta} \right] - \\
&\quad - \frac{e}{c s^3} [(\vec{R}_0 \vec{\beta}') \vec{R}_0 \times \vec{\beta} + (R_0 - \vec{R}_0 \vec{\beta}) \vec{R}_0 \times \vec{\beta}'] = \\
&= -\frac{e}{s^3} (1 - \beta^2) \vec{R}_0 \times \vec{\beta} - \frac{e}{c s^3} [(\vec{R}_0 \vec{\beta}') \vec{R}_0 \times \vec{\beta} + (R_0 - \vec{R}_0 \vec{\beta}) \vec{R}_0 \times \vec{\beta}']. \quad (35)
\end{aligned}$$

Формулы для напряженностей довольно громоздки. Отметим важные их свойства. Во-первых, между напряженностями электрического и магнитного полей имеется простое соотношение

$$\vec{H} = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \times \vec{E}, \quad (36)$$

так что эти два вектора всегда перпендикулярны. Во-вторых, каждый из них состоит из двух частей, что явно отражено в выписанных формулах. Вторая часть обращается в нуль при $\vec{\beta}' = 0$, т. е. если заряд движется без ускорения. В-третьих, указанные слагаемые имеют разную скорость убывания с ростом расстояния от заряда до наблюдателя. Действительно, при $R_0 \rightarrow \infty$ и $s \sim R_0 \rightarrow \infty$ и, следовательно, первые слагаемые убывают как $1/R_0^2$, а вторые как $1/R_0$. Вследствие такого сравнительно медленного убывания вторых слагаемых и модуль вектора Пойнтинга, т. е. поток энергии электромагнитного поля, пропорциональный произведению напряженностей, убывает медленно, как $1/R_0^2$. Поэтому полный поток энергии поля через сферу радиуса R_0 остается постоянным, что интерпретируется как отрыв энергии от заряда и уход ее на бесконечность, т. е. излучение. Таким образом, можно сделать вывод, что только движущийся с ускорением заряд излучает.

3. *Условие Лоренца.* В заключение этого параграфа проверим, что потенциалы удовлетворяют условию Лоренца. Действительно,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} &= \frac{e}{c s^2} \frac{\partial s}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} - \frac{e}{s^2} \vec{\beta} \vec{\nabla} s + \frac{e}{s} \vec{\nabla} \vec{\beta} = -\frac{e}{c s^2} \left(-c \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + \right. \\
&\quad \left. + c\beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' \right) \frac{R_0}{s} - \frac{e \vec{\beta}}{s^2} \left[\frac{\vec{R}_0}{R_0} - \vec{\beta} - \left(-c \vec{\beta} \frac{\vec{R}_0}{R_0} + c\beta^2 - \vec{R}_0 \vec{\beta}' \right) \frac{\vec{R}_0}{c s} \right] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{e}{s}\vec{\beta}'\frac{\vec{R}_0}{cs} = \frac{e}{c}\left(\vec{R}_0\vec{\beta}' - c\beta^2 - c\frac{\vec{R}_0}{R_0}\vec{\beta}\right)\left(\frac{R_0}{s^3} - \frac{\vec{\beta}\vec{R}_0}{s^3} - \frac{1}{s^2}\right) = 0. \quad (37)$$

Обращение в нуль происходит за счет содержимого последних скобок по определению величины s .

Рассмотрим теперь подробнее части напряженностей, дающие излучение. Сначала выведем их более простым способом.

§ 3. Поле точечного заряда на больших расстояниях

1. *Направление и время на большом расстоянии от заряда.* Пусть заряд движется в некоторой ограниченной области размером a . Выберем в этой области фиксированную точку с радиусом-вектором \vec{r}_c . Вектор, идущий из этой точки к наблюдателю, обозначим

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_c. \quad (38)$$

Введем вектор смещения заряда от фиксированной точки

$$\vec{x} = \vec{x}(t_1) = \vec{r}_0(t_1) - \vec{r}_c = \vec{R}_0(t_1) - \vec{R}. \quad (39)$$

Ясно, что $|\vec{x}| \leq a$, и

$$\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{x}, \quad \vec{\beta} = \frac{1}{c}\vec{r}_0'(t_1) = \frac{1}{c}\vec{x}'(t_1), \quad \vec{\beta}'(t_1) = \frac{1}{c}\vec{r}_0''(t_1) = \frac{1}{c}\vec{x}''(t_1) = \frac{\vec{w}}{c}, \quad (40)$$

где $\vec{w} = \vec{w}(t_1)$ — вектор ускорения заряда.

Обозначим единичный вектор направления от той же точки к наблюдателю через

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}, \quad R = |\vec{R}|. \quad (41)$$

Будем считать, что размер области мал по сравнению с расстоянием до наблюдателя, т. е. $|\vec{x}| \leq a \ll R$. Это и означает, что наблюдатель находится на большом расстоянии от заряда. Тогда

$$R_0 = \sqrt{R^2 + \vec{x}^2 - 2\vec{R}\vec{x}} = R\sqrt{1 - 2\frac{\vec{x}}{R}\vec{n} + \left(\frac{\vec{x}}{R}\right)^2} \approx R\left[1 - \frac{\vec{x}}{R}\vec{n}\right] = R - \vec{x}\vec{n}. \quad (42)$$

Поэтому

$$\frac{\vec{R}_0}{R_0} = \frac{\vec{R} - \vec{x}}{R_0} \approx \vec{n}. \quad (43)$$

Можно ввести запаздывающее время T , не зависящее от положения заряда:

$$R = c(t - T). \quad (44)$$

Тогда из (25), (42) и (44) следует, что на далеких расстояниях

$$t_1 - \frac{1}{c} \vec{n} \vec{x} = T = t - \frac{R}{c}. \quad (45)$$

Время T течет так же, как и t , только со смещением на R/c . Из (45) вытекают как связь между временами t и t_1 , так и выражение для градиента t_1 . Действительно,

$$dt_1 (1 - \vec{n} \vec{\beta}) = dt, \quad \vec{\nabla} t_1 (1 - \vec{n} \vec{\beta}) = -\frac{\vec{n}}{c}, \quad (46)$$

откуда

$$\frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}}, \quad \frac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \vec{n} \vec{\beta}, \quad \vec{\nabla} t_1 = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}}. \quad (47)$$

2. *Потенциалы на больших расстояниях.* При выводе формул для частей напряженностей, определяющих излучение, достаточно ограничиться главными слагаемыми, убывающими как $1/R_0$ или, что то же самое, как $1/R$. Поэтому все слагаемые, убывающие быстрее, мы будем отбрасывать. В частности, в формулах (24) для потенциалов можно заменить \vec{R}_0 на \vec{R} и записать эти формулы в виде

$$\varphi = \frac{e}{R - \vec{R} \vec{\beta}}, \quad \vec{A} = \frac{e \vec{\beta}}{R - \vec{R} \vec{\beta}} \quad (48)$$

или

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}(t_1)}, \quad \vec{A}(t_1) = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}(t_1)}{1 - \vec{n} \vec{\beta}(t_1)}. \quad (49)$$

Теперь время t_1 в выражениях для потенциалов входит только через аргумент скорости $\vec{\beta}$. Заметим, что потенциалы связаны соотношением

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} + \vec{n} \vec{A}(t_1). \quad (50)$$

Еще одно упрощение заключается в следующем. При нахождении градиента уже не нужно дифференцировать по координатам

непосредственно, так как такое дифференцирование всегда увеличивает скорость убывания дифференцируемой функции с R . Действительно,

$$\vec{\nabla} r^\alpha = \alpha r^{\alpha-1} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (51)$$

Следовательно, при вычислении градиента достаточно находить производные по координатам только через время t_1 , т.е. можно принять

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \frac{\partial}{\partial t_1}. \quad (52)$$

Поэтому аргумент \vec{r} у потенциалов не указан.

3. *Дополнительные соотношения.* Приведенные упрощенные формулы взятия производных позволяют вывести еще некоторые соотношения между характеристиками поля. Например, комбинация (52) и (47) дает

$$\vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (53)$$

так что

$$\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (54)$$

Таким образом, достаточно найти производные от потенциалов по времени:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{n}\vec{\beta}'}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}, \quad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}'(1 - \vec{n}\vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n}\vec{\beta}')}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (55)$$

С помощью этих соотношений легко проверяется справедливость условия Лоренца:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0. \quad (56)$$

Заметим, что потенциалы в этом приближении, как и точные, составляют компоненты четырехмерного вектора:

$$\underline{A} = \frac{e}{R\beta} \underline{\beta}, \quad \underline{R} = \{R, \vec{R}\}, \quad \underline{\beta} = \{1, \vec{\beta}\} / \sqrt{1 - \vec{\beta}^2}. \quad (57)$$

4. *Напряженности.* Ввиду всех этих упрощений и напряженности на больших расстояниях находить значительно проще и поэтому мы приведем этот вывод независимо. Имеем

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{A} + \vec{n} \varphi) = \\ &= \frac{e}{Rc} \frac{1}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3} [-\vec{\beta}' (1 - \vec{n} \vec{\beta}) + (\vec{n} - \vec{\beta}) \vec{n} \vec{\beta}']. \quad (58)\end{aligned}$$

Аналогично

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{e \vec{n}}{Rc} \frac{1}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3} [\vec{\beta}' (1 - \vec{n} \vec{\beta}) + \vec{\beta} (\vec{n} \vec{\beta}')]. \quad (59)$$

Легко проверить, что формулу (58) можно переписать в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{cR} \frac{e \vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}']}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3}, \quad (60)$$

а соотношение (36) переходит в

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}. \quad (61)$$

Таким образом, три вектора \vec{n} , \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, т. е. на далеких расстояниях поле движущегося с ускорением точечного заряда представляет собой поперечную сферическую волну.

Заметим, что с помощью соотношений предыдущего пункта формулы для напряженностей могут быть записаны в таком виде, что в них будет входить только производная по времени наблюдателя от векторного потенциала:

$$\vec{E} = \vec{n} \times \left(\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad \vec{H} = -\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (62)$$

Такая форма этих выражений полезна при нахождении преобразований Фурье от напряженностей.

5. *Энергетика поля.* Найдем энергетические характеристики поля. Электрическая и магнитная части плотности энергии, как

легко видеть, равны. Поэтому плотность энергии электромагнитного поля равна $w = E^2/4\pi = H^2/4\pi$. Поток энергии, т. е. вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{E^2}{4\pi} c \vec{n} = w c \vec{n}. \quad (63)$$

Таким образом, вектор потока энергии равен произведению плотности энергии на скорость распространения поля, т. е. энергия только перетекает. Поэтому, как легко проверить, выполняется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} c \vec{n} = 0. \quad (64)$$

§ 4. Дипольное приближение

1. *Нерелятивистский заряд.* Сделаем еще одно предположение: пусть скорость заряда мала по сравнению со скоростью света, т. е. заряд нерелятивистский. Обозначим модуль его скорости через v . Тогда $v \ll c$. Это неравенство можно выразить в несколько другой форме. Заряд проходит область размером a за время a/v . Его излучение имеет примерно такой же период и, следовательно, частоту $\nu = v/c$ и длину волны $\lambda = c/\nu \sim ca/v$. Так как $v \ll c$, то $\lambda \gg a$. Таким образом, медленный заряд излучает на длине волны, значительно большей размера той области, в которой он движется.

Из соотношения (45), связывающего запаздывающие времена t_1 и T , видно, что разность между ними в случае медленного заряда значительно меньше, чем время, за которое заряд пересекает область: $a/c \ll a/v$. Поэтому изменение скорости заряда \vec{x}' за это время относительно мало и мы можем разложить ее по формуле Тейлора. Если удерживаются производные первого и второго порядков, то поле раскладывается на дипольную, квадрупольную и магнитно-дипольную составляющие. Здесь ограничимся дипольной компонентой поля.

В дипольном приближении в формуле Тейлора оставляется только самое первое слагаемое, т. е. различие между временами T и t_1 вообще пренебрегается. В этом случае

$$\varphi = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{x}'(t_1)/c} = \frac{e}{R} \left[1 + \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{x}}}{c} \right]. \quad (65)$$

Аналогично

$$\vec{A} = \frac{e}{Rc} \frac{\vec{x}'}{1 - \vec{n} \cdot \vec{x}'/c} = \frac{e}{Rc} \dot{\vec{x}}(T) \quad (66)$$

Формулы для напряженностей можно получить из общих формул (58) и (59), если пренебречь в них малой безразмерной скоростью $\vec{\beta}$:

$$\vec{E} = \frac{e}{Rc^2} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}') = \frac{e}{Rc^2} [\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\beta}') - \vec{\beta}'], \quad \vec{H} = \vec{n} \times \vec{E} = \frac{e}{Rc^2} \vec{\beta}' \times \vec{n}. \quad (67)$$

Эти формулы записывают еще в одном виде

$$\vec{H} = \frac{1}{Rc^2} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n}, \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}, \quad (68)$$

где $\vec{d} = e\vec{x}$ — дипольный момент заряда относительно точки \vec{r}_c .

2. *Формулы Лармора.* Найдем энергетические величины. Плотность энергии поля равна

$$w = \frac{1}{4\pi} E^2 = \frac{1}{4\pi} H^2 = \frac{1}{c^4 R^2} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2, \quad (69)$$

а вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{|\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2}{4\pi c^3 R^2} \vec{n} = w c \vec{n}. \quad (70)$$

Вектор Пойнтинга — это вектор потока энергии, т.е. величина, рассчитанная на единицу площади. Если находить количество энергии, которое идет в единицу телесного угла, то надо модуль (70) умножить на R^2 , т.е. это количество равно

$$\mathcal{W}(\Theta) = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \Theta, \quad (71)$$

где Θ — угол между дипольным моментом и направлением на наблюдателя. Поскольку дипольный момент равен произведению величины заряда на его ускорение, то формулу (71) можно переписать так:

$$\mathcal{W}(\Theta) = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{x}}|^2 \sin^2 \Theta. \quad (72)$$

Равенство (72) называется формулой Лармора. Распределение излучения по направлениям таково, что прямо вперед по второй

производной от дипольного момента и в обратном направлении оно отсутствует. Во всех других направлениях излучение примерно одинаково, максимально оно в перпендикулярном к ускорению направлении.

Легко найти полное излучение, т. е. идущее во все стороны. Для этого возьмем интеграл по всем направлениям, выбрав в качестве полярного угла Θ и приняв во внимание осевую симметрию излучения:

$$I = 2\pi \int_0^\pi \mathcal{W}(\Theta) \sin \Theta d\Theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\ddot{x}|^2 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \sin^2 \Theta = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\ddot{x}|^2. \quad (73)$$

Последняя формула дает полную мощность излучения заряда в дипольном приближении, т. е. количество энергии, которое он излучает в единицу времени во всех направлениях. Ее тоже называют формулой Лармора. Она широко применяется во всех случаях, когда можно заряд считать нерелятивистским и ограничиться дипольным приближением.

§ 5. Рассеяние излучения свободными зарядами

1. *Схема рассеяния.* Если на некоторую частицу падает электромагнитная волна из направления орта \vec{n}' , то частица может рассеять ее излучение в направление другого орта \vec{n} . Плоскость, содержащая эти орты, будем называть плоскостью рассеяния.

В классической электродинамике (см., например, [1]) рассеяние излучения зарядом интерпретируется следующим образом. На заряженную частицу падает плоская электромагнитная волна, под действием которой частица колеблется, т. е. движется с ускорением, и порождает электромагнитное поле. На больших расстояниях от частицы поле превращается в сферическую волну, которая и рассматривается как излучение, рассеянное заряженной частицей. Частота излучения при этом не изменяется, изменяется только направление волны. Такое рассеяние называется томсоновским.

Рассеяние может произойти или не произойти, нужно найти вероятность его осуществления.

Угол γ между направлениями падающей и рассеянной волн называется углом рассеяния, косинус угла рассеяния $\cos \gamma = \vec{n}\vec{n}' = \mu$. Теория должна ответить на вопрос: если рассеяние происходит,

то с какой вероятностью оно происходит на определенный угол в единицу телесного угла?

Падающая волна может быть поляризована, при рассеянии происходит изменение состояния поляризации. Еще один вопрос: как при рассеянии преобразуются параметры, характеризующие состояние поляризации?

В этом параграфе даются ответы на эти вопросы для случая, когда рассматривается рассеяние излучения свободными зарядами. Сначала надо ввести характеристики поляризации волн.

2. *Поляризационные базисы.* Для описания состояния поляризации волн построим два поляризационных базиса на векторах \vec{n} и \vec{n}' , причем один из векторов каждого базиса сделаем перпендикулярным плоскости рассеяния.

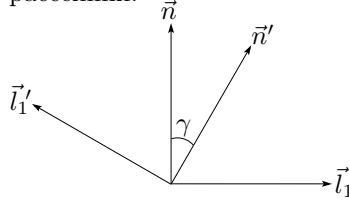


Рис. 24: Орты в плоскости рассеяния.

Поляризационные орты базисов для рассеянного и падающего излучения представляются аналогичными формулами:

$$\vec{l}_1 = \frac{\vec{n}' - \mu\vec{n}}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{l}_2 = \frac{\vec{n} \times \vec{n}'}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{l}_1' = \frac{\vec{n} - \mu\vec{n}'}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{l}_2' = \frac{\vec{n}' \times \vec{n}}{\sqrt{1 - \mu^2}}. \quad (74)$$

Единичные векторы двух базисов связаны следующими простыми соотношениями:

$$\vec{l}_1 = \sqrt{1 - \mu^2}\vec{n}' - \mu\vec{l}_1', \quad \vec{l}_1' = \sqrt{1 - \mu^2}\vec{n} - \mu\vec{l}_1, \quad \vec{l}_2' = -\vec{l}_2. \quad (75)$$

На рис. 24 изображены орты в плоскости рассеяния. Орт \vec{l}_2' смотрит в сторону читателя, орт \vec{l}_2 от него.

Напряженности электрического поля падающей и рассеянной волн перпендикулярны направлению распространения своей волны. Пусть векторы напряженности рассеянной и падающей волн в принятых базисах задаются одинаковыми формулами:

$$\vec{E} = E_1\vec{l}_1 + E_2\vec{l}_2, \quad \vec{E}' = E_1'\vec{l}_1' + E_2'\vec{l}_2'. \quad (76)$$

Получим связь между падающей и рассеянной волнами. Для этого найдем, как движется заряд под действием падающей волны.

3. *Движение заряда.* Чтобы определить характер движения заряда в поле волны, надо составить уравнение его движения, исходя из общего уравнения (2.146).

Сделаем предположение, что амплитуда падающей волны не очень велика, так что частица в ее поле не достигает релятивистских скоростей и не очень далеко отклоняется от положения равновесия. Поэтому можно считать, что на протяжении траектории частицы амплитуда падающей волны не зависит от пространственных координат в данный момент. Ввиду нерелятивистской скорости частицы не учитываем магнитной составляющей силы Лоренца.

В результате таких предположений уравнение движения заряженной частицы получает вид

$$m\ddot{\vec{x}} = -e\vec{E}', \quad \vec{E}' = \vec{E}_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (77)$$

где m и $-e$ — масса и заряд частицы, \vec{E}_0 — постоянный вектор, а \vec{x} — вектор отклонения частицы от положения равновесия. Отсюда ускорение частицы

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{e}{m}\vec{E}'. \quad (78)$$

4. *Создаваемое поле.* В дипольном приближении на больших расстояниях R от частицы согласно формуле (67) создается поле напряженностью

$$\vec{E} = -\frac{e}{c^2 R} \vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{x}}). \quad (79)$$

Подставив сюда выражение ускорения через напряженность падающей волны, получим

$$\vec{E} = \frac{r_e}{R} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}'), \quad (80)$$

где $r_e = e^2/mc^2$ — так называемый классический радиус заряда. Поскольку наименьшую массу при единичном заряде имеет электрон, наиболее эффективно из всех элементарных частиц рассеивает излучение именно электрон (наряду с позитроном, который в природе встречается в очень малых количествах).

5. *Преобразование напряженности.* Для определения связи между напряженностями рассеянной и падающей волн найдем, как

преобразуются орты базиса падающей волны в соответствии с формулой (80):

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{l}'_1) = \vec{n} \times (-\mu \vec{l}_2) = \mu \vec{l}_1, \quad \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{l}'_2) = -\vec{l}'_2 = \vec{l}_2. \quad (81)$$

Тогда компоненты напряженности рассеянной волны выразятся через составляющие напряженности падающей так:

$$\vec{E} = \frac{r_e}{R} (\mu E'_1 \vec{l}_1 + E'_2 \vec{l}_2). \quad (82)$$

Представим, как обычно при рассмотрении поляризации, векторы напряженностей (76) в виде столбцов. Тогда сравнив равенства (76) и (82), можем записать

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \frac{r_e}{R} \check{A} \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix}, \quad \check{A}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Здесь каждый вектор относится к своему базису, но их базисы связаны между собой. Матрица рассеяния составляется именно при таком условии. Тогда она имеет наиболее простой вид: составляющая напряженности электрического поля, перпендикулярная плоскости рассеяния, остается неизменной (если отвлечься от множителя r_e/R), в то время как составляющая, лежащая в этой плоскости, умножается на косинус угла рассеяния.

Теперь перейдем от напряженностей к поляризационным матрицам и выведем матрицу томсоновского рассеяния.

6. *Матрица томсоновского рассеяния.* Матрица рассеянного излучения выразится через матрицу падающего:

$$\check{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \vec{E}^\dagger = \frac{c}{8\pi} \frac{r_e^2}{R^2} \check{A} \vec{E}' (\vec{E}')^\dagger \check{A} = \frac{r_e^2}{R^2} \check{A} \check{S}' \check{A}. \quad (84)$$

Если сделать следующий шаг и от поляризационных матриц перейти к параметрам Стокса, то получится соотношение, связывающее векторы Стокса:

$$\vec{I} = \frac{r_e^2}{R^2} \hat{\mathcal{R}}(\mu) \vec{I}'. \quad (85)$$

Более подробно

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{r_e^2}{R^2} \begin{pmatrix} \frac{\mu^2 + 1}{2} & \frac{\mu^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu^2 - 1}{2} & \frac{\mu^2 + 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Матрица рассеяния свободными зарядами совпадает с матрицей молекулярного рассеяния и называется релеевской.

На больших расстояниях R сферическая волна мало отличается от плоской, величина R изменяется медленно и может считаться постоянной.

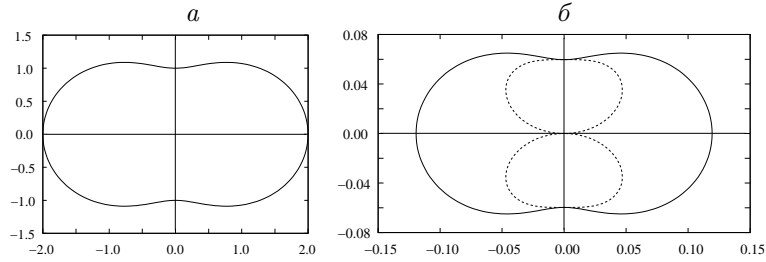


Рис. 25: Релеевская индикатриса.
а: $1 + \cos^2 \gamma$, б: $\chi(\gamma)/4\pi$ и $\chi(\gamma) \sin \gamma/(4\pi)$.

Параметры U и V в принятых базисах с точностью до множителя r_e^2/R^2 просто умножаются на косинус угла рассеяния. Два других параметра преобразуются совместно. В частности, рассеяние даже неполяризованной волны, когда все параметры падающей волны кроме интенсивности равны нулю, создает поляризацию.

7. *Сечение и индикатриса рассеяния.* Процессы рассеяния характеризуются сечениями. Элемент матрицы, расположенный в ее левом верхнем углу, если его умножить на R^2 , представляет собой так называемое дифференциальное сечения рассеяния

$$\varsigma(\mu) = \frac{r_e^2}{2}(\mu^2 + 1). \quad (87)$$

Полное сечение, т. е. проинтегрированное по всем направлениям, выражается через классический радиус электрона и называется томсоновским [1]:

$$\varsigma_T = \int d^2 n \varsigma(\mu) = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (88)$$

Если в единице объема находится n_e электронов (эта величина называется их концентрацией), то произведение $n_e \varsigma_T ds$ равно вероятности того, что на пути ds излучение испытает томсоновское рассеяние, т. е. его часть изменит свое направление. Если поток энергии в этом направлении был S , то его относительная убыль составит $dS/S = -\sigma ds$, где $\sigma = n_e \varsigma_T$. Если начальный поток S_0 , то

после прохождения пути s от него останется $S = S_0 e^{-\sigma s}$. При рассуждении об одном фотоне следует сказать, что вероятность его сохранения $e^{-\sigma s}$. Напротив, вероятность того, что фотон выпадет из пучка на пути s равна $F(s) = 1 - e^{-\sigma s}$, что может рассматриваться как интегральная функция распределения вероятностей. Дифференциальная функция $f(s) = \sigma e^{-\sigma s}$. Можно найти, например, средний путь, проходимый фотоном без рассеяния (средний свободный пробег). Это математическое ожидание

$$\bar{s} = \int_0^{\infty} s \sigma e^{-\sigma s} ds = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n_e \varsigma_T}. \quad (89)$$

Частное

$$\frac{\varsigma(\mu)}{\varsigma_T} = \frac{3}{16\pi}(\mu^2 + 1) = \frac{3}{16\pi}(\cos^2 \gamma + 1) = \frac{1}{4\pi} \chi(\gamma) \quad (90)$$

совпадает с деленной на 4π релеевской индикатрисой рассеяния

$$\chi(\gamma) = (3/4)(1 + \cos^2 \gamma), \quad (91)$$

которая описывает рассеяние излучения на молекулах. Произведение

$$\chi(\gamma) \frac{d^2 n}{4\pi} = \frac{3}{16\pi}(\cos^2 \gamma + 1) \sin \gamma d\gamma d\varphi \quad (92)$$

равно вероятности того, что при рассеянии излучение отклонится на угол γ и попадет в телесный угол $d^2 n$. Понятно, что интеграл от этой вероятности по направлениям равен 1.

Зависимость релеевской индикатрисы от полярного угла характеризуется рис. 25. На рис. 25а изображена полярная диаграмма $1 + \cos^2 \gamma$, а на рис. 25б кривая $\chi(\gamma)/(4\pi)$ и внутри нее произведение $\sin \gamma \chi(\gamma)/(4\pi)$. Точнее, это сечения пространственных фигур, которые из приведенных получаются вращением вокруг оси абсцисс, вдоль которой летел падающий фотон и рассеялся в начале координат. Азимут рассчитывается в плоскости yz .

В заключение параграфа приведем численные значения. Классический радиус электрона $r_e = 2.8 \cdot 10^{-13}$ см, а полное томсоновское сечение $\varsigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25}$ см², что в $8/3$ раз больше, чем классическое геометрическое сечение πr_e^2 .

§ 6. Излучение быстрых зарядов

1. *Полное излучение.* Самый простой способ найти полное излучение релятивистского заряда — это использовать релятивистские соображения, аналогичные тем, с помощью которых были получены формулы для потенциалов точечного движущегося заряда.

Должны выполняться два требования по отношению к искомым формулам. Они должны быть релятивистски ковариантны и оставаться правильными при переходе к нерелятивистскому пределу. Поэтому напишем два столбца формул, нерелятивистские и релятивистские, заполняя сначала левый сверху вниз, а затем правый снизу вверх.

$$\begin{array}{l}
 \text{Нерелятивистский заряд} \\
 d\underline{x} = \{cdt, 0\}, \\
 d\underline{P} = \{dP_0, 0\} = I \left\{ \frac{dt}{c}, 0 \right\} = \\
 = \frac{I}{c^2} \{cdt, 0\} = \frac{I}{c^2} d\underline{x}, \\
 I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2,
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \text{Релятивистский заряд} \\
 d\underline{x} = \{cdt_1, d\vec{x}(t_1)\}, \\
 d\underline{P} = \{dP_0, \vec{P}\} = I \left\{ \frac{dt_1}{c}, \frac{d\vec{x}(t_1)}{c^2} \right\} = \\
 = \frac{I}{c^2} \{cdt_1, d\vec{x}(t_1)\} = \frac{I}{c^2} d\underline{x}(t_1), \\
 I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (-w^2).
 \end{array}
 \right.
 \tag{93}$$

Нерелятивистский заряд излучает энергию и мощность его полного (во все стороны) излучения дается формулой Лармора. Но в релятивистских обозначениях надо писать не отдельно энергию и время, а целиком четырехмерные векторы энергии-импульса и положения, точнее их дифференциалы. Малыми скоростями заряда пренебрегаем. В релятивистском случае нулевые пространственные составляющие векторов заменяем на конечные. Тем самым получают правильные релятивистские формулы. Используется время t_1 , так как излучение относится к заряду. Через w обозначено ускорение заряда (а не плотность излучения).

Из полученных формул следует, что релятивистский заряд излучает не только энергию, но и импульс, т. е. оторвавшееся от него электромагнитное поле уносит с собой и энергию и импульс. Сферическая расходящаяся волна расширяется со скоростью света, но еще и ее центр смещается со сравнимой скоростью.

Мощность излучения I оказывается коэффициентом пропорциональности между векторами энергии-импульса и смещения заряда. Квадрат ускорения естественно заменяется на квадрат четырехмерного ускорения. Знак минус берется потому, что вектор

ускорения пространственно подобен и в нерелятивистском пределе его квадрат переходит в $-w^2$. Вспоминая выражение для этого квадрата (2.59), можно написать

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2] = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 w^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha), \quad (94)$$

где α обозначен угол между векторами $\vec{\beta}$ и \vec{w} .

2. *Сравнение эффективности излучения.* Обычно рассматриваются два крайних случая взаимного расположения векторов скорости и ускорения: когда они параллельны или перпендикулярны. В первом случае заряд совершает мгновенное движение по прямой, во втором — мгновенное движение по окружности. Соответственно мощность излучения

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \begin{cases} \gamma^6 w^2, & \vec{\beta} \parallel \vec{w}, \\ \gamma^4 w^2, & \vec{\beta} \perp \vec{w}. \end{cases} \quad (95)$$

Пусть на заряд действует некоторая сила, благодаря которой он движется. Эта сила равна производной от его импульса:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \vec{v} \gamma). \quad (96)$$

Производная от лоренцевского множителя

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \beta \gamma^3 \vec{v} \vec{w} / (\beta c) = \gamma^3 \vec{v} \vec{w} / c, \quad (97)$$

так что

$$\vec{F} = m\gamma \vec{w} + m\gamma^3 \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{w}) = m\gamma w \left[\frac{\vec{w}}{w} + \gamma^2 \beta^2 \frac{\vec{\beta}}{\beta} \left(\frac{\vec{\beta} \vec{w}}{\beta w} \right) \right]. \quad (98)$$

В двух наших крайних случаях:

$$\vec{F} = m\gamma \vec{w} \begin{cases} \gamma^2, & \vec{\beta} \parallel \vec{w}, \\ 1, & \vec{\beta} \perp \vec{w}. \end{cases} \quad (99)$$

Сравнение (95) и (99) дает соотношения

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} |\vec{F}|^2 \begin{cases} 1, & \vec{\beta} \parallel \vec{w}, \\ \gamma^2, & \vec{\beta} \perp \vec{w}. \end{cases} \quad (100)$$

Наряду с крайними случаями расположения скорости и ускорения представляют очевидный интерес и предельные случаи нерелятивистского и ультрарелятивистского зарядов. Когда скорость заряда невелика, множитель γ порядка 1 и случаи соотношений в (100) ничем не различаются. Если же скорость заряда близка к скорости света, т. е. $\beta \approx 1$ (тогда $\gamma \gg 1$), различие велико. Если сила, действующая на заряд имеет примерно равные составляющие вдоль скорости и перпендикулярно ей, то излучение происходит так, как если бы заряд двигался в направлении, перпендикулярном скорости. Следовательно, основное излучение ультрарелятивистского заряда происходит за счет мгновенного движения по окружности.

Теперь рассмотрим, как это излучение распределено по направлениям.

3. *Угловое распределение.* Запишем формулу для напряженности электрической составляющей излучаемого зарядом поля

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (101)$$

Количество лучистой энергии, излучаемое в направлении \vec{n} в телесном угле d^2n в единицу времени t , равно

$$dI_*(\vec{n}) = \mathcal{W}_* d^2n = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d^2n = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]|^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^6} d^2n. \quad (102)$$

Чтобы отсюда получить выражение для полного излучения, найденного в пункте 1, необходимо проинтегрировать по всем направлениям на наблюдателя \vec{n} , закрепив при этом вектор скорости $\vec{\beta}(t_1)$, а значит момент времени t_1 . В разных направлениях \vec{n} этому времени будут соответствовать различные моменты времени наблюдения t на одном и том же расстоянии R или разные расстояния R при одном t . Если закрепляется время t_1 , то и мощность излучения надо рассчитывать на единицу времени t_1 .

Мощность же излучения \mathcal{W}_* рассчитана на единицу времени наблюдателя t . Для пересчета на мощность по отношению ко времени излучающего заряда t_1 величину \mathcal{W}_* следует умножить на производную $\partial t / \partial t_1 = 1 - \vec{n}\vec{\beta}$. Тогда мощность в расчете на единицу времени заряда и единицу телесного угла будет

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = (1 - \vec{n}\vec{\beta}) \mathcal{W}_* = \frac{c}{4\pi} R^2 |\vec{E}|^2 (1 - \vec{n}\vec{\beta}) =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1-\vec{n}\vec{\beta}) - (1-\beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^5}. \quad (103)$$

Построим на векторах $\vec{\beta}$ и \vec{w} (α — угол между ними) базис (см. Приложение 5) с ортами

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{w}/w - \cos \alpha \vec{\beta}/\beta}{\sin \alpha}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_2(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{\beta} \times \vec{w}}{\beta w \sin \alpha}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{\beta}}{\beta}. \quad (104)$$

Тогда

$$\vec{\beta} = \beta \vec{e}_3, \quad \vec{w} = w(\sin \alpha \vec{e}_1 + \cos \alpha \vec{e}_3). \quad (105)$$

Разложим и вектор направления излучения по этим ортам:

$$\vec{n} = \sin \theta (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) + \cos \theta \vec{e}_3. \quad (106)$$

Тогда

$$\vec{\beta}\vec{n} = \beta \cos \theta, \quad \vec{\beta}\vec{w} = \beta w \cos \alpha, \quad \vec{n}\vec{w} = w\mu, \quad \mu = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi. \quad (107)$$

Подставив эти скалярные произведения в формулу (103), получим зависимость интенсивности от полярных углов, определяющих направление излучения: $dI(\vec{n}) = \mathcal{W}(\vec{n})d^2n$, где

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \left[\frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^3} + 2 \frac{\beta \cos \alpha}{(1-\beta \cos \theta)^4} \mu - \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \theta)^5} \mu^2 \right]. \quad (108)$$

4. *Связь с полным излучением.* Проинтегрировав выражение (108) по направлениям, мы получим полную интенсивность (94). Для проверки этого используем значения интегралов (П6.135)

Для интеграла от выражения в квадратных скобках находим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[\frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^3} + 2 \frac{\beta \cos \alpha}{(1-\beta \cos \theta)^4} \mu - \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \theta)^5} \mu^2 \right] = \\ & = 2\pi \int_{-1}^1 d\eta \left[\frac{1}{(1-\beta\eta)^3} + \frac{2\beta \cos^2 \alpha}{(1-\beta\eta)^4} \eta - \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\eta)^5} \left(\eta^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \frac{1-\eta^2}{2} \right) \right] = \\ & = 2\pi \left[I_{03} + 2\beta \cos^2 \alpha I_{14} - \frac{\cos^2 \alpha}{\gamma^2} I_{25} - \frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \frac{I_{05} - I_{25}}{2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \left[\gamma^4 + \frac{8}{3} \cos^2 \alpha \beta^2 \gamma^6 - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha \gamma^6 (1 + 5\beta^2) - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \gamma^4 \right] = \\
&= \frac{8\pi}{3} (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha) \gamma^6. \quad (109)
\end{aligned}$$

Умножив этот интеграл на дробь $e^2 w^2 / 4\pi c^3$, получим выражение для I , совпадающее с найденным из релятивистских соображений (94), т. е.

$$\int dI(\vec{n}) = \int \mathcal{W}(\vec{n}) d^2 n = I. \quad (110)$$

Установим еще одно соотношение, а именно покажем, что

$$\int \vec{n} dI(\vec{n}) d^2 n = \int d^2 n \mathcal{W}(\vec{n}) \vec{n} = \vec{\beta} I. \quad (111)$$

Для этого надо вычислить три интеграла — от трех составляющих вектора \vec{n} , причем эти составляющие умножаются на то же выражение, которое стоит в квадратных скобках в (109). Очевидно, что интеграл от проекции \vec{n} на орт \vec{e}_2 , содержащей $\sin \phi$, равен нулю. Точно так же равен нулю и интеграл от составляющей по \vec{e}_1 . Действительно,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \left[\frac{1}{(1-\beta \cos \theta)^3} + \frac{2\mu\beta \cos \alpha}{(1-\beta \cos \theta)^4} - \frac{(1-\beta^2)\mu^2}{(1-\beta \cos \theta)^5} \right] = \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 d\eta (1-\eta^2) \left[\frac{\beta \cos \alpha \sin \alpha}{(1-\beta \cos \theta)^4} - \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \theta)^5} \eta \cos \alpha \sin \alpha \right] = \\
&= 2\pi \cos \alpha \sin \alpha \int_{-1}^1 \frac{1-\eta^2}{(1-\beta\eta)^5} (\beta - \eta) d\eta = \\
&2\pi \cos \alpha \sin \alpha [\beta(I_{05} - I_{25}) - (I_{15} - I_{35})] = 0. \quad (112)
\end{aligned}$$

Наконец, третий интеграл, единственный отличный от нуля, не содержит функций от ϕ и отличается от (109) только лишним множителем $\cos \theta = \eta$. Поэтому он имеет тот же вид, что и (109), но первый индекс у интегралов $I_{m n}$ у него на единицу больше:

$$\int d^2 n \mathcal{W} \cos \theta = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} 2\pi \left[I_{13} + 2\beta \cos^2 \alpha I_{24} - \frac{\cos^2 \alpha}{\gamma^2} I_{35} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sin^2 \alpha}{\gamma^2} \frac{I_{15} - I_{35}}{2} \Big] = \frac{e^2 w^2}{2c^3} [2\beta\gamma^4 + 2\beta \cos^2 \alpha \frac{2}{3} \gamma^6 (1+3\beta^2) - \\
& - 2\beta \cos^2 \alpha \gamma^6 (1+\beta^2) - \sin^2 \alpha \frac{2}{3} \beta \gamma^6] = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2 \beta \gamma^6 (1-\beta^2) = \beta I. \quad (113)
\end{aligned}$$

Таким образом, равенство (111) доказано.

5. *Излучаемый импульс.* Доказанные формулы (110) и (111) позволяют записать формулу для импульса, уносимого излучаемым зарядом полем, в следующем виде:

$$d\underline{P} = \frac{I}{c^2} d\underline{x}(t_1) = \frac{I}{c^2} \{c dt_1, d\vec{x}(t_1)\} = \frac{I}{c} dt_1 \{1, \vec{\beta}(t_1)\} = \frac{dt_1}{c} \int \mathcal{W} d^2 n \{1, \vec{n}\}. \quad (114)$$

Можно проверить прямой выкладкой релятивистскую ковариантность этой формулы. Но можно продемонстрировать ее явно, если ввести четырехмерные векторы мгновенной безразмерной скорости и мгновенного ускорения

$$\underline{\beta}(t_1) = \gamma(t_1) \{1, \vec{\beta}(t_1)\}, \quad \underline{w}(t_1) = \gamma^2 \{ \gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma^2 (\vec{\beta} \vec{w}) \vec{\beta} \}, \quad (115)$$

а также волновой вектор излучаемого поля

$$\underline{x} = \varkappa \{1, \vec{n}\}, \quad (116)$$

выбрав какую-нибудь величину волнового числа \varkappa . Поскольку все частоты (или волновые числа, или модули импульсов) фотонов преобразуются одинаково, так как различаются на множители, которые не зависят от исходной частоты, то безразлично, какую величину \varkappa взять.

Тогда легко показать, что формула (114) может быть записана так:

$$d\underline{P} = -\frac{e^2}{4\pi c^3} d\tau_1 \int \frac{(\varkappa \underline{\beta})^2 w^2 + (\varkappa w)^2}{(\varkappa \underline{\beta})^5} \varkappa^2 d^2 n \underline{x}. \quad (117)$$

Сюда входят инвариантные величины: дифференциал собственного времени заряда в данный момент $d\tau_1 = dt_1/\gamma$, инвариант $\varkappa^2 d^2 n$ и дробь, содержащая только скалярные произведения четырехмерных векторов, а также вектор \underline{x} . Введенная для удобства и наглядности величина \varkappa входит в одной и той же степени в числитель и знаменатель подинтегрального выражения и сокращается.

Таким образом, мощность излучения в единицу телесного угла можно представить в виде множителя, который входит в инвариантное выражение

$$dP = dt_1 \int d^2n \mathcal{W}\{1, 0\}, \quad \mathcal{W} = -\frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\varkappa^3}{\gamma} \frac{(\underline{\varkappa}\underline{\beta})^2 \underline{w}^2 + (\underline{\varkappa}\underline{w})^2}{(\underline{\varkappa}\underline{\beta})^5}. \quad (118)$$

При мгновенной остановке заряда или при переводе в его мгновенную собственную систему отсчета, где $\underline{\beta} = 0$, будет $\underline{w}^2 = -w^2$, $\varkappa = \varkappa_0$, $\underline{\varkappa}\underline{\beta} = \varkappa_0$, $\underline{\varkappa}\underline{w} = -\varkappa_0 \vec{n} \vec{w}$ и формула (118) для \mathcal{W} перейдет в формулу Лармора (72).

6. *Движение по прямой.* Рассмотрим этот случай подробнее, так как для него формулы получаются проще и нагляднее. При $\vec{\beta} \parallel \vec{w}$

$$\mathcal{W} = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (119)$$

Поскольку на концах промежутка изменения угла θ неотрицательная функция \mathcal{W} обращается в нуль, внутри она должна иметь максимум. Действительно, он достигается при

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta} = \frac{5\beta}{\sqrt{1 + 15\beta^2} + 1}, \quad (120)$$

$$\sin \theta_{\max} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{1 + 3\beta^2 + \sqrt{1 + 15\beta^2}}}. \quad (121)$$

При малых скоростях последний знаменатель в (119) можно заменить единицей. Тогда распределение излучения по направлениям описывается простым множителем $\sin^2 \theta$ (ясно, что при этом нет зависимости от азимута). Прямо вперед и назад излучения нет, а во всех других направлениях оно примерно одинаково. Максимум достигается при $\theta = \pi/2$.

Если заряд ультрарелятивистский, то характер излучения совсем другой. Разность в скобках в знаменателе $1 - \beta \cos \theta$ в (119) при близких к единице β близка к единице при всех углах, кроме малых. Если же $0 < \theta \ll 1$, то знаменатель близок к нулю и дробь становится очень большой. Продемонстрируем это количественно.

При малых углах и скоростях, близких к скорости света, указанную разность можно преобразовать, как это делалось в (2.81):

$$1 - \beta \cos \theta = 1 - \beta + \beta(1 - \cos \theta) = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} + 2\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} \sim \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}. \quad (122)$$

Подставив ее в (119) и заменив синус на угол, получим

$$\mathcal{W} \sim \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \theta^2 \left(\frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right)^5 = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 2^5 \gamma^8 \frac{u}{(1+u)^5}, \quad u = (\theta\gamma)^2. \quad (123)$$

Таким образом, в существенной части мощность излучения зависит от произведения $\theta\gamma$. В частности, максимум эта мощность достигает при $u = 1/4$, т. е. $\theta_{\max} = 1/(2\gamma)$, что согласуется с (120). Максимальное значение дроби $u/(1+u)^5$ равно $2^8/5^5$. Значение, равное половине максимального, мощность принимает при двух корнях уравнения $u/(1+u)^5 = 2^7/5^5$. Эти корни $u = 0.0530368616763$ и $u = 0.8216533474857$. Значения соответствующих им углов $\theta = 0.2302973331941/\gamma$ и $\theta = 0.9064509625378/\gamma$.

На рис. 26а приведены полярные диаграммы безразмерных множителей $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$, определяющих направленность излучаемой зарядом энергии (119), при $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$. Соответствующие значения $\gamma = 1, 1.154, 1.167, 2.294, 3.203, 5.025$. Диаграммы с ростом β становятся все более узкими и вытянутыми. Множители $32\gamma^8$ для выбранных значений β равны соответственно 32, 101, $1.91 \cdot 10^3$, $2.46 \cdot 10^4$, $3.54 \cdot 10^5$, $1.30 \cdot 10^7$. Они введены (в знаменатель) для возможности помещения кривых на один график. Без этих множителей реальная вытянутость кривых с приближением β к единице растет катастрофически. На рис. 26б значения тех же функций отложены в зависимости от аргумента $u = (\theta\gamma)^2$. Бóльшим значениям β соответствуют бóльшие величины максимумов. Там же помещена и предельная кривая $u/(1+u)^5$, отвечающая $\beta = 1, \gamma = \infty$. Видно, как кривые с приближением β к 1 приближаются к своей предельной кривой, причем значительная близость достигается уже при не очень больших γ .

Хотя точная функция распределения излучения по направлениям заменена на приближенную, ошибка при больших γ невелика. Так, полная интенсивность, находимая по точной и по приближенной формулам, если во второй продолжить интегрирование по углу

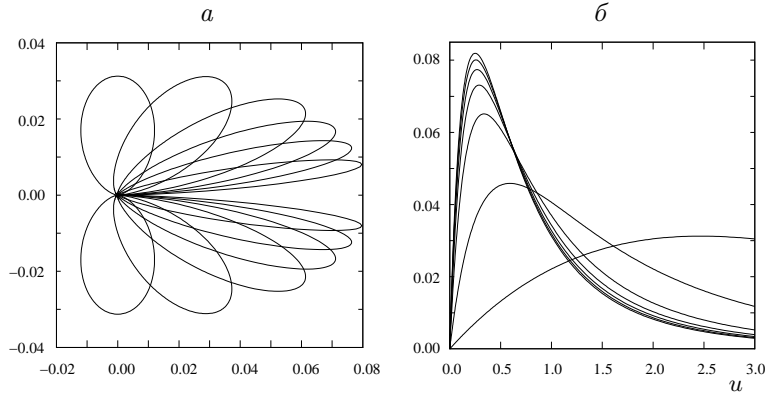


Рис. 26: Вытянутость вперед при различных γ .

а. Отношения $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$ при $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95$ и 0.98 в полярных координатах. б. Те же величины в зависимости от $u = (\theta\gamma)^2$ и предел при $\beta \rightarrow 1.0$.

до бесконечности, получается одной и той же:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \int_{-1}^1 \frac{1 - \eta^2}{(1 - \beta\eta)^5} d\eta = I_{05} - I_{25} = \frac{4}{3}\gamma^6, \quad (124)$$

$$2^5 \gamma^{10} \int_0^\infty \frac{\theta^3 d\theta}{(1 + \theta^2 \gamma^2)^5} = 2^5 \gamma^6 I_{235} = \frac{4}{3}\gamma^6. \quad (125)$$

Здесь использованы интегралы с двумя и тремя индексами Приложения 6.

Тот же порядок, что и угол максимальной мощности излучения, имеют средние степени угла, взвешенные по распределению интенсивности:

$$\begin{aligned} \langle \theta^\alpha \rangle \gamma^\alpha &= \frac{3}{4\gamma^6} 2^5 \gamma^{10} \int_0^\infty \frac{\theta^{\alpha+3} d\theta}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} = 24 I_{2\alpha+35} = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(3 - \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha/2)}. \end{aligned} \quad (126)$$

Средние имеют смысл при $-4 < \alpha < 6$. В частности, средний угол

и средний квадрат угла

$$\langle \theta \rangle = \frac{9\pi}{32} \frac{1}{\gamma} = \frac{0.8835729338221}{\gamma}, \quad \langle \theta^2 \rangle = \frac{24}{\gamma^2} I_{2.55} = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (127)$$

Соответственно дисперсия и стандарт равны

$$D\theta = \frac{0.219298870617}{\gamma^2}, \quad \sqrt{D\theta} = \frac{0.4682935731109}{\gamma}. \quad (128)$$

Таким образом, излучение ультрарелятивистского заряда, который движется мгновенно по прямой, сосредоточено в узком конусе с углом раствора порядка $1/\gamma$ в сторону его движения, хотя прямо по направлению этого движения излучения нет.

Случай движения заряда по окружности заслуживает отдельного рассмотрения, которое будет осуществлено в разделе, посвященном магнитотормозному механизму излучения.

§ 7. Торможение излучением

1. *Самодействие зарядов.* Всякий заряд порождает электромагнитное поле. Соответствующие формулы были выведены в Главе 3 и в начале этой главы. Созданное зарядом поле должно на него же воздействовать. Такое воздействие с трудом описывается в рамках классической электродинамики.

Уже в случае неподвижного точечного заряда возникают существенные трудности. Заряд q_0 , находящийся в начале координат, создает поле с потенциалом и напряженностью

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q_0}{r}, \quad \vec{E} = \frac{q_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (129)$$

где \vec{r} — радиус-вектор, исходящий из заряда. На другой заряд q , помещенный в точку \vec{r} , первый воздействует согласно закону Кулона с силой

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{q_0q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (130)$$

Заряд q в поле заряда q_0 имеет (потенциальную) энергию $q\varphi(\vec{r}) = q_0q/r$. Действительно, работа силы (130) по отношению к заряду q на пути $d\vec{r} = \vec{n}dr$ равна $dR = q_0q\vec{r}\vec{n}dr/r^3$, а от точки \vec{r} на бесконечность

$$R = q_0q \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_0q}{r}, \quad (131)$$

где было принято $\vec{n}\vec{r}/r = 1$, так как работа не зависит от конкретного пути движения заряда. Энергия W равна этой работе с противоположным знаком: $W = -R = q_0q/r$. Иногда формулу для энергии используют для определения потенциала.

Если заряд распределен в объеме \mathcal{V} с плотностью $\rho(\vec{r})$, то потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (132)$$

а энергия такого распределения

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \varphi(\vec{r})\rho(\vec{r})d^3r = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})d^3r \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (133)$$

Половина введена для того, чтобы взаимное воздействие частей заряда не учитывать дважды.

Если заряд точечный, т. е. $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$, то согласно формуле (133) энергия

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (134)$$

т. е. бесконечна. Этот бессмысленный результат означает, что классическая электродинамика не может описать воздействие точечного заряда на самого себя и поэтому на очень малых расстояниях неприменима. В частности, невозможно рассматривать электрон как точечную частицу. Однако, если считать электрон не точечным, то возникают проблемы со стороны теории относительности. При рассмотрении рассеяния свободными зарядами появился классический радиус электрона $r_e = 2.8 \cdot 10^{-13}$ см. Следовательно, на расстояниях меньших этого классическую электродинамику применять нельзя. На самом деле нижняя граница возможных расстояний значительно больше, а именно, она равна радиусу первой боровской орбиты $a_0 \approx 0.5 \cdot 10^{-8}$ см, где вступают в силу эффекты квантовой механики.

2. *Сила реакции излучения нерелятивистского заряда.* Поле заряда, движущегося с ускорением, состоит из двух частей (формулы (34) и (35)). Первая имеет в знаменателе r^2 , так что убывает с расстоянием быстро. Однако, именно эта часть приводит к той же расходимости энергии, что и у точечного неподвижного заряда. Поэтому эту энергию просто отбрасывают.

Вторая часть поля убывает медленнее, как $1/r$, поэтому энергия уходит на бесконечность, т. е. излучаются электромагнитные волны. Следовательно, заряд свою энергию теряет. Эту потерю интерпретируют так, что как будто на заряд действует какая-то тормозящая сила. Можно подобрать такую силу, чтобы ее воздействие было эквивалентно потерям заряда на излучение. Обратимся сначала к случаю нерелятивистского движения заряда.

Полная мощность, излучаемая нерелятивистским зарядом e во всех направлениях, согласно формуле (73) пропорциональна квадрату ускорения заряда, определяемому уравнением его движения:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2, \quad m\vec{w} = \vec{F}. \quad (135)$$

Возможны два различных случая движения: инфинитное и периодическое. Начнем с первого. Вычислим излучение за все время движения. Для этого найдем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{w}) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} \frac{d\vec{w}}{dt} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} \frac{d\vec{w}}{dt} dt, \quad (136)$$

так как интеграл от полной производной равен $\vec{v}\vec{w}|_{-\infty}^{\infty} = 0$.

Теперь приравняем полную энергию, теряемую зарядом за все время движения, работе некоторой силы:

$$\bar{I} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} \frac{d\vec{w}}{dt} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} \vec{F}_{\text{trm}} dt. \quad (137)$$

Отсюда видно, что в качестве тормозящей силы можно взять

$$\vec{F}_{\text{trm}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}. \quad (138)$$

Подчеркнем, что введенная сила, называемая силой реакции излучения, является фиктивной и выбрана формально по ее действию, приводящему к потерям энергии, равным потерям на излучение.

Аналогично выводится такая же сила в случае периодического движения. Тогда производится усреднение по периоду T :

$$\overline{w^2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w^2 dt = \overline{\frac{d(\vec{v}\vec{w})}{dt}} - \overline{\vec{v} \frac{d\vec{w}}{dt}} = -\overline{\vec{v} \frac{d\vec{w}}{dt}}. \quad (139)$$

Первый интеграл равен нулю, так как движение периодическое. Правда, при этом делается предположение, что изменением траектории за период можно пренебречь, т. е. что влияние излучения мало. Тогда энергия, излучаемая за период:

$$\bar{I} = \int_{-T/2}^{T/2} I dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} T \bar{v} \frac{d\bar{w}}{dt} = -T \bar{v} \overline{F_{\text{trm}}} \quad (140)$$

точно с тем же выражением для силы реакции излучения. При этом должно выполняться условие, что тормозящая сила значительно меньше, чем сила, приводящая заряд в движение, т. е. $|F_{\text{trm}}| \ll mw$.

Если тормозящую силу ввести в уравнение движения:

$$m\ddot{w} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{trm}}, \quad (141)$$

то возникает еще одна проблема. Если силу торможения считать не зависящей от основной силы и принять формулу (138), то могут возникать самоускоряющиеся решения. Действительно, при $\vec{F} = 0$ имеется решение с экспоненциально растущим ускорением:

$$\vec{w} = \vec{w}_0 \exp \left\{ \frac{3}{2} \frac{mc^3}{e^2} t \right\} \quad (142)$$

В книге [3] такие решения исключаются за счет выбора начальных условий, что считается некорректным в [15]. Как кажется, эта проблема решается в рамках выбранного здесь подхода.

Следует отметить, что ускорение, входящее в формулу для тормозящей силы, это не просто вторая производная от радиуса-вектора. Это именно то ускорение, которое порождает излучение и стоит в уравнении движения. Если сила \vec{F} равна нулю, это ускорение отсутствует, т. е. $w = 0$. Тогда излучения просто нет и, следовательно, нет и торможения излучением. Напротив, если сила изменяется очень быстро, то влияние излучения также очень сильно.

Рассмотрим конкретный пример.

3. *Торможение гармонического осциллятора.* Пусть заряд совершает гармонические колебания, определяемые уравнением и его решением:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0, \quad \vec{x} = \vec{x}_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad (143)$$

где \vec{x} — радиус-вектор отклонения заряда от положения равновесия (и точки его максимальной скорости), \vec{x}_0 , $x_0 = |\vec{x}_0|$, — амплитуда колебаний, ω_0 — собственная частота осциллятора, а ϕ_0 — начальная фаза. Полная энергия осциллятора $m\dot{x}_0^2\omega_0^2/2$. Энергия, излучаемая зарядом за период согласно формуле (140)

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \bar{I} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{2\pi}{\omega_0} \dot{\vec{x}} \ddot{\vec{x}} = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^3 x_0^2, \quad (144)$$

а сила реакции излучения (138)

$$\vec{F}_{\text{трм}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{x}}. \quad (145)$$

Как говорилось выше, ускорение, порождающее излучение, должно быть взято из уравнения (143), так что тормозящая сила

$$\vec{F}_{\text{трм}} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^2 \dot{\vec{x}}. \quad (146)$$

При этом теряемая энергия, как будет показано, гораздо меньше энергии осциллятора, т. е.

$$\frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^3 x_0^2 \ll m\omega_0^2 x_0^2, \quad \omega_0 \ll \frac{3}{2\pi} \frac{mc^3}{e^2}. \quad (147)$$

Та же оценка получается из условия, что сила торможения значительно меньше упругой силы, т. е.

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{x}} \ll m\omega_0^2 \vec{x}, \quad \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0 \ll 1, \quad \omega_0 \ll \frac{3}{2} \frac{mc^3}{e^2}. \quad (148)$$

Различие на число π можно не замечать.

Введем силу торможения в уравнение осциллятора:

$$m\ddot{\vec{x}} + m\omega_0^2 \vec{x} = \vec{F}_{\text{трм}} \quad (149)$$

и подставим выражение (146). Уравнение заменится на

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma_0 \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = 0. \quad (150)$$

где обозначено

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2. \quad (151)$$

Среднее соотношение в (148) позволяет утверждать, что должно быть

$$\gamma_0 \ll \omega_0. \quad (152)$$

Как обычно в случае уравнения с постоянными коэффициентами, решение (150) ищется в виде экспоненты: $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{\alpha t}$. Коэффициент α определяется из квадратного уравнения

$$\alpha^2 + \gamma_0 \alpha + \omega_0^2 = 0. \quad (153)$$

В получающемся решении

$$\alpha = -\frac{\gamma_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma_0^2}{4} - \omega_0^2} \approx -\frac{\gamma_0}{2} \pm i\omega_0 \quad (154)$$

ввиду неравенства (152) под корнем отброшено первое слагаемое. В то же время слагаемое вне корня необходимо оставить, так как оно в отличие от мнимой величины, которую дает корень, вещественно и, следовательно, играет другую роль в решении. Двойной знак в (154), как всегда, означает существование двух линейно независимых решений (с двумя параметрами). Таким образом, решение уравнения (150) записывается в виде

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-\gamma_0 t/2} \cos(\omega_0 t + \phi_0). \quad (155)$$

4. *Затухание излучения и линия излучения.* Запишем решение (155) в комплексном виде

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-\gamma_0 t/2 - i\omega_0 t}, \quad (156)$$

где теперь \vec{x}_0 — комплексная амплитуда. Физический смысл имеет вещественная часть \vec{x} . Амплитуда колебаний такого осциллятора, хотя может быть и медленно, с течением времени уменьшается, т. е. колебания затухают.

Напряженности излучаемой таким зарядом волны определяются формулами (67). Сейчас для нас существенна только зависимость их от времени, которая точно та же, что и у радиуса-вектора заряда. Напряженность электрического поля можно представить в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\gamma_0 t/2 - i\omega_0 t}. \quad (157)$$

Мощность излучения находится по той же формуле (73), что и раньше, и пропорциональна квадрату напряженности, т. е. $e^{-\gamma_0 t}$. Найдем полное излучение за время между nT и $(n+1)T$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} [\text{Re}(\vec{E}(t))]^2 dt = \frac{1 - e^{-\gamma_0 T}}{\gamma_0} e^{-n\gamma_0 T} \left[\frac{(\vec{E}_R^0)^2 + (\vec{E}_I^0)^2}{2} + \frac{\gamma_0}{\gamma_0^2 + 4\omega_0^2} \left(\frac{(\vec{E}_R^0)^2 - (\vec{E}_I^0)^2}{2} \gamma_0 + \vec{E}_R \vec{E}_I 2\omega_0 \right) \right] \approx \frac{1 - e^{-\gamma_0 T}}{\gamma_0} e^{-n\gamma_0 T} \frac{|\vec{E}_0|^2}{2}, \quad (158)$$

т. е. с каждым периодом энергия излучения ослабевает на множитель $e^{-\gamma_0 T}$. При $\gamma_0 \rightarrow 0$ это ослабление исчезает.

Таким образом, вследствие потерь энергии на излучение и колебания заряда, и напряженность создаваемого им поля, и излучаемая энергия затухают. Поэтому величину γ_0 называют постоянной затухания.

Найдем спектр излучения затухающего осциллятора. Для этого вычислим преобразование Фурье напряженности:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\gamma_0 t/2 - i\omega_0 t} dt = \vec{E}_0 \frac{1}{i(\omega - \omega_0) + \gamma_0/2}. \quad (159)$$

Квадрат этого преобразования

$$|\vec{E}|^2 = |\vec{E}_0|^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_0/2)^2}. \quad (160)$$

Последняя дробь определяет зависимость излучаемой энергии от частоты. Запишем эту величину с множителем, нормированным на единицу:

$$\tilde{I}(\omega) = \tilde{I}_0 \frac{\gamma_0/(2\pi)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma_0/2)^2}. \quad (161)$$

Этот множитель является приближением дельта-функции (равенство (П2.46)). При отсутствии затухания осциллятор излучает одну частоту, равную его собственной частоте. Затухание размывает абсолютно резкую линию, поэтому получающаяся линия называется линией затухания, а сам эффект — затуханием вследствие излучения или естественным затуханием.

Частота ω_0 называется центральной (центром линии). Расстояние от нее, на котором интенсивность в два раза меньше максимальной (центральной), называется полушириной линии $\Delta\omega/2$. По определению

$$\frac{1}{(\Delta\omega/2)^2 + (\gamma_0/2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\gamma_0/2)^2}, \quad \Delta\omega = \gamma_0. \quad (162)$$

Таким образом, ширина линии в частоте равна постоянной затухания. Можно найти ширину линии в длине волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, $d\lambda = -2\pi c d\omega/\omega^2$. Для ширин дифференциальное соотношение записывается так:

$$\Delta\lambda = 2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} = 2\pi c \frac{\gamma_0}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2}. \quad (163)$$

Ширина линии затухания в длинах волн одинакова для всех осцилляторов с данным зарядом. В случае электрона она выражается через его классический радиус $r_e = e^2/(mc^2)$ и равна $1.2 \cdot 10^{-12}$ см $= 1.2 \cdot 10^{-4}$ Å. Из неравенства (148) вытекает, что

$$\Delta\lambda \ll \lambda_0 = 2\pi c/\omega_0, \quad \lambda_0 \gg 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ Å}. \quad (164)$$

Длина волны, стоящая справа, соответствует далекому гамма-диапазону. Впрочем, как говорилось выше, неравенство всегда справедливо, так как граница применимости классической электродинамики заканчивается на существенно больших расстояниях.

Часто форму линии затухания записывают в безразмерном виде. Для этого вводится безразмерная частота, точнее, безразмерное расстояние от центра линии $z = (\omega - \omega_0)/(\gamma_0/2)$. Тогда форма линии описывается формулой $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + z^2}$.

Полученные результаты применяются к спектральным линиям атомов в рамках осцилляторной модели, о которой будет сказано в § 10 Главы 7.

5. *Тормозящая сила релятивистского заряда.* Для релятивистского заряда силу торможения вследствие излучения можно вывести двумя способами. Можно исходить из обычных релятивистских соображений, подобрав релятивистское обобщение нерелятивистской формулы (138). Ясно, что таким обобщением может

быть аналог этой формулы, в котором скорость \vec{v} заменена на четырехмерную скорость \underline{v} , а производная по времени t на производную по собственному времени заряда τ . Однако для релятивистской силы имеется еще требование, чтобы она была ортогональна скорости \underline{v} . Этим условиям удовлетворяет

$$\underline{F}_{\text{трм}} = \frac{2e^2}{3c^3} \left[\frac{d^2\underline{v}}{d\tau^2} - \underline{\beta} \left(\underline{\beta} \frac{d^2\underline{v}}{d\tau^2} \right) \right], \quad \underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c}. \quad (165)$$

Другой способ исходит из релятивистской формулы (93), дающей мощность полного (во всех направлениях) излучения:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} (-\underline{w}^2). \quad (166)$$

Применив тождество

$$\frac{d}{d\tau}(\underline{v} \underline{w}) = \frac{d}{d\tau} \left(\underline{v} \frac{d\underline{v}}{d\tau} \right) = 0 = \frac{d\underline{v}}{d\tau} \frac{d\underline{v}}{d\tau} + \underline{v} \frac{d\underline{w}}{d\tau} = \underline{w}^2 + \underline{v} \frac{d^2\underline{v}}{d\tau^2} \quad (167)$$

и подставив $-\underline{w}^2$ отсюда в (166), для тормозящей силы получим то же выражение (165).

Добавление тормозящей силы в уравнение движения порождает те же проблемы. Они обсуждаются в книге [15]. Однако, как кажется, если вместо ускорения $\frac{d\underline{v}}{d\tau}$, входящего в формулу (165), подставить его выражение из уравнения движения, некоторые проблемы отпадут.

6. *Случай движения в электромагнитном поле.* Найдем производную от ускорения, входящего в уравнение движения (2.146)

$$m \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu v^\nu, \quad (168)$$

и подставим ее в выражение для силы. При этом следует брать производные как от скорости заряда, так и, вообще говоря, от напряженностей поля:

$$m \frac{dw^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} \frac{dF^\mu{}_\nu}{d\tau} v^\nu + \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dv^\nu}{d\tau} = \frac{e}{c} \frac{dF^\mu{}_\nu}{d\tau} v^\nu + \frac{e^2}{mc^2} F^\mu{}_\nu F^\nu{}_\sigma v^\sigma. \quad (169)$$

Производные от компонент тензора находятся по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{dF^\mu{}_\nu}{d\tau} = \frac{\partial F^\mu{}_\nu}{\partial x^\sigma} v^\sigma. \quad (170)$$

Произведение, входящее в (169), находим в матричном представлении вектора и тензора:

$$\begin{aligned}
\{F^\mu{}_\nu F^\nu{}_\sigma v^\sigma\} &= \gamma \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E}^\top \\ \vec{E} & \dot{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{E}^\top \\ -\vec{E} & \dot{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \\
&= \gamma \begin{pmatrix} E^2 & -(\vec{E} \times \vec{H})^\top \\ \vec{E} \times \vec{H} & \vec{E}\vec{E}^\top + \dot{H}\dot{H}^\top - H^2 \dot{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \\
&= \gamma \begin{pmatrix} cE^2 - (\vec{v}\vec{E}\vec{H}) \\ c\vec{E} \times \vec{H} + (\vec{v}\vec{E})\vec{E} + (\vec{v}\dot{H})\dot{H} - H^2\vec{v} \end{pmatrix}. \quad (171)
\end{aligned}$$

Скалярное произведение со скоростью также легко находится:

$$\begin{aligned}
\{v_\mu F^\mu{}_\nu F^\nu{}_\sigma v^\sigma\} &= \gamma^2 (c - \vec{v}^\top) \begin{pmatrix} cE^2 - (\vec{v}\vec{E}\vec{H}) \\ c\vec{E} \times \vec{H} + (\vec{v}\vec{E})\vec{E} + (\vec{v}\dot{H})\dot{H} - H^2\vec{v} \end{pmatrix} = \\
&= \gamma^2 \left[c^2 E^2 - 2c(\vec{v}\vec{E}\vec{H}) - (\vec{v}\vec{E})^2 + |\vec{v} \times \vec{H}|^2 \right]. \quad (172)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в (169) справа ортогонально четырехмерной скорости: $\{v_\mu F^{\mu\nu} v_\nu\} = 0$, так как тензор поля антисимметричен. Выражение в квадратных скобках — это квадрат четырехмерной силы Лоренца.

Таким образом, тормозящая сила

$$\begin{aligned}
\underline{F}_{\text{trm}} &= \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} \left[\frac{mc}{e} \frac{d\hat{F}}{d\tau} \underline{v} + \gamma \begin{pmatrix} cE^2 - (\vec{v}\vec{E}\vec{H}) \\ c\vec{E} \times \vec{H} + (\vec{v}\vec{E})\vec{E} + (\vec{v}\dot{H})\dot{H} - H^2\vec{v} \end{pmatrix} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\gamma^3}{c^2} \left[(c\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H})^2 - (\vec{v}\vec{E})^2 \right] \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \right]. \quad (173)
\end{aligned}$$

Если эту силу приписать к правой части уравнения движения (168), то получится уравнение, называемое уравнением Дирака—Лоренца.

7. *Стационарное однородное поле.* Следуя [1] и [3], рассмотрим такой случай.

Если поле стационарное и однородное, то производные от напряженностей равны нулю и трехмерная сила торможения

$$\vec{F} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \left[\vec{E} \times \vec{H} + (\vec{\beta}\vec{E})\vec{E} + \vec{H} \times (\vec{H} \times \vec{\beta}) - \gamma^2 [(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{H})^2 - (\vec{\beta}\vec{E})^2] \vec{\beta} \right]. \quad (174)$$

Рассмотрим два предельных случая.

Если заряд нерелятивистский, то в свою очередь могут быть две возможности. Если $\beta H \ll E$, то у силы (174) существенно только одно первое слагаемое в квадратных скобках и уравнение движения с учетом влияний излучения принимает вид

$$m\vec{w} = e\vec{E} + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (175)$$

Чтобы второе слагаемое справа было меньше первого требуется выполнение ограничения на величину магнитной напряженности:

$$\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} H \ll e, \quad H \ll \frac{3}{2} \frac{m^2 c^4}{e^3} = H_e. \quad (176)$$

Для электрона получается $H_e = (3/2)e/r_e^2 \approx 10^{16}$ Гс. Как и в предыдущих случаях, верхняя граница завышена. Ограничение на величину магнитного поля накладывается со стороны квантовой механики и требует, чтобы $H \ll m^2 c^3 / (e\hbar) = 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс. При полях, близких к этому, электрон перестает быть свободным, его энергия квантуется. Такие поля осуществляются только на нейтронных звездах.

Поскольку справа в уравнении оба слагаемых вектора постоянны и ортогональны, равноускоренное движение происходит независимо в двух направлениях. При этом эффекта замедления не обнаруживается. Впрочем, эта ситуация продолжается только пока скорость заряда остается нерелятивистской и выполняется указанное соотношение между напряженностями поля.

Если оказывается, что $E \ll \beta H$, то можно учитывать только третье слагаемое в скобках, так что уравнение движения обращается в

$$m\vec{w} = e\vec{\beta} \times \vec{H} - \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} [H^2 \vec{\beta} - (\vec{\beta} \vec{H}) \vec{H}]. \quad (177)$$

Ограничение на величину напряженности магнитного поля здесь точно такое же.

Если, напротив, заряд ультрарелятивистский, то в выражении силы торможения (174) достаточно сохранить только слагаемые, содержащие множитель γ^2 , а в них вектор $\vec{\beta}$ заменить на его орт $\vec{n}_\beta = \vec{\beta} / \beta$. Уравнение движения предстанет в форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{H}) - \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \gamma^2 [(\vec{E} + \vec{n}_\beta \times \vec{H})^2 - (\vec{n}_\beta \vec{E})^2] \vec{n}_\beta. \quad (178)$$

Здесь ограничение на величину обеих напряженностей зависит от энергии заряда. Для электрона

$$E, H \ll \frac{3}{2} \frac{e}{r_e^2} \frac{1}{\gamma^2} = \frac{H_e}{\gamma^2}. \quad (179)$$

Так как величина поля H_e очень велика, энергия электрона также может быть значительной.

Нетривиальные и подчас парадоксальные свойства уравнения (178) (например, равенство нулю силы торможения при $H = 0$ и $\vec{\beta} \parallel \vec{E}$) обсуждаются в [1, 3, 15] и цитируемых там статьях.

§ 8. Спектр излучения в волновой зоне

1. *Преобразования Фурье от потенциалов.* В этом параграфе получим представление спектра излучения движущегося заряда на больших расстояниях от него, т. е. в волновой зоне. Для этого найдем преобразования Фурье по времени от электромагнитных величин и начнем с потенциалов.

Определим эти преобразования обычным способом:

$$\varphi_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \varphi(t_1) dt, \quad \vec{A}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{A}(t_1) dt. \quad (180)$$

У всех величин в этом параграфе не будем писать аргумента \vec{r} , так как он у них принимает одно и то же значение, т. е. точка наблюдения закреплена.

Воспользовавшись соотношениями (45) и (46), связывающими времена t, t_1 и их дифференциалы, получим

$$\varphi_\omega = \frac{e}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{dt}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} = e^{i\omega R/c} \frac{e}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - \vec{x}\vec{n}/c)} dt_1, \quad (181)$$

$$\vec{A}_\omega = \frac{e}{R} e^{i\omega R/c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - \vec{x}\vec{n}/c)} \vec{\beta} dt_1. \quad (182)$$

Эти преобразования можно представить в четырехмерных обозначениях через один вектор, а именно

$$\underline{A}_\omega = \{\varphi_\omega, \vec{A}_\omega\} = \frac{e}{R} e^{i\omega R/c} \underline{G}(\vec{x}), \quad (183)$$

где четырехмерный вектор (назовем его основным)

$$\underline{G}(\vec{\kappa}) = \{G_0(\vec{\kappa}), \vec{G}(\vec{\kappa})\} = \frac{1}{c} \int e^{i\kappa \underline{x}} d\underline{x}. \quad (184)$$

Аргументом этого вектора является пространственная часть четырехмерного вектора

$$\underline{\kappa} = \{\kappa, \vec{\kappa}\}, \quad \vec{\kappa} = \kappa \vec{n}, \quad \kappa = \omega/c, \quad (185)$$

т. е. волновой вектор, длина которого равна волновому числу. Интеграл в (184) берется по траектории заряда

$$\underline{x} = \{c t_1, \vec{x}(t_1)\}, \quad d\underline{x}/c = \{dt_1, \vec{\beta}(t_1) dt_1\}, \quad (186)$$

в пространстве Минковского, называемой мировой линией. Фазовый множитель перед преобразованиями Фурье в (181) и (183) не играет никакой роли. В (180)–(183) зависимость преобразований Фурье от вектора \vec{n} подразумевается.

Из условия Лоренца с учетом (54) следует соотношение между преобразованиями Фурье от потенциалов

$$\underline{\nabla} \underline{A} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \underline{A} = 0, \quad \vec{\nabla} \underline{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = 0, \quad (187)$$

$$-\frac{i\omega}{c} \varphi_\omega + \frac{\vec{n}}{c} i\omega \underline{A}_\omega = 0, \quad \kappa \varphi_\omega = \vec{\kappa} \underline{A}_\omega, \quad \underline{\kappa} \underline{A}_\omega = 0, \quad (188)$$

или (что то же самое) между составляющими вектора (184)

$$\underline{\kappa} \underline{G}(\vec{\kappa}) = 0, \quad \kappa G_0(\vec{\kappa}) = \vec{\kappa} \vec{G}(\vec{\kappa}), \quad (189)$$

отражающее условие поперечности.

Обратные преобразования

$$\underline{A}(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \underline{A}_\omega d\omega. \quad (190)$$

Поскольку потенциалы вещественны, то должно выполняться соотношение

$$\underline{A}_{-\omega} = \underline{A}_\omega^*, \quad (191)$$

т. е. изменение знака аргумента преобразования равносильно его комплексному сопряжению.

2. *Преобразования напряженностей.* Поскольку напряженности электромагнитного поля выражаются линейно через производные от потенциалов по времени, то преобразования Фурье от напряженностей найти очень просто. Для электрического поля получается

$$\vec{E}_\omega = \frac{i}{\varkappa} \vec{\varkappa} \times (\vec{A}_\omega \times \vec{\varkappa}) = i \varkappa \vec{n} \times (\vec{A}_\omega \times \vec{n}) = i \varkappa [\vec{A}_\omega - \vec{n}(\vec{A}_\omega \vec{n})] = i \varkappa [\vec{A}_\omega - \vec{n} \varphi_\omega]. \quad (192)$$

Аналогично для магнитного поля

$$\vec{H}_\omega = i \vec{\varkappa} \times \vec{A}_\omega = \vec{n} \times \vec{E}_\omega. \quad (193)$$

Вещественность напряженностей влечет для их преобразований справедливость соотношений, аналогичных (191) для потенциалов. Поэтому равенство Парсеваля запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}_\omega|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}_\omega|^2 d\omega. \quad (194)$$

Легко убедиться, что входящий сюда квадрат преобразования

$$|\vec{E}_\omega|^2 = \varkappa^2 [|\vec{A}_\omega|^2 + |\varphi_\omega|^2 - \vec{n}(\vec{A}_\omega \varphi_\omega^* + \vec{A}_\omega^* \varphi_\omega)] \quad (195)$$

в силу равенств (187) и (183) выражается через пространственно подобный основной вектор \underline{G} ($|\underline{G}(\vec{\varkappa})|^2 = |\underline{G}(\vec{\varkappa})\underline{G}^*(\vec{\varkappa})|$):

$$|\vec{E}_\omega|^2 = \varkappa^2 [|\vec{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2] = -\varkappa^2 \underline{A}_\omega \underline{A}_\omega^* = \frac{e^2}{R^2} \varkappa^2 |\underline{G}(\vec{\varkappa})|^2. \quad (196)$$

3. *Энергетические величины.* Теперь найдем энергетические, т. е. квадратичные по напряженностям величины. Равенство (194) через интенсивность излучения переписывается так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W} dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_* dt = \frac{cR^2}{4\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}|^2 dt = \frac{cR^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega |\vec{E}_\omega|^2 = \frac{e^2 c}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega \varkappa^2 |\underline{G}(\vec{\varkappa})|^2. \quad (197)$$

Из выражения для дифференциала излучаемого четырехмерного импульса (93) с учетом соотношений (110) и (111) получается

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \frac{1}{c^2} \int I d\underline{x} = \frac{1}{c} \int \{1, \vec{\beta}(t_1)\} I dt_1 = \frac{1}{c} \int \{1, \vec{\beta}\} dt_1 \int \mathcal{W} d^2n = \\ &= \frac{1}{c} \int d^2n \int \{1, \vec{\beta}\} dt_1 \mathcal{W} = \frac{1}{c} \int d^2n \{1, \vec{n}\} \int dt_1 \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (198)$$

Наконец, воспользовавшись выражением (197) для интеграла от интенсивности, получим окончательно

$$\underline{P} = \frac{e^2 c}{4\pi^2} \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \int_0^\infty \varkappa^2 d\varkappa |\underline{G}(\vec{\varkappa})|^2 = \frac{e^2 c}{4\pi^2} \int \frac{d^3 \varkappa}{\varkappa} \varkappa |\underline{G}^2(\vec{\varkappa})|^2. \quad (199)$$

Это выражение представляет излучаемую энергию и импульс в спектральной форме.

Опустив в подинтегральном выражении \varkappa и поделив на \hbar ($\hbar \varkappa$ — четырехмерный импульс фотона), получим формулу для числа излучаемых фотонов

$$N = \frac{e^2 c}{4\pi^2 \hbar} \int \frac{d^3 \varkappa}{\varkappa} |\underline{G}(\vec{\varkappa})|^2. \quad (200)$$

Присутствие здесь постоянной Планка указывает на квантовый характер величины числа фотонов.

4. Разложения Фурье при периодическом движении заряда.

Если движение заряда периодическое, то все величины, связанные с этим движением, например, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, тоже периодические. Пусть период составляет T_0 по времени влияния t_1 . Легко показать, что и по времени наблюдателя t излучение заряда имеет тот же период. Действительно, пусть f — некоторая периодическая функция времени t_1 , т.е. $f(t_1 + T_0) = f(t_1)$. Времена t и t_1 связаны равенством (45), представляющим t как функцию t_1 . Найдя обратную зависимость t_1 от t и подставив ее в качестве аргумента функции f , получим другую функцию, обозначим ее f_1 , с теми же значениями, т.е. $f_1(t) = f(t_1)$. Но из (45) ясно, что если добавить T_0 к t_1 , то точно та же величина добавится к t и наоборот. Поэтому $f_1(t + T_0) = f(t_1 + T_0) = f(t_1) = f_1(t)$.

Периодические напряженности излучаемого поля раскладываются в ряды Фурье. Поэтому спектр излучения периодически движущегося заряда состоит из отдельных линий, причем расстояние между соседними линиями по круговой частоте равно $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — круговой частоте, соответствующей периоду T_0 . Формулы, определяющие этот спектр, аналогичны приведенным выше для случая

непериодического движения, только обычно множитель 2π включается в преобразование, а не в обращение его. Кроме того, размерность коэффициентов Фурье отличается от размерности преобразований (интегралов) Фурье, так как интеграл, входящий в выражение для коэффициентов, берется по периоду и делится на период.

Представим разложения потенциалов в виде

$$\underline{A} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega_0 l t) \underline{A}_l. \quad (201)$$

Тогда

$$\underline{A}_l = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underline{A} \exp(i l \omega_0 t) dt. \quad (202)$$

Очевидно, что для вещественности потенциалов должно выполняться соотношение, аналогичное (191):

$$\underline{A}_{-l} = \underline{A}_l^*. \quad (203)$$

Так как потенциалы подчиняются условию Лоренца во всех случаях (периодическое движение или нет), то коэффициенты разложений потенциалов удовлетворяют соотношению

$$\vec{n} \vec{A}_l = \varphi_l. \quad (204)$$

Поскольку напряженности электромагнитного поля представляются через производную по времени от векторного потенциала согласно (62), то разложения напряженностей имеют тот же вид, что и (201), и их коэффициенты выражаются через (202):

$$\vec{E}_l = -\frac{i}{c} l \omega_0 \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}_l) = -\frac{i}{c} l \omega_0 [\vec{n}(\vec{n} \vec{A}_l) - \vec{A}_l], \quad \vec{H}_l = \frac{i}{c} l \omega_0 \vec{n} \times \vec{A}_l. \quad (205)$$

Точно такая же аналогия выполняется и с выражением коэффициентов рядов Фурье через вектор — аналог (183). После подстановки соотношения между временами наблюдения и влияния (45) и выражений (202) для потенциалов получится

$$\begin{aligned} \underline{A}_l &= \frac{\omega_0}{2\pi} e^{(i l \omega_0 R/c)} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underline{A} e^{i l \omega_0 (t_1 - \vec{n} \vec{x}/c)} dt = \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{e}{R} e^{(i l \omega_0 R/c)} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{(i l \omega_0 (t_1 - \vec{n} \vec{x}/c))} \{1, \vec{\beta}\} dt_1. \end{aligned} \quad (206)$$

Отсюда следует

$$\underline{A}_l = \frac{e\omega_0}{R} e^{(il\omega_0 R/c)} \underline{G}_l, \quad (207)$$

причем

$$\underline{G}_l(\vec{n}) = \{G_{0l}, \vec{G}_l\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{il\omega_0(t_1 - \vec{n}\vec{x}/c)} \{1, \vec{\beta}\} dt_1, \quad G_{0l}(\vec{n}) = \vec{n}\vec{G}_l(\vec{n}). \quad (208)$$

Теперь у нас есть все, чтобы охарактеризовать энергетику излучения.

4. *Спектр излучения периодического заряда.* Квадраты коэффициентов Фурье напряженностей

$$|\vec{E}_l|^2 = |\vec{H}_l|^2 = \frac{l^2\omega_0^2}{c^2} \left(|\vec{A}_l|^2 + |\varphi_l|^2 - \vec{n}\vec{A}_l\varphi_l^* - \vec{n}\vec{A}_l^*\varphi_l \right) = \frac{l^2\omega_0^2}{c^2} \left(|\vec{A}_l|^2 - |\varphi_l|^2 \right) \quad (209)$$

также выражаются через вектор \underline{G}_l (тоже пространственно подобный):

$$|\vec{E}_l|^2 = -\frac{l^2}{c^2} \omega_0^2 \underline{A}_l \underline{A}_l^* = -\frac{l^2}{c^2} \omega_0^4 \frac{e^2}{R^2} \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (210)$$

Запишем уравнение замкнутости для вектора \vec{E} :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \vec{E}^2 dt = T_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\vec{E}_l|^2 = -T_0 \frac{e^2}{R^2} \frac{\omega_0^4}{c^2} 2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (211)$$

Через полное излучение его можно переписать так:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathcal{W} dt_1 = \frac{c}{4\pi} R^2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \vec{E}^2 dt = -\frac{e^2}{c} \omega_0^3 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (212)$$

Четырехмерный импульс, переносимый излучением за период, находится, как и выше. Комбинация равенств (198) для случая периодического движения и (212) дает

$$\underline{P} = \frac{1}{c} \int d^2n \{1, \vec{n}\} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt_1 \mathcal{W} = -\frac{e^2}{c^2} \omega_0^3 \int d^2n \{1, \vec{n}\} \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (213)$$

Таким образом, спектр излучения периодически движущегося заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Формула (213) определяет интенсивности этих линий. Для возможности сравнения с распределением интенсивности в непрерывном спектре и интенсивность линий рассчитывают на единичный интервал частот, т. е. вводят множитель $1/\omega_0$. В расчете на единицу частоты и единичный телесный угол интенсивность l -той линии излучения заряда, совершающего периодическое движение, равна

$$W_l = -\frac{e^2}{c^2} l^2 \omega_0^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*, \quad (214)$$

так что

$$\underline{P} = \omega_0 \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \sum_{l=1}^{\infty} W_l. \quad (215)$$

Для нахождения W_l необходимо вычислить три интеграла, входящие в основной вектор \vec{G}_l .

Отметим еще поведение интенсивности (214) при преобразованиях Лоренца. Поскольку в формуле вектор $\omega_0 \{1, \vec{n}\}$ преобразуется как импульс фотона, а $\omega_0^2 d^2 n$ и квадрат вектора \underline{G} инвариантны, то инвариантом является также частное W_l/ω_0^2 .

Глава 6. Магнитотормозное излучение

§ 1. Геометрия и терминология

1. *Движение и излучение заряда.* Пусть заряд e массой m равномерно движется по окружности в некоторой системе отсчета. Центр окружности находится в начале координат этой системы и считается неподвижным, т. е. система отсчета жестко связана с ним.

По окружности движется заряд во внешнем однородном магнитном поле, если не учитывать излучение заряда и если его скорость перпендикулярна магнитному полю. Если имеется составляющая скорости вдоль поля, то траектория заряда — спираль, точнее — винтовая линия (см. § 5 Главы 3). Здесь ограничиваемся движением по окружности.

Влиянием потерь энергии заряда на излучение мы пренебрегаем, т. е. считаем, что траектория заряда в результате излучения не изменяется. Так можно поступать ввиду того, что энергия излучения заряда составляет малую долю его энергии.

Излучение рассматриваемого заряда или совокупности таких зарядов называется магнитотормозным (именно потому, что заряды тормозятся вследствие излучения, и по аналогии с тормозным излучением заряженных частиц в электрическом поле других зарядов). Если заряды нерелятивистские или ультрарелятивистские, то их излучение называют соответственно циклотронным или синхротронным, в диапазоне промежуточных энергий говорят о гироциклотронном излучении.

Поскольку главное излучение дают заряды с наименьшей массой, в дальнейшем под словом заряд подразумеваем электрон.

Величина напряженности магнитного поля $\mathcal{H}_* > 0$ закрепляется. Ей соответствует циклотронная частота $\omega_* = \frac{e\mathcal{H}_*}{mc}$ и период $T_* = 2\pi/\omega_*$.

2. *Описание движения электрона.* Введем в той системе отсчета, в которой электрон вращается по окружности (назовем ее лабораторной), ортонормальный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Пусть окружность, по которой движется электрон, лежит в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , а магнитное поле $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_* \vec{e}_3$.

Зададим радиус-вектор заряда относительно центра окружности (см. рис. 27) в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(\phi) = R_* (\vec{e}_1 \sin \phi - \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (1)$$

где R_* — радиус окружности, по которой обращается заряд, угол $\phi = \omega t$, ω — угловая скорость движения заряда по окружности, t — время в лабораторной системе отсчета. Четырехмерный вектор положения заряда в этой системе

$$\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}. \quad (2)$$

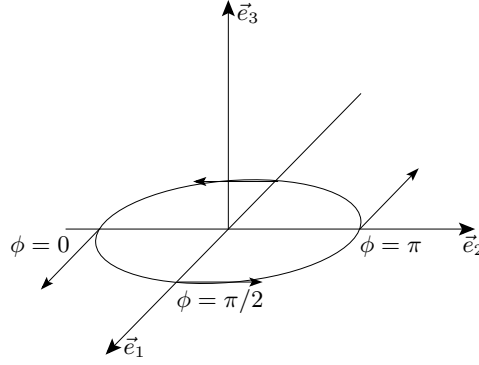


Рис. 27: Вращающийся по окружности заряд.

Безразмерный четырехмерный импульс заряда (или, что то же самое, четырехмерная безразмерная скорость) в той же системе отсчета

$$\underline{z} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \frac{\gamma}{c} \frac{d\underline{r}}{dt} = \{\gamma, \vec{z}\}, \quad \vec{z} = \gamma \vec{\beta}, \quad (3)$$

где τ — собственное время заряда, а безразмерная скорость вращения его по окружности

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt} = \beta (\vec{e}_1 \cos \phi + \vec{e}_2 \sin \phi), \quad \beta = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt} = \frac{R_*}{c} \omega. \quad (4)$$

Безразмерная энергия электрона γ выражается через его безразмерные скорость β и импульс z в этой системе отсчета обычным

образом: $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1+z^2}$. Этот множитель связывает собственное время заряда τ со временем в лабораторной системе отсчета и, соответственно, угловую частоту обращения заряда с циклотронной частотой:

$$\tau = \frac{t}{\gamma}, \quad \omega = \frac{\omega_*}{\gamma}, \quad (5)$$

так что $\phi = \omega t = \omega_* \tau$. Периоды обращения связаны точно так же: $T = T_* \gamma$. Отметим, что так как длина вектора скорости заряда постоянна, то хотя время τ относится к неинерциальной системе отсчета, оно течет равномерно, т. е. отличается от времени t на постоянный множитель. Собственное время τ — самое медленное для заряда. Радиус $R_* = \beta c \gamma / \omega$ называется радиусом Лармора.

Четырехмерный вектор ускорения и трехмерное ускорение задаются простыми формулами:

$$\underline{w} = c \frac{dz}{d\tau} = \{0, \gamma^2 \vec{w}\}, \quad \vec{w} = w(-\vec{e}_1 \sin \phi + \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (6)$$

$$w = R_* \omega^2 = c \beta \omega = c \omega_* \frac{\beta}{\gamma} = \frac{R_* \omega_*^2}{\gamma^2}. \quad (7)$$

Релятивистский скаляр

$$-\underline{w}^2 = \gamma^4 w^2 = R_*^2 \omega_*^4. \quad (8)$$

3. *Полное излучение и классификация.* Найдем полное излучение электрона в волновой зоне.

Как известно, релятивистский заряд излучает не только энергию, но и импульс, которые уносятся излучаемой зарядом электромагнитной волной. Перенос импульса означает, что центр расходящейся сферической волны смещается в сторону движения заряда. Четырехмерный вектор излучаемого импульса пропорционален вектору смещения электрона (формулы (5.93), в качестве dt_1 следует взять dt), а коэффициентом пропорциональности является мощность излучения, которая в общем случае дается выражением (5.94)

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} [-\underline{w}^2], \quad \underline{w}^2 = -\gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2], \quad (9)$$

где $\underline{w} = \gamma^2 \{\gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma(\vec{\beta} \vec{w}) \vec{\beta}\}$ — пространственно подобный четырехмерный вектор ускорения. Для нашего случая этот вектор

определяются формулой (6), а его квадрат — формулой (8), так что

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \beta^2 \gamma^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \beta^2 \gamma^4 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} R_*^2 \omega_*^4. \quad (10)$$

Зафиксируем наряду с величиной напряженности внешнего магнитного поля \mathcal{H}_* скорость заряда и тем самым величины β и γ . Рассмотрим предельные случаи, о которых говорилось выше.

1) Нерелятивистский предел. При $\beta \ll 1$ множитель $\gamma \approx 1$ и

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \beta^2. \quad (11)$$

Это излучение называется, как уже говорилось, циклотронным.

2) Ультррелятивистский предел. Здесь $\beta \approx 1$, $\gamma \gg 1$, так что в случае синхротронного излучения

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma^2. \quad (12)$$

Из приведенных формул видно, что циклотронное излучение слабое, а синхротронное значительно сильнее, так как в первом случае β мало, а во втором γ велико. В промежуточных случаях, когда скорость электрона умеренно релятивистская, излучение называют гироциклотронным.

4. *Доля излучаемой энергии.* В заключение параграфа сопоставим величину энергии, излучаемой вращающимся по окружности электроном за период T , с его кинетической энергией (2.51). Их отношение равно

$$\frac{IT}{\mathcal{E}_{\text{kin}}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \beta^2 \gamma^4 \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{mc^2(\gamma-1)} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\mathcal{H}_*}{e} \frac{\beta^2 \gamma^3}{\gamma-1}. \quad (13)$$

Это отношение достигает значения 1 при напряженности магнитного поля

$$\mathcal{H}_* = \frac{3}{4\pi} \frac{m^2 c^4}{e^3} \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}. \quad (14)$$

Коэффициент справа для электрона равен $1.4 \cdot 10^{15}$ Гс. Множитель, зависящий от скорости электрона, при $\beta = 0$ равен $1/2$, а при больших γ пропорционален $1/\gamma^2$. Даже при очень значительных величинах γ величина напряженности магнитного поля, определяемая принятым условием, очень велика. Столь большие ее значения

могут достигаться в магнитосферах нейтронных звезд, однако при таких напряженностях классическая теория магнитотормозного излучения уже неверна и требуется квантовое рассмотрение. Таким образом, предположение о возможности пренебречь влиянием излучения на траекторию электрона оправдано, о чем говорилось в § 7 Главы 5.

§ 2. Угловая зависимость излучения

1. *Общие формулы.* Напомним формулы, характеризующие излучение заряда, движущегося с ускорением.

Напряженность электрического поля на расстоянии R от заряда согласно формулам (5.62) и (5.101)

$$\vec{E} = \frac{e}{cR} \vec{n} \times \left[\frac{\vec{n}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \times \frac{d}{dt_1} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \right] = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (15)$$

Здесь \vec{R} — вектор, соединяющий фиксированную точку в области движения заряда с наблюдателем, $\vec{n} = \vec{R}/R$ — единичный вектор направления на наблюдателя, $\vec{\beta}$ и \vec{w} — безразмерная скорость и ускорение заряда, которые вычисляются в момент запаздывающего времени t_1 , связанного со временем наблюдения t равенством

$$t = t_1 + \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}(t_1)}{c}, \quad (16)$$

где $\vec{r}(t_1)$ — радиус-вектор заряда, исходящий из указанной точки, так что при закреплённом расстоянии R дифференциалы времен связаны соотношением

$$dt = (1 - \vec{n}\vec{\beta}) dt_1. \quad (17)$$

В первом выражении в (15) производная по времени t_1 берётся полная, так как вектор $\vec{\beta}$ зависит только от этого времени.

Общая формула для мощности излучения заряда, т. е. количества лучистой энергии, испускаемой им в единицу времени, имеет вид

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1 - \vec{n}\vec{\beta}) - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5}. \quad (18)$$

2. *Мгновенное излучение.* Пусть наблюдатель находится на расстоянии R от места движения заряда и в направлении \vec{n} . Для

нашего случая выберем входящие в формулу (18) векторы следующим образом. Можно принять, что вектор \vec{n} расположен в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_3 , что не является ограничением, так как заряд вращается и его излучение при фиксированном положении наблюдателя по отношению к направлению поля будет одним и тем же, независимо от азимута наблюдателя. Вектор направления на наблюдателя характеризуем поэтому только полярным углом:

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_3 \cos \theta = (\sin \theta, 0, \cos \theta). \quad (19)$$

Остальные векторы задаются формулами, приведенными в предыдущем параграфе. Запишем их в виде перечисления трех декартовых координат в принятом базисе:

$$\vec{\beta} = \beta(\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \vec{w} = -w(\sin \phi, -\cos \phi, 0). \quad (20)$$

Найдем произведения векторов, входящие в общую формулу для мощности излучения (18):

$$\vec{n}\vec{w} = -w \sin \theta \sin \phi, \quad \vec{n}\vec{\beta} = \beta \sin \theta \cos \phi, \quad \vec{\beta}\vec{w} = 0. \quad (21)$$

В качестве основного параметра выбираем скорость электрона β . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\theta, \phi) &= \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \frac{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2/w^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5} = \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2 \beta^2}{m^2 \gamma^2} \frac{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^5} = \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2 \beta^2}{m^2 \gamma^2} \frac{(\beta \sin \theta - \cos \phi)^2 + \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{(1 - \beta \sin \theta \cos \phi)^5}. \end{aligned} \quad (22)$$

Эта функция обращается в нуль, только если $\theta = \pi/2$ и $\cos \phi = \beta$.

Опять рассмотрим предельные значения скорости. Если $\beta \ll 1$, то мощность излучения

$$\mathcal{W}(\theta, \phi) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2}{m^2} \beta^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \quad (23)$$

мала и несильно зависит от направления, хотя при $\theta = \pi/2$, $\phi = \pm\pi/2$ обращается в нуль.

Напротив, если скорость близка к скорости света, то выражение в скобках в знаменателе может становиться очень малым. Это происходит при $\theta = \pi/2$ и $\phi = 0$. Тогда знаменатель становится равным $1 - \beta = (1 - \beta^2)/(1 + \beta) \approx 1/(2\gamma^2)$ и вся дробь

$$\mathcal{W}(\theta, \phi) \approx \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2}{m^2} 2^3 \gamma^4, \quad (24)$$

т. е. значительно больше, чем (23). При углах, близких к указанным, мощность излучения будет также велика, хотя и меньше максимальной. Наблюдатель, располагающийся вблизи плоскости вращения заряда, при мгновенной фиксации излучения будет воспринимать кратковременные вспышки этого излучения в моменты, когда заряд движется прямо на него (подобно маячкам на крышах полицейских машин).

3. *Среднее излучение.* Формула (22) довольно сложна и не очень наглядна. Поэтому найдем энергию, которую излучает заряд в среднем. Эта энергия представляет интерес еще и потому, что период вращения заряда очень мал и приборы, измеряющие его излучение, почти наверное имеют постоянную времени (т. е. наименьший промежуток, различимый прибором) значительно большую, чем период вращения заряда, так что воспринимать будут среднее значение его мощности.

Для вычисления излучения за период понадобятся два интеграла (см. Приложение 6)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^3} = \pi \frac{2 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{5/2}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\phi \sin^2 \phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^5} = \frac{\pi}{4} \frac{4 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{7/2}}. \quad (25)$$

Их использование после замены переменной интегрирования $t = \phi T/(2\pi)$ дает

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}}(\theta) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{W}(\theta, \phi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{W}(\theta, \phi) d\phi = \\ &= \frac{e^2}{8\pi c^3} \frac{e^2 \mathcal{H}_*^2}{m^2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left[\frac{2 + \beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{5/2}} - \frac{\sin^2 \theta}{4\gamma^2} \frac{4 + \beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как большая часть излучения идет около плоскости вращения заряда, будем отсчитывать угол от этой плоскости, т. е. заменим $\theta = \pi/2 - \varepsilon$. Тогда

$$\overline{W}(\pi/2-\varepsilon) = \frac{e^2 \omega_*^2 \beta^2}{8\pi c \gamma^2} \left[\frac{2 + \beta^2 \cos^2 \varepsilon}{(1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon)^{5/2}} - \frac{\cos^2 \varepsilon}{4\gamma^2} \frac{4 + \beta^2 \cos^2 \varepsilon}{(1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon)^{7/2}} \right]. \quad (27)$$

Легко найти, что отношение мощности излучения в плоскости ($\varepsilon = 0$) и в направлении поля ($\varepsilon = \pm\pi/2$) равно

$$\frac{\overline{W}(\pi/2)}{\overline{W}(0)} = \gamma^5 \frac{4 + 3\beta^2}{8}. \quad (28)$$

Нерелятивистский заряд излучает в среднем

$$\overline{W}(\theta) = \frac{e^2}{8\pi c} \omega_*^2 \beta^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad \overline{W}(\pi/2 - \varepsilon) = \frac{e^2}{8\pi c} \omega_*^2 \beta^2 (1 + \sin^2 \varepsilon), \quad (29)$$

так что его излучение слабо и несильно зависит от угла направления на наблюдателя. Интересно отметить, что распределение по направлениям совпадает с индикатрисой Релея (4.90). Отношение (28) равно $1/2$.

Синхротронное излучение рассмотрим отдельно.

4. *Среднее синхротронное излучение.* Если заряд ультрарелятивистский, то излучение идет в основном под малыми углами от плоскости, т. е. в тонком конусе около нее. Поэтому сделаем замену

$$1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon = 1 - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \varepsilon \approx \frac{1}{\gamma^2} + \varepsilon^2 = \frac{1 + \varepsilon^2 \gamma^2}{\gamma^2}. \quad (30)$$

В этом приближении

$$\overline{W}(\pi/2 - \varepsilon) \sim \overline{W}_{\text{as}}(\pi/2 - \varepsilon) = \frac{e^2}{8\pi c} \omega_*^2 \frac{\gamma^3}{4} \frac{7 + 12\varepsilon^2 \gamma^2}{(1 + \varepsilon^2 \gamma^2)^{7/2}}, \quad (31)$$

а отношение (28) $7\gamma^5/8$.

Как и в случае движения по прямой, при больших γ средняя мощность зависит от произведения $\varepsilon\gamma$, а замена (30) не приводит к большой ошибке. Например, интеграл по всем ε оказывается правильным. Действительно, после подстановок $\varepsilon^2 \gamma^2 = u = 1/t - 1$ интеграл сводится к двум значениям бета-функции:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{W}(\pi/2 - \varepsilon) 2\pi \cos \varepsilon d\varepsilon \sim 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}_{\text{as}}(\pi/2 - \varepsilon) d\varepsilon =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2 \omega_*^2 \pi \gamma^2}{8\pi c} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{7+12u}{(1+u)^{7/2} \sqrt{u}} du = \frac{e^2 \omega_*^2}{16c} \gamma^2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t}} \left(7+12\frac{1-t}{t}\right) = \\
&= \frac{e^2}{16c} \omega_*^2 \gamma^2 \left[B\left(3, \frac{1}{2}\right) + 12B\left(2, \frac{3}{2}\right) \right] = \frac{e^2}{16c} \omega_*^2 \gamma^2 \frac{32}{3} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma^2, \quad (32)
\end{aligned}$$

что полностью совпадает с (12).

5. *Переход к синхротронному излучению.* Чтобы проследить, как с ростом энергии заряда происходит переход от циклотронного к синхротронному излучению, преобразуем формулу (27) точно, заменив в ней $1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon =$

$$= 1 - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \varepsilon = \frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 \sin^2 \varepsilon = \frac{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \varepsilon}{\gamma^2} = \frac{1 + z^2 \sin^2 \varepsilon}{\gamma^2}, \quad (33)$$

где $z = \beta\gamma$. Кроме того, для сравнения со случаем движения по прямой выделим множителем квадрат ускорения заряда $w = c\omega_*\beta/\gamma$. Тогда получится

$$\begin{aligned}
\overline{W}(\pi/2 - \varepsilon) &= \frac{e^2}{8\pi c^3} w^2 \gamma^5 \mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon), \quad \mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon) = \\
&= \frac{1 + \frac{3}{4}\beta^2 + \left[\frac{1}{\gamma^2} + 2z^2 + \left(\frac{1}{2} + z^2\right)\beta^2 \right] \sin^2 \varepsilon - \beta^2 \left(\frac{1}{4} + z^2\right) \sin^4 \varepsilon}{(1 + z^2 \sin^2 \varepsilon)^{7/2}}. \quad (34)
\end{aligned}$$

На рис. 28а приведены графики, отражающие зависимость $\mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon)$ от угла ε для тех же значений скорости, что и на рис. 26 (Глава 5): $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$. Большим значениям скорости соответствуют большие значения функции $\mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon)$ в плоскости вращения, а именно $\mathcal{W}_*(\beta, 0) = 1 + 3\beta^2/4$. Значения множителя γ^5 , опущенного для возможности нанести кривые на один рисунок, равны соответственно $\gamma^5 = 1, 2.053, 12.86, 63.55, 336.9, 3205$. Значения этой функции при $\varepsilon = \pi/2$ (вдоль поля) $\mathcal{W}_*(\beta, \pi/2) = 2/\gamma^5$. Рис. 28а для большей наглядности дан в правильном соотношении масштабов осей. Заметим, что на самом деле кривые рисунков 26а и 28а являются сечениями поверхностей, характеризующих распределение направлений излучения в пространстве, но если поверхности первых получаются вращением кривых вокруг оси абсцисс, то для получения поверхностей вторых кривые надо вращать вокруг оси ординат.

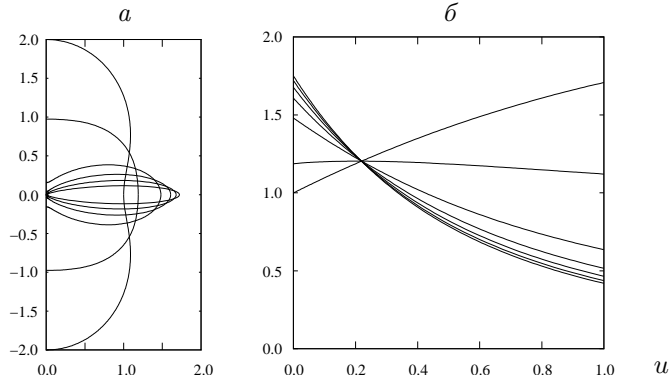


Рис. 28: Направленность магнито-тормозного излучения.
a. Полярные диаграммы функций $\mathcal{W}_*(\beta, \varepsilon)$ при $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95$ и 0.98 . *б.* Те же функции в зависимости от $u = (\gamma\varepsilon)^2$ и предельная кривая $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$.

На рис. 28*б* те же величины представлены в зависимости от аргумента $u = (\gamma\varepsilon)^2 = \varepsilon_0^2$. При близких к 1 значениях β кривые уже довольно близки к предельной кривой $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$, также помещенной на рисунок (кривая верхняя слева и нижняя справа). Кривые пересекаются в точках, близких к точке с абсциссой $u = 0.219$ и ординатой 1.20.

§ 3. Спектр магнитотормозного излучения в волновой зоне

1. *Характер спектра.* В этом параграфе найдем спектр излучения электрона в магнитном поле в волновой зоне. Поскольку заряд движется по окружности и влиянием его излучения на его же движение мы пренебрегаем, то все величины, связанные с этим движением, а именно, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, периодические с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Напомним основные формулы для излучения при периодическом движении заряда. Как было показано в Главе 5, периоды по времени заряда t_1 и по времени наблюдения t совпадают.

Спектр излучения периодического заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Для определения интен-

сивностей спектральных линий надо вычислить основной вектор \vec{G}_l , определяемый формулой (5.208):

$$\vec{G}_l(\vec{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp(i l \omega_0(t_1 - \vec{n}\vec{r}/c)) \vec{\beta} dt_1. \quad (35)$$

Тогда коэффициент разложения в ряд напряженности электрического поля

$$\vec{E}_l = -i \frac{e}{R} l^2 \omega_0^2 e^{i l \omega_0 R/c} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{G}_l). \quad (36)$$

Формулы (35) и (36) справедливы для любого периодического движения. Далее перейдем к магнитотормозному излучению. Вектор направления на наблюдателя \vec{n} по-прежнему можно взять в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_3 .

Подставим формулы для входящих в подинтегральное выражение векторов для заряда, движущегося по окружности:

$$\vec{n} = \sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_3, \quad \vec{r} = \frac{c\beta}{\omega} (\sin \phi \vec{e}_1 - \cos \phi \vec{e}_2), \quad \vec{\beta} = \beta (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2), \quad (37)$$

и сделаем замену $t_1 = t = \phi/\omega$. Интеграл (35) перейдет в

$$\vec{G}_l = \frac{\beta}{2\pi\omega} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) e^{i l \phi - i z \sin \phi} d\phi, \quad (38)$$

где $z = l \beta \sin \theta$.

Теперь воспользуемся формулами, выражающими интегралы, входящие в вектор \vec{G}_l , через функцию Бесселя и ее производную

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi - iz \sin \phi} d\phi = \frac{z}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi - iz \sin \phi} \cos \phi d\phi, \quad (39)$$

$$J'_n(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi - iz \sin \phi} \sin \phi d\phi. \quad (40)$$

Тогда вектор (35) примет вид

$$\vec{G}_l = \frac{\beta}{\omega} \left(\frac{1}{\sin \theta} J_l(z) \vec{e}_1 + i \beta J'_l(z) \vec{e}_2 \right). \quad (41)$$

2. *Формула Шотта.* Чтобы написать формулу для коэффициента разложения напряженности, найдем двойные векторные произведения от двух координатных ортов:

$$\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{e}_1] = \sin \theta \vec{n} - \vec{e}_1 = -\cos \theta (\cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_3), \quad \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{e}_2] = -\vec{e}_2. \quad (42)$$

Удобно ввести орты, перпендикулярные направлению излучения и образующие с ортом \vec{n} правую тройку:

$$\vec{e}_1(\vec{n}) = \cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2(\vec{n}) = \vec{e}_2. \quad (43)$$

Тогда l -тая составляющая напряженности согласно формулам (36), а также (41), (42) и (43) предстанет в виде

$$\vec{E}_l = \frac{e}{cR} i l \omega e^{i l \omega R/c} [\text{ctg} \theta J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}) + i \beta J_l'(z) \vec{e}_2(\vec{n})]. \quad (44)$$

Заметим, что составляющая с номером нуль равна нулю.

Подставив результат (44) в формулу (5.212), получим

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{W} dt_1 = \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{W}_* dt = \frac{c}{2\omega} R^2 \frac{e^2 \omega^2}{c^2 R^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 [\text{ctg}^2 \theta J_l^2(z) + \beta^2 J_l'^2(z)] = \omega \sum_{l=1}^{\infty} W_l. \quad (45)$$

Для интенсивности l -той линии (полного излучения в ней) W_l в расчете на единицу частоты найдем

$$W_l = \frac{e^2}{c} l^2 w_l, \quad (46)$$

где введено еще одно обозначение

$$w_l = w_l(\beta, \theta) = \text{ctg}^2 \theta J_l^2(z) + \beta^2 J_l'^2(z). \quad (47)$$

Напомним, что аргумент бесселевой функции $z = l\beta \sin \theta$. Величина $|\vec{E}_l|^2/(4\pi) = e^2 l^2 \omega^2 w_l/(4\pi c^2 R^2)$ представляет плотность энергии в линии с номером l на расстоянии R от источника, вектор Пойнтинга (потока энергии) имеет дополнительный множитель $c\vec{n}$.

Формула (46) носит название формулы Шотта, который ее вывел в 1912 г.

Свойства бесселевых функций приведены в Приложении 4.

3. *Поляризация в линиях.* Каждая линия в спектре магнитотормозного излучения представляет собой монохроматическую

волну и к ней можно применить общую теорию поляризации, изложенную в Главе 5. Как и всякие строго монохроматические волны, эти волны полностью эллиптически поляризованы. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим напряженность электрического поля в линии с номером l , т. е. вектор \vec{E}_l . Поскольку интенсивность линии у нас уже найдена, поляризационные характеристики (параметры Стокса) можно находить с точностью до множителя.

Используем орты (43) в качестве поляризационного базиса. Представим напряженность в линии в этих ортах согласно формуле (42) в виде столбца:

$$\vec{E}_l \propto [i \operatorname{ctg} \theta J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}) - \beta J_l'(z) \vec{e}_2(\vec{n})] = \begin{pmatrix} i \operatorname{ctg} \theta J_l(z) \\ -\beta J_l'(z) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Тогда в принятых поляризационных ортах поляризационная матрица излучения в линии с номером l с точностью до постоянного множителя будет иметь вид

$$\hat{S}_l = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_l \vec{E}_l^\dagger \propto \begin{pmatrix} \operatorname{ctg}^2 \theta J_l^2(z) & -i\beta \operatorname{ctg} \theta J_l(z) J_l'(z) \\ i\beta \operatorname{ctg} \theta J_l(z) J_l'(z) & \beta^2 J_l'^2(z) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

а параметры Стокса с правильным коэффициентом, таким же как у интенсивности, определяемой формулой (46), примут следующие значения: $U_l = 0$,

$$Q_l = \frac{e^2}{c} l^2 [\operatorname{ctg}^2 \theta J_l^2(z) - \beta^2 J_l'^2(z)], \quad V_l = 2 \frac{e^2}{c} l^2 \beta \operatorname{ctg} \theta J_l(z) J_l'(z). \quad (50)$$

Легко проверить, что выполняется равенство $W_l^2 = Q_l^2 + U_l^2 + V_l^2$, являющееся условием полной поляризации.

Таким образом, мы убедились, что излучение в каждой магнитотормозной линии полностью эллиптически поляризовано, т. е. обладает как линейной, так и круговой поляризацией. В основной плоскости круговая поляризация исчезает ($\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$), а линейная становится полной: $I_l = -Q_l = \frac{e^2}{c} [z J_l'(z)]^2$. Напротив, при наблюдении вдоль оси вращения электрона, т. е. при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, поляризация полностью круговая. При этом наблюдатель видит только одну линию, а именно, первую и $I_1 = V_1 = \frac{e^2 \beta^2}{c 2}$. Последние утверждения вытекают из свойства бесселевых функций, выражаемого асимптотическим равенством $J_l(z) \sim (z/2)^l / l!$ при $z \rightarrow 0$ (см.

(П4.88)). Состояния поляризации согласуются с геометрией движения излучающего электрона и положения наблюдателя.

4. *Полное излучение в линиях.* Полное количество энергии, излучаемой в линии, равно интегралу по направлениям от интенсивности (46), т. е.

$$\bar{W}_l(\beta) = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta W_l. \quad (51)$$

При интегрировании возникают два интеграла, которые согласно формулам теории бесселевых функций (вывод дается, например, в [16]) выражаются через функции Бесселя двойного (по сравнению с номером линии) порядка, так что

$$\bar{W}_l(\beta) = 4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta J'_{2l}(2l\beta) - \frac{l}{\gamma^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \right]. \quad (52)$$

Можно найти суммарные параметры поляризации излучения, идущего во все стороны. При этом $\bar{V}_l = 0$, т. е. круговая поляризация исчезает ввиду симметричности правой и левой поляризации, остается только линейная:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_l(\beta) &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta J'_{2l}(2l\beta) + l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \left(1 + \beta^2 - \frac{2}{y} \right) \right] = \\ &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta J'_{2l}(2l\beta) - \frac{l}{\gamma^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy + 2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) \frac{1-y}{y} dy \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

В случае нерелятивистского заряда ($l\beta \ll 1$) из приведенных формул с помощью уже использовавшегося соотношения: $J_\nu(z) \sim (z/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1)$ при $z \rightarrow +0$, легко получить

$$\bar{W}_l \sim 4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l(l+1)}{(2l+1)!} (l\beta)^{2l}, \quad \bar{Q}_l \sim -4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l^2}{(2l+1)!} (l\beta)^{2l}. \quad (54)$$

Так как множители, зависящие от l , при малых l невелики, а при больших l согласно формуле Стирлинга приближенно пропорциональны $(2/e)^{2l+1}$, то за счет множителя β^{2l} интенсивности спектральных линий быстро убывают с ростом номера, так что фактически осуществляются только первые циклотронные линии.

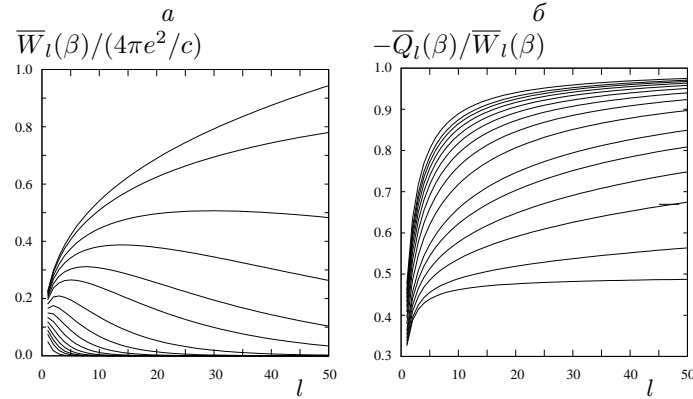


Рис. 29: Полное излучение в линиях.

а) Безразмерная мощность при различных β . б) Степень линейной поляризации в полном излучении.

Рис. 29а дает представление о зависимости от номера линии функции $\overline{W}_l(\beta)$ при различных энергиях электрона. Представлены огибающие дискретных значений этой функции в единицах $4\pi e^2/c$ при значениях $\beta = 0.4, 0.5(0.05)0.9, 0.925, 0.95, 0.97, 0.99, 1.0$. С ростом β кривые поднимаются. Некоторая негладкость кривых при небольших l объясняется дискретностью функций. На рис. 29б даются отношения параметра Стокса $-\overline{Q}_l(\beta)$ и интенсивности при тех же значениях β . Бóльшим их значениям соответствуют меньшие величины поляризации. Отметим предельные значения степени поляризации. При $\beta \rightarrow 0$ отношение $-\frac{\overline{Q}_l(\beta)}{\overline{W}_l(\beta)} \rightarrow \frac{l}{l+1}$, при $l \rightarrow \infty$ это отношение стремится к 1, причем тем быстрее, чем меньше β .

Поведение спектра синхротронного излучения уже намечается на приведенных рисунках. В следующем параграфе оно будет подробно обсуждено. Здесь понадобятся сведения о входящих в формулу Шотта функциях Бесселя, приведенные в Приложении 4.

§ 4. Спектр синхротронного излучения

1. *Направленное излучение в линиях.* Применим выведенные асимптотики к спектру синхротронного излучения. Как и выше, ограничимся движением заряда по окружности.

Считается, что $\beta \sim 1$, $\gamma \gg 1$. Излучение сосредоточено в узком конусе около плоскости вращения, поэтому целесообразно вместо угла θ использовать угол $\varepsilon = \pi/2 - \theta$. Тогда основное излучение идет при малых значениях $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma \ll 1$.

По аргументу бесселевых функций $z = l\beta \sin \theta$ при больших l находим

$$u = \sqrt{1 - z^2/l^2} = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varepsilon} = \sqrt{1 - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \varepsilon} \sim \sqrt{1/\gamma^2 + \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\gamma} \ll 1. \quad (55)$$

Для малых u величина $v \sim u^3/3 = (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3$. Следовательно,

$$J_l(z) \sim \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\sqrt{3\pi\gamma}} K_{1/3} \left(l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3 \right), \quad (56)$$

$$J'_l(z) \sim \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\sqrt{3\pi\gamma^2}} K_{2/3} \left(l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma^3 \right) \quad (57)$$

и ($\text{ctg } \theta = \text{tg } \varepsilon \sim \varepsilon$)

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} l^2 \frac{1 + \varepsilon_0^2}{3\pi^2 \gamma^4} \left[\varepsilon_0^2 K_{1/3}^2 \left(l \frac{(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}}{3\gamma^3} \right) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2 \left(l \frac{(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}}{3\gamma^3} \right) \right]. \quad (58)$$

Рассмотрим предельные случаи. Обе величины l и γ большие.

1) $l \ll 3\gamma^3$. В этом случае второе слагаемое в квадратных скобках в (58) больше первого, так как у него больше отрицательная степень малой величины. Согласно формуле для $K_\nu(z)$ из (П4.88)

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} 3^{1/3} 2^{-2/3} \Gamma^2(2/3) \frac{l^{2/3}}{1 + \varepsilon_0^2}. \quad (59)$$

При таких l интенсивность не зависит от γ и растет пропорционально $l^{2/3}$. При этом производная по l бесконечна, т. е. рост быстрый.

2) $l \sim 3\gamma^3$. Функции Макдональда порядка 1, а W_l пропорциональна $l^2/\gamma^4 \sim 9\gamma^2$.

3) $l \gg 3\gamma^3$. При таких номерах линий обе функции Макдональда убывают экспоненциально, так же убывает и W_l :

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} \frac{1}{2\pi} \frac{l}{\gamma} \frac{1 + 2\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{1/2}} \exp \left(-\frac{2}{3} (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2} \frac{l}{\gamma^3} \right). \quad (60)$$

Интенсивность линий быстро возрастает с номером l до значений порядка γ^2 , образуя широкий максимум на номерах l порядка $3\gamma^3$, а затем экспоненциально убывает.

Таким образом, спектр синхротронного излучения имеет характер, совершенно отличный от спектра циклотронного. Синхротронное излучение распространяется в узком конусе вблизи плоскости, в которой вращается заряд. С ростом γ угол, в котором идет максимальное количество излучения суживается, интенсивность спектра увеличивается. Излучение идет в линиях с большими номерами $l \sim 3\gamma^3$ и, следовательно, на высоких частотах порядка $l\omega_*/\gamma \sim 3\gamma^2\omega_*$. При этом, так как расстояние между линиями пропорционально $1/\gamma$, то линии располагаются все теснее. Если же учесть, что вследствие излучения линии имеют конечную ширину (что мы не учитываем), то спектр синхротронного излучения фактически оказывается непрерывным.

Гироциклотронное излучение является промежуточным между циклотронным и синхротронным, т. е. с ростом β неуклонно возрастает направленность излучения, убывание интенсивностей линий с номером в области сильного излучения постепенно сменяется возрастанием, а затем максимум перемещается в сторону все больших номеров.

2. *Полное излучение в линиях.* Проинтегрированная по направлениям интенсивность линий (52) при больших номерах имеет те же свойства, что и направленная. Здесь во внеинтегральном слагаемом $u = \sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma \ll 1$, $v \sim u^3/3 = 1/3\gamma^3$ и

$$\beta J'_{2l}(2l\beta) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}\gamma^2} K_{2/3}(x), \quad x = \frac{2l}{3\gamma^3}. \quad (61)$$

Интеграл оценивается несколько сложнее. В нем сделаем замены:

$$y = \frac{\sqrt{1 - u'^2}}{\beta}, \quad u' = \sqrt{1 - \beta^2 y^2}, \quad v' = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + u'}{1 - u'} - u', \quad (62)$$

$$dv' = \frac{u'^2 du'}{1 - u'^2} = -\beta^2 \frac{u' y dy}{1 - u'^2} = -\beta \frac{u' dy}{\sqrt{1 - u'^2}}, \quad dy = -\frac{1}{\beta} \frac{\sqrt{1 - u'^2}}{u'} dv'. \quad (63)$$

Тогда после подстановки асимптотической формулы (П4.119)

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \sim \frac{1}{\pi\beta} \int_{1/3\gamma^3}^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'}} K_{1/3}(2lv') \frac{\sqrt{1-u'^2}}{u'} dv'. \quad (64)$$

После еще одной замены переменной интегрирования $x' = 2lv'$ интеграл примет вид

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \sim \frac{1}{2l\pi} \int_x^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'^3} (1-u'^2)} K_{1/3}(x') dx', \quad (65)$$

Вследствие экспоненциального убывания функции Макдональда при больших значениях ее аргумента основной вклад в интеграл вносят значения x' , имеющие порядок 1 и меньше. Поэтому существенны значения $v' = x'/2l \ll 1$. В этой области $u' \ll 1$ и $v' \sim u'^3/3$, так что

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) dy \sim \frac{1}{2l\pi\sqrt{3}} \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx'. \quad (66)$$

Подставив оценки двух слагаемых в формулу (52), получим

$$\bar{W}_l \sim \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{e^2}{c} \frac{l}{\gamma^2} \left[K_{2/3}(x) - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} K_{1/3}(x') dx' \right]. \quad (67)$$

Наконец, воспользуемся рекуррентным соотношением для функций Макдональда (П4.86) и получим окончательное выражение

$$\bar{W}_l \sim \sqrt{3} \frac{e^2}{c} \gamma f_W \left(\frac{2l}{3\gamma^3} \right), \quad (68)$$

где использовано стандартное обозначение для функции, отражающей зависимость интенсивности излучения от номера линии и лоренцевского множителя:

$$f_W(x) = x \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx'. \quad (69)$$

Интеграл от этой функции

$$\int_0^{\infty} f_W(x) dx = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}. \quad (70)$$

При достаточно малых x функция разлагается в степенной ряд

$$f_W(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} x \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n-2/3) \Gamma(n-1/3)} - \right. \\ \left. - \left(\frac{x}{2}\right)^{8/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n+8/3) \Gamma(n+4/3)} - 1 \right] \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{2^{5/3}}{\Gamma(1/3)} x^{1/3}. \quad (71)$$

Она круто возрастает, достигая максимума 0.91801 при $x = 0.28581$. Напротив, при больших x справедливо асимптотическое разложение

$$f_W(x) \sim \sqrt{\frac{x\pi}{2}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n x^n} \sum_{m=0}^n \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{9} \right]}{m! (2m-1)!!}, \quad (72)$$

из которого видно ее экспоненциальное убывание. Все это отражается на рис. 30.

3. *Поляризация в полном излучении.* Точно так же выводится выражение для параметра Стокса в линии. При этом поскольку первые два слагаемых в скобках в формуле (53) для \bar{Q}_l совпадают со стоящими в выражении (52) для \bar{W}_l , то оценить остается последний интеграл. При оценке интеграла можно считать, что $y = \sqrt{1-u^2}/\beta \sim 1$, а $1-y =$

$$= \frac{\beta - \sqrt{1-u^2}}{\beta} = \frac{\beta^2 - 1 + u^2}{\beta(\beta + \sqrt{1-u^2})} \sim \frac{u^2 - 1/\gamma^2}{2} \sim \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2l} x'\right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma^2} \right]. \quad (73)$$

Таким образом, интеграл распадается на два, причем первый вычисляется с помощью формул 6.561.12 и 16 справочника [11]:

$$2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta y) \frac{1-y}{y} dy \sim \frac{2l}{4l\pi\sqrt{3}} \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' \left[\left(\frac{3}{2l} x'\right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma^2} \right] = \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\gamma^2} \left[K_{2/3}(x) - \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' \right]. \quad (74)$$

В результате интегралы сокращаются и остается только функция Макдональда:

$$\bar{Q}_l = -\frac{e^2}{c} \frac{2l}{\gamma^2 \sqrt{3}} K_{2/3}(x) = -\frac{e^2}{c} \sqrt{3} \gamma f_Q(x), \quad f_Q(x) = x K_{2/3}(x). \quad (75)$$

Интеграл от функции $f_Q(x)$ по всем x равен $2\pi/3\sqrt{3}$, в $4/3$ раза меньше, чем от f_W . График функции $f_Q(x)$ представлен на том же рис. 30. Там же помещено отношение функций, представляющее степень линейной поляризации синхротронного излучения в потоке: $p(x) = f_Q(x)/f_W(x)$. В частности, $p(0) = 0.5, p(\infty) = 1$.

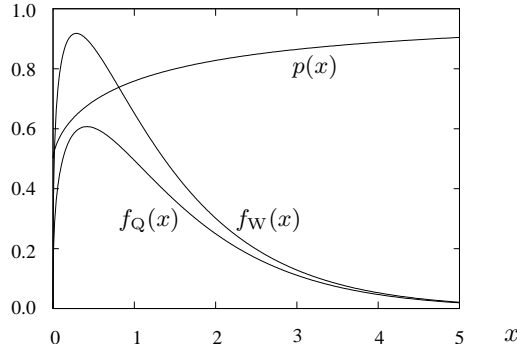


Рис. 30: Графики функций $f_W(x)$, $f_Q(x)$ и $p(x)$.

4. *Усреднение по энергиям электронов.* Здесь найдено излучение электрона, движущегося по окружности с определенной энергией. В электронном газе частицы движутся по разным траекториям, имея составляющие скорости вдоль поля. Эти траектории — спирали. Обобщение теории для движения по спирали делается тем же приемом, что и вывод полного излучения быстрого заряда (5.93), т. е. с помощью релятивистских соображений (см. [15]).

После вычисления интенсивности и параметра Стокса линейной поляризации излучения одного электрона с заданной энергией и направлением движения по отношению к полю эти величины надо усреднить по распределению электронов по энергиям. Распределения берутся в различных видах. Это либо (тепловое, равновесное) нерелятивистское распределение Максвелла (\mathcal{E} — это кинетическая энергия)

$$dn_e = n_e \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\mathcal{E}^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}} e^{-\mathcal{E}/(k_B T)} d\mathcal{E}, \quad (76)$$

где n_e — концентрация электронов, dn_e — число электронов в единице объема с энергиями от \mathcal{E} до $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$, $m = 9.11 \cdot 10^{-28}$ г — масса электрона, T — температура электронного газа, а $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана. Либо берется релятивистское обобщение этого распределения (энергия может быть релятивистской)). Либо это нетепловое степенное распределение (также возможны релятивистские энергии)

$$dn_e = n_e C_p \mathcal{E}^p d\mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_m \leq \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_M, \quad C_p \int_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_M} \mathcal{E}^p d\mathcal{E} = 1. \quad (77)$$

Обо всем этом написано в книге [15], а также в [16].

5. *Торможение излучением.* Для полноты рассмотрим здесь проблему торможения заряда, излучающего при его движении по окружности в магнитном поле.

При отсутствии электрического поля ($\vec{E} = 0$) и перпендикулярных скорости и магнитного поля \vec{H} тормозящая сила согласно формуле (5.174) направлена против скорости:

$$\vec{F} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} [-\mathcal{H}_*^2 \vec{\beta} - \gamma^2 \beta^2 \mathcal{H}_*^2 \vec{\beta}] = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \gamma^2 \mathcal{H}_*^2 \vec{\beta}. \quad (78)$$

Приняв во внимание, что $\vec{\beta} = \vec{p}/p_0$, $p_0 = mc\gamma$, добавим эту силу в уравнение движения заряда (3.128):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \frac{\vec{p}}{p_0} \times \vec{H} - \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \mathcal{H}_*^2 \frac{p_0 \vec{p}}{m^2 c^2}. \quad (79)$$

Умножив это уравнение на \vec{p} , получим

$$\frac{dp^2}{dt} = -\eta_* \gamma p^2, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}, \quad \eta_* = \frac{4}{3} \frac{e^4}{m^3 c^5} \mathcal{H}_*^2, \quad (80)$$

решение которого определяет импульс и энергию электрона:

$$p = \frac{2p_0 e^{-\eta_* t/2}}{\gamma_0 + 1 - (\gamma_0 - 1)e^{-\eta_* t}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_0 + 1 + (\gamma_0 - 1)e^{-\eta_* t}}{\gamma_0 + 1 - (\gamma_0 - 1)e^{-\eta_* t}}, \quad \gamma_0 = \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{m^2 c^2}}. \quad (81)$$

Чтобы затухание движения за период было слабым, необходимо выполнение неравенства

$$\eta_* \frac{2\pi}{\omega} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^3}{m^2 c^4} \mathcal{H}_* \gamma \ll 1, \quad \mathcal{H}_* \ll \frac{3}{8\pi} \frac{m^2 c^4}{e^3} \frac{1}{\gamma}. \quad (82)$$

Для электрона получается $\mathcal{H}_* \ll 0.7 \cdot 10^{15} / \gamma$ Гс, т. е. та же величина предельного поля, что и в (14), однако зависимость от энергии более слабая, так как оцениваются разные величины.

6. *Синхротронное излучение в природе.* Теория магнитотормозного излучения и в особенности синхротронного излучения получила широкое применение в различных областях физики и в первую очередь в астрофизике. Во многих астрофизических объектах имеются релятивистские электроны и магнитное поле, так что наблюдается излучение, для интерпретации которого и определения физических условий в таких объектах привлекается изложенная теория.

Примером таких объектов являются выбросы из активных ядер галактик (АЯГ). В центре галактик, как правило, находится так называемая черная дыра, т. е. образование очень большой массы и сравнительно малого размера. В нашей Галактике (Млечный Путь) черная дыра обладает массой около $10^5 M_\odot$ (масс Солнца). В других галактиках массы центральных черных дыр доходят до $10^{10} \div 10^{11} M_\odot$. Такие массивные образования притягивают к себе звезды, некоторые из которых обращаются вокруг черной дыры, как планеты вокруг Солнца. Другие звезды падают на нее, увеличивая ее массу. Падает на черную дыру и другое вещество: газ и пыль. Все это приводит к образованию вокруг черной дыры оболочки, в которой происходят мощные процессы взаимодействия между различными видами материи. В частности, эти процессы приводят к образованию выбросов или струй (джетов), состоящих из отдельных сгустков. В сгустках различными механизмами частицы ускоряются до ультрарелятивистских энергий. В них также имеется очень сильное магнитное поле. В результате электроны испускают синхротронное излучение, которое наблюдается в оптическом, инфракрасном, ультрафиолетовом, рентгеновском и радио диапазонах электромагнитного излучения. Такие наблюдения позволяют исследовать вещество в необычных физических условиях, недостижимых в лабораториях, а также постигать природу активности галактик.

Другим примером объектов, испускающих синхротронное излучение, являются вспышки сверхновых звезд, название которых отражает их внезапное появление на небе и мощность сопровождающих вспышку процессов. После вспышки часть вещества звезды улетает от нее, образуя светящуюся оболочку, которая и дает мощное видимое излучение, продолжающееся недели и месяцы. Другая часть исходной звезды коллапсирует, т. е. сжимается до значительно меньшего размера, чем размер обычной звезды, превращаясь в нейтронную звезду или черную дыру. Радиус нейтронной звезды около 10 км или 10^6 см. Размеры обычных звезд, а типичной звездой является наше Солнце, радиус которого $7 \cdot 10^{10}$ см, значительно больше. Образовавшаяся нейтронная звезда вращается очень быстро, так как сохраняется момент вращения. Усиливается при сжатии и магнитное поле. Нейтронная звезда испускает радио и оптические сигналы с периодом своего вращения (секунды и меньше), являясь пульсаром. Одновременно она извергает потоки релятивистских электронов и поддерживает магнитное поле, в котором электроны испускают синхротронное излучение. Вся оболочка нейтронной звезды долгое время светится как в радио, так и других диапазонах. Действие механизма синхротронного излучения доказывается характером спектра, а также сильной поляризацией этого излучения.

Так например, сверхновая звезда, вспыхнувшая в 1054 году, что зафиксировано в китайских хрониках, породила нейтронную звезду со свойствами, описанными выше. Сейчас она является пульсаром с периодом около одной секунды. Вокруг нейтронной звезды образовалась туманность, которая в оптическом свете выглядит как аморфное, похожее на круг образование, что дало ей название Крабовидная туманность. Синхротронную природу свечения туманности установили И.С.Шкловский по ее спектру и В.А.Домбровский, обнаруживший поляризацию ее излучения.

Глава 7. Волны в неоднородных, диспергирующих и анизотропных средах

§ 1. Уравнения для напряженностей в неоднородном диэлектрике

1. *Неоднородный диэлектрик.* Пусть волна распространяется в неоднородном немагнитном диэлектрике. Это означает, что магнитная проницаемость $\mu = 1$, а диэлектрическая проницаемость зависит от координат: $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$.

Уравнения Максвелла, определяющие волны при указанных условиях, записываются точно так же, как и для однородной среды. Повторим их:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1)$$

Материальные уравнения для рассматриваемого случая

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B} = \vec{H}. \quad (2)$$

2. *Уравнения для напряженностей.* В случае неоднородной среды потенциалы не вводятся, так что волновые уравнения выводятся непосредственно для самих напряженностей.

Из третьего уравнения в (1) и первого в (2) находим по правилу дифференцирования произведения

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \vec{E}. \quad (3)$$

Далее, берем ротор от ротора во втором уравнении с учетом четвертого в (1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\varepsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Как и в однородном случае, вводится скорость

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\vec{r})}} = v(\vec{r}), \quad (5)$$

но здесь эта скорость зависит от координат, так что она представляет локальную скорость света.

Заменив в (4) дивергенцию напряженности согласно (3), получим уравнение

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} - \text{grad}(\vec{E} \cdot \text{grad} \ln \varepsilon) = 0. \quad (6)$$

Аналогичной выкладкой находится уравнение для магнитной напряженности:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{H} &= \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{D} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\varepsilon \vec{E}) = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varepsilon \times \vec{E} + \varepsilon \text{rot } \vec{E}) = \frac{1}{c} \text{grad } \varepsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \times \text{rot } \vec{H} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

с результатом

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta \vec{H} - \text{grad} \ln \varepsilon \times \text{rot } \vec{H} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, обе напряженности удовлетворяют отдельным однородным уравнениям, но по сравнению с волновыми эти уравнения содержат дополнительные слагаемые, в которые входит градиент логарифма диэлектрической проницаемости, и кроме того, коэффициент при второй производной по времени зависит от координат.

3. *Монохроматические волны.* Для получения уравнений для комплексных амплитуд монохроматических волн надо в уравнениях (1), а затем в (6) и (8) заменить производную по времени на $-i\omega$. Получим из (1) исходные уравнения

$$\text{div } \vec{H} = 0, \text{ rot } \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}, \text{ div } \vec{E} = -\text{grad} \ln \varepsilon \cdot \vec{E}, \text{ rot } \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \vec{E}, \quad (9)$$

а из (6) и (8) окончательные уравнения

$$[-\Delta - k^2(\vec{r})] \vec{E} - \text{grad}(\vec{E} \cdot \text{grad} \ln \varepsilon) = 0, \quad (10)$$

$$[-\Delta - k^2(\vec{r})] \vec{H} - \text{grad} \ln \varepsilon \times \text{rot } \vec{H} = 0. \quad (11)$$

Здесь $k(\vec{r}) = \omega/v(\vec{r})$.

Достаточно найти одну из амплитуд, вторая находится с помощью уравнений Максвелла (9).

§ 2. Геометрическая оптика

1. *Приближение геометрической оптики.* Это приближение применяется для слабо неоднородных сред и волн малых длин, значительно меньших размеров той области, где волны распространяются. В таком случае можно пренебречь изменением $\ln \varepsilon$ и отбросить соответствующие слагаемые в уравнениях. Тогда окажется, что уравнения для компонент обеих напряженностей совпадают и имеют вид

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0. \quad (12)$$

В случае монохроматической волны все компоненты пропорциональны $e^{-i\omega t}$, так что уравнения для них

$$-k^2(\vec{r})u - \Delta u = 0. \quad (13)$$

При этом $k(\vec{r})$ медленно меняющаяся функция, а произведение $\omega t = 2\pi vt/\lambda$ велико ввиду малости длины волны $\lambda(\vec{r}) = 2\pi v(\vec{r})/\omega$, так что уравнения (12) и (13) можно еще упростить.

2. *Уравнение эйконала.* Будем искать решение уравнения (12) в виде

$$u = e^{i\psi(\vec{r},t)}, \quad (14)$$

где согласно сказанному в предыдущем пункте $\psi \gg 1$. Вычисляем производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= ui \frac{\partial \psi}{\partial t}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -u \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + iu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ \vec{\nabla} u &= ui \vec{\nabla} \psi, & \Delta u &= \vec{\nabla}^2 u = -u (\vec{\nabla} \psi)^2 + iu \Delta \psi. \end{aligned} \quad (15)$$

В первые слагаемые вторых производных ψ входит в квадрате, а во вторые — в первой степени. Так как эта величина предполагается большой, то вторыми слагаемыми можно пренебречь по сравнению с первыми, т. е. принять, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2, \quad \Delta u = -u (\vec{\nabla} \psi)^2. \quad (16)$$

Уравнение (12) в таком приближении перейдет в

$$\frac{1}{v^2(\vec{r})} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\vec{\nabla} \psi)^2 = 0. \quad (17)$$

Полученное уравнение называется уравнением эйконала, а его решение — функция $\psi(\vec{r}, t)$ — эйконалом. В отличие от исходного уравнения, которое содержит производные второго порядка, уравнение эйконала является уравнением первого порядка, хотя и нелинейным. Как известно, всякое уравнение в частных производных первого порядка может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решать значительно проще, чем уравнения в частных производных.

3. *Монохроматическая волна.* В случае монохроматических волн эйконал можно представить в виде

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c}\Psi(\vec{r}). \quad (18)$$

Уравнение для функции $\Psi(\vec{r})$ получится таким:

$$(\vec{\nabla}\Psi)^2 = n^2(\vec{r}). \quad (19)$$

Отношение

$$n(\vec{r}) = \sqrt{\varepsilon(\vec{r})} = \frac{c}{v(\vec{r})} \quad (20)$$

показывает, во сколько раз скорость света в вакууме больше скорости света в данном месте среды, и называется показателем преломления среды.

4. *Метод решения.* Как уже говорилось, всякое уравнение в частных производных первого порядка сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для его характеристик. Уравнение (19) можно свести к дифференциальным уравнениям методом функции Гамильтона. Зададим эту функцию в виде

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}) = p^2 - n^2(\vec{r}), \quad (21)$$

где \vec{p} — не импульс, а вектор из трех производных (явно указано, что градиент берется по координатам)

$$\vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\Psi. \quad (22)$$

Поскольку функция \mathcal{H} не зависит явно ни от времени, ни от исходной функции Ψ , уравнения характеристик запишутся в виде стационарной системы

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\nabla}_{\vec{p}}\mathcal{H} = 2\vec{p}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\mathcal{H} = 2n(\vec{r})\vec{\nabla}_{\vec{r}}n(\vec{r}) \quad (23)$$

или

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dz}{p_z}, \quad \frac{dp_x}{nn'_x} = \frac{dp_y}{nn'_y} = \frac{dp_z}{nn'_z}. \quad (24)$$

5. *Лучи.* Постоянное значение показателя экспоненты (14) в случае монохроматической волны

$$-\omega t + \frac{\omega}{c} \Psi(\vec{r}) = \frac{\omega}{c} \Psi_0 \quad (25)$$

в каждый момент времени задает некоторую поверхность уровня значения эйконала

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0 + ct. \quad (26)$$

Перпендикулярные к такой поверхности направления (нормали) отражают перемещения постоянной фазы, т. е. могут интерпретироваться как лучи. Лучи — это, вообще говоря, кривые линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением распространения волны. Таким образом, лучи задают поле направлений, определяемых векторами $\text{grad } \Psi(\vec{r}) = \vec{p}$. Первое уравнение в (24) и определяет совокупность лучей. Поэтому геометрическая оптика называется также лучевой.

6. *Частные случаи.* Рассмотрим простейшие случаи зависимости показателя преломления от координат.

1) Однородная среда. Если n постоянно, то можно положить $p_x = p_x^0$, $p_y = p_y^0$. Тогда лучи — это совокупность параллельных прямых, зависящая от двух параметров p_x^0 и p_y^0 :

$$\Psi = p_x^0 x + p_y^0 y + p_z^0 z + \Psi_0, \quad (p_x^0)^2 + (p_y^0)^2 + (p_z^0)^2 = n^2. \quad (27)$$

Третий параметр принимает одно из двух значений:

$$p_z^0 = \pm \sqrt{n^2 - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}. \quad (28)$$

Перемена его знака равносильна перемене знака z .

2) Одномерная неоднородность. Одномерность означает, что неоднородность осуществляется только вдоль некоторой прямой. Пусть эта прямая — ось аппликат, т. е. $n(\vec{r}) = n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$. Здесь применим другой метод решения.

Решение уравнения (19) в рассматриваемом случае можно искать в виде

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_x(x) + \Psi_y(y) + \Psi_z(z). \quad (29)$$

Подставив эту формулу в уравнение, получим

$$[\Psi'_x(x)]^2 + [\Psi'_y(y)]^2 + [\Psi'_z(z)]^2 = n^2(z). \quad (30)$$

Обычное рассуждение о зависимости от входящих в уравнение переменных приводит к решению

$$\Psi'_x(x) = \alpha, \quad \Psi'_y(y) = \beta, \quad \Psi_x(x) = \alpha x, \quad \Psi_y(y) = \beta y. \quad (31)$$

Уравнение (30) переходит в

$$\alpha^2 + \beta^2 + [\Psi'_z(z)]^2 = n^2(z), \quad \Psi'_z(z) = \pm \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2}, \quad (32)$$

и имеет решение

$$\Psi_z(z) = \pm \int \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2} dz. \quad (33)$$

В целом

$$\Psi(\vec{r}) = \alpha x + \beta y \pm \int \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2} dz. \quad (34)$$

Поверхности, описываемые уравнением распространения постоянной фазы волны

$$\Psi(\vec{r}) = \alpha x + \beta y \pm \int \sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2} dz = \Psi_0 + ct, \quad (35)$$

имеют вид искаженных плоскостей. Лучи, соответствующие этим поверхностям, определяются уравнениями, имеющими вид (24):

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \pm \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2}}. \quad (36)$$

Их можно проинтегрировать:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} + C_1 = \pm \int \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \alpha^2 - \beta^2}} + C_2. \quad (37)$$

Два параметра, α и β , описывают двухпараметрическое семейство кривых-лучей.

3) Сферическая симметрия. Если $n(\vec{r}) = n(r)$, то

$$\vec{\nabla} n(r) = n'(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (38)$$

Система (24) сводится к

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dz}{p_z}, \quad \frac{dp_x}{x} = \frac{dp_y}{y} = \frac{dp_z}{z}. \quad (39)$$

Решение естественно искать в виде

$$\Psi = \Psi(r), \quad \vec{\nabla}\Psi(r) = \Psi'(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (40)$$

так что

$$\Psi'(r) = \pm n(r), \quad \Psi(r) = \pm \int n(r) dr. \quad (41)$$

7. *Применение приближения.* Лучевое приближение, не принимающее во внимание волновые свойства электромагнитного поля, применяется при расчете многих оптических систем, например, телескопов. Характерный размер телескопа — это дециметры (малые телескопы) и метры. В последнее время построено несколько телескопов с диаметром зеркала 8-10 метров. Идет подготовка к сооружению телескопа с диаметром зеркала в 35 метров. Эти телескопы устанавливаются на поверхности Земли и принимают излучение в оптическом и инфракрасном диапазонах, длина волны в которых имеет порядок от 10^{-5} до 10^{-3} см, что значительно меньше габаритов даже малых телескопов. Поэтому оптические свойства телескопов, конечно, рассчитываются в приближении геометрической оптики. Волновые же характеристики, такие как хроматическая аберрация, размер дифракционного изображения точки и т. п., находятся как поправки к геометрическому расчету.

§ 3. E- и H-волны

1. *Точное рассмотрение.* Теперь изучим решения уравнений § 1 без приближений. Неоднородность будем считать одномерной, т. е. $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(z)$, так что

$$\text{grad } \varepsilon = (0, 0, \varepsilon'(z)). \quad (42)$$

Этот градиент подставим в уравнения для напряженностей и попробуем их решить.

2. *E-волны.* Начнем с первого уравнения (10). Ищем частное решение, при котором волна идет вдоль оси x , а напряженность

\vec{E} перпендикулярна направлениям распространения и неоднородности, т. е. осям x и z , как в однородной среде:

$$\vec{E} = E(z)(0, 1, 0)e^{i\kappa x}. \quad (43)$$

Все влияние неоднородности заключается в зависимости от z амплитуды волны. В таком случае последнее слагаемое в уравнении аннулируется и амплитуда подчиняется уравнению

$$E''(z) + f(z)E(z) = 0, \quad f(z) = k^2(z) - \kappa^2. \quad (44)$$

Как говорилось выше, для нахождения магнитной напряженности следует воспользоваться вторым уравнением в (9):

$$\frac{i\omega}{c}\vec{H} = \text{rot } \vec{E} = (-E'(z), 0, i\kappa E(z))e^{i\kappa x}. \quad (45)$$

Получается, что магнитная напряженность перпендикулярна электрической, но имеет составляющую по направлению распространения волны, т. е. наряду с поперечной также и продольную составляющую.

3. *H-волны.* Теперь ищем волну с магнитной напряженностью, перпендикулярной направлениям волны и неоднородности:

$$\vec{H} = H(z)(0, 1, 0)e^{i\kappa x}. \quad (46)$$

Тогда аналогично (45)

$$\text{rot } \vec{H} = (-H'(z), 0, i\kappa H(z))e^{i\kappa x} \quad (47)$$

и, следовательно,

$$\text{grad } \ln \varepsilon \times \text{rot } \vec{H} = (0, -\varepsilon' H' / \varepsilon, 0)e^{i\kappa x}. \quad (48)$$

Уравнение для амплитуды $H(z)$ получается более сложным, чем (44):

$$H''(z) + f(z)H(z) - \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon(z)}H'(z) = 0. \quad (49)$$

Однако это уравнение сводится к тому же виду, что и (44), введением новой функции:

$$H = \varepsilon^{1/2}w, \quad H' = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\varepsilon'w + \varepsilon^{1/2}w', \quad (50)$$

$$H'' = -\frac{1}{4}\varepsilon^{-3/2}(\varepsilon')^2w + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\varepsilon''w + \varepsilon^{-1/2}\varepsilon'w' + \varepsilon^{1/2}w'', \quad (51)$$

для которой получается уравнение

$$w'' + g(z)w = 0, \quad g(z) = f(z) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2. \quad (52)$$

Электрическая напряженность находится из уравнения

$$\frac{i\omega}{c} \varepsilon(z) \vec{E} = -\text{rot } \vec{H}. \quad (53)$$

Поскольку ротор магнитной напряженности уже найден, видно, что теперь электрическая напряженность имеет продольную составляющую.

Появление продольных составляющих напряженностей в волне, распространяющейся в неоднородной среде, сильно отличает неоднородные среды от однородных, в частности, от свободного пространства, в которых продольные компоненты волн невозможны.

4. *Слабая неоднородность.* Применим к уравнениям (44) и (52) приближенный метод ВКБ, описанный в Приложении 4. Для возможности его применения требуется, чтобы функции $f(z)$ и $g(z)$ не сильно изменялись в области изменения аргумента z . Масштаб изменения — большая длина s .

Повторим здесь схему приближения в упрощенном варианте. Решение уравнения (44) ищется в виде

$$E(z) = e^{i\psi_0(z) - \psi_1(z)}. \quad (54)$$

Нулевым приближением является уравнение эйконала, т. е. геометрическая оптика,

$$\left(\frac{d\psi_0}{dz} \right)^2 = f(z), \quad \psi_0(z) = \pm \int f^{1/2}(z) dz, \quad (55)$$

а первое приближение учитывает волновые свойства

$$-2 \frac{d\psi_0}{dz} \frac{d\psi_1}{dz} + \frac{d^2\psi_0}{dz^2} = 0, \quad \psi_1(z) = \frac{1}{4} \ln f(z). \quad (56)$$

Тогда общее решение в этом приближении

$$E(z) = f^{-1/4}(z) \left[C_+ \exp\left(i \int f^{1/2}(z) dz \right) + C_- \exp\left(-i \int f^{1/2}(z) dz \right) \right]. \quad (57)$$

5. *Условие применимости.* Неравенству (П4.104), выражающему условие справедливости приближения, применительно к волнам в неоднородной среде можно придать простой физический смысл. Именно, согласно определению (44) $1/\sqrt{f(z)} \sim 1/k(z) = \lambda(z)$, $\lambda = \lambda/(2\pi)$, так что условие применимости можно записать в виде

$$\left| \frac{d\lambda(z)}{dz} \right| \ll 1, \quad (58)$$

т. е. локальная длина волны (деленная на 2π) должна быть достаточно медленной функцией аргумента z . Так как $f \sim k^2 = \varepsilon\omega/c$, а $\lambda = 1/k = v/\omega = c/(\omega\sqrt{\varepsilon})$, то выполнение неравенств (104) и (58) обеспечивается, если медленно изменяется с z диэлектрическая проницаемость ε .

Условие (58) годится и для уравнения (52), в котором функция g определена сложнее, чем f . Однако слагаемые, добавляемые к функции f , содержат вторую производную от ε и квадрат первой производной. Оба они поэтому имеют порядок $1/s^2$ и не мешают применению метода.

Приближение ВКБ широко применяется не только в конкретных задачах, но и чисто математических вопросах, в частности, в теории специальных функций. С одним из таких применений мы познакомились при выводе асимптотики бесселевой функции.

Очевидно, что условие (104) не выполняется в точках, где функция $f(z)$ обращается в нуль, и в их окрестностях. Около таких точек применяется уточнение решения ВКБ, которым мы также воспользовались при выводе формул Лангера.

§ 4. Диспергирующие среды

1. *Материальные уравнения для быстропеременных процессов.* Простейшие соотношения между индукциями и напряженностями, применявшиеся нами до сих пор, выполняются только при условии, что связь между этими величинами локальна и мгновенна. Однако, часто эти требования не выполняются. Действующее на вещество поле вызывает какие-то изменения в этом веществе. Требуется некоторое время для того, чтобы вещество пришло к некоторому равновесному состоянию и дало отклик в виде создания определенной величины зарядов и токов поляризации или намагничивания и тем самым векторов индукции. Такое воздействие может происходить и нелокально, т. е. на образование индукции может

воздействовать поле и в соседних точках. Оба эффекта называются дисперсией, временной и пространственной. Более важна первая из них.

Рассмотрим указанную ситуацию на примере электрических величин и немгновенности связи. Для простоты в последующих формулах опустим зависимость характеристик поля от координат, хотя будем ее подразумевать.

Если обычное соотношение между электрической индукцией и напряженностью диэлектрика $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ не справедливо, то его обобщение на немгновенность связи следует записать в виде

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-t') \vec{E}(t') dt'. \quad (59)$$

При написании этого соотношения неявно учтено несколько обстоятельств.

Во-первых, $\varepsilon(t-t')$, называемая функцией влияния или отклика, показывает, какой вклад напряженность, действовавшая в момент t' , даст в индукцию в момент t . Эта функция зависит не от каждого из моментов t и t' отдельно, а только от их разности: имеют значения не моменты начала и конца воздействия, а только промежуток времени между ними. Это означает, что свойства среды (вещества) не изменяются за время воздействия, среда стационарна.

Во-вторых, интеграл в (59) берется только до момента t , что выражает так называемый принцип причинности. Он гласит, что на любое явление может оказывать влияние только такое другое явление, которое происходило не позже первого, т.е. причина не может быть позже следствия, будущее не влияет на настоящее и тем более на прошлое.

В-третьих, среда предполагается однородной, т.е. функция ε не зависит от координат, хотя это предположение не столь существенно.

Соотношение (59) может переходить в обычное материальное уравнение в двух случаях.

- 1) Если $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$, это мгновенное воздействие, т.е. дисперсия отсутствует.
- 2) Если напряженность \vec{E} слабо зависит от времени. Тогда ее можно вынести из-под знака интеграла и

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t), \quad \varepsilon_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt. \quad (60)$$

Последняя формула выполняется в обоих случаях и ε_0 — это обычная диэлектрическая проницаемость.

2. *Преобразования Фурье.* Правая часть соотношения (59) имеет вид свертки функций $\varepsilon(t)$ и $\vec{E}(t)$. Поэтому естественно применить к нему преобразование Фурье. Обозначая преобразования Фурье теми же буквами, но с аргументом — параметром преобразования ω :

$$\vec{D}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{D}(t) dt, \quad \vec{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{E}(t) dt, \quad \varepsilon(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \varepsilon(t) dt, \quad (61)$$

находим для них соотношение

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega). \quad (62)$$

Полученное соотношение по виду совпадает с простейшим материальным уравнением. Однако, во-первых, оно установлено не между индукцией и напряженностью, а между их преобразованиями Фурье, а во-вторых, $\varepsilon(\omega)$ — это вовсе не диэлектрическая проницаемость, а преобразование Фурье функции отклика. Это преобразование может быть комплексным.

Как будет показано ниже, при реальной дисперсии функция отклика имеет слагаемое вида $\delta(t)$. Выделим это слагаемое, положив

$$\varepsilon(t) = \delta(t) + \varepsilon_*(t), \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \varepsilon_*(\omega), \quad \varepsilon_*(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt. \quad (63)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ функция $\varepsilon_*(\omega)$ стремится к 0. Таким образом,

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^t \varepsilon_*(t-t') \vec{E}(t') dt', \quad \vec{D}(\omega) = [1 + \varepsilon_*(\omega)] \vec{E}(\omega). \quad (64)$$

Аналогичное соотношение имеет место и для магнитных величин:

$$\vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega). \quad (65)$$

§ 5. Аналитические свойства преобразования функции отклика

1. *Функция комплексного аргумента.* Преобразование Фурье от функции отклика без дельта-функции

$$\varepsilon_*(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt \quad (66)$$

можно рассматривать как функцию комплексного аргумента ω . Представляет интерес изучить свойства этой функции на комплексной плоскости.

Функция $\varepsilon_*(t)$ должна быть гладкой и убывающей функцией времени, так как далекие моменты от времени наблюдения должны по физическому смыслу меньше участвовать в создании поляризации зарядов и тем самым в индукции, чем более близкие. Поэтому интеграл (66) должен сходиться в верхней полуплоскости комплексного аргумента ω , так как он содержит убывающую экспоненту. Сходится он и на вещественной оси включая точку $\omega = 0$. Следовательно, в верхней полуплоскости функция $\varepsilon_*(\omega)$ регулярна. В нижнюю полуплоскость эта функция может быть аналитически продолжена, но там у нее непременно имеются особые точки.

Функция $\varepsilon_*(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Для нее можно написать формулу Коши для произвольной точки ω из верхней полуплоскости ($\text{Im } \omega > 0$)

$$\varepsilon_*(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_*(\omega') \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (67)$$

2. *Вещественная и мнимая части.* При вещественных ω можно разделить вещественную и мнимую части преобразования:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_R(\omega) + i\varepsilon_I(\omega), \quad \varepsilon_*(\omega) = \varepsilon_R(\omega) - 1 + i\varepsilon_I(\omega), \quad (68)$$

где

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \int_0^{\infty} \varepsilon_*(t) \cos \omega t dt, \quad \varepsilon_I(\omega) = \int_0^{\infty} \varepsilon_*(t) \sin \omega t dt. \quad (69)$$

Вещественная часть $\varepsilon_R(\omega)$ — четная, а мнимая $\varepsilon_I(\omega)$ — нечетная функции аргумента ω . Очевидно, что $\varepsilon_I(0) = 0$.

Представим вещественную часть в виде полусуммы самого преобразования и его сопряженного: $\varepsilon_R(\omega) - 1 =$

$$= \frac{\varepsilon_*(\omega) + \varepsilon_*^*(\omega)}{2} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \varepsilon_*(t) dt \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_*(|t|) e^{i\omega t} dt. \quad (70)$$

Аналогично мнимую часть представим полуразностью: $\varepsilon_I(\omega) =$

$$= \frac{\varepsilon_*(\omega) - \varepsilon_*^*(\omega)}{2i} = \frac{1}{2i} \left[\int_0^{\infty} e^{i\omega t} \varepsilon_*(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \varepsilon_*(t) dt \right] = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_*(|t|) \operatorname{sgn}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (71)$$

Написанные равенства позволяют связать вещественную и мнимую части. Напишем обращения формул, умножив вторую из них на $\operatorname{sgn}(t)$:

$$\varepsilon_*(|t|) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_R(\omega) - 1] e^{-i\omega t} d\omega = \frac{i}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (72)$$

Теперь подставим в формулу (70) выражение функции отклика из (72) через $\varepsilon_I(\omega)$, а в (71) — ее выражение через $\varepsilon_R(\omega)$ и переставим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \varepsilon_R(\omega) - 1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \frac{i}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_I(\omega') d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} \operatorname{sgn}(t) dt, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_I(\omega) &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t) dt e^{i\omega t} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_R(\omega') - 1] e^{-i\omega' t} d\omega' = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' [\varepsilon_R(\omega') - 1] \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} \operatorname{sgn}(t) dt. \end{aligned} \quad (74)$$

В обеих формулах возник одинаковый интеграл, который надо вычислить. Формально этот интеграл расходится, так как подинтегральная функция не стремится к нулю на бесконечности. Поэтому применяем обобщенный метод интегрирования, введя регуляризующий множитель и заменив разность $\omega - \omega'$ на ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \operatorname{sgn}(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \operatorname{sgn}(t) e^{-\alpha|t|} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[\int_0^{\infty} e^{(i\omega - \alpha)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(i\omega + \alpha)t} dt \right] = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[\frac{1}{\alpha - i\omega} - \frac{1}{\alpha + i\omega} \right]. \end{aligned} \quad (75)$$

3. *Интеграл типа Коши.* Получившиеся дроби интересны не сами по себе, а вместе с другими функциями под интегралами. Рассмотрим следующий интеграл при комплексных z

$$\mathcal{I}(z) = \int_a^b f(x) \frac{dx}{x - z}. \quad (76)$$

Такой интеграл называется интегралом типа Коши. Этот интеграл похож на интеграл Коши (67), однако имеются значительные отличия. Во-первых, вообще говоря, контур интегрирования не обязательно замкнутый (и не обязательно отрезок). Во-вторых, функция $f(x)$ совсем не обязана быть регулярной где бы то ни было. Достаточно потребовать, чтобы эта функция на отрезке удовлетворяла известному условию Липшица [17]

$$|f(x') - f(x)| \leq A|x' - x|^\nu, \quad (77)$$

где $A = \text{const}$, а $\nu > 0$. Тогда интеграл (76) везде регулярен кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль, т. е. в рассматриваемом случае — точек промежутка на вещественной оси (a, b) , где он ветвится. Чтобы изучить его поведение вблизи линии ветвления, внесем мнимую добавку в знаменатель, т. е. возьмем $x \in (a, b)$, $\alpha > 0$ и положим

$$\mathcal{I}(x + i\alpha) = \int_a^b f(x') \frac{dx'}{x' - x - i\alpha}. \quad (78)$$

Взяв число $\delta > \alpha > 0$, преобразуем интеграл так:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x + i\alpha) &= \int_a^{x-\delta} f(x') \frac{dx'}{x' - x - i\alpha} + \int_{x+\delta}^b f(x') \frac{dx'}{x' - x - i\alpha} + \\ &+ \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x - i\alpha} dx' + f(x) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dx'}{x' - x - i\alpha}. \end{aligned} \quad (79)$$

Последний интеграл просто вычисляется:

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dx'}{x' - x - i\alpha} = \ln(x' - x - i\alpha) \Big|_{x-\delta}^{x+\delta} = \ln \frac{\delta - i\alpha}{-\delta - i\alpha} = \ln \frac{e^{-i\psi}}{e^{\pi i + i\psi}} = -\pi i - 2i\psi, \quad (80)$$

где введено обозначение углу ψ , задаваемому функциями

$$\cos \psi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\delta^2 + \alpha^2}}. \quad (81)$$

Теперь устремим $\alpha \rightarrow 0$. Первые два интеграла не имеют особенностей, у третьего знаменатель обращается в нуль, но и числитель тоже обращается в нуль, так что интеграл при условии (77) остается конечным. Наконец, последний интеграл вычислен и его предел очевиден, так как $\psi \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Все вместе дает

$$\mathcal{I}(x + i0) = \int_a^{x-\delta} f(x') \frac{dx'}{x' - x} + \int_{x+\delta}^b f(x') \frac{dx'}{x' - x} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \pi i f(x). \quad (82)$$

Наконец, переходим к пределу $\delta \rightarrow 0$. Интеграл по малому промежутку стремится к нулю, а предел суммы двух интегралов называется главным значением по Коши. Дело в том, что несобственный интеграл с подинтегральной функцией, обращающейся в бесконечность в некоторой точке, определяется так, что сначала берется интеграл по промежутку, не включающему особую точку, а затем производится предельный переход к этой точке. По такому определению переходить к пределам в двух интегралах следовало бы независимо, но тогда бы они оба стремились к бесконечности. Переход к пределу с одинаковым отступом от особой точки приводит к тому, что предел оказывается конечным.

Интеграл с аргументом $x - i0$ просто комплексно сопряжен с выведенным. Окончательно, $\mathcal{I}(x \pm i0) = \mathcal{I}(x) \mp \pi i f(x)$ или подробно

$$\int_a^b f(x') \frac{dx'}{x' - x \mp i0} = \mathcal{I}(x) \mp \pi i f(x), \quad \mathcal{I}(x) = \oint_a^b f(x') \frac{dx'}{x' - x}. \quad (83)$$

Прочерк посередине знака интеграла как раз и означает, что интеграл понимается в смысле главного значения.

Формулы (83) называются формулами Сохоцкого-Племеля [17]. Их можно записать в символическом виде без интегралов и без функции:

$$\frac{1}{x' - x \pm i0} = \frac{\mathcal{P}}{x' - x} \pm \pi i \delta(x' - x), \quad (84)$$

где стоящий в числителе справа знак \mathcal{P} указывает, что при вычислении интеграла типа Коши по x' следует брать его главное значение по Коши.

4. *Связь вещественной и мнимой частей.* Вернемся к формулам (73) и (74). Входящий в них интеграл (75) сведем к интегралам типа Коши. Для этого первую дробь умножим на $-i$, а вторую — на i . Кроме того, восстановим разность $\omega - \omega'$ и перейдем к пределу $\alpha \rightarrow 0$. В соответствии с формулами (84) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega - \omega') &= -\frac{i}{\omega' - \omega - i0} - \frac{i}{\omega' - \omega + i0} = -i \left(\frac{1}{\omega' - \omega - i0} + \frac{1}{\omega' - \omega + i0} \right) = \\ &= -i \left[\frac{\mathcal{P}}{\omega' - \omega} - \pi i \delta(\omega' - \omega) + \frac{\mathcal{P}}{\omega' - \omega} + \pi i \delta(\omega' - \omega) \right] = -2i \frac{\mathcal{P}}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (85)$$

Подставив результат в формулы (73) и (74), найдем окончательно

$$\varepsilon_{\text{R}}(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\text{I}}(\omega') \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}, \quad \varepsilon_{\text{I}}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon_{\text{R}}(\omega') - 1] \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}. \quad (86)$$

Полученные формулы носят название дисперсионных или формул Крамерса—Кронига (1927).

Воспользовавшись нечетностью функции $\varepsilon_I(\omega)$ и четностью $\varepsilon_R(\omega)$, формулы (86) можно переписать по-другому:

$$\varepsilon_R(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon_I(\omega') \frac{\omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad \varepsilon_I(\omega) = -\frac{2}{\pi} \omega \int_0^{\infty} [\varepsilon_R(\omega') - 1] \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (87)$$

С помощью первой формулы по известной функции $\varepsilon_I(\omega)$ можно вычислить функцию $\varepsilon_R(\omega)$, которая обязательно окажется четной. При этом функция $\varepsilon_I(\omega)$ может быть приближенной, или эмпирической (полученной из какого-либо эксперимента), или модельной. По отношению ко второй формуле приведенное утверждение не всегда верно, так как функция $\varepsilon_I(\omega)$ должна быть не только нечетной, что выполняется, но, как мы увидим, и положительной, чего не всегда можно достичь.

Посмотрим, что дают формулы при $\omega = 0$. В первой формуле (87) можно просто положить $\omega = 0$:

$$\varepsilon_R(0) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt = \varepsilon_0 = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon_I(\omega) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (88)$$

Вторая формула требует бóльших усилий. Во-первых, при $\omega \rightarrow 0$ нечетная функция $\varepsilon_I(\omega)$ обращается в нуль, поэтому конечной величиной может быть предел отношения $\varepsilon_I(\omega)/\omega$. Во-вторых, получающийся предельным переходом во втором равенстве (87) интеграл может оказаться расходящимся. Тогда, поскольку расходимость возникает из-за замены интеграла в смысле главного значения при знаменателе $\omega'^2 - \omega^2$ на обычный интеграл со знаменателем ω'^2 , чтобы устранить расходимость надо просто отбросить интеграл от расходящейся части функции. Для этого достаточно записать

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_I(\omega)}{\omega} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_R(\omega) - \varepsilon_R(0)}{\omega^2} d\omega. \quad (89)$$

С другой стороны, при $\omega \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_R(\omega) \sim 1 - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\infty} \omega' \varepsilon_I(\omega') d\omega', \quad \varepsilon_I(\omega) \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} [\varepsilon_R(\omega') - 1] d\omega'. \quad (90)$$

Таким образом, из дисперсионных формул вытекают выражения значений преобразований при нулевой частоте, а также их асимптотики через интегралы от значений друг друга. Предполагается, что входящие в них интегралы сходятся и не равны нулю.

Напомним, что здесь рассматривались диспергирующие диэлектрики.

§ 6. Волны в диспергирующих средах

1. *Плоская монохроматическая волна.* Ищем решения уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (91)$$

в виде плоской монохроматической волны частоты ω . Тогда уравнения для амплитуд волны при материальных уравнениях (62) и (65) примут вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mu \vec{E}. \quad (92)$$

Не раз применявшаяся процедура вывода волновых уравнений приводит к уравнению, по форме совпадающему с однородным уравнением Гельмгольца:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \vec{E} = \varkappa^2 \vec{E}. \quad (93)$$

Однако здесь \varkappa не волновое число. Его квадрат — произведение преобразований Фурье от функций отклика

$$\varkappa^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \quad (94)$$

и в общем случае комплексно. Поэтому вектор

$$\vec{\varkappa}(\omega) = \varkappa_{\text{R}} + i\varkappa_{\text{I}}, \quad \varkappa^2 = \varkappa_{\text{R}}^2 - \varkappa_{\text{I}}^2 + 2i\varkappa_{\text{R}}\varkappa_{\text{I}}, \quad (95)$$

а волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}} = \vec{E}_0 e^{i\varkappa_{\text{R}}\vec{r} - \varkappa_{\text{I}}\vec{r}}. \quad (96)$$

Вещественная часть вектора $\vec{\varkappa}$ определяет гармоническое колебание волны, а мнимая — изменение амплитуды. Вещественная и

комплексная части вектора могут не совпадать, так что плоскости постоянной фазы и постоянной амплитуды могут различаться.

2. *Немагнитная почти прозрачная среда.* Большинство диспергирующих сред немагнитные, у них $\mu = 1$. Почти прозрачная среда характеризуется тем, что у нее мнимая часть преобразования функции отклика значительно меньше вещественной: $\varepsilon_I \ll \varepsilon_R$. Для простоты будем считать, что $\vec{\varkappa}_I \parallel \vec{\varkappa}_R$. Тогда $\varkappa_I \ll \varkappa_R$ и

$$\begin{aligned} \varkappa_R + i\varkappa_I &= \frac{\omega}{c}(n_R + in_I), & n_R^2 - n_I^2 + 2in_R n_I &= \varepsilon_R + i\varepsilon_I, \\ n_R^2 - n_I^2 &\approx n_R^2 = \varepsilon_R, & n_R &= \sqrt{\varepsilon_R} > 0, & n_I &= \frac{\varepsilon_I}{2\sqrt{\varepsilon_R}}. \end{aligned} \quad (97)$$

Плоская монохроматическая волна в направлении вектора \vec{l} в такой среде характеризуется экспонентой

$$\exp\left(i\frac{\omega}{c}(n_R + in_I)\vec{l}\vec{r}\right) = \exp\left(i\frac{\omega}{c}n_R\vec{l}\vec{r}\right) \exp\left(-\frac{\omega}{c}n_I\vec{l}\vec{r}\right). \quad (98)$$

Частное

$$\varkappa = \frac{\omega}{c}n_R = \frac{\omega}{v} \quad (99)$$

здесь играет роль волнового числа, причем n_R — показатель преломления среды, $v = c/n_R$ монохроматическая скорость света в среде, а $\vec{\varkappa} = \varkappa\vec{l}$ — волновой вектор. Первая экспонента характеризует фазу волны. Вторая экспонента убывает с расстоянием, частное $\frac{\omega}{c}n_I$ — коэффициент ослабления амплитуды волны, а так как поток энергии пропорционален квадрату амплитуды, то коэффициент поглощения излучения за счет дисперсии составляет

$$\alpha = 2\frac{\omega}{c}n_I. \quad (100)$$

Напомним, что все величины при этом ($n_R(\omega)$ и $n_I(\omega)$, а следовательно, $\varkappa(\omega)$ и $\alpha(\omega)$) зависят от частоты. Из равенств (97) и (100) следует, что должно быть $\varepsilon_I > 0$. В этом мы убедимся ниже при рассмотрении конкретных сред.

§ 7. Энергетическое соотношение при наличии дисперсии

1. *Поток энергии.* Выясним, как отражается дисперсия среды на энергетике поля. Пусть в диспергирующей среде идет волна, т. е. нет свободных зарядов и токов.

Как и при выводе энергетического соотношения в случае отсутствия дисперсии, выпишем уравнения Максвелла с роторами:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (101)$$

Умножив первое уравнение на \vec{H} , а второе на \vec{E} и вычтя результаты, получим с использованием векторного тождества

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{c}(\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}}). \quad (102)$$

Найденное соотношение позволяет написать выражение для вектора Пойнтинга:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{4\pi}(\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}}). \quad (103)$$

Чтобы продвинуться дальше, будем считать волну монохроматической.

2. *Монохроматическая волна.* В этом случае напряженности и индукции пропорциональны $e^{-i\omega t}$, причем связь между напряженностями и индукциями такая же, как между их преобразованиями Фурье.

Найдем среднее от дисперсии вектора потока энергии. Для получения физически осмысленных результатов следует взять вещественные части всех векторов поля:

$$\overline{\operatorname{div} \vec{S}} = -\frac{1}{4\pi} \left(\overline{\operatorname{Re} \vec{E} \cdot \operatorname{Re} \dot{\vec{D}}} + \overline{\operatorname{Re} \vec{H} \cdot \operatorname{Re} \dot{\vec{B}}} \right). \quad (104)$$

Возьмем полусумму напряженностей и их комплексно сопряженных

$$\operatorname{Re} \vec{E} = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*), \quad \operatorname{Re} \vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{H} + \vec{H}^*). \quad (105)$$

Тогда для электрической индукции получится

$$\operatorname{Re} \dot{\vec{D}} = \operatorname{Re} (-i\omega(\varepsilon_R + i\varepsilon_I)\vec{E}) = \frac{\omega}{2}[i\varepsilon_R(\vec{E} - \vec{E}^*) + \varepsilon_I(\vec{E} + \vec{E}^*)]. \quad (106)$$

Среднее от электрической части дивергенции

$$\overline{\operatorname{Re} \vec{E} \cdot \operatorname{Re} \dot{\vec{D}}} = \frac{\omega}{4} \left[i\varepsilon_R \left(\overline{(\vec{E}^*)^2} - \overline{(\vec{E})^2} \right) + \varepsilon_I 2\overline{\vec{E} \cdot \vec{E}^*} \right] = \frac{\omega}{2} \varepsilon_I |\vec{E}|^2. \quad (107)$$

Аналогичное равенство справедливо для магнитной части. Из этих равенств следует, что всегда должно быть $\varepsilon_1 \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$.

Итак, получаем

$$\overline{\operatorname{div} \vec{S}} = -\frac{\omega}{8\pi} \left[\varepsilon_1 \overline{|\vec{E}|^2} + \mu_1 \overline{|\vec{H}|^2} \right]. \quad (108)$$

Наличие дисперсии, когда мнимые части преобразований Фурье от функций отклика не равны нулю (а следовательно, положительны), средняя дивергенция потока энергии отрицательна, т. е. энергия волны убывает. Ясно, что она идет на раскачку и закручивание зарядов, создающих поляризацию и намагничение, и в конце концов переходит в тепло.

§ 8. Групповая скорость

Пусть в направлении оси аппликат идет группа (набор, семейство или, как говорят физики, пуч) монохроматических волн, компоненты которых можно представить интегралом

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t + i\kappa z} d\omega. \quad (109)$$

Весовая функция $A(\omega)$ имеет резкий максимум в точке $\omega = \omega_0$, так что эта группа — почти монохроматическая волна. Волновое число и частота связаны некоторым соотношением, которое называется дисперсионным. Мнимая часть преобразования функции отклика всегда мала по сравнению с вещественной, так что на небольших расстояниях поглощением можно пренебречь.

Будем считать независимой переменной κ , а частоту — функцией от нее, так что $\omega = \omega(\kappa)$, $\omega_0 = \omega(\kappa_0)$ и $\kappa = \kappa(\omega)$, $\kappa_0 = \kappa(\omega_0)$. Сделаем в интеграле (109) замену переменной интегрирования $\kappa = \kappa(\omega)$:

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega(\kappa)) e^{-i\omega(\kappa)t + i\kappa z} \omega'(\kappa) d\kappa. \quad (110)$$

Поскольку волна почти монохроматическая, заметный вклад в ее амплитуду дают значения экспоненты при значениях волновых чисел, близких к κ_0 . Поэтому разложим ω в показателе экспоненты по формуле Тейлора вблизи этой точки, ограничившись первой

производной:

$$\omega(\varkappa) \approx \omega_0 + \omega'(\varkappa_0)(\varkappa - \varkappa_0). \quad (111)$$

Приближение в интеграле выразится формулой

$$u(z, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega(\varkappa)) e^{-i[\omega_0 + \omega'(\varkappa_0)(\varkappa - \varkappa_0)]t + i\varkappa z} \omega'(\varkappa) d\varkappa. \quad (112)$$

Возвратившись к исходной переменной ω , убедимся, что преобразованный интеграл приближенно выражается через значение первоначального в нулевой момент:

$$\begin{aligned} u(z, t) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega_0 t + i\omega'(\varkappa_0)\varkappa_0 t + i\varkappa[z - \omega'(\varkappa_0)t]} d\omega = \\ &= e^{-i[\omega_0 + \omega'(\varkappa_0)\varkappa_0]t} u(z - \omega'(\varkappa_0)t, 0). \end{aligned} \quad (113)$$

Энергетические величины пропорциональны квадратам напряженностей, а согласно приближению (113)

$$|u(z, t)|^2 \approx |u(z - \omega'(\varkappa_0)t, 0)|^2. \quad (114)$$

Здесь энергия группы волн в точке с координатой z в момент t равна (приближенно) энергии, которую несла волна в начальный момент в точке с координатой, меньшей z на величину $\omega'(\varkappa_0)t$, т. е. энергия перетекает со скоростью, которая называется групповой (индекс ноль опущен):

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{d\varkappa} = \frac{1}{\frac{d\varkappa}{d\omega}}. \quad (115)$$

Таким образом, с группой волн связаны две скорости. Одна определяет скорость распространения фазы волны и называется фазовой:

$$v_{\text{phs}} = \frac{c}{n}. \quad (116)$$

Другая соответствует перетеканию энергии волны, это групповая скорость, формула (115) для которой может быть переписана так:

$$v_{\text{gr}} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}. \quad (117)$$

Фазовая скорость может быть произвольной по величине и даже превосходить скорость света, так как фаза — это формальная характеристика волны и не соответствует перемещению какого-либо сигнала или материального объекта. Напротив, групповая скорость всегда меньше световой, так как это скорость перетекания характеристики движения с группой волн — энергии. Однако, это понятие может быть введено не во всех случаях, в частности, не в случае, если по формуле (117) получается скорость большая световой.

В следующих двух параграфах рассматриваются конкретные диспергирующие среды.

§ 9. Плазма как диспергирующая система

1. *Квазинейтральность плазмы.* Плазмой называется ионизованное вещество, т. е. состоящее из свободных электронов и положительно заряженных ионов. В целом это нейтральная среда, так как объемный заряд образоваться не может. Если бы в каком-то объеме в результате какого-то механизма произошло разделение зарядов, то очень быстро оно было бы ликвидировано, так как силы притяжения между зарядами противоположных знаков очень велики. Конечно, на расстояниях порядка расстояний между ионами плотность заряда флуктуирует и, следовательно, объемные заряды существуют. Однако области, существенно большие по размерам, должны быть нейтральны. Поэтому такое свойство плазмы называется квазинейтральностью.

Обозначим концентрацию электронов через n_e и ионов сорта j с зарядом Z_j — через n_j . Тогда должно выполняться условие квазинейтральности

$$\sum_j Z_j n_j - n_e = 0. \quad (118)$$

2. *Движение электрона под действием волны в плазме.* Пусть в плазме распространяется монохроматическая волна, электрическая напряженность которой

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (119)$$

Под действием волны электроны и ионы приходят в движение и начинают колебаться около положения своего равновесия. При этом электроны и ионы движутся в противоположных направлениях, так что происходит локальное разделение зарядов, хотя в целом

плазма остается нейтральной. Однако, поскольку ионы значительно массивней электронов, их отклонением от равновесия можно пренебречь и рассматривать движение одних электронов.

При написании уравнения движения электрона делаются те же предположения, что и при рассмотрении рассеяния свободными электронами. Во-первых, волна не разгоняет электрон до больших скоростей, электроны остаются нерелятивистскими. Поэтому используется нерелятивистское уравнение Ньютона. Не учитывается и магнитная часть силы Лоренца. Во-вторых, смещение электрона \vec{r} от положения равновесия не очень велико, так что амплитуду волны на всем протяжении траектории электрона можно считать постоянной.

Кроме того, предположим, что имеется тормозящая сила, происходящая из-за воздействия окружающих частиц плазмы. С некоторым приближением можно считать эту силу пропорциональной скорости движения электрона при отклонении его от равновесия, а также среднему числу столкновений, которые испытывает электрон в единицу времени. Тогда уравнение движения электрона в поле волны записывается в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - \nu_{\text{col}}m\dot{\vec{r}}. \quad (120)$$

Как всегда, общее решение линейного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однако, общее решение однородного уравнения с течением времени из-за действия столкновений быстро затухает. Волна же воздействует более длительное время (при решении уравнения — все время). Поэтому достаточно найти частное решение.

Так как волна (119) монохроматическая, т. е. пропорциональна экспоненте, то и решение будет пропорционально такой же экспоненте:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}. \quad (121)$$

Подставив такую форму решения в уравнение (120), найдем

$$\vec{r}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega(\omega + i\nu_{\text{col}})}, \quad \vec{r} = \frac{e\vec{E}}{m\omega(\omega + i\nu_{\text{col}})}. \quad (122)$$

3. *Поляризация зарядов.* Из-за смещения электронов в плазме возникает поляризация зарядов, вектор которой равен произведе-

нию плотности заряда $-en_e$ на смещение электронов:

$$\vec{\mathcal{P}} = -en_e \vec{r}. \quad (123)$$

В результате в данном месте создается электрическая индукция, вектор которой

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon(\omega)\vec{E}, \quad (124)$$

где для монохроматической волны

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m\omega(\omega + i\nu_{\text{col}})} = 1 - \frac{1}{m} \frac{4\pi e^2 n_e}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2} + \frac{i}{m} \frac{\nu_{\text{col}}}{\omega} \frac{4\pi e^2 n_e}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2} = \varepsilon_{\text{R}} + i\varepsilon_{\text{I}}. \quad (125)$$

Таким образом, для плазмы

$$\varepsilon_{\text{R}} = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2}, \quad \varepsilon_{\text{I}} = \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2} \frac{\nu_{\text{col}}}{\omega}, \quad (126)$$

где введена величина, называемая плазменной частотой:

$$\omega_{\text{p}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m}}. \quad (127)$$

4. *Аналитические свойства $\varepsilon(\omega)$.* Поскольку плазма является не диэлектриком, а проводником, эти свойства несколько отличаются от приведенных в § 5. Действительно, мнимая часть стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow 0$. Выделим эту особенность:

$$\varepsilon_{\text{I}}(\omega) = \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\nu_{\text{col}}} \frac{1}{\omega} - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{col}}^2} \frac{\omega}{\nu_{\text{col}}}. \quad (128)$$

Соотношения Крамерса—Кронига для плазмы выглядят поэтому так:

$$\varepsilon_{\text{R}}(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon_{\text{I}}(\omega') \frac{\omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad \varepsilon_{\text{I}}(\omega) = \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\nu_{\text{col}}} \frac{1}{\omega} - \frac{2}{\pi} \omega \int_0^{\infty} [\varepsilon_{\text{R}}(\omega') - 1] \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (129)$$

Можно показать, что коэффициент при обратной частоте в формуле (128) связан с проводимостью плазмы. Действительно, будем считать, как предполагалось и выше, что в плазме ионы неподвижны, а движутся только электроны, которые и создают проводимость. Пусть в плазме имеется постоянное электрическое поле \vec{E} .

Тогда уравнение движения электрона будет такое же, что и (120), но без последнего слагаемого справа. Плотность электронного тока, вызываемого внешним полем, составит $\vec{j}_e = -en_e\vec{r}$. Несмотря на действие постоянной силы скорости электронов не могут расти неограниченно, причиной чему являются снова их столкновения с ионами. Среднее время между столкновениями $t_{\text{col}} = 1/\nu_{\text{col}}$. Именно это время определяет величину достижимой скорости. Проинтегрировав уравнение движения при постоянном поле, с учетом сказанного получим, что

$$\vec{j}_e = \frac{e^2}{m} n_e \vec{E} t_{\text{col}} = \frac{e^2}{m\nu_{\text{col}}} n_e \vec{E} = \sigma \vec{E}. \quad (130)$$

Таким образом, проводимость плазмы $\sigma = \frac{e^2 n_e}{m\nu_{\text{col}}} = \frac{\omega_p^2}{4\pi\nu_{\text{col}}}$, так что первое слагаемое в (128) представляется в виде $4\pi\sigma/\omega$. Такое же слагаемое содержат дисперсионные соотношения и для всех проводников.

Для плазмы соотношения (88)–(89) справедливы с оговорками. Первое из них выполняется, если вместо ε_I подставить $\varepsilon_I - 4\pi\sigma/\omega$. Второе дает асимптотическое поведение при $\omega \rightarrow 0$, а предел этой разности, деленной на ω , при $\omega \rightarrow 0$ представляется расходящимся интегралом, который можно тем не менее вычислить, так, чтобы он оказался равным указанному пределу. Для этого подинтегральную функцию надо разложить на простейшие дроби и игнорировать интеграл от $1/\omega'^2$, как предел интеграла от $1/(\omega'^2 - \omega^2)$. Что касается соотношений (90), то первое из них соблюдается, а во втором можно получить асимптотику $\varepsilon_I(\omega)$, если разложить интеграл от $\varepsilon_R - 1$ до $1/\omega^3$.

5. *Оптические характеристики плазмы.* Как правило, частота столкновений значительно меньше, чем частота волны. Поэтому можно принять, что

$$\varepsilon_R = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_I = \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \nu_{\text{col}}. \quad (131)$$

Показатель преломления плазмы равен

$$n_R(\omega) = \sqrt{\varepsilon_R} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (132)$$

Через него выражаются как фазовая скорость

$$v_{\text{phs}} = \frac{c}{n_{\text{R}}(\omega)}, \quad (133)$$

так и групповая скорость

$$v_{\text{gr}} = \frac{c}{\frac{d\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{p}}^2}}{d\omega}} = cn_{\text{R}}(\omega). \quad (134)$$

Поскольку показатель преломления плазмы меньше единицы, фазовая скорость превосходит скорость света, но групповая скорость всегда меньше световой. Произведение фазовой и групповой скоростей для плазмы оказывается равным квадрату скорости света.

Мнимая часть показателя преломления получается из (100)

$$n_{\text{I}}(\omega) = \frac{\varepsilon_{\text{I}}}{2n_{\text{R}}(\omega)} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2} \frac{\nu_{\text{col}}}{\sqrt{\omega^2 - \nu_{\text{col}}^2}} \sim \frac{1}{2} \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^3} \nu_{\text{col}} \quad (135)$$

и согласно (100) определяет зависимость от частоты коэффициента поглощения плазмы

$$\alpha = 2 \frac{\omega}{c} n_{\text{I}} = \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega} \frac{\nu_{\text{col}}}{\sqrt{\omega^2 - \nu_{\text{col}}^2}} \sim \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2} \frac{\nu_{\text{col}}}{c}. \quad (136)$$

§ 10. Дисперсия на атомах

1. *Осцилляторная модель атома.* Уровни энергии атомов рассчитываются методами квантовой механики. Однако многие явления, связанные с атомами, можно описать в рамках классической электродинамики, что и было сделано. Для этого еще до создания квантовой механики была придумана так называемая осцилляторная модель атома.

Спектры атомов наблюдались, начиная с середины девятнадцатого века. В них присутствовали атомные линии, частоты которых измерялись. В качестве первой естественной модели линии приписали ее частоту собственной частоте гармонического осциллятора. Осцилляторов понадобилось много — для каждой линии свой со своей частотой. Соответствующее уравнение для осциллятора требует введения упругой силы, иначе называемой силой Гука. Эта сила заменяла кулоновскую силу, действующую на электрон.

Покажем действенность такой модели на примере описания дисперсии при взаимодействии излучения с атомом.

2. *Гармонический осциллятор.* Пусть линии с частотой ω_0 соответствует осциллятор, для которого ω_0 является собственной частотой. Тогда на электрон, чтобы он колебался с такой частотой, должна действовать сила $m\omega_0^2\vec{r}$, где m — масса электрона, \vec{r} — его смещение от положения равновесия. Уравнение движения осциллятора в таком случае имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r}. \quad (137)$$

Общее решение этого уравнения

$$\vec{r} = C_+e^{i\omega_0 t} + C_-e^{-i\omega_0 t} \text{ или } \vec{r} = C_c \cos(\omega_0 t) + C_s \sin(\omega_0 t). \quad (138)$$

3. *Действие волны на атомный электрон.* Пусть на атом падает монохроматическая волна с частотой ω

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (139)$$

Эта волна воздействует на атомный электрон, заставляя его прийти в движение.

Кроме того, когда электрон движется, на него оказывают влияние столкновения и соприкосновение атома с другими, свободными частицами. Все эти частицы тормозят электрон. Примем, что тормозящая сила такая же, какая была принята для плазмы, т. е. $-\nu_{\text{col}}m\dot{\vec{r}}$. Тогда уравнение движения атомного электрона под действием своей (гуковской) силы, силы Лоренца от падающей волны и тормозящей силы запишется в виде

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - m\nu_{\text{col}}\dot{\vec{r}} - e\vec{E}. \quad (140)$$

Общее решение этого уравнения состоит из суммы двух слагаемых, а именно, общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения содержит две экспоненты

$$\begin{aligned} \vec{r} = & C_+ \exp\left(-\left[\frac{\nu_{\text{col}}}{2} + \sqrt{\frac{\nu_{\text{col}}^2}{4} - \omega_0^2}\right]t\right) + C_- \exp\left(-\left[\frac{\nu_{\text{col}}}{2} - \sqrt{\frac{\nu_{\text{col}}^2}{4} - \omega_0^2}\right]t\right) \sim \\ & \sim C_+ e^{-[\nu_{\text{col}}/2 + i\omega_0]t} + C_- e^{-[\nu_{\text{col}}/2 - i\omega_0]t} \end{aligned} \quad (141)$$

и с течением времени затухает.

4. *Смещение электронов и поляризация зарядов.* Частное решение неоднородного уравнения находим в виде амплитуды, умноженной на ту же экспоненту, что и у волны, т. е. $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$. Подставляя в уравнение (140), находим

$$(-\omega^2 - i\omega\nu_{\text{col}} + \omega_0^2)\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}, \quad \vec{r} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu_{\text{col}}}. \quad (142)$$

Смещающиеся под действием волн электроны создают поляризацию зарядов. Вектор поляризации — это произведение

$$\vec{P} = -eN_e\vec{r} = -\frac{e^2}{m} \frac{N_e}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu_{\text{col}}}, \quad (143)$$

где N_e — концентрация атомов с электронами, участвующими в создании рассматриваемой линии.

С полученным вектором поляризации создается индукция

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon(\omega)\vec{E}, \quad (144)$$

где преобразование функции отклика

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu_{\text{col}}}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} N_e}. \quad (145)$$

Вещественная и мнимая части его

$$\varepsilon_R(\omega) = 1 - \frac{\omega_a^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\nu_{\text{col}}^2}, \quad \varepsilon_I(\omega) = \frac{\omega_a^2\omega\nu_{\text{col}}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\nu_{\text{col}}^2}. \quad (146)$$

5. *Оптические свойства атома.* В этом пункте рассмотрим свойства атома на частотах, близких к центральной частоте ω_0 .

Как и в плазме, частота столкновений значительно меньше частоты волны, т. е. $\nu_{\text{col}} \ll \omega$. В таком случае дробь в (142) принимает заметную величину только при частотах, близких к собственной, т. е. можно считать, что $\omega \approx \omega_0$. Тогда разность квадратов можно разложить на множители и принять, что

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0). \quad (147)$$

Вместо (146) получится

$$\varepsilon_R(\omega) = 1 - \frac{\omega_a^2}{2\omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4}, \quad \varepsilon_I = \frac{\omega_a^2}{2\omega_0} \frac{\nu_{\text{col}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4}. \quad (148)$$

Следовательно, коэффициент преломления на атоме

$$n_R(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_a^2}{2\omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4}}, \quad (149)$$

а коэффициент поглощения вблизи центральной частоты ω_0 (там можно считать, что $n_R = 1$)

$$\alpha(\omega) = 2\frac{\omega_0}{c}n_I = \frac{\omega_0}{c}\varepsilon_I(\omega) = \frac{\omega_a^2}{2c} \frac{\nu_{\text{col}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2/4}. \quad (150)$$

Этот коэффициент называется дисперсионным или лоренцевским. Частота ν_{col} называется шириной дисперсионной линии, а $\nu_{\text{col}}/2$ — полушириной. Если выразить расстояние по частоте от центральной частоты в полуширинах, т. е. положить $\omega = \omega_0 + \frac{\nu_{\text{col}}}{2}x$, то коэффициент (150) будет пропорционален дисперсионному профилю $\frac{1}{1+x^2}$.

Дисперсионный профиль по форме совпадает с профилем затухания (5.161) вследствие излучения, который применяется при той же осцилляторной модели. Поэтому часто и дисперсионный профиль называют профилем затухания вследствие столкновений. Как правило, ширина дисперсионного профиля гораздо больше, чем естественная ширина.

6. *Правило сумм.* Теперь рассмотрим, напротив, большие частоты, далекие от центральной частоты. Тогда асимптотика функции (145) на больших частотах

$$\varepsilon(\omega) \sim \varepsilon_{\text{Re}}(\omega) \sim 1 - \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\omega^2} N_e. \quad (151)$$

Сравнивая ее с асимптотикой (90), находим так называемое правило сумм:

$$\int_0^\infty \omega' \varepsilon_I(\omega') d\omega' = \frac{2\pi^2 e^2}{m} N_e. \quad (152)$$

Таким образом, интеграл от мнимой части преобразования функции отклика пропорционален числу атомов с электронами на определенных связанных состояниях. Аналогичное соотношение справедливо и по отношению к свободным электронам в плазме, о чем говорилось в предпоследнем пункте предыдущего параграфа..

7. *Нормальная и аномальная дисперсии.* Как видно из изложенного, зависимость $\varepsilon_R(\omega)$, а тем самым и показателя преломления от частоты может быть различной. Для плазмы функция $\varepsilon_R(\omega)$ с частотой монотонно возрастает. В случае же атомов зависимость от частоты более сложная. Если не учитывать влияния столкновений, то функция $\varepsilon_R(\omega)$ терпит разрыв, обращаясь в точке ω_0 в бесконечность, причем справа в положительную, а слева в отрицательную. Учет столкновений делает функцию непрерывной, но она может оставаться немонотонной. На рис. 31а показан ход $\varepsilon_R(\omega)$ в зависимости от x при $\frac{4\pi e^2}{m\omega_0\nu_{col}}N_e = 100$ с единицей в знаменателе и без нее. На рис. 31б даны такие же два графика функции $\varepsilon_I(\omega)$ при тех же параметрах.

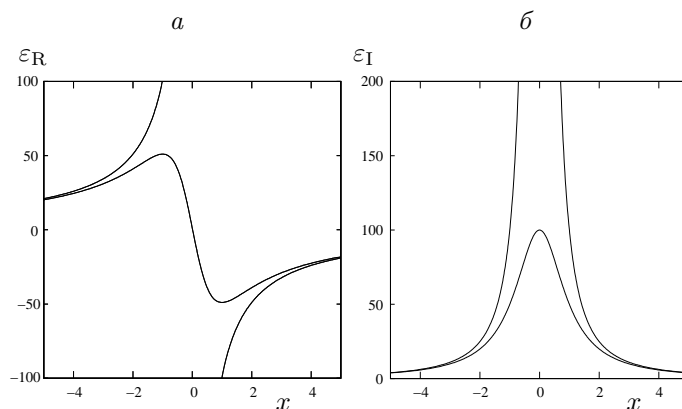


Рис. 31: Дисперсия на атоме.

а) Нормальная и аномальная дисперсия. б) Поглощение на атоме.

Дисперсия называется нормальной, если показатель преломления с частотой растет, в противном случае — аномальной. Таким образом, дисперсия в плазме нормальная, а на атомах может быть двоякой.

§ 11. Волны в анизотропных средах

1. *Материальное уравнение кристаллов.* В этом разделе рассмотрим, как распространяются волны в анизотропных средах. Изложение ведем по [4].

Анизотропия означает, что оптические свойства среды различаются в разных направлениях. Как говорилось в Главе 1, в этом случае соотношения между индукциями и напряженностями не сводятся к простой пропорциональности.

Таковыми средами являются, например, кристаллы. У большинства из них магнитная индукция пропорциональна магнитной напряженности, а векторы электрических величин связаны симметричным тензором электрической проницаемости (назовем его так). Обозначив оси координат x, y, z цифрами 1, 2, 3, запишем связь $\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}$ в матричном представлении:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (153)$$

Как известно из алгебры, всякая симметричная матрица может быть диагонализирована с помощью ортогональной матрицы (обозначим ее \hat{A}), причем на диагонали располагаются собственные значения матрицы, их обозначим через $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. По физическому смыслу эти значения положительны. Столбцы матрицы \hat{A} , являющиеся собственными векторами тензора, представляют векторы новых осей координат, которые называются главными осями кристалла. Диагональная матрица получается из исходной так:

$$\hat{\epsilon}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = \hat{A}^T \hat{\epsilon} \hat{A}. \quad (154)$$

2. *Плоская монохроматическая волна.* Запишем уравнения Максвелла для волны, т. е. для случая отсутствия внешних зарядов и токов:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (155)$$

Все векторы плоской монохроматической волны пропорциональны $e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$, так что уравнения для комплексных амплитуд записываются в форме

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}, \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \vec{D}. \quad (156)$$

Подставив \vec{H} из предпоследнего уравнения в последнее, получим

$$\vec{k} \times \left(\frac{c}{\omega\mu} \vec{k} \times \vec{E} \right) = -\frac{\omega}{c} \vec{D}, \quad k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - \frac{\omega^2\mu}{c^2} \vec{D} = 0. \quad (157)$$

Для упрощения вместо волнового вектора \vec{k} вводят безразмерный вектор $\vec{n} = \frac{c}{\omega\sqrt{\mu}} \vec{k}$. Для него уравнение (157) после подстановки материального соотношения (153) переписывается в матричной записи так:

$$(n^2 - \vec{n}\vec{n}^T - \hat{\varepsilon}) \vec{E} = 0. \quad (158)$$

Приведем матрицу $\hat{\varepsilon}$ к диагональному виду. Одновременно, преобразуем векторы \vec{n} и \vec{E} : $\vec{n}_0 = \hat{A}^T \vec{n}$, $\vec{E}_0 = \hat{A}^T \vec{E}$. В этих обозначениях уравнение (158) примет вид

$$(n^2 - \vec{n}_0 \vec{n}_0^T - \hat{\varepsilon}_0) \vec{E}_0 = 0. \quad (159)$$

Полученное матричное уравнение представляет однородную систему трех линейных уравнений, так что для существования нетривиального решения определитель ее должен быть равен нулю. Это условие (дисперсионное соотношение) называется уравнением Френеля. Собрав его слагаемые по количеству множителей ε , приведем его к виду

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 - [\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)n_{01}^2 + \varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)n_{02}^2 + \varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)n_{03}^2] + (\varepsilon_1 n_{01}^2 + \varepsilon_2 n_{02}^2 + \varepsilon_3 n_{03}^2) n_0^2 = 0. \quad (160)$$

Заметим, что квадрат вектора является инвариантом преобразования, т. е. $n_0^2 = n^2 = \vec{n}^2$.

Выделим у вектора \vec{n}_0 длину и орт направления: $\vec{n}_0 = n \vec{l}_0$, $\vec{l}_0 = (l_1, l_2, l_3)$, $|\vec{l}_0| = 1$. Для длины получится биквадратное уравнение

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 - [\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)l_1^2 + \varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)l_2^2 + \varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l_3^2] n^2 + (\varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 l_2^2 + \varepsilon_3 l_3^2) n^4 = 0. \quad (161)$$

Поскольку $n > 0$, уравнение определяет для каждого направления два значения n и два значения фазовой скорости $v_{\text{ph}} = c/n$. На некоторых направлениях скорости совпадают. Эти направления называются оптическими осями кристалла. Условием совпадения

является обращение в нуль дискриминанта уравнения для n наряду с нормировкой $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$. Очевидно, что эти направления не зависят от величины μ , но от собственных значений тензора их зависимость сложна (подробности см. [2]). Ниже мы рассмотрим простейший случай.

Легко находятся величины n и соответствующие фазовые скорости для направлений главных осей: два значения n для оси равны квадратным корням из с. з. для двух других осей. Например, для первой оси, т. е. при $l_2 = l_3 = 0, l_1 = 1$, из (161) получается уравнение $n_1^4 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)n_1^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 = 0$ и его два решения $n_1^{(1)} = \sqrt{\varepsilon_2}$, $n_1^{(2)} = \sqrt{\varepsilon_3}$. Этот результат ясен и из уравнения (159), так как для главных осей система распадается на три независимых уравнения. Для первой оси это уравнения $-\varepsilon_1 E_1 = 0, (n^2 - \varepsilon_2)E_2 = 0, (n^2 - \varepsilon_3)E_3 = 0$. Из первого получается, что $E_1 = 0$, а из двух других — значения $n_1^{(1)}$ и $n_1^{(2)}$.

3. *Поляризация волны.* Векторы \vec{D} и \vec{B} , как следует из первых двух уравнений (156), перпендикулярны направлению распространения волны, т. е. вектору \vec{k} , но вектор \vec{E} имеет и продольную составляющую, пропорциональную $(\vec{n}\vec{E})\vec{n}$ (в этом волны в кристаллах похожи на волны в неоднородных средах). Поэтому поляризационную матрицу приходится вводить через вектор \vec{D} , а не через \vec{E} . Поскольку амплитуды \vec{D} в общем случае являются комплексными векторами, поляризация волн, как можно предположить, должна быть эллиптической.

Будем оперировать с матрицами и векторами в представлении, когда тензор $\hat{\varepsilon}$ приведен к главным осям. Представим уравнение (159) как уравнение для вектора $\vec{D}_0 = \hat{\varepsilon}_0 \vec{E}_0$, для чего подставим в него соотношение, обратное этому, т. е. $\vec{E}_0 = \hat{\varepsilon}_0^{-1} \vec{D}_0$, и выразим вектор \vec{n}_0 через орт: $\vec{n}_0 = n \vec{l}_0$. Получится

$$\vec{D}_0 = n^2 [\hat{\varepsilon}_0^{-1} - \vec{l}_0 (\vec{l}_0^T \hat{\varepsilon}_0^{-1})] \vec{D}_0. \quad (162)$$

Спроецируем уравнение на плоскость, перпендикулярную вектору \vec{l}_0 . Чтобы представить вектор \vec{D}_0 в этой плоскости, определим в ней координатные орты:

$$\vec{e}_1 = (l_1 l_3 / s, l_2 l_3 / s, -s), \quad \vec{e}_2 = (-l_2 / s, l_1 / s, 0), \quad s = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}. \quad (163)$$

Эти векторы вместе с \vec{l}_0 образуют правый ортонормальный базис,

поэтому $\vec{D} = D_1^0 \vec{e}_1 + D_2^0 \vec{e}_2$. Представим эти орты столбцами и составим из них матрицу

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} l_1 l_3 / s & -l_2 / s & l_1 \\ l_2 l_3 / s & l_1 / s & l_2 \\ -s & 0 & l_3 \end{pmatrix}. \quad (164)$$

Эта матрица ортогональная, т. е. $\hat{S}^{-1} = \hat{S}^T$. Результат воздействия ее транспонированной на этот базис очевиден:

$$\hat{S}^T \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^T \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^T \vec{l}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (165)$$

Отсюда следует, что

$$\hat{S}^T \vec{l}_0 \vec{l}_0^T \hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{S}_0. \quad (166)$$

Теперь с помощью матрицы \hat{S} преобразуем уравнение (162):

$$\hat{S}^T \vec{D}_0 = n^2 \left[\hat{S}^T \hat{\varepsilon}_0^{-1} \hat{S} - \hat{S}^T \vec{l}_0 \vec{l}_0^T \hat{S} \hat{S}^T \hat{\varepsilon}_0^{-1} \hat{S} \right] \hat{S}^T \vec{D}_0. \quad (167)$$

Элементы преобразованной матрицы $\hat{\varepsilon}_* = \hat{S}^T \hat{\varepsilon}_0^{-1} \hat{S} = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, где $(s^2 = l_1^2 + l_2^2 = 1 - l_3^2)$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{l_2^2 + l_3^2}{\varepsilon_1} + \frac{l_1^2 + l_3^2}{\varepsilon_2} + \frac{l_1^2 + l_2^2}{\varepsilon_3} - a_{22}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{l_1 l_2 l_3}{s^2}, \\ a_{22} &= \frac{l_1^2 / \varepsilon_2 + l_2^2 / \varepsilon_1}{s^2}, \quad a_{13} = a_{31} = \frac{l_3}{s} \left(\frac{l_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{l_2^2}{\varepsilon_2} - \frac{s^2}{\varepsilon_3} \right), \\ a_{23} &= a_{32} = \frac{l_1 l_2}{s} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right), \quad a_{33} = \frac{l_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{l_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{l_3^2}{\varepsilon_3}. \end{aligned} \quad (168)$$

Преобразованная матрица оказалась симметричной, так как воздействие ортогональной матрицы не изменяет этого свойства.

Обозначим

$$\vec{D}_* = \hat{S}^T \vec{D}_0 = \begin{pmatrix} D_1^* \\ D_2^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}_* = \hat{S}^T \hat{\varepsilon}_0^{-1} \hat{S}. \quad (169)$$

В этих обозначениях уравнение (167) запишется так:

$$\vec{D}_* = n^2(\hat{\varepsilon}_* - \hat{S}_0\hat{\varepsilon}_*)\vec{D}_*. \quad (170)$$

В полученном уравнении третья компонента вектора \vec{D}_* равна нулю, так что третий столбец матрицы $\hat{\varepsilon}_*$ несущественен, а произведение матриц $\hat{S}_0\hat{\varepsilon}_*$ содержит только третью строчку, которая совпадает с третьей строчкой матрицы $\hat{\varepsilon}_*$, так что у разности, стоящей в скобках, элементы третьей строчки все равны нулю. В компонентах это уравнение выглядит следующим образом:

$$n^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^* \\ D_2^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^* \\ D_2^* \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (171)$$

Таким образом, существенным является только левый верхний минор $\check{\varepsilon} = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$, матричного уравнения (171).

Условие существования ненулевого решения системы однородных уравнений (171) (определитель равен нулю)

$$n^4 \left(\frac{l_1^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3} + \frac{l_2^2}{\varepsilon_1\varepsilon_3} + \frac{l_3^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \right) - n^2(a_{11} + a_{22}) + 1 = 0, \quad (172)$$

конечно, совпадает с уравнением Френеля.

Из уравнения (172) находятся два значения n_{\pm} для любого направления распространения волны:

$$\frac{1}{n_{\pm}^2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}, \quad (173)$$

для которых решается система (171). Эта система, если отбросить третью строчку и столбец, представляет собой уравнение на с. з. матрицы $\check{\varepsilon}$. Эти с. з. и равны $1/n_{\pm}^2$. Соответствующие им с. в., так как матрица симметрична, взаимно перпендикулярны и определяют положения плоскостей преимущественных колебаний линейно поляризованных волн.

4. *Одноосный кристалл.* В частном случае, когда два из трех с. з. совпадают, кристалл называется одноосным. Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{\parallel}$. Пусть $\vec{l}_0 = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ — волна идет под углом θ к оси аппликата. Уравнение Френеля запишется в виде (азимут φ волны не важен)

$$\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}^2 - \varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\parallel} + X)n^2 + Xn^4 = (n^2 - \varepsilon_{\perp})(Xn^2 - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp}) = 0. \quad (174)$$

Здесь $X = \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta$. Отсюда находим, что одно значение n , а следовательно, волновое число и фазовая скорость волны, не зависят от направления:

$$n = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad k = \frac{\omega}{c} n, \quad v_{\text{phs}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu}}. \quad (175)$$

Эту волну называют обыкновенной. Показатель преломления, волновое число и скорость второй, необыкновенной волны, напротив, от направления зависят через X :

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{X}}, \quad k = \frac{\omega}{c} n, \quad v_{\text{phs}} = c \sqrt{\frac{X}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \mu}}. \quad (176)$$

Скорости волн совпадают при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, т.е. в случае, когда волна идет вдоль оси аппликат или в противоположном направлении. Эта ось называется осью кристалла, она одна.

Для определения поляризации волн возьмем азимут $\varphi = 0$ и вектор $\vec{e}_3 = \vec{l}_0 = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Два других орта можно взять такими: $\vec{e}_1 = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$. При таком выборе матрица $\hat{\varepsilon}_0^{-1}$ получается уже диагональной:

$$a_{11} = \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} = \frac{X}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}, \quad a_{22} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp}}, \quad a_{33} = \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}}, \quad (177)$$

так что уравнение распадается на два и решения получаются сразу. С.в. совпадают с ортами осей на плоскости. По этим векторам направлены преимущественные колебания волн, так что при произвольном направлении каждая из двух волн, обыкновенная и необыкновенная, линейно поляризована. Исключением является случай, когда волна идет вдоль оптической оси. При $\theta = 0$ или π значения n_{\pm} совпадают, различие между обыкновенной и необыкновенной волнами пропадает, они идут с одинаковыми скоростями и их поляризации складываются, так что в общем она становится эллиптической.

Посмотрим еще, как располагается вектор напряженности. Для обыкновенной волны $n^2 = \varepsilon_{\perp}$ и с.в. в системе координат, в которой эти векторы имеют проекции только по одной оси, $\vec{D}_{\star} = D_2^{\star}(0, 1, 0)$. Вектор $\vec{D}_0 = \hat{S} \vec{D}_{\star} = \vec{D}_{\star}$, а $\vec{E}_0 = \hat{\varepsilon}_0^{-1} \vec{D}_0 = D_2^{\star} / \varepsilon_{\perp} (0, 1, 0)$. Таким образом, в обыкновенной волне вектор напряженности лежит в той

же плоскости, перпендикулярной вектору направления волны, что и вектор индукции.

При $n^2 = 1/a_{11}$ получается

$$\vec{D}_* = D_1^*(1, 0, 0), \quad \vec{D}_0 = D_1^*(\cos \theta, 0, -\sin \theta), \quad (178)$$

так что вектор $\vec{E}_0 = D_1^*(\cos \theta/\varepsilon_\perp, 0, -\sin \theta/\varepsilon_\parallel)$ имеет составляющие и по вектору направления и по вектору индукции:

$$\vec{E}_0 = a_{11}\vec{D}_0 + D_2^* \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varepsilon_\parallel} \right) \vec{l}_0. \quad (179)$$

§ 12. Волны в гиротропных средах

1. *Гиротропные среды.* Другой случай неизотропных сред — это так называемые гиротропные среды. В гиротропных средах матрицы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ не симметричны, а эрмитовы. Для диэлектрического тензора это означает, что $\hat{\varepsilon}^\dagger = \hat{\varepsilon}$ или в компонентах $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}^*$. При таком условии вещественная часть матрицы симметрична, а мнимая — антисимметрична. Действительно, если $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_R + i\hat{\varepsilon}_I$, то $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}^R + i\varepsilon_{jk}^I = \varepsilon_{kj}^R - i\varepsilon_{kj}^I$. У антисимметричного тензора третьего порядка всего три независимых компоненты, из которых можно составить вектор, называемый дуальным по отношению к тензору. В случае тензора $\hat{\varepsilon}$ этот вектор обозначается \vec{g} и называется вектором электрической гирации:

$$\vec{g} = (\varepsilon_{23}^I, -\varepsilon_{13}^I, \varepsilon_{12}^I). \quad (180)$$

Результат воздействия тензора на вектор напряженности можно представить в виде векторного произведения с вектором гирации:

$$\hat{\varepsilon}_1 \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12}^I & \varepsilon_{13}^I \\ -\varepsilon_{12}^I & 0 & \varepsilon_{23}^I \\ -\varepsilon_{13}^I & -\varepsilon_{23}^I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12}^I E_2 + \varepsilon_{13}^I E_3 \\ -\varepsilon_{12}^I E_1 + \varepsilon_{23}^I E_3 \\ -\varepsilon_{13}^I E_1 - \varepsilon_{23}^I E_2 \end{pmatrix} = \vec{E} \times \vec{g}. \quad (181)$$

Последнее произведение написано не в матричном, а в векторном представлении.

Аналогичная ситуация проявилась в случае антисимметричного тензора электромагнитного поля, магнитная часть которого образовывала вектор магнитной напряженности \vec{H} . В выражение для силы Лоренца этот вектор входил через векторное произведение со скоростью заряда.

Таким образом, материальное уравнение для электрической части волны можно записать в виде

$$\vec{D} = \hat{\epsilon}_R \vec{E} + i\vec{E} \times \vec{g}. \quad (182)$$

Для магнитной части все пишется точно так же.

В качестве примера гиротропной среды в [4] рассмотрены ферриты в магнитном поле, у которых играет роль магнитная часть волн. Здесь рассмотрим, следуя [18], более близкую для астрономов модель: плазма в магнитном поле.

2. *Материальное уравнение для плазмы в магнитном поле.* Примем ту же модель плазмы, которая была использована в §9 при рассмотрении дисперсии в плазме, и начнем с определения движения электрона. Однако в отличие от того рассмотрения пренебрежем влиянием столкновений, приводящих к потерям энергии электрона, и изучим влияние внешнего магнитного поля.

Обозначим индукцию поля через \vec{B}_0 . Тогда уравнение движения электрона под действием волны в плазме можно представить в виде, аналогичном уравнению (120):

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - \frac{e}{m}\dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0. \quad (183)$$

Здесь по-прежнему электрон считается нерелятивистским, принимается во внимание электрическая часть силы Лоренца волны, а магнитная часть считается малой и отброшена, но учитывается воздействие внешнего магнитного поля. Для монохроматической волны уравнение переписывается так:

$$-m\omega^2\vec{r} = -e\vec{E} + i\frac{e\omega}{c}\vec{r} \times \vec{B}_0. \quad (184)$$

Для простоты поместим начало координат в точку равновесия электрона, а ось аппликат направим по магнитному полю. Координаты радиуса-вектора обозначим с номерами проекций: $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$. Тогда в проекциях уравнение (184) запишется в виде трех уравнений:

$$-m\omega^2 r_1 = -eE_1 + i\frac{e\omega}{c}B_0 r_2, \quad -m\omega^2 r_2 = -eE_1 - i\frac{e\omega}{c}B_0 r_1, \quad -m\omega^2 r_3 = -eE_3. \quad (185)$$

Как и выше, находим только частное решение неоднородного уравнения, считая, что общее решение затухает достаточно быстро. С

найденным вектором \vec{r} получаем выражение для вектора поляризации:

$$4\pi\vec{\mathcal{P}} = -4\pi en_e \vec{r} = -4\pi en_e \begin{pmatrix} \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} & -i \frac{\omega_0}{\omega} \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} & 0 \\ i \frac{\omega_0}{\omega} \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} & \frac{e}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{m\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (186)$$

С этими выражениями из соотношения $\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{\mathcal{P}}$, находим

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_a = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (187)$$

Этот тензор является частным случаем общего эрмитова тензора, антисимметричная часть содержит только одну функцию, так что вектор гирации также имеет лишь одну координату, как и магнитное поле — аппликату: $\vec{g} = (0, 0, -\varepsilon_a)$.

Матрица (187) легко приводится к диагональному виду:

$$\hat{S}^{-1} \hat{\varepsilon} \hat{S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} - \varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ i & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (188)$$

Как и для всякого унитарного оператора $\hat{S}^{-1} = \hat{S}^{\dagger}$.

Рассмотрим два частных случая распространения волн в плазме по отношению к полю.

3. *Волна параллельная полю.* Все уравнения, описывающие распространение плоской монохроматической волны в анизотропной среде, т. е. (156)–(157), остаются в силе и для гиротропных сред, и материальное уравнение надо взять в том же виде $\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E}$, но с матрицей (187).

В этом пункте рассмотрим случай волны, идущей по направлению поля. При $\vec{k} = k(0, 0, 1)$ уравнения (156) примут вид

$$kB_3 = kD_3 = 0, \quad k \begin{pmatrix} B_2 \\ -B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\omega\mu}{c} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} E_2 \\ -E_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (189)$$

Исключение компонент вектора \vec{B} вместе с материальными соотношениями дает систему

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp})E_1 + i\varepsilon_a E_2 = 0, \quad -i\varepsilon_a E_1 + (n^2 - \varepsilon_{\perp})E_2 = 0. \quad (190)$$

Дисперсионное соотношение дает для n^2 с. з. (кроме третьего) матрицы $\hat{\varepsilon}$, а для компонент E_1, E_2 — элементы соответствующего с. в.: для $n^2 = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a$ получается $\vec{E}_R = E_R \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right)$, а для $n^2 = \varepsilon_{\perp} - \varepsilon_a$ — соответственно $\vec{E}_L = E_L \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. Для этих волн поляризационные матрицы получаются такими:

$$\check{S}_R = I_R \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad I_R = \frac{c}{16\pi} E_R^2, \quad \check{S}_L = I_L \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad I_L = \frac{c}{16\pi} E_L^2. \quad (191)$$

Эти матрицы описывают волны с равными нулю параметрами линейной поляризации и с противоположными знаками параметра круговой поляризации. Волна с бóльшим значением n^2 , т. е. движущаяся с большей скоростью и бóльшим волновым числом $k_R = \sqrt{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a}$, обладает правой круговой поляризацией, у нее $V_R = I_R$, а с меньшей скоростью ($k_L = \sqrt{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_a}$), у которой $V_L = -I_L$, — левой.

Пусть в начале координат $\vec{r} = 0$ в начальный момент $t = 0$ сумма двух волн имеет полную линейную поляризацию. Для этого необходимо, чтобы волны имели равные интенсивности $I_R = I_L = I$, а значит, и равные амплитуды $E_R = E_L = E$. Тогда в момент времени t и в точке с аппликатой z

$$\vec{E}_R + \vec{E}_L = \frac{E}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_R z} + \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_L z} \right] = \frac{E}{\sqrt{2}} \left(e^{ik_R z} + i e^{ik_L z} \right) e^{-i\omega t}. \quad (192)$$

Поляризационная матрица этой суперпозиции волн

$$\check{S} = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sin(k_R - k_L)z & \cos(k_R - k_L)z \\ \cos(k_R - k_L)z & 1 - \sin(k_R - k_L)z \end{pmatrix}. \quad (193)$$

Параметры Стокса ее: $I = I$, $Q = I \sin(k_R - k_L)z$, $U = I \cos(k_R - k_L)z$, $V = 0$. Поляризация остается линейной и полной (степень линейной поляризации $\sqrt{Q^2 + U^2}/I = 1$), но плоскость преимущественных колебаний, составляющая угол с осью абсцисс $\arctg \frac{U}{Q} = \frac{\pi}{4} - \frac{k_R - k_L}{2}z$, с

расстоянием z поворачивается. Такое вращение плоскости поляризации называется эффектом Фарадея. Этот эффект используется для определения величины магнитного поля в различных объектах.

4. *Волна перпендикулярная полю.* Теперь рассмотрим случай $\vec{k} = (1, 0, 0)$, для которого уравнения для волны предстанут в виде

$$kD_1 = kB_1 = 0, \quad k \begin{pmatrix} 0 \\ -B_3 \\ B_2 \end{pmatrix} = -\frac{\omega\mu}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} 0 \\ -E_3 \\ E_2 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad (194)$$

а материальные соотношения в виде

$$D_2 = \varepsilon_{\perp} E_2, \quad D_3 = \varepsilon_{\parallel} E_3. \quad (195)$$

Поскольку в этом случае $E_1 = 0$, т. е. продольной компоненты напряженности нет, волна полностью поперечная.

Для компоненты вектора напряженности вдоль поля E_3 дисперсионное соотношение приводит к следующим выражениям для волнового числа и показателя преломления:

$$k = k_O = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\mu}}, \quad n = n_O = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}, \quad (196)$$

т. е. точно таким же, как для плазмы без внешнего поля. Волна не замечает поля. Эта волна называется обыкновенной. Волну с ортогональной поляризацией, фазовая скорость которой зависит от магнитного поля, соответственно называют необыкновенной.

Определим поляризацию суммы обыкновенной и необыкновенной волн $E_O e^{-i\omega t + ik_O x} + E_N e^{-i\omega t + ik_N x}$. Ее поляризационная матрица

$$\check{S} = \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} |E_O|^2 & E_O E_N^* e^{i(k_O - k_N)x} \\ E_O^* E_N e^{-i(k_O - k_N)x} & |E_N|^2 \end{pmatrix} \quad (197)$$

и параметры Стокса

$$I = \frac{c}{8\pi} [|E_O|^2 + |E_N|^2], \quad Q = \frac{c}{8\pi} [|E_O|^2 - |E_N|^2], \quad (198)$$

$$U = \frac{c}{4\pi} [\text{Re} (E_O E_N^*) \cos \alpha + \text{Im} (E_O E_N^*) \sin \alpha], \quad (199)$$

$$V = \frac{c}{4\pi} [\text{Re} (E_O E_N^*) \sin \alpha - \text{Im} (E_O E_N^*) \cos \alpha]. \quad (200)$$

Здесь $\alpha = (k_O - k_N)x$. Интенсивность волны и параметр Q постоянны вдоль нее, а два других параметра изменяются периодически. Легко проверить, что $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$, т. е. поляризация полная, как у всякой монохроматической волны. В точках, где $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Im} (E_O E_N^*) / \operatorname{Re} (E_O E_N^*)$, поляризация полностью линейная. Напротив, там, где $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{Re} (E_O E_N^*) / \operatorname{Im} (E_O E_N^*)$, поляризация круговая. Переход от линейной поляризации к эллиптической и круговой составляет так называемый эффект Коттона—Мутона. Точно такой же эффект проявляется и при сложении обыкновенной и необыкновенной волн в одноосном кристалле.

Глава 8. Волновые и корпускулярные свойства света

§ 1. Воззрения на природу света

О природе света среди физиков и философов шел долгий спор. Еще в древности существовали две точки зрения на причину того, что мы видим предметы и различаем их цвета. Одна считала, что в самих телах находится что-то постороннее, а согласно другой сами части тела как-то колеблются. Из этих воззрений вытекало, что либо тела испускают какие-то частицы, либо они испускают волны.

Сначала принималось за очевидное, что свет распространяется мгновенно. Лишь в 1676 году Оле Кристенсен Ремер (1644–1710), наблюдая затмения спутников Юпитера, открыл конечность скорости света. Этот момент можно назвать началом научного изучения света.

Двойственность взглядов физиков на природу света сохранилась. Одни являлись приверженцами Исаака Ньютона (1643–1727) и считали свет состоящим из отдельных частиц — корпускул. Сам Ньютон при помощи призмы разложил белый солнечный свет в спектр, чем объяснил явление радуги. Он наблюдал цветные круги при прохождении света через линзу. Однако эти свойства света он приписывал закону всемирного тяготения. Он допускал волновые свойства излучения и пытался создать (неудачно) комбинированную теорию.

Волновая теория берет свое начало с работ Христиана Гюйгенса (1629–1695), который много сделал для оптики. Он открыл и изучал поляризацию света, двойное преломление в кристаллах и другие явления, связанные с распространением света. Однако он волновые свойства связывал с колебаниями эфира.

В конце XIX века, как казалось, полностью победила волновая теория. Генрих Герц, основываясь на явлениях интерференции и дифракции, присущих и свету, доказал существование электромагнитных волн, предсказанную теорией Максвелла.

Но век XX внес поправки. Тот же Герц открыл явление фотоэффекта, а именно, обнаружил, что электрический разряд между электродами усиливается, если их освещать светом. Это явление подробно исследовал Александр Григорьевич Столетов (1839–1896), а объяснение дал А.Эйнштейн, предположивший наличие у частицы

света — фотона — наряду с энергией — и импульса, о чем говорилось в Главе 2, посвященной теории относительности.

Еще более сильным аргументом в пользу корпускулярной теории излучения оказалось открытие в 1823 году эффекта Комптона (Артур Холли Комптон, 1892–1962).

Обо всех упомянутых явлениях и пойдет речь в этой главе, причем сначала будут описаны волновые свойства, а затем корпускулярные. Чтобы обнаружить волновые свойства, необходимо производить наблюдения не в свободном пространстве, а на некоторых поверхностях (экранах). Поэтому потребуется знать, как ведут себя волны около таких поверхностей, т. е. определить граничные условия для них, к чему мы сейчас и приступим.

§ 2. Отражение и преломление волн на границе двух сред

1. *Уравнения и граничные условия.* Пусть на границу раздела двух прозрачных диэлектриков (1) и (2), различающихся значениями зависящей от частоты ω диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$, падает плоская монохроматическая волна частоты ω под углом θ_0 к нормали. Прозрачность диэлектриков означает, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_1^I = \varepsilon_2^I = 0$. Волна частично отражается от границы, а частично проходит сквозь нее соответственно под углами θ_1 и θ_2 к нормальям в средах (рис. 32). Требуется найти связи между углами и интенсивностями волн.

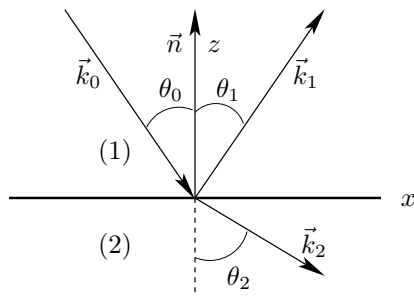


Рис. 32: Отражение и преломление волн.

Картина отражения и преломления волны является плоской, будем ее рассматривать в плоскости xz , направив ось z по нормали \vec{n} и поместив начало координат в одну из точек границы. Эта

плоскость называется плоскостью падения. Все волны плоские, их волновые векторы ($l = 0, 1, 2$)

$$\vec{k}_l = k_l(\sin \theta_l, 0, (-1)^{l+1} \cos \theta_l), \quad (1)$$

а напряженности

$$\vec{E}_l = \vec{E}_l^0 e^{i(\vec{k}_l \vec{r} - \omega_l t)}, \quad \vec{H}_l = \vec{H}_l^0 e^{i(\vec{k}_l \vec{r} - \omega_l t)} \quad (2)$$

Конечно, каждая волна заполняет свое полупространство, в точках на оси x сходятся все три волны, как показано на рис. 32 в выделенной точке.

Напряженности в полупространстве (1) представляют сумму двух волн, а в полупространстве (2) волна одна. Поскольку внешних зарядов и токов нет, в каждом полупространстве выполняются однородные уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{H}_{(j)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D}_{(j)} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_{(j)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_{(j)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H}_{(j)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_{(j)}}{\partial t}, \quad (3)$$

где $j = 1, 2$. Здесь, как отмечалось,

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(1)} &= \vec{E}_0 + \vec{E}_1, & \vec{H}_{(1)} &= \vec{H}_0 + \vec{H}_1, & \vec{D}_{(1)} &= \vec{D}_0 + \vec{D}_1, \\ \vec{E}_{(2)} &= \vec{E}_2, & \vec{H}_{(2)} &= \vec{H}_2, & \vec{D}_{(2)} &= \vec{D}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

При отсутствии внешних зарядов и токов должны выполняться граничные условия для проекций напряженностей на границу ($k_{ly} = 0, z = 0$)

$$E_{0\tau}^0 e^{i(k_{0\tau} x - \omega_0 t)} + E_{1\tau}^0 e^{i(k_{1\tau} x - \omega_1 t)} = E_{2\tau}^0 e^{i(k_{2\tau} x - \omega_2 t)}, \quad (6)$$

$$H_{0\tau} e^{i(k_{0\tau} x - \omega_0 t)} + H_{1\tau} e^{i(k_{1\tau} x - \omega_1 t)} = H_{2\tau} e^{i(k_{2\tau} x - \omega_2 t)}, \quad (7)$$

где $\vec{\tau}$ — произвольный вектор, лежащий на границе. Из этих условий сразу следует, что частота и составляющая волнового вектора вдоль границы при отражении и преломлении не изменяются, т. е. три волны имеют их общие значения $\omega_l = \omega$ и $k_{lx} = k_x$.

Так как волны монохроматические, то система (3) переписывается в виде

$$\operatorname{div} \vec{H}_{(j)} = 0, \quad \operatorname{div} \varepsilon_{(j)} \vec{E}_{(j)} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_{(j)} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}_{(j)}, \quad \operatorname{rot} \vec{H}_{(j)} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_{(j)} \vec{E}_{(j)}. \quad (8)$$

Здесь учтены материальные уравнения $\vec{D}_{(j)} = \varepsilon_{(j)} \vec{E}_{(j)}$. Для точек внутри каждого полупространства можно множители $\varepsilon_{(j)}(\omega)$ вынести из-под знака операции дивергенции и сократить на них, т. е. принять, что $\operatorname{div} \vec{E}_{(j)} = 0$. Однако на границе диэлектрическая проницаемость терпит разрыв, поэтому там такое действие произвести нельзя.

Запишем выражения для напряженностей (преобразованных по Фурье) в двух полупространствах:

$$\vec{E}_{(1)} = \vec{E}_0^0 e^{i(k_x x + k_{0z} z)} + \vec{E}_1^0 e^{i(k_x x + k_{1z} z)}, \quad \vec{E}_{(2)} = \vec{E}_2^0 e^{i(k_x x + k_{2z} z)}. \quad (9)$$

Из уравнений $\operatorname{div} \vec{E}_{(j)} = 0$:

$$\operatorname{div} \vec{E}_{(1)} = i\vec{k}_0 \vec{E}_0^0 e^{i(k_x x + k_{0z} z)} + i\vec{k}_1 \vec{E}_1^0 e^{i(k_x x + k_{1z} z)} = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}_{(2)} = i\vec{k}_2 \vec{E}_2^0 e^{i(k_x x + k_{2z} z)} = 0, \quad (11)$$

следует, что $\vec{k}_l \vec{E}_l^0 = 0$. Действительно, согласно второму из них это очевидно, а из первого это заключение получается с учетом того, что $k_{1z} \neq k_{0z}$, так что экспоненты изменяются независимо. Таким образом, напряженности всех волн ортогональны своим волновым векторам.

Для определения магнитных напряженностей применим уравнения с ротором:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{(1)} = i\vec{k}_0 \times \vec{E}_0^0 e^{i(k_x x + k_{0z} z)} + i\vec{k}_1 \times \vec{E}_1^0 e^{i(k_x x + k_{1z} z)} = i\frac{\omega}{c} \vec{H}_{(1)}, \quad (12)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{(2)} = i\vec{k}_2 \times \vec{E}_2^0 e^{i(k_x x + k_{2z} z)} = i\frac{\omega}{c} \vec{H}_{(2)}. \quad (13)$$

2. *Связи между углами.* Чтобы двигаться дальше, конкретизируем вид падающей волны. Для нее возможны два независимых случая выполнения соотношения $\vec{k}_0 \vec{E}_0^0 = 0$, а именно $\vec{E}_0 \parallel (0, 1, 0)$ и $\vec{E}_0 \parallel (-k_{0z}, 0, k_x)$. В первом случае электрическая напряженность перпендикулярна плоскости падения, во втором случае параллельна ей.

Рассмотрим сначала первую возможность. Так как амплитуды электрической напряженности отраженной и прошедшей волн линейно зависят от E_0^0 , они также имеют только одну компоненту, т. е. $\vec{E}_l = E_l^0 (0, 1, 0) e^{i(k_x x + k_{lz} z)}$, так что все электрические напряженности параллельны между собой и перпендикулярны плоскости падения.

Уравнения (12)–(13) можно записать так:

$$\frac{\omega}{c} \vec{H}_{(1)} = E_0^0(-k_{0z}, 0, k_x) e^{i(k_x x + k_{0z} z)} + E_1^0(-k_{1z}, 0, k_x) e^{i(k_x x + k_{1z} z)}, \quad (14)$$

$$\frac{\omega}{c} \vec{H}_{(2)} = E_2^0(-k_{2z}, 0, k_x) e^{i(k_x x + k_{2z} z)}. \quad (15)$$

Граничное условие (7) для магнитной напряженности получает выражение через проекции электрической напряженности:

$$k_{0z} E_0^0 + k_{1z} E_1^0 = k_{2z} E_2^0. \quad (16)$$

Вычисление двойного ротора в каждом из полупространств дает $\text{rot rot } \vec{E}_{(1)} =$

$$= \text{grad div } \vec{E}_{(1)} - \Delta \vec{E}_{(1)} = -\Delta \vec{E}_{(1)} = k_0^2 \vec{E}_0 + k_1^2 \vec{E}_1 = \frac{\omega^2 \varepsilon_1}{c^2} (\vec{E}_0 + \vec{E}_1), \quad (17)$$

$$\text{rot rot } \vec{E}_{(2)} = \text{grad div } \vec{E}_2 - \Delta \vec{E}_2 = -\Delta \vec{E}_2 = k_2^2 \vec{E}_2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \vec{E}_2. \quad (18)$$

Из последнего равенства следует, что $k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_2 / c^2$. Такие же соотношения между волновыми числами и частотой выполняются и для двух других волн, так как \vec{E}_0 и \vec{E}_1 по-разному зависят от z и поэтому коэффициенты при этих векторах равны порознь. Таким образом, справедливы соотношения

$$k_0 = k_1 = k = \frac{\omega}{c} n_1, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} n_2, \quad (19)$$

где $n_j = \sqrt{\varepsilon_j}$ — показатели преломления двух диэлектриков.

Из выведенных соотношений вытекают дальнейшие следствия. С учетом того, что $k_l^2 = k_x^2 + k_{lz}^2$, находим

$$k_{1z} = -k_{0z}, \quad k n_2 = k_2 n_1. \quad (20)$$

Выразим эти равенства через углы в соответствии с (1), приняв во внимание, что $k_{lx} = k_x$. Получится

$$\theta_1 = \theta_0, \quad n_1 \sin \theta_0 = n_2 \sin \theta_2, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (21)$$

Словами первое соотношение выражается так: угол отражения равен углу падения. Второе соотношение называется законом Снеллиуса и гласит, что произведение синусов как угла преломления,

так и угла падения на соответствующие коэффициенты преломления равны между собой. Иначе то же самое можно сказать и так: отношение синусов углов, образуемых волновыми векторами волн с нормалью к границе двух сред, равно отношению показателей преломления в этих средах, взятому в обратном порядке. При переходе в среду с большим значением n угол уменьшается, а в среду с меньшим n — увеличивается (именно этому случаю соответствует рис. 32).

Перейдем ко второму случаю. Формулы (14)–(15) показывают, что если электрическая напряженность соответствует первому случаю, т. е. перпендикулярна плоскости падения (имеет только компоненту по оси y), то магнитная параллельна этой плоскости. Легко убедиться, что верно и обратное. Поэтому во втором случае зададим параллельные магнитные напряженности в виде $H_l = H_l^0(0, 1, 0)e^{i(k_x x + k_{lz} z)}$. Все выкладки для этого случая повторяются почти дословно. Например, выражения для электрических напряженностей получаются такими:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{c}\varepsilon_1\vec{E}_{(1)} &= H_0^0(-k_{0z}, 0, k_x)e^{i(k_x x + k_{0z} z)} + H_1^0(-k_{1z}, 0, k_x)e^{i(k_x x + k_{1z} z)}, \\ -\frac{\omega}{c}\varepsilon_2\vec{E}_{(2)} &= H_2^0(-k_{2z}, 0, k_x)e^{i(k_x x + k_{2z} z)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Монохроматичность волн подразумевается, так что экспоненциальный множитель $e^{-i\omega t}$ везде опущен.

Соотношения между компонентами волновых векторов полностью сохраняются и сохраняются связи (21) между углами.

3. *Соотношения между амплитудами волн.* Чтобы найти связи между амплитудами волн в первом случае, привлечем равенство (6), а также соотношения (16), (20) и (21). Получится система двух уравнений

$$-k \cos \theta_0 E_0^0 + k \cos \theta_1 E_1^0 = -k_2 \cos \theta_2 E_2^0, \quad E_0^0 + E_1^0 = E_2^0. \quad (24)$$

Разрешая ее, находим выражения амплитуд отраженной и прошедшей волн через амплитуду падающей волны:

$$E_1^0 = \frac{n_1 \cos \theta_0 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_0 + n_2 \cos \theta_2} E_0^0, \quad E_2^0 = 2 \frac{n_1 \cos \theta_0}{n_1 \cos \theta_0 + n_2 \cos \theta_2} E_0^0. \quad (25)$$

Если исключить показатели преломления, то результат запишется короче:

$$E_1^0 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0^0, \quad E_2^0 = 2 \frac{\cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0^0. \quad (26)$$

Для второго случая в уравнениях, связывающих компоненты напряженностей, возникают различия, что является следствием уравнений (22)–(23). Здесь вместо системы (24) получается система

$$-k \cos \theta_0 H_0^0 + k \cos \theta_0 H_1^0 = -k_2 \frac{n_1^2}{n_2^2} \cos \theta_2 H_2^0, \quad H_0^0 + H_1^0 = H_2^0, \quad (27)$$

решение которой

$$H_1^0 = \frac{\sin(\theta_0 - \theta_2) \cos(\theta_0 + \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0^0, \quad H_2^0 = \frac{\sin(2\theta_0)}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0^0. \quad (28)$$

4. *Формулы Френеля.* Найдя связи между амплитудами волн, можно рассчитать и соотношения между энергиями, которые эти волны несут. Конечно, нас интересует средняя энергия, т. е. выражения для мгновенных величин надо усреднить по времени (по периоду).

Плотность энергии и вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) поля выражаются через напряженности поля формулами (1.39). Следует только учесть, как неоднократно отмечалось, что физический смысл имеют вещественные части напряженностей. Поэтому средняя плотность энергии волн $w_l = [\varepsilon_j (\text{Re } \vec{E}_l)^2 + (\text{Re } \vec{H}_l)^2] / (8\pi) =$

$$= \frac{1}{8\pi} \left[\varepsilon_j \left(\frac{\vec{E}_l + \vec{E}_l^*}{2} \right)^2 + \left(\frac{\vec{H}_l + \vec{H}_l^*}{2} \right)^2 \right] = \frac{\varepsilon_j |\vec{E}_l|^2 + |\vec{H}_l|^2}{16\pi}. \quad (29)$$

Произведения напряженностей и произведения сопряженных им векторов в среднем равны нулю, так как содержат квадраты экспонент $e^{-i\omega t}$ и $e^{i\omega t}$. Аналогично, вектор потока энергии

$$\vec{S}_l = \frac{c}{4\pi} [\text{Re } \vec{E}_l \times \text{Re } \vec{H}_l] = \frac{c}{16\pi} [\vec{E}_l \times \vec{H}_l^* + \vec{E}_l^* \times \vec{H}_l]. \quad (30)$$

Найдем этот вектор для каждой волны отдельно и для двух наших случаев (соответствующие им величины будем отмечать сверху индексами E и H). Для этого заметим, что векторное произведение

$$(0, 1, 0) \times (-k_{lz}, 0, k_x) = (k_x, 0, k_{lz}) = \vec{k}_l, \quad (31)$$

т. е. энергия каждой волны течет в направлении своего распространения, что естественно. Во втором случае произведение берется в обратном порядке, но в равенствах (22)–(23) слева стоит знак минус, отсутствующий в равенствах (14)–(15), так что высказанное утверждение остается в силе.

В случаях параллельности электрических или магнитных напряженностей находим соответственно

$$\vec{S}_l^E = \frac{c^2}{8\pi\omega} |E_l^0|^2 \vec{k}_l = w_l^E v_{(j)} \frac{\vec{k}_l}{k_l}, \quad \vec{S}_l^H = \frac{c^2}{8\pi\omega\varepsilon_j} |H_l^0|^2 \vec{k}_l = w_l^H v_{(j)} \frac{\vec{k}_l}{k_l}. \quad (32)$$

Так как горизонтальные потоки не передаются, то представляют интерес потоки вертикальные, т. е. проекции векторов (32) на нормаль — ось z . Найдем отношения таких потоков отраженной и прошедшей волн к потоку падающей волны, т. е. коэффициенты отражения и пропускания. Для первого случая согласно формулам (26)

$$R_1^E = \frac{\vec{S}_1^E \vec{n}}{\vec{S}_0^E \vec{n}} = \frac{|E_1^0|^2}{|E_0^0|^2} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_2^E = \frac{\vec{S}_1^E \vec{n} k_{2z}}{\vec{S}_0^E \vec{n} k_{0z}} = \frac{|E_1^0|^2 k_2 \cos \theta_2}{|E_0^0|^2 k \cos \theta_0} = \\ = 4 \frac{\cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_0 \cos \theta_2}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0) \sin \theta_2 \cos \theta_0} = \frac{\sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}. \quad (33)$$

Для второго случая находим аналогично

$$R_1^H = \frac{|H_1^0|^2}{|H_0^0|^2} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_0 + \theta_2)}, \quad (34)$$

$$R_2^H = \frac{|H_1^0|^2 \varepsilon_1 n_2 \cos \theta_2}{|H_0^0|^2 \varepsilon_2 n_1 \cos \theta_0} = \frac{\sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2) \cos^2(\theta_0 - \theta_2)}. \quad (35)$$

5. *Свойства волн при отражении и пропускании.* Волна может падать из среды с меньшим значением показателя преломления на среду с его большим значением или наоборот. Будем называть среды с большими и меньшими показателями преломления соответственно более плотными и менее плотными. Из формулы (21) следует, что из менее плотной среды всегда возможен выход прошедшей волны, так как при этом угол ее с нормалью меньше, чем угол падения. Однако в менее плотную среду переход волны излучения оказывается возможным не при всех значениях угла падения. Если $\sin \theta_0 > \sin \theta_0^1 = n_2/n_1 < 1$, то тогда получается $(n_1/n_2) \sin \theta_0 > 1$. В

таком случае, как говорят, происходит полное внутреннее отражение, вся энергия падающей волны остается в том же полупространстве, изменив направление.

Ситуация с полным внутренним отражением отражена на рис. 33, где расчет сделан для случая границы между воздухом и водой, коэффициенты преломления которых равны соответственно 1.0 и 1.33. Граничным значением угла падения при таких коэффициентах преломления является $\theta_0^l = \arcsin(1/1.33) = 0.8509$.

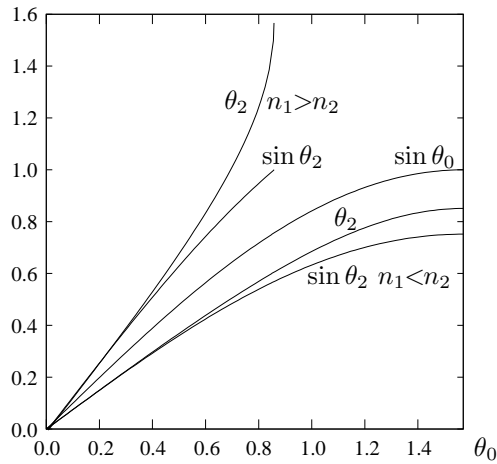


Рис. 33: Преобразование углов при прохождении волны через границу двух диэлектриков.

На рис. 34 изображены зависимости коэффициентов отражения и пропускания от угла падения для того же случая границы между воздухом и водой. Рис. 34а соответствует переходу в более плотную среду — воду, а рис. 34б — в менее плотную. Коэффициенты при параллельных электрических напряженностях монотонны, R_1^E возрастает, а R_2^E убывает. Коэффициенты же при параллельных магнитных напряженностях имеют экстремумы при $\theta_0^m = \arctg(n_2/n_1)$. При таком угле падения $\theta_0^m + \theta_2^m = \pi/2$, $\sin \theta_2^m = \cos \theta_0^m = n_1/\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, $\cos \theta_2^m = \sin \theta_0^m = n_2/\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, $R_1^H = 0$, $R_2^H = 1$. Этот угол называется углом Брюстера. На рис. 34а и 34б значения этого угла соответственно 0.92609 и 0.64470. Вообще же $R_1^E > R_1^H$, а $R_2^E < R_2^H$ везде кроме крайних точек, где они совпа-

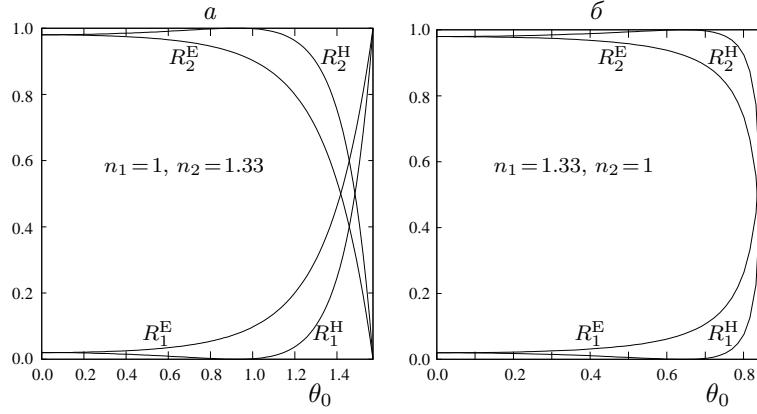


Рис. 34: Коэффициенты отражения и пропускания волн.

дают. В частном случае нормального падения волн предельным переходом ($\theta_2 \sim (n_1/n_2)\theta_0$ при $\theta_0 \rightarrow 0$) находим, что

$$R_1^E = R_1^H = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad R_2^E = R_2^H = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (36)$$

Напротив, при $\theta_0 = \pi/2$, а при $n_1 < n_2$ уже при $\theta_0 \geq \theta_0^l$, коэффициенты $R_1^E = R_1^H = 1$, $R_2^E = R_2^H = 0$.

В целом характер зависимостей схож, но при параллельных магнитных напряженностях, как уже отмечалось, имеется предельное значения угла падения волны, после которого достигаются и сохраняются значения $R_1 = 1$, $R_2 = 0$ (эти значения не помещены на рис. 34б). Заметим также, что при $n_1 > n_2$ около крайнего значения угла падения изменения всех функций значительно более резкие.

Легко проверить, что закон сохранения энергии выполняется, т. е. во всех случаях $R_1 + R_2 = 1$.

6. *Поляризация волн.* Рассмотрим, как изменяется поляризация волн при отражении и преломлении. Пусть волна падает под произвольным углом θ_0 и имеет две компоненты:

$$\vec{E}_0 = [E_E^0(0, 1, 0) + E_H^0(\cos \theta_0, 0, \sin \theta_0)] e^{i\varphi_0} e^{i[k(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0) - \omega t]}. \quad (37)$$

Предполагаем вещественность амплитуд E_E^0 и E_H^0 . Поляризацон-

ная матрица падающей волны в принятых ортах

$$\hat{S}_0 = \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} |E_E^0|^2 & E_E^0 E_H^0 e^{-i\varphi_0} \\ E_E^0 E_H^0 e^{i\varphi_0} & |E_H^0|^2 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

а параметры Стокса

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{c}{8\pi} [|E_E^0|^2 + |E_H^0|^2], & Q_0 &= \frac{c}{8\pi} [|E_E^0|^2 - |E_H^0|^2], \\ U_0 &= \frac{c}{4\pi} E_E^0 E_H^0 \cos \varphi_0, & V_0 &= \frac{c}{4\pi} E_E^0 E_H^0 \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (39)$$

Поскольку волны монохроматические, их поляризация полная, в общем случае эллиптическая.

Согласно формулам, связывающим амплитуды отраженных волн с амплитудами падающей, поляризационная матрица отраженной волны запишется так:

$$\hat{S}_1 = \frac{c}{8\pi} \begin{pmatrix} \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} |E_E^0|^2, & -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2) \operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} E_E^0 E_H^0 e^{-i\varphi_0} \\ -\frac{\sin(\theta_0 - \theta_2) \operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} E_E^0 E_H^0 e^{i\varphi_0}, & \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_0 + \theta_2)} |E_H^0|^2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Соответствующие параметры

$$I_1 = \frac{c}{8\pi} \left[\frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left(|E_E^0|^2 + \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} |E_H^0|^2 \right) \right], \quad (41)$$

$$Q_1 = \frac{c}{8\pi} \left[\frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left(|E_E^0|^2 - \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} |E_H^0|^2 \right) \right], \quad (42)$$

$$U_1 = -\frac{c}{4\pi} \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2) \cos(\theta_0 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} E_E^0 E_H^0 \cos \varphi_0, \quad (43)$$

$$V_1 = -\frac{c}{4\pi} \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2) \cos(\theta_0 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} E_E^0 E_H^0 \sin \varphi_0. \quad (44)$$

Выразим параметры отраженной волны через параметры падающей:

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left[\left(1 + \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} \right) I_0 + \frac{\sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} Q_0 \right], \quad (45)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left[\frac{\sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} I_0 + \left(1 + \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} \right) Q_0 \right], \quad (46)$$

$$U_1 = -\frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2) \cos(\theta_0 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} U_0, \quad V_1 = -\frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2) \cos(\theta_0 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} V_0. \quad (47)$$

Поляризация отраженной волны также полная эллиптическая.

При угле падения, равном углу Брюстера, получается

$$\hat{S}_1 = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2 \begin{pmatrix} |E_E^0|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_1 = Q_1 = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2 |E_E^0|^2, \quad (48)$$

что характеризует состояние полной линейной поляризации, причем вектор электрической напряженности перпендикулярен плоскости падения и параллелен границе раздела диэлектриков.

7. *Дисперсия белого света.* В заключение этого параграфа обсудим разложения белого света на монохроматические пучки после прохождения его через границу с более плотным диэлектриком. В опытах для этого использовалась стеклянная призма. Именно этот процесс дал название явлениям дисперсии.

Для простоты рассмотрим одну границу. Пусть пучок излучения, содержащий набор монохроматических волн, падает из вакуума (показатель преломления $n = 1$) на плоскую границу диэлектрика, показатель преломления которого зависит от частоты $n = n(\omega) > 1$. Следовательно, в этом диэлектрике волны разных частот имеют различную фазовую скорость и, что для нас здесь более важно, проходят в него под различными углами $\theta(\omega)$, величины которых определяются законом Снеллиуса

$$\theta(\omega) = \arcsin\left(\frac{\sin \theta_0}{n(\omega)}\right), \quad \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0 / n^2(\omega)}} \frac{n'(\omega)}{n^2(\omega)}, \quad (49)$$

где θ_0 — угол падения волны на границу.

Как отмечалось в конце предыдущей главы, дисперсия бывает нормальная и аномальная. Нормальная дисперсия по определению (по традиционной терминологии) происходит, если лучи с большей частотой, например синие, отклоняются больше, чем с меньшей, например красные. Большее отклонение от первоначального направления падающей волны означает меньший угол прохождения. Для того, чтобы оказалось $d\theta(\omega)/d\omega < 0$, необходимо, чтобы было $n'(\omega) > 0$, т. е. функция должна возрастать. В случае аномальной дисперсии происходит обратное: больше отклоняются лучи меньшей частоты.

§ 3. Интерференция

1. *Когерентные источники света.* Здесь будут рассмотрены проявления волновых свойств света, выражающиеся в двух тесно связанных явлениях: интерференции и дифракции. Сначала рассмотрим интерференцию.

Интерференция — это результат взаимодействия двух волн (световых пучков) от так называемых когерентных источников. Когерентными называются такие источники, которые испускают волны одной частоты, причем разность фаз между ними не зависит от времени. При некогерентности источников фазы их волн могут как-то изменяться, регулярно или хаотически.

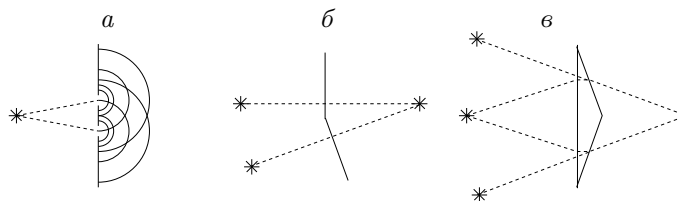


Рис. 35: Когерентные источники.

а) Прохождение света через два отверстия. *б)* Два мнимых изображения источника. *в)* Прохождение света через бипризму.

Существует ряд способов искусственного получения когерентных источников. Первый способ был предложен Томасом Юнгом (1773–1829). Излучение одного источника проходило через два отверстия в плоском экране (рис. 35*а*). За первым экраном помещался второй экран, на котором получалась картина от прошедшего света.

Несколько способов предложил Огюстен Жан Френель (1788–1827). Один из них заключался в получении двух мнимых изображений одного источника в двух зеркалах, расположенных под некоторым малым углом (рис. 35*б*). Другой способ основан на том, что свет от одного источника проходит через бипризму (рис. 35*в*).

Во всех случаях получается два источника, происходящие от одного, так что они, конечно, когерентны.

2. *Когерентные волны.* Пусть два когерентных точечных источника находятся в точках $\vec{r}_{\pm} = (\pm d, 0, 0)$ и испускают волны частотой ω . Рассмотрим взаимодействие волн в точке $\vec{r} = (s_x, D, s_z)$.

Примем, что расстояние D значительно больше, чем смещение точки наблюдения от оси y , а также расстояния между источниками, т. е. $s_x \ll D$, $s_z \ll D$ и $d \ll D$. Тогда волны можно считать сферическими. Каждая из них зависит гармонически от частоты и расстояния от своего источника. Хотя в общем случае сферических волн их амплитуды зависят от направления, здесь для простоты примем, что амплитуды постоянны.

Напряженности волн в точке наблюдения можно записать в виде

$$\vec{E}_{\pm} = \frac{\vec{F}_{\pm}}{R_{\pm}} e^{-i\omega t + i\vec{k}_{\pm} \vec{R}_{\pm}}, \quad \vec{k}_{\pm} = k\vec{e}_{\pm}, \quad |\vec{e}_{\pm}| = 1, \quad k = \frac{\omega}{v}, \quad \vec{R}_{\pm} = \vec{r} - \vec{r}_{\pm}, \quad R_{\pm} = |\vec{R}_{\pm}|, \quad (50)$$

где v — скорость света в той среде, в которой происходит опыт. Направления волн определяются векторами

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{\vec{R}_{\pm}}{R_{\pm}} = \frac{(s_x \mp d, D, s_z)}{R_{\pm}}, \quad R_{\pm} = \sqrt{(s_x \mp d)^2 + D^2 + s_z^2}, \quad (51)$$

так что произведения

$$\vec{k}_{\pm} \vec{R}_{\pm} = kR_{\pm}. \quad (52)$$

Так как волны поперечные, векторы напряженностей ортогональны векторам направлений. Самый общий вид их амплитуд в таком случае

$$\vec{F}_{\pm} = \left(F_{\pm x}, -F_{\pm x} \frac{s_x \mp d}{D} - F_{\pm z} \frac{s_z}{D}, F_{\pm z} \right). \quad (53)$$

Малость расстояния между источниками и отклонений точки наблюдения от оси y по сравнению с расстоянием D позволяет еще упростить выражения для амплитуд волн. Во-первых можно пренебречь компонентами амплитуд по оси y . Во-вторых, расстояния от источников до точки наблюдения R_{\pm} везде кроме показателя экспоненты заменить на D . Тогда

$$\vec{E}_{\pm} = \frac{1}{D} (F_{\pm x}, 0, F_{\pm z}) e^{-i\omega t + ikR_{\pm}}. \quad (54)$$

Можно упростить выражения и для расстояний R_{\pm} в экспонентах. Из формул для них в (51) видно, что проекция на ось z входит только в комбинации $s_x^2 + s_z^2$. Поэтому зависимость этих расстояний от s_x будет одинакова на каждой из окружностей с центрами

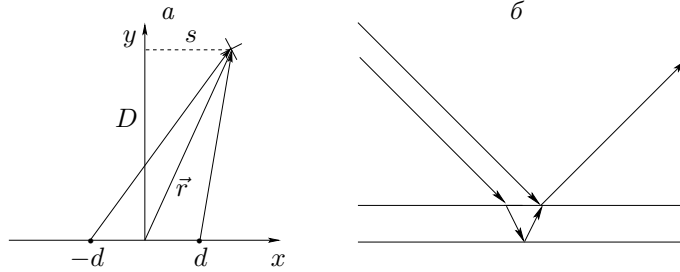


Рис. 36: Схемы интерференции.

а) Интерференция волн двух источников. б) Интерференция на пленке.

в начале координат и параллельных плоскости yz . Таким образом, можно принять, что $s_z = 0$, $s_x = s$, как изображено на рис. 36а, положить $R_{\pm} = \sqrt{D^2 + s^2 \mp 2sd + d^2}$ и рассматривать зависимость от s на плоскости xy .

Поскольку физический смысл имеет только вещественная часть напряженностей, отделим вещественные и мнимые части векторов напряженностей и разложим экспоненты по формулам Эйлера. Тогда вещественная часть суммы напряженностей двух волн будет

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{E}_+ + \vec{E}_-) = \frac{1}{D} \left[(F_{+x}^R, 0, F_{+z}^R) \cos(\omega t - kR_+) + (F_{+x}^I, 0, F_{+z}^I) \sin(\omega t - kR_+) + \right. \\ \left. + (F_{-x}^R, 0, F_{-z}^R) \cos(\omega t - kR_-) + (F_{-x}^I, 0, F_{-z}^I) \sin(\omega t - kR_-) \right]. \quad (55) \end{aligned}$$

Объединим слагаемые с синусом и косинусом одного аргумента. Получится

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{E}_+ + \vec{E}_-) = \frac{1}{D} \left[|F_{+x}| \cos(\omega t - kR_+ - \phi_{+x}) \vec{e}_x + |F_{+z}| \cos(\omega t - kR_+ - \phi_{+z}) \vec{e}_z + \right. \\ \left. + |F_{-x}| \cos(\omega t - kR_- - \phi_{-x}) \vec{e}_x + |F_{-z}| \cos(\omega t - kR_- - \phi_{-z}) \vec{e}_z \right]. \quad (56) \end{aligned}$$

Амплитуды представляют собой модули комплексных амплитуд, а фазы определяются тангенсами:

$$|F_{\pm x}| = \sqrt{(F_{\pm x}^R)^2 + (F_{\pm x}^I)^2}, |F_{\pm z}| = \sqrt{(F_{\pm z}^R)^2 + (F_{\pm z}^I)^2}, \text{tg } \phi_{\pm x} = \frac{F_{\pm x}^I}{F_{\pm x}^R}, \text{tg } \phi_{\pm z} = \frac{F_{\pm z}^I}{F_{\pm z}^R}. \quad (57)$$

3. *Интенсивность.* Чтобы найти стационарную картину интенсивности, надо возвести (56) в квадрат и усреднить по времени. Средние от квадратов косинусов равны 1/2, а среднее от произведения косинусов

$$\overline{\cos(\omega t - \phi_1) \cos(\omega t - \phi_2)} = \frac{1}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (58)$$

Для интенсивности получится

$$I = \frac{c}{4\pi} \overline{[\text{Re}(\vec{E}_+ + \vec{E}_-)]^2} = \quad (59)$$

$$= \frac{c}{8\pi} \frac{1}{D^2} [|F_+|^2 + |F_-|^2 + 2|F_{+x}||F_{-x}| \cos(\Delta\phi_x) + 2|F_{+z}||F_{-z}| \cos(\Delta\phi_z)].$$

Здесь квадрат амплитуды

$$|F_{\pm}|^2 = |F_{\pm x}|^2 + |F_{\pm z}|^2, \quad (60)$$

а разности фаз для проекций суммарной напряженности

$$\Delta\phi_x = k(R_+ - R_-) + \delta\phi_x, \quad \Delta\phi_z = k(R_+ - R_-) + \delta\phi_z, \quad (61)$$

$$\delta\phi_x = \phi_{+x} - \phi_{-x}, \quad \delta\phi_z = \phi_{+z} - \phi_{-z}. \quad (62)$$

Выражения для разностей фаз также можно упростить, пользуясь малостью всех расстояний по сравнению с D :

$$R_+ - R_- = \frac{R_+^2 - R_-^2}{R_+ + R_-} \sim -\frac{2sd}{2D} = -\frac{d}{D}s. \quad (63)$$

Таким образом,

$$I \sim \frac{c}{8\pi} \frac{1}{D^2} \left[|F_+|^2 + |F_-|^2 + 2|F_{+x}||F_{-x}| \cos\left(k\frac{d}{D}s - \delta\phi_x\right) + \right. \quad (64)$$

$$\left. + 2|F_{+z}||F_{-z}| \cos\left(k\frac{d}{D}s - \delta\phi_z\right) \right].$$

Из полученной формулы следует, что в выражении для R_{\pm} можно было опустить и сумму $s^2 + d^2$, малую по сравнению с D , оставив только $R_{\pm} = \sqrt{D^2 \mp 2sd/D}$.

Итак, интенсивность представилась в виде постоянного слагаемого и двух синусоид, зависящих от расстояния s . В следующем

пункте покажем, что сумма двух синусоид также синусоида. Одновременно будет рассмотрен простой вариант демонстрации интерференции.

4. *Упрощенное рассуждение.* Проекция напряженности волн на три оси имеют одинаковую структуру, запишем их в одном виде и преобразуем:

$$A_+ \cos(\omega t - \phi_+) + A_- \cos(\omega t - \phi_-) = A \cos(\omega t - \phi). \quad (65)$$

Распишем косинусы разности и приравняем коэффициенты при $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$. Получится два равенства

$$A_+ \cos \phi_+ + A_- \cos \phi_- = A \cos \phi, \quad A_+ \sin \phi_+ + A_- \sin \phi_- = A \sin \phi. \quad (66)$$

Сложив квадраты этих равенств и поделив второе на первое, найдем

$$A^2 = A_+^2 + A_-^2 + 2A_+A_- \cos(\phi_+ - \phi_-), \quad \text{tg } \phi = \frac{A_+ \sin \phi_+ + A_- \sin \phi_-}{A_+ \cos \phi_+ + A_- \cos \phi_-}. \quad (67)$$

Из выражения для квадрата амплитуды видно, что она синусоидально зависит от разности фаз двух волн. Если эта разность кратна 2π , то косинус равен 1 и $A = |A_+ + A_-|$, если же разность фаз равна нечетному числу π , то косинус равен -1 и $A = |A_+ - A_-|$. Таким образом, если амплитуды волн одного знака, то при $\phi_+ - \phi_- = 2\pi j$, где j — любое целое число, амплитуда суммы волн максимальна, при $\phi_+ - \phi_- = \pi(2j + 1)$ — минимальна. В этом заключается явление интерференции волн.

5. *Интерференция.* Вернемся к рассмотрению сложения двух волн. Как следует из предыдущего пункта, слагаемые с косинусами (64) можно объединить:

$$I = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{D^2} \left[|F_+|^2 + |F_-|^2 + 2|F| \cos \left(2k \frac{d}{D} s - \phi \right) \right], \quad (68)$$

где амплитуда колебаний $|F| =$

$$= \sqrt{|F_{+x}|^2 |F_{-x}|^2 + |E_{+z}|^2 |E_{-z}|^2 + 2|F_{+x}| |F_{-x}| |F_{+z}| |F_{-z}| \cos(\delta\phi_x - \delta\phi_z)}, \quad (69)$$

а тангенс новой фазы

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{|F_{+x}| |F_{-x}| \sin(\delta\phi_x) + |F_{+z}| |F_{-z}| \sin(\delta\phi_z)}{|E_{+x}| |E_{-x}| \cos(\delta\phi_x) + |F_{+x}| |F_{-z}| \cos(\delta\phi_z)}. \quad (70)$$

Таким образом, интенсивность излучения, возникающего в результате сложения двух когерентных волн, зависит от координаты, которая изменяется вдоль оси, параллельной линии источников и лежащей в плоскости, содержащей векторы направления волн. Зависимость эта синусоидальная, значения интенсивности колеблются около среднего значения, так что на картинной плоскости получаются более яркие и более темные полосы. Период колебаний, называемый разностью хода, равен

$$T = \frac{2\pi}{k} \frac{D}{2d} = \frac{2\pi v}{2\pi\nu} \frac{D}{d} = \frac{\lambda D}{2d}. \quad (71)$$

Разность хода тем больше, чем больше длина волны и расстояние от источников до экрана, а также чем меньше расстояние между источниками.

6. *Интерференция на пленках.* Радужную интерференционную картину на пленках нефти на дорогах видел каждый. Схема ее образования изображена на рис. 36б (стр. 306).

Плоская волна падает на границу с более плотным диэлектриком (показатель преломления которого n_2 больше, чем n_1 у среды, откуда идет волна). Диэлектрик представляет собой некоторый слой толщиной d , назовем его пленкой. Нижняя его граница отделяет его от еще более плотного диэлектрика с $n_3 > n_2$. Волна частично проходит вглубь диэлектрика, частично отражается от границы. Для простоты предполагаем, что границы пленки — это параллельные плоскости (бесконечные). Отражение и преломление происходят в каждой точке границы. Внутри слоя также происходят частичное отражение и пропускание прошедшей волны.

Поскольку диэлектрик в слое более плотный, угол θ_* , под которым волна проходит в него, меньше угла падения θ_0 . Отражение в слое происходит под тем же углом θ_* , из слоя волна выходит снова под углом θ_0 . Углы связаны законом Снеллиуса $\sin \theta_* = (n_1/n_2) \sin \theta_0$.

В той точке, в которой волна, побывавшая в пленке, выходит из нее, тоже падает волна той же частоты и отражается под тем же

углом, сливаясь с вышедшей волной. Но вышедшая волна прошла дополнительный путь до нижней границы и обратно. Этот путь равен $2d/\cos\theta_*$. На него волна затратила время $2dn_2/(c \cdot \cos\theta_*)$, так что между волнами образовалась разность фаз

$$2 \frac{d}{\cos\theta_*} \omega \frac{n_2}{c} = 2 \frac{d}{c} \omega \frac{n_2^2}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_0}}. \quad (72)$$

В остальном они полностью когерентны, так как происходят от одного источника — первоначальной волны.

Если толщина пленки переменная, то в разных местах образуется различная разность хода, что приведет к появлению интерференционной картины. Если при этом показатель преломления зависит от частоты, а на пленку падает белый свет, то картина получится радужная.

§ 4. Явление дифракции

1. *Экран на пути пучка света.* Согласно геометрической оптике, если на пути светового пучка располагается некоторая поверхность, назовем ее экраном-преградой, то свет не может ее обойти, так что после нее образуется тень. Однако свет, даже при малых длинах волн, обладает волновыми свойствами, которые приводят к тому, что в области геометрической тени образуются пучки различной интенсивности. На экране, поставленном на пути этих пучков (назовем его демонстрирующим экраном), получается сложная картина более светлых и более темных полос. Лучи как бы заворачивают за преграду и взаимодействуют между собой. Это явление называется дифракцией.

Экран-преграда может быть различной формы, иметь отверстия или прорезы также различных размеров.

Для расчета получающейся картины требуется точное решение краевых задач для волнового уравнения, что составляет сложную проблему. Поэтому были придуманы приближенные способы расчетов дифракционных картин. При их использовании считается, что отклонения от геометрической оптики невелики.

Имеется два вида приближений, которые называются по именам предложивших их физиков. В основе теории лежит формула Кирхгофа, которую здесь выведем.

2. *Формула Кирхгофа.* Исходим из формулы Грина

$$\int_{\mathcal{V}} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d^3r = \oint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d^2\Sigma, \quad (73)$$

где φ и ψ — произвольные достаточно гладкие функции, \mathcal{V} — некоторый трехмерный объем, а Σ — ограничивающая его поверхность, также достаточно гладкая. В интеграле по поверхности от функций берутся производные по нормали к поверхности.

Выберем в качестве функции ψ преобразование Фурье по времени от функции Грина волнового уравнения $G(\underline{r}) = G(\vec{r}, t)$ (формула (1.71)):

$$\psi(\vec{r}) = v \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(vt - r) e^{i\omega t} v dt = \frac{1}{4\pi r} e^{i\omega r/v} = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr}. \quad (74)$$

Здесь, как всегда, $r = |\vec{r}|$ и $k = \omega/v$. Из уравнения для функции Грина (1.61) находим уравнение, которому подчиняется ее преобразование:

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(t, \vec{r}) = \frac{1}{v} \delta(t) \delta(\vec{r}), \quad (k^2 + \Delta) \psi = -\delta(r). \quad (75)$$

При взятии интеграла от второй производной необходимо дважды проинтегрировать по частям. Очевидно, что $\psi(\vec{r}) = G(r)$ — это функция Грина уравнения Гельмгольца.

Пусть функция $\varphi(\vec{r}) = u(\vec{r})$ является решением однородного уравнения Гельмгольца

$$(k^2 + \Delta)u = 0. \quad (76)$$

Подставив в формулу (73) выражения функций $\varphi(\vec{r}')$ и $\psi(\vec{r} - \vec{r}')$, вытекающие из определяющих их уравнений, и взяв интеграл от дельта-функции, придем к формуле Кирхгофа

$$u(\vec{r}) = \oint_{\Sigma} \left[G(|\vec{r} - \vec{r}'|) \frac{\partial u(\vec{r}')}{\partial n} - u(\vec{r}') \frac{\partial G(|\vec{r} - \vec{r}'|)}{\partial n} \right] d^2\Sigma. \quad (77)$$

В формуле Кирхгофа значение решения уравнения Гельмгольца в произвольной точке выражается через ее значения на некоторой замкнутой поверхности. Это, конечно, не является решением

задачи, так как значения на поверхности тоже сперва надо найти, однако формула позволяет вычислять искомые функции, если их значения на поверхности удастся как-то определить, например, приближенно. К таким случаям мы и обратимся далее. В качестве функции $u(\vec{r})$ можно рассматривать одну из компонент электрической или магнитной напряженностей, которые и определяются уравнением Гельмгольца с заданными граничными условиями.

Формула (77) демонстрирует так называемый принцип Гюйгенса, гласящий, что значения функций электромагнитного поля могут быть получены, если рассматривать их значения на некоторой поверхности как источники поля. Этот принцип, сформулированный как качественное свойство поля, был затем уточнен другими физиками. Наибольший вклад внесли Огюстен Жан Френель (1788-1827) и Густав Роберт Кирхгоф (1824-1887).

3. *Дифракция Френеля.* Пусть на расстоянии R_0 от плоского экрана-преграды расположен источник света S. В экране имеется отверстие, через которое свет проходит на другую сторону от экрана, где на расстоянии R находится наблюдатель O (рис. 37a). Оба расстояния большие.

Принимая во внимание то обстоятельство, что падающая на экран волна расходящаяся сферическая, но источник далеко, в качестве любой декартовой компоненты волны возьмем ее асимптотику

$$u(R_0) = \frac{f}{R_0} e^{ikR_0}, \quad (78)$$

где f — амплитуда. При нахождении производных по нормали еще раз используем большую величину расстояния R_0 . Производная по направлению, как известно, равна проекции градиента на это направление, а градиент равен производной по R_0 , умноженной на $\vec{\nabla}R_0 = \vec{R}_0/R_0$. При этом мы ограничиваемся слагаемыми, убывающими с расстоянием не быстрее, чем $1/R_0$, так что производные от знаменателей функций (78) и (74) вычислять не надо (они дают более высокую степень убывания). Производные берем только от экспонент:

$$\frac{\partial u(R_0)}{\partial n} = u(\vec{r}') ik \frac{\vec{R}_0}{R_0} \vec{n} = \frac{f}{R_0} e^{ikR_0} ik \frac{\vec{R}_0}{R_0} \vec{n}, \quad (79)$$

$$\frac{\partial G(|\vec{r} - \vec{r}'|)}{\partial n} = -G(|\vec{r} - \vec{r}'|) ik \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} ik \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{n}. \quad (80)$$

Подставив функции и их производные в формулу (77), получим

$$u(\vec{r}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{f}{R_0} \frac{e^{ik(R_0+R)}}{R} \left(\frac{\vec{R}_0}{R_0} + \frac{\vec{R}}{R} \right) \vec{n} d^2\Sigma. \quad (81)$$

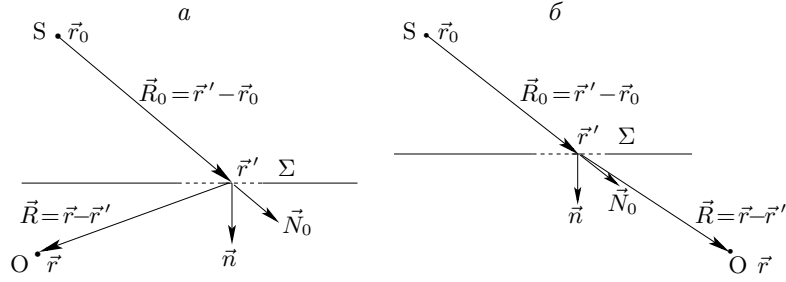


Рис. 37: Схемы дифракции.

а) Геометрия формулы (77). б) Схема дифракции Френеля.

Теперь применим полученную формулу для описания дифракции Френеля. При этом примем во внимание, что на самом деле свет распространяется почти прямолинейно, а дифракция наблюдается только под малыми углами рядом с прямым лучом. Поэтому хотя рис. 37а показывает общий случай, реалистичным будет рис. 37б.

Примем, что вектор \vec{n} направлен по оси x , а экран-преграда совпадает с плоскостью yz . Свет от источника будет попадать в небольшую область на экране. Поместим начало координат в среднюю точку в этой области.

Пусть точка S имеет координаты $S(x_0, y_0, z_0)$, а точка O — координаты $O(x, y, z)$. Если радиусы-векторы точек области существенной дифракции $\vec{r}' = (0, y', z')$, то $\vec{R}_0 = (-x_0, y' - y_0, z' - z_0)$, $\vec{R} = (x, y - y', z - z')$. Обозначим $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = a$, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = b$. Длины введенных векторов

$$R_0 = \sqrt{a^2 - 2y'y_0 - 2z'z_0 + y'^2 + z'^2} \approx a \left[1 - \frac{y'y_0}{a^2} - \frac{z'z_0}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{a^2} \right) \right], \quad (82)$$

$$R = \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \approx b \left[1 - \frac{y'y}{b^2} - \frac{z'z}{b^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{b^2} \right) \right]. \quad (83)$$

Ввиду малости координат y' и z' можно принять, что

$$\frac{\vec{R}_0}{R_0} \approx \vec{N}_0, \quad \frac{\vec{R}}{R} \approx \vec{N}_0, \quad \vec{N}_0 = -\frac{(x_0, y_0, z_0)}{a}, \quad (84)$$

где \vec{N}_0 — фиксированный вектор.

Таким образом, в интеграле (81) можно в знаменателях заменить $R_0 = a$, $R = b$, в скобках оба отношения на вектор \vec{N}_0 и пренебречь изменением амплитуды f .

4. *Дифракция от полуплоскости.* Наконец, примем, что дифракция происходит на полуплоскости $z \geq 0$. Из-за принятых приближений это не приведет к добавочным погрешностям, так как основной вклад в дифракционную картину дают небольшие значения y' и z' . Все это воплощается в формуле

$$u(\vec{r}) = \frac{k}{2\pi i} \frac{f}{ab} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_0^{\infty} dz' e^{ik(R_0+R)}. \quad (85)$$

Осталось оценить сумму в показателе экспоненты и вычислить интегралы. Сумма

$$R_0 + R \approx a + b - \left(\frac{y_0}{a} + \frac{y}{b}\right)y' - \left(\frac{z_0}{a} + \frac{z}{b}\right)z' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(y'^2 + z'^2). \quad (86)$$

Следующие слагаемые в разложении имеют более высокий порядок малости. Так как интеграл по y' берется по всей оси, то можно выделить полный квадрат и сместить переменную интегрирования. Интеграл все равно останется по всей оси. В интеграле по z' так поступить нельзя, поэтому там останется конечный предел интегрирования.

Выделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)y'^2 - \left(\frac{y_0}{a} + \frac{y}{b}\right)y' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(y' - \frac{y_0/a + y/b}{1/a + 1/b}\right)^2 - \\ &- \frac{1}{2}\frac{(y_0/a + y/b)^2}{1/a + 1/b}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)z'^2 - \left(\frac{z_0}{a} + \frac{z}{b}\right)z' = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(z' - \frac{z_0/a + z/b}{1/a + 1/b}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{(z_0/a + z/b)^2}{1/a + 1/b}. \end{aligned} \quad (87)$$

Тогда интеграл от экспонент получится таким:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_0^{\infty} dz' e^{ik(R_0+R)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy' e^{(ik/2)(1/a+1/b)y'^2} \int_{-s_0}^{\infty} dz' e^{(ik/2)(1/a+1/b)z'^2}, \quad (88)$$

где $s_0 = \frac{z_0/a + z/b}{1/a + 1/b}$. Интеграл по y' вычисляется:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy' e^{(ik/2)(1/a+1/b)y'^2} &= \sqrt{\frac{2ab}{k(a+b)}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos t^2 + i \sin t^2) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2ab}{k(a+b)}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i). \end{aligned} \quad (89)$$

Интеграл по z' сводится к интегралам Френеля

$$C(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^s \cos t^2 dt, \quad S(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^s \sin t^2 dt, \quad (90)$$

а именно,

$$\int_{s_0}^{\infty} dz' e^{(ik/2)(1/a+1/b)z'^2} = \sqrt{\frac{2ab}{k(a+b)}} \int_{-s}^{\infty} e^{ikt^2} dt, \quad (91)$$

$$\int_{-s}^{\infty} e^{ikt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(C(s) + \frac{1}{2} \right) + i \left(S(s) + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (92)$$

где аргумент интегралов Френеля

$$s = \sqrt{\frac{k}{2} \frac{ab}{a+b}} \left(\frac{z_0}{a} + \frac{z}{b} \right). \quad (93)$$

Теперь соберем все вместе и получим окончательное выражение

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= \frac{1+i}{a+b} \frac{f}{2i} \exp \left(ik \left[a+b - \frac{1}{2} \frac{(y_0/a+y/b)^2}{1/a+1/b} - \frac{1}{2} \frac{(z_0/a+z/b)^2}{1/a+1/b} \right] \right) \times \\ &\quad \times \left[\left(C(s) + \frac{1}{2} \right) + i \left(S(s) + \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

5. *Распределение интенсивности.* Интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды волны $I(s) \propto |u(\vec{r})|^2$. При возведении в квадрат все фазовые множители пропадают.

Заметим, что если бы не было экрана, то волна распространялась бы свободно и тогда было бы

$$u_0 = \frac{f}{a+b} e^{ik(a+b)}, \quad I_0 \propto |u_0|^2 = \frac{|f|^2}{(a+b)^2}. \quad (95)$$

Интенсивность, получающаяся в результате дифракции выражается через свободную:

$$I(s) = \frac{I_0}{2} \left[\left(C(s) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(s) + \frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{I_0}{\pi} \left| \int_{-s}^{\infty} e^{ikt^2} dt \right|^2. \quad (96)$$

Аргумент s может быть положительным, что соответствует освещенной области за экраном, куда попадает прямое излучение, или отрицательным, что соответствует области тени, куда прямое излучение не проходит. Значение $s = 0$ разграничивает эти области. Вблизи этого значения, при малых значениях аргумента интенсивность раскладывается в ряд, первые слагаемые которого

$$I(s) \sim \frac{I_0}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} s + \frac{4}{\pi} s^2 \right). \quad (97)$$

Изучим поведение интенсивности в предельных случаях ее аргумента. Найдем асимптотическое поведение интенсивности при $s \rightarrow \pm\infty$. Проще находить поведение интеграла, входящего в формулу (91). При $s \rightarrow -\infty$ делаем подстановку $t = |s| + u/(2|s|)$:

$$\begin{aligned} \int_{-s}^{\infty} e^{ikt^2} dt &= \int_{|s|}^{\infty} e^{ikt^2} dt = \frac{e^{is^2}}{2|s|} \int_0^{\infty} e^{iu+iu^2/(4s^2)} du \sim \\ &\sim \frac{e^{is^2}}{2|s|} \int_0^{\infty} e^{iu} \left(1 + i \frac{u^2}{4s^2} \right) du = \frac{e^{is^2}}{2|s|} \left(-\frac{1}{i} + \frac{1}{4s^2} \right). \end{aligned} \quad (98)$$

Напротив, при $s \rightarrow +\infty$

$$\int_{-s}^{\infty} e^{ikt^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt^2} dt - \int_s^{\infty} e^{ikt^2} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i) + \frac{e^{is^2}}{2is} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(s^2)}{2s} + i \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos(s^2)}{2s} \right). \quad (99)$$

Соответственно, поведение интенсивности при $s \rightarrow -\infty$ и $s \rightarrow +\infty$ дается асимптотиками

$$I(s) \sim I_0 \begin{cases} \frac{1}{4\pi s^2} & \text{при } s \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{\pi} \left(\pi + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(s^2)}{s} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(s^2)}{s} \right) = & (100) \\ = 1 + \frac{\sin(s^2 - \pi/4)}{\sqrt{\pi s}} & \text{при } s \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Отметим характерные черты рассмотренной дифракции. Из выражения (93) для аргумента s видно, что вид дифракционной картины не зависит по отдельности от координат z_0 и z , а только от их комбинации. От их значений меняется только масштаб картины. Нет зависимости и от координат y_0 и y .

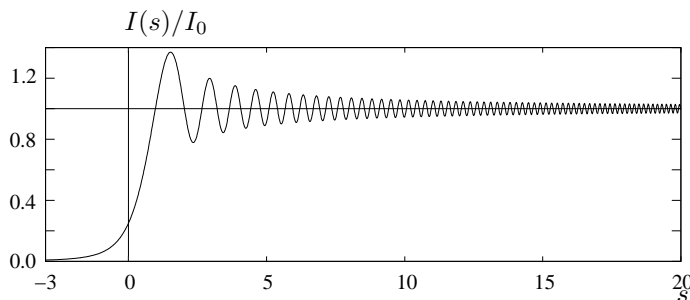


Рис. 38: Интенсивность света при дифракции Френеля.

Далее, для видимого света значения волнового числа $k = 2\pi/\lambda$ велики, так как длины волн имеют порядок 10^{-5} см. Оценим масштаб дифракционной картины, приняв, что $b = a = 10$ см, а $z_0 = 0$. Картина наблюдается при аргументах $s = \sqrt{(2\pi/4)10^6 z}/10$ порядка единицы. Поэтому масштаб этой картины, определяемый величиной z , имеет порядок $1/100$ см. По этой же причине значительный вклад в наблюдаемое излучение вносят области экрана, наиболее близкие к источнику света, отстоящие от геометрического направления на таком же масштабе.

На рис. 38 приведен график зависимости отношения $I(s)/I_0$ от аргумента s . Излучение заходит в область геометрической тени, но

с удалением от экрана быстро убывает. В освещенной же области создается дифракционная картина затухающих колебаний интенсивности около недифракционного (геометрического) значения.

6. *Дифракция Фраунгофера.* Этот тип дифракции был исследован Йозефом Фраунгофером (1787–1826), известным также по названию (фраунгоферовых) линий поглощения в спектре Солнца.

Принимается, что пучок лучей, падающих на экран, плоскопараллельный, т. е. источник находится далеко от преграды. Распределение интенсивности дифрагирующего пучка регистрируется на экране также на большом расстоянии от экрана-преграды. Таким образом, обе волны, падающая и дифракционная, считаются плоскими. В экране имеется некоторое отверстие, на котором и происходит дифракция.

Не обязательно этот тип дифракции рассматривать заново, так как плоские волны можно получить как предельный случай сферических и воспользоваться формулой (81). Заменяем в ней, как и раньше, знаменатели R_0 и R соответственно на a и b , а оба вектора \vec{R}_0/R_0 и \vec{R}/R на вектор \vec{N}_0 , определяющий направление падающей волны. Для подстановки в показатель экспоненты из разложений расстояний (82) и (83) возьмем только первые поправочные слагаемые по \vec{r}' , положив при этом

$$\vec{N}_0 = -\frac{(x_0, y_0, z_0)}{a}, \quad \vec{N} = \frac{(x, y, z)}{b}, \quad (101)$$

так что получится

$$R_0 \sim a + \vec{N}_0 \vec{r}', \quad R \sim b - \vec{N} \vec{r}', \quad R_0 + R = a + b - (\vec{N} - \vec{N}_0) \vec{r}'. \quad (102)$$

Произведения $k\vec{N}_0$ и $k\vec{N}$ — это волновые векторы падающей и рассеянной волн. Обозначим $k(\vec{N} - \vec{N}_0) = \vec{q}$. Тогда $\vec{N}_0 \vec{n} = 1$ и

$$u(\vec{r}) = \frac{k}{2\pi i} \frac{f}{ab} e^{ik(a+b)} \int e^{-i\vec{q}\vec{r}'} dydz. \quad (103)$$

Интеграл берется по области, соответствующей отверстию в экране.

Из формулы (103) вытекает важное следствие. Рассмотрим два противоположных случая экранов. У одного открыты (прозрачны) именно те области, которые у другого непрозрачны. Пусть $u_+(\vec{q})$ и $u_-(\vec{q})$ продифрагировавшие волны от указанных экранов.

Их сумма определяется интегралом по всей плоскости

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_y y} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_z z} dz = (2\pi)^2 \delta(q_y) \delta(q_z) = (2\pi)^2 \delta(\vec{q}) = (2\pi)^2 \delta(\vec{k} - \vec{k}_0). \quad (104)$$

Дельта-функции означают отсутствие дифракционной картины: падающая волна не изменяется. Таким образом, при любом $\vec{q} \neq 0$ сумма $u_+(\vec{q}) + u_-(\vec{q}) = 0$. Интенсивности же пропорциональны квадратам модулей, так что $|u_+(\vec{q})|^2 = |u_-(\vec{q})|^2$ при $\vec{q} \neq 0$. Это утверждение носит название принципа Бабиня, который словами формулируется следующим образом: дифракционные картины, создаваемые дополнительными экранами, совпадают.

7. *Частные случаи.* Рассмотрим конкретные случаи отверстий в экранах.

1) Дифракция от квадратного отверстия. В этом случае интеграл распадается на произведение двух интегралов одного вида:

$$u(q) = A \int_{-l}^l e^{-iqx} dx = A \int_{-l}^l \cos(qx) dx = 2A \frac{\sin(ql)}{q}. \quad (105)$$

Интенсивность пропорциональна $|u(q)|^2$. На экране получится дифракционная картина, соответствующая произведению интенсивностей по каждой координате. На рис. 39а представлен график функции $\sin^2(s)/s$, где $s = q_y l_y$ или $q_z l_z$.

2) Дифракция от круглого отверстия. Пусть отверстие представляет собой круг радиусом R . Интеграл вычисляем в полярных координатах:

$$u(q) = A \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr e^{-iqr \cos \phi} = 2\pi A \int_0^R r dr J_0(qr) = 2\pi AR \frac{J_1(qR)}{q}, \quad (106)$$

где $J_n(x)$ — функции Бесселя. Интенсивность пропорциональна функции $J_1^2(s)/s^2$, где $s = qR$. График этой функции, нормированный на единицу, приведен на рис. 39б. Дифракционная картина получается, если этот график вращать вокруг прямой, соединяющей максимум с его проекцией на ось абсцисс.

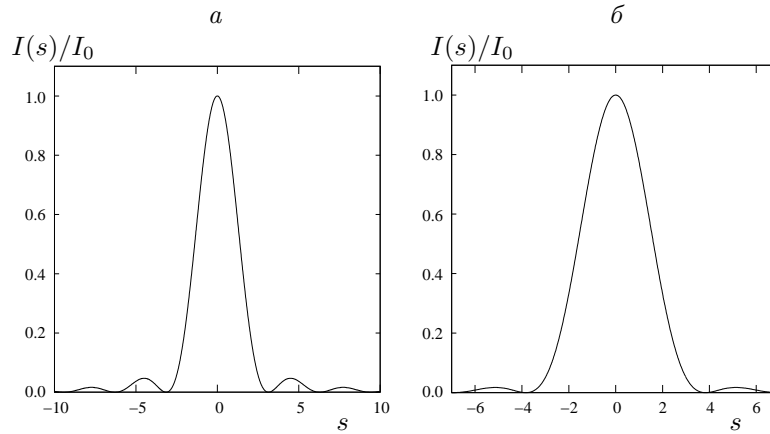


Рис. 39: Диффракционные картины.

а) Дифракция от квадрата. б) Дифракция от круга.

Заметим, что по принципу Бабине точно такие же картины получаются от квадратного или круглого экранов, помещенных на пути плоской волны.

Интерференция и дифракция — это явления, в которых проявляется волновая природа света. Обратимся к явлениям, в которых свет выступает как набор частиц, т. е. фотонов.

§ 5. Корпускулярные свойства света

1. *Фотоэффект.* Как уже говорилось, фотоэффект был заподозрен Герцем и изучен Столетовым. Сущность этого явления заключается в том, что при воздействии света на некоторые вещества возникает ток, т. е. свет выбивает из атомов электроны.

Электроны в атомах находятся в связанном состоянии, т. е., если принять, что энергия покоящегося относительно атома электрона равна нулю, то энергия электрона в атоме отрицательна.

Достаточно мощный фотон, т. е. квант света, налетая на атом, передает ему часть своей энергии. В результате вылетает электрон с положительной энергией. Закон сохранения энергии в случае вылета электрона с нерелятивистской энергией записывается в виде

$$h\nu = \chi + \frac{mv^2}{2}, \quad (107)$$

где ν — частота фотона, v — скорость выбитого электрона, а χ — так называемая работа выхода, т. е. та энергия, которую фотон должен передать атому для того, чтобы оторвать от него электрон с нулевой энергией. В этом электрон имел энергию $-\chi$.

В настоящее время этот процесс называется фотоионизацией, он подробно изучен теоретически, найдены вероятности различных его исходов.

2. *Эффект Комптона.* В 1923 году А. Комптон опубликовал статью об открытии эффекта, впоследствии получившего его имя. Он обнаружил, что при рассеянии рентгеновского излучения на атомах, точнее, на связанных в атомах электронах, частота излучения уменьшается. За свое открытие и его объяснение Комптон получил Нобелевскую премию по физике 1927 года.

Комптоновское рассеяние — это акт взаимодействия электрона и фотона, в результате которого эти частицы изменяют свои импульсы, энергии и состояния поляризации. Поэтому часто говорят, что частицы после рассеяния — не те, что были перед рассеянием.

Пусть взаимодействуют фотон с импульсом \vec{k} и электрон с импульсом \vec{p} . После рассеяния их импульсы изменяются и становятся равными соответственно \vec{k}_1 и \vec{p}_1 . Энергии этих частиц соответственно ck , cp_0 , ck_1 , cp_1 . Для импульсов электрона справедливы обычные релятивистские соотношения (2.48).

При рассеянии выполняются четыре закона сохранения — энергии и импульса (три проекции) —

$$p_0 + k = p_{01} + k_1, \quad \vec{p} + \vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{k}_1. \quad (108)$$

Выразим вектор импульса электрона после рассеяния через остальные и подставим в равенство, выражающее закон сохранения энергии:

$$p_0 + k - k_1 = \sqrt{m^2c^2 + (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}_1)^2}. \quad (109)$$

Возводя в квадрат и сокращая, получаем

$$kp_0 - \vec{k}\vec{p} = k_1p_0 - \vec{k}_1\vec{p} + kk_1 - \vec{k}\vec{k}_1. \quad (110)$$

Обозначим косинусы углов между парами векторов \vec{k} и \vec{k}_1 , \vec{k} и \vec{p} , \vec{k}_1 и \vec{p} соответственно через μ , ζ и ζ_1 . Тогда соотношение (110) переписется в виде

$$k(p_0 - p\zeta) = k_1[p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)]. \quad (111)$$

Из него находится величина импульса фотона после рассеяния

$$k_1 = k \frac{p_0 - p\zeta}{p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)}. \quad (112)$$

Рассмотрим частный случай, когда до рассеяния электрон покоится, т. е. $p = 0$. Тогда $p_0 = mc$ и

$$k_1^0 = k^0 \frac{mc}{mc + k^0(1 - \mu_0)}. \quad (113)$$

Вспомнив, что импульс фотона $k = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$, перепишем формулу (113) через длины волн

$$\lambda_1^0 = \lambda^0 + \lambda_C(1 - \mu_0). \quad (114)$$

Здесь $\lambda_C = h/mc = 0.024 \text{ \AA} = 2.4 \cdot 10^{-10} \text{ см}$ — комптоновская длина волны.

При рассеянии фотона на покоящемся электроне частота фотона всегда уменьшается, и в этом заключается эффект Комптона. При $\mu_0 = 1$, т. е. при рассеянии вперед, рассеянный фотон пролетает, как будто не испытал взаимодействия, а электрон остается неподвижным. Рассеяние под прямым углом ($\mu_0 = 0$) дает увеличение длины волны ровно на λ_C . Максимальное увеличение λ на две комптоновские длины волны достигается, когда фотон изменяет свое направление на противоположное. Потеря энергии фотоном, называемая эффектом отдачи, происходит вследствие передачи им части своего импульса, а значит и энергии, первоначально покоящемуся электрону, который приходит в движение.

Если электрон не стоял на месте, то при различном соотношении направлений и величин импульсов реагирующих частиц фотон может как увеличивать, так и уменьшать свою энергию. Продемонстрируем это на примере.

Пусть фотон и электрон летят в одном направлении, т. е. $\zeta = 1$, тогда $\mu = \zeta_1$ и формула (112) перейдет в

$$k_1 = k \frac{p_0 - p}{p_0 - p\mu + k(1 - \mu)}, \quad x_1 = x \frac{1 - \beta}{1 - \beta\mu + x\sqrt{1 - \beta^2}(1 - \mu)}, \quad (115)$$

где $x = k/(mc)$, $x_1 = k_1/(mc)$. Если электрон и фотон летят навстречу друг другу, то $\zeta = -1$, $\mu = -\zeta_1$ и

$$k_1 = k \frac{p_0 + p}{p_0 + p\mu + k(1 - \mu)}, \quad x_1 = x \frac{1 + \beta}{1 + \beta\mu + x\sqrt{1 - \beta^2}(1 - \mu)}. \quad (116)$$

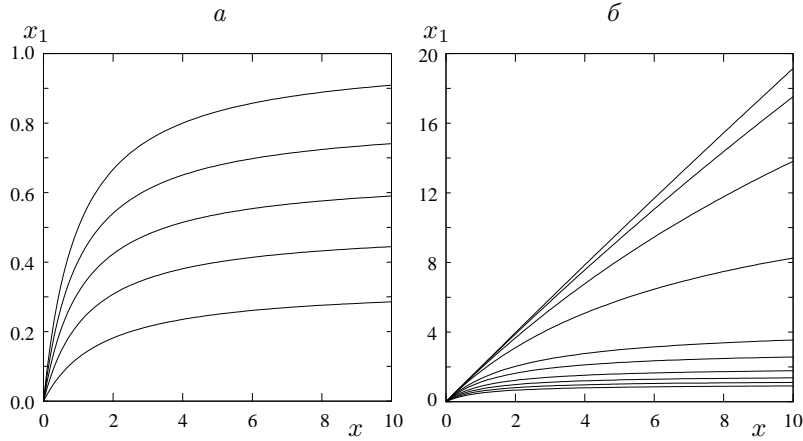


Рис. 40: Частота рассеянного фотона x_1 при $\mu = 0$ в зависимости от частоты падающего x :

- а* — импульсы фотона и электрона параллельны,
 $\beta = 0(0.2)0.8$ сверху вниз;
б — импульсы фотона и электрона антипараллельны,
 $\beta = 0(0.2)0.8, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999$ снизу вверх.

Рис. 40 иллюстрирует приведенные формулы при рассеянии под прямым углом ($\mu = 0$). Если импульсы фотона и электрона до рассеяния параллельны, то энергия фотона только уменьшается. Напротив, если они летят навстречу друг другу, при рассеянии на ультрарелятивистском электроне фотон может удвоить свою энергию.

Таким образом, даже при однократном рассеянии частота фотона может значительно увеличиться, но это уже не эффект Комптона в чистом виде, а скорее следствие эффекта Доплера. Действительно, мы должны перейти в систему отсчета, связанную с электроном до рассеяния. Там фотон уменьшит свою энергию, а затем нам надо вернуться в исходную систему отсчета. В результате таких переходов фотон меняет свою энергию вследствие эффекта Доплера. Однако в астрофизической литературе увеличение энергии фотонов при комптоновском рассеянии их энергичными электронами принято называть обратным эффектом Комптона.

Комптоновская длина волны очень мала — ей соответствует энергия, равная энергии покоя электрона 511 кэВ. Поэтому уве-

личение длины волны фотона при рассеянии на нерелятивистском электро́не заметно, только если длина волны рассеиваемого фотона не очень существенно отличается от комптоновской. Горячие электроны могут передать значительную долю своей энергии фотону и вызывать гораздо большие смещения длины волны, которые доступны измерениям даже в радиодиапазоне. Ультрарелятивистские же электроны сразу переводят излучение из радио в оптический диапазон, из оптического — в рентгеновский, из ультрафиолетового — в область гамма-излучения.

Вероятности рассеяния фотона на определенный угол, изменения его импульса и поляризации рассчитываются теорией, называемой квантовой электродинамикой.

Комптоновское рассеяние играет большую роль в процессе формирования спектров ряда астрофизических объектов. Это активные ядра галактик, из которых выбрасываются сгустки вещества, содержащего ультрарелятивистские электроны. На сгустки попадает внешнее излучение или оно возникает в самих сгустках. Электроны рассеивают это излучение и переводят его в диапазоны, где фотоны имеют значительно большую энергию. Аналогичные процессы происходят и в других объектах, например, в так называемых микрокварах, т. е. двойных системах, у которых одна компонента — звезда, а другая — черная дыра. Дыра притягивает к себе вещество из компаньона, что приводит к появлению энергичных частиц, в частности, релятивистских электронов. И в этом случае происходит рассеяние, формирующее рентгеновский и гамма-спектр системы. Не существует других механизмов, привлечение которых смогло бы объяснить появление таких спектров.

Таким образом, свет имеет двойственную природу. В одних случаях, когда фотонов много и их энергии невелики, свет демонстрирует волновые свойства. Но когда частоты излучения велики, т. е. принадлежат рентгеновскому или гамма-диапазонам, чаще проявляются корпускулярные свойства света.

Заключение

Конечно, далеко не вся электродинамика изложена в этом пособии, предназначенном, в основном, для студентов-астрономов. Многие ее главы вообще не упомянуты. Не затронуты распространение электромагнитного поля в проводниках, ферромагнетизм и пространственная дисперсия, нелинейная оптика и др.

В то же время подробно изложены вопросы, представляющие особый интерес для астрофизики: теория излучения и, в частности, магнитотормозного излучения, описание поляризации излучения, инварианты и особенности поля поляризации и др.

Продемонстрировано, какая математика и как используется в электродинамике. Некоторые математические сведения приведены для напоминания там, где они применяются. Другие вынесены в математические приложения. Все выкладки проделываются на уровне строгости, обычном для физических работ.

Заметим, что в учебниках, как правило, теории электромагнитного поля в свободном пространстве и в веществе рассматриваются раздельно. Здесь это сделано одновременно для сокращения объема изложения.

Содержание пособия выходит за рамки курса, обычно читаемого студентам. Помещены также разделы, которые могут понадобиться для понимания других курсов, а также при выполнении курсовых и дипломных работ.

Пособие подготовлено при частичной поддержке СПбГУ через грант 6.38.18.2014.

Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том II. Теория поля. М., Наука, 2003, 533 с.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том VIII. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982, 620 с.
- [3] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. Москва, Ижевск. 2003.
- [4] Топтыгин И. Н. Современная электродинамика. Ч. 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва, Ижевск. 2005.
- [5] Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.
- [6] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002.
- [7] Terrell J. Invisibility of the Lorentz-contraction // Phys. Rev. 1959. Vol. 116. N 4. P. 1041–1045.
- [8] Ghisellini G. Special relativity at action in the Universe. astro-ph/9905181.
- [9] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Наука. 1960. 724 с.
- [10] Зельдович Я. Б., Рузмайкин, Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. М. Ижевск: Ин-т хаотической динамики, 2006.
- [11] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1108 с.
- [12] Насельский П. Д., Новиков Д. И., Новиков И. Д.. Реликтовое излучение Вселенной. Москва, Наука, 2003, 392 стр.
- [13] Prunet S., Sethi S. K., Bouchet F. R. Cosmic microwave background polarization data and galactic foregrounds: estimations of cosmological parameters // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2000. Vol. 314. N 2. P. 348–353.
- [14] Dolgov A. D., Doroshkevich A. G., Novikov D. I., Novikov I. D. Classification of singular points in polarization field of cosmic microwave background and eigenvectors of Stokes matrix // Письма в журн. эксперим. теор. физ. 1999. Т. 69. N 6. С. 395–401.
- [15] Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., Наука, 1987, 488 с.

- [16] Нагирнер д.и. Радиационные механизмы в астрофизике. Изд-во СПбГУ, 2007, 296 стр.
- [17] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- [18] Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М., Мир, 1975.
- [19] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., Наука, 1974, 392 с.
- [20] Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. М., Наука. 1969. 304 с.
- [21] Чертов А.Г. Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы). М., Высшая школа. 1990. 336 с.
- [22] Френкель Я.И. Теория явлений атмосферного электричества. Л.-М. Гостехиздат. 1949.
- [23] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5. Глава 9.

Математические приложения

Приложение 1. Некоторые сведения из векторного анализа

1. *Производная по направлению.* В этом параграфе мы приведем сводку сведений из векторного анализа, которые часто используются в курсе.

Пусть задана функция от трех аргументов x, y, z , т. е. скалярная функция векторного аргумента $u(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z)$, где x, y, z — координаты вектора \vec{r} в некоторой системе координат. Возьмем единичный вектор (орт) $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$, $|\vec{l}| = 1$. Тогда предел

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\vec{r} + \vec{l}t) - u(\vec{r})}{t} \quad (1)$$

называется производной от функции u в точке \vec{r} по направлению \vec{l} .
Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2)$$

это производные по направлениям координатных осей.

Ясно, что производную по направлению можно определить и по-другому:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left. \frac{\partial u(\vec{r} + \vec{l}t)}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (3)$$

Если расписать (3) через определение производной, то получится точно то же равенство, что и (1).

2. *Градиент.* Вектор, составленный из частных производных, вычисленных в некоторой системе координат,

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4)$$

называется градиентом функции u . Этот вектор удобно записывать с помощью вектора Гамильтона "набла":

$$\text{grad } u = \vec{\nabla} u, \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (5)$$

Это символический вектор-оператор, который "жаждет" продифференцировать все что угодно. Поскольку это оператор, а не обычный вектор, с ним надо обращаться с достаточной осторожностью.

Если применить к определению (3) правило дифференцирования сложной функции, то получится соотношение, связывающее производную по направлению с градиентом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} l_x + \frac{\partial u}{\partial y} l_y + \frac{\partial u}{\partial z} l_z = \text{grad } u \vec{l}. \quad (6)$$

Таким образом, производная по направлению — это проекция градиента на это направление. Так как любая проекция меньше по величине, чем сам вектор, а производная характеризует скорость изменения функции, то длина градиента — это наибольшая скорость изменения функции, а его направление — направление наибольшего роста ее. Следовательно, хотя градиент был определен в какой-то заданной системе координат, на самом деле, он характеризует только саму функцию, а от системы координат не зависит.

3. *Нормаль и касательная плоскость к поверхности.* Пусть задано уравнение поверхности $F(\vec{r}) = 0$. Возьмем на этой поверхности точку \vec{r}_0 и проведем через нее кривую

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (7)$$

целиком лежащую на поверхности, т. е.

$$F(\vec{r}(t)) = 0, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad F(\vec{r}_0) = 0. \quad (8)$$

Продифференцируем (8) по t :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (9)$$

Подставим в это равенство $t = t_0$. Тогда получим, что вектор, составленный из производных (7), т. е. касательная к кривой, перпендикулярен градиенту функции F . Но так как кривая у нас произвольная (лишь бы она проходила через точку \vec{r}_0 и целиком лежала на поверхности), то значит, градиент перпендикулярен касательным ко всем кривым, проходящим через эту точку и лежащим на поверхности. В этом случае говорят, что это нормаль к самой поверхности. Таким образом, градиент функции F является нормалью к поверхности $F(\vec{r}) = 0$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности, проходящей через точку \vec{r}_0 , записывается в виде

$$\text{grad } F|_{\vec{r}_0} (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \quad (10)$$

4. *Поверхность уровня и нормаль к ней.* Вернемся к функциям векторного аргумента. Поверхность, задаваемая уравнением $u(\vec{r}) = C$, называется поверхностью уровня функции u , а C — значением (высотой) уровня. Терминология взята из картографии и гравиметрии.

Нормалью к поверхности уровня служит $\text{grad}(u - C) = \text{grad } u$. Таким образом, градиент функции в некоторой точке перпендикулярен проходящей через эту точку поверхности уровня, что естественно, так как на поверхности уровня функция не меняется, а вдоль градиента она изменяется быстрее всего.

Теперь перейдем к векторным функциям.

5. *Линии и трубки тока.* Пусть заданы три функции A_x, A_y, A_z от трех аргументов x, y, z , т. е. одна векторная функция от векторного же аргумента $\vec{A}(\vec{r})$. Тем самым задано поле направлений и скорости изменения функции. Через каждую точку этого векторного поля проведем кривые, так, чтобы они касались соответствующего вектора поля, т. е. чтобы векторы поля были касательными векторами к проводимым кривым. По аналогии с течением жидкости, т. е. если считать, что само поле — это поле скорости, упомянутые кривые называются линиями тока.

Дифференциальные уравнения, определяющие линии тока, можно записать в виде

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \quad (11)$$

Если ввести параметр t , то эти уравнения представятся в виде нормальной консервативной системы

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A}(\vec{r}). \quad (12)$$

Линии тока — это интегральные кривые векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$. Они образуют двухпараметрическое семейство.

Функция, изменение которой описывает векторное поле, является общим интегралом указанной системы, т. е. решением уравнения в частных производных

$$A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

для которого линии тока, определяемые уравнениями (12), служат характеристиками.

Часто бывает полезным еще одно понятие. Пусть имеется замкнутая кривая. Проведем через каждую ее точку линию тока. Тогда образуется трубка, называемая трубкой тока.

6. *Поток и циркуляция.* В связи с векторными полями вводятся два понятия, представляемые интегралами. Поток векторного поля \vec{A} через поверхность Σ определяется выражением:

$$\int_{\Sigma} \vec{A} \vec{n} d^2\Sigma, \quad (14)$$

где $d^2\Sigma$ — элемент площади поверхности, а \vec{n} — нормаль к поверхности. Если поверхность замкнута, то это обстоятельство в выражении для потока через нее отмечается кружком у знака интеграла:

$$\oint_{\Sigma} \vec{A} \vec{n} d^2\Sigma. \quad (15)$$

Вторая величина представляется криволинейным интегралом. Интеграл вдоль кривой L будем записывать так:

$$\int_L \vec{A} \vec{l} ds, \quad (16)$$

где \vec{l} — вектор касательной к кривой, а ds — элемент ее дуги. Если интерпретировать поле как поле силы, то интеграл вдоль кривой равен работе этой силы по заданному пути. Такой интеграл по замкнутой кривой

$$\oint_L \vec{A} \vec{l} ds \quad (17)$$

называется циркуляцией векторного поля вдоль этой кривой.

Для векторного поля вводятся также две дифференциальные операции.

7. *Дивергенция.* Дивергенция, или расходимость векторного поля определяется как сумма частных производных

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (18)$$

Эта операция также выражается через оператор "набла":

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (19)$$

Обозначение дивергенции позволяет коротко записать формулу Остроградского—Гаусса:

$$\oint_{\Sigma} \vec{A} \vec{n} d^2\Sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{A} d^3r, \quad (20)$$

где справа стоит (тройной) интеграл по объему \mathcal{V} , который ограничивает замкнутая поверхность Σ , а \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности.

Возьмем бесконечно малый объем \mathcal{V} , стягивающийся в точку так, чтобы и площадь ограничивающей его поверхности стремилась к нулю. Тогда применив теорему о среднем, можно утверждать, что

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} \vec{A} \vec{n} d^2\Sigma}{\mathcal{V}}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что определенная для фиксированной координатной системы дивергенция на самом деле не зависит от того, в какой системе координат ее вычисляют.

Если дивергенция равна нулю, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, то векторное поле \vec{A} называется соленоидальным. Для выяснения того, что это означает, рассмотрим поток соленоидального векторного поля \vec{A} через поверхность трубки тока, ограниченной с двух сторон произвольными сечениями. Преобразовав его согласно формуле (20) в объемный интеграл от дивергенции, убедимся, что этот поток равен нулю. Поскольку проекция вектора на нормаль к боковой поверхности трубки тока равна нулю, то и весь интеграл по этой боковой поверхности обращается в нуль. Следовательно, равен нулю и поток через сечения трубки тока. Иными словами, сколько "жидкости" втекло в одно сечение, столько же вытечет из другого, т. е. внутри трубки нет ни источников ни стоков.

8. *Ротор или вихрь.* Определение этой векторной операции над векторным же полем лучше дать сразу через оператор Гамильтона:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (22)$$

Тогда в координатах составляющие ротора запишутся так:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (23)$$

Понятие ротора (что означает вихрь, по-английски Curl — завихор) упрощает запись формулы Стокса

$$\oint_L \vec{A} \vec{l} ds = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{A} \vec{n} d^2\Sigma. \quad (24)$$

Здесь справа стоит интеграл вдоль замкнутой кривой L в пространстве, который является циркуляцией вектора \vec{A} , а слева — интеграл

по поверхности, натянутой на кривую. При этом направления нормали к поверхности \vec{n} и вектора касательной к кривой \vec{l} должны быть согласованы: если обходить кривую вдоль направления касательной с головой, обращенной по нормали, то поверхность должна оставаться слева.

При помощи формулы Стокса опять можно убедиться, что операция ротора не зависит от выбора системы координат. Действительно, взяв кривую и поверхность, стягивающиеся в точку (площадь поверхности Σ — бесконечно малая, нормаль к поверхности фиксируется), получим

$$\text{rot } \vec{A} \vec{n} = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \vec{l} ds}{\Sigma}. \quad (25)$$

Здесь направление вектора \vec{n} произвольно, таким образом от системы координат не зависит не только проекция ротора, но и сам вектор.

Векторное поле с равным нулю ротором называется потенциальным. У потенциального поля циркуляция преобразуется в поверхностный интеграл от ротора, который оказывается равным нулю. Следовательно, в этом случае величина работы силы, представляемой векторным полем, не зависит от того, по какому пути происходило перемещение, а зависит только от начальной и конечной точек этого пути.

9. *Операции второго порядка.* Не всякая комбинация введенных операций может быть осуществлена. В Табл. 1 указаны возможные последовательности двух дифференциальных операций.

Таблица 1. Операции второго порядка.

Int →	grad	div	rot
Ext ↓			
grad	—	grad div	—
div	Δ	—	0
rot	0	—	rot rot

В этой таблице по горизонтали расположены обозначения внутренних операций, а по вертикали — внешних. Прочерками отмечены невозможные комбинации. Две операции, а именно rot grad и div rot тождественно равны нулю, то есть градиент любой функции является потенциальным вектором, а ротор — вектор соленоидальный. Остается всего три операции второго порядка, причем между ними имеется соотношение:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}, \quad \Delta = \vec{\nabla}^2 = \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (26)$$

Δ — это оператор Лапласа, который в этой формуле применяется к каждой из составляющих вектора \vec{A} .

10. *Криволинейные координаты.* Приведем формулы, связывающие две системы криволинейных координат с декартовыми и выражения оператора Лапласа в этих координатах.

а) Сферические координаты. Декартовы координаты выражаются через радиальное расстояние r , зенитное расстояние ϑ и азимут ϕ так:

$$x = r \sin \vartheta \cos \phi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \phi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (27)$$

Оператор Лапласа в этих координатах можно записать в виде

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta \phi}, \quad (28)$$

где радиальная часть оператора

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (29)$$

а угловая

$$\Delta_{\vartheta \phi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (30)$$

б) Цилиндрические координаты. Они связаны с декартовыми так:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (31)$$

Координатные орты этой системы:

$$\vec{e}_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad \vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1). \quad (32)$$

Их векторные произведения

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\phi. \quad (33)$$

Координаты вектора в этой системе через декартовы выражаются так:

$$V_\rho = V_x \cos \phi + V_y \sin \phi, \quad V_\phi = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi, \quad V_z = V_z, \quad (34)$$

а градиент и ротор

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (35)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\phi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z. \quad (36)$$

В частности, радиус-вектор $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$.

Для оператора Лапласа в этих координатах получается выражение

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (37)$$

11. *Полезные формулы.* Наконец, приведем небольшую сводку формул, некоторые из них понадобятся в дальнейшем.

$$a. \vec{\nabla}(uv) = \vec{\nabla}u v + u \vec{\nabla}v, \quad b. \vec{\nabla}(u\vec{A}) = \vec{\nabla}u \vec{A} + u \vec{\nabla}\vec{A}, \quad (38)$$

$$c. \vec{\nabla} \times (u\vec{A}) = \vec{\nabla}u \times \vec{A} + u \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (39)$$

$$d. \vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (40)$$

$$e. \vec{\nabla}(\vec{A}\vec{B}) = (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (41)$$

$$f. \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A}. \quad (42)$$

Комбинация $(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}$, входящая в две последние формулы, называется производной вектора по вектору.

Приложение 2. О дельта-функции

1. *Определение.* Дельта-функция определяется следующими равенствами:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ +\infty & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad (43)$$

причем интеграл от нее по всей оси равен 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (44)$$

Ясно, что такой функции быть не может, т. е. это не обычная функция. Подобные функции называют обобщенными. Дельта-функция — первая обобщенная функция, причем она была введена не математиком, а физиком, а именно П. А. М. Дираком. Это, наверное, первый случай, когда новое математическое понятие было введено в физике.

Несмотря на необычные свойства дельта-функции, многие операции с ней можно производить, как с обыкновенными функциями. Это легко продемонстрировать, если рассматривать ее как предел некоторых обычных функций.

2. *Приближения дельта-функции.* Рассмотрим два таких приближения.

а) Приближение ступенчатой функцией. Очевидно, что дельта-функция является пределом следующей функции двух аргументов:

$$\delta_h(x) = \begin{cases} 1/h & \text{при } -h/2 \leq x \leq h/2, \\ 0 & \text{при } x \notin [-h/2, h/2]. \end{cases} \rightarrow \delta(x) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (45)$$

б) Приближение распределением Коши. Можно приблизить дельта-функцию не разрывной, а непрерывной функцией. Именно, в дельта-функцию переходит при $\sigma \rightarrow +0$

$$\delta(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{x^2 + \sigma^2} \rightarrow \delta(x). \quad (46)$$

3. *Основное свойство дельта-функции.* Пусть $f(x)$ — обычная функция, непрерывная в точке $x = 0$. Рассмотрим интеграл от произведения этой функции на дельта-функцию, причем будем его понимать как предел интеграла, в котором дельта-функция заменена на одно из своих приближений. Например, для приближения а) получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(x) f(x) dx = \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow +0} \int_{-1/2}^{1/2} f(hy) dy = \lim_{h \rightarrow +0} f(\theta h) = f(0). \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь применена теорема о среднем для интегралов, θ — средняя точка, $-1/2 \leq \theta \leq 1/2$. Тот же результат получается при использовании второго приближения.

Основное свойство дельта-функции можно записать в виде более общего равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a), \quad (48)$$

которое получается из предыдущего заменой переменной интегрирования.

4. *Интеграл Фурье.* Дельта-функцию можно представить в виде разложения в интеграл Фурье. Действительно, если в известном равенстве

$$\int_0^{\infty} \exp(-\sigma y) \cos(yx) dy = \pi \delta(x, \sigma) \quad (49)$$

перейти к пределу при $\sigma \rightarrow +0$, то получится представление

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(yx) dy, \quad (50)$$

которое можно записать по-другому, если принять во внимание, что интеграл от нечетной функции (синуса) равен нулю:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyx) dy. \quad (51)$$

Знак перед мнимой единицей в показателе экспоненты можно изменить, так как дельта-функция вещественна.

Конечно, интеграл в правой части (50) расходится, но ему можно приписать значение одним из двух способов. Один из них нами уже использован: это предел интеграла в (49). Другой способ заключается в том, чтобы несобственный интеграл (50) определять не как предел частичных интегралов, а как предел среднего арифметического этих частичных интегралов. Тогда

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} \int_0^z dy \int_0^y \cos x dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} \int_0^z dy \sin y = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos z}{z} = 0. \quad (52)$$

При помощи выведенного соотношения (51) легко доказать и общую формулу для интеграла Фурье, что мы сделаем в следующем параграфе.

5. *Другие свойства дельта-функции.* Легко доказываются следующие ее свойства.

1) Четность:

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (53)$$

2) Вынесение множителя:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0. \quad (54)$$

3) Интеграл:

$$\int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \\ 1/2 & \text{при } x = 0, \end{cases} = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{2}. \quad (55)$$

4) Дельта-функция от сложного аргумента. Если функция $\phi(x)$ обращается в нуль в единственной точке $x = x_0$ и имеет в этой точке ненулевую производную, то

$$\delta(\phi(x)) = \frac{1}{|\phi'(x_0)|} \delta(x - x_0). \quad (56)$$

6. *Трёхмерная дельта-функция.* Она определяется как произведение трех одномерных:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (57)$$

Соответственно получается и ее разложение в тройной интеграл Фурье:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\vec{r}\vec{\kappa}) d^3\kappa. \quad (58)$$

Основное свойство трехмерной функции записывается в виде

$$\int f(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) d^3r' = f(\vec{r}). \quad (59)$$

7. *Некоторые тождества.* Приведем ряд простых тождеств, непосредственно следующих из свойств дельта-функции, но в том виде, в каком они нам понадобятся.

1) Функция в сферических координатах.

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2} \delta(r - r_0) \frac{1}{\sin \vartheta_0} \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (60)$$

2) Функция от квадрата четырехмерного вектора импульса фотона и электрона.

$$\delta(k_0^2 - k^2) = \frac{1}{2k} \delta(k_0 - k), \quad k_0 \geq 0, \quad (61)$$

$$\delta(p_0^2 - m^2c^2 - p^2) = \frac{1}{2p_0} \delta(p_0 - \sqrt{m^2c^2 + p^2}), \quad p_0 \geq 0. \quad (62)$$

8. *Односторонние дельта-функции.* Иногда удобно использовать дельта-функции, отличные от нуля только при положительных или отрицательных аргументах. Определим две функции, зависящие от параметра аналогично (45):

$$\delta_h^+(x) = \begin{cases} 1/h & \text{при } x \in [0, h/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, h/2], \end{cases} = \frac{\text{sgn}(x) - \text{sgn}(x - h/2)}{2}, \quad (63)$$

$$\delta_h^-(x) = \delta_h^+(-x) = \frac{\text{sgn}(x + h/2) - \text{sgn}(x)}{2}. \quad (64)$$

Пределы этих функций при $h \rightarrow 0$ обозначим $\delta_{\pm}(x)$. Очевидно, что

$$\delta_h(x) = \delta_h^+ + \delta_h^-(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x+h/2) + \operatorname{sgn}(x-h/2)}{2}, \quad \delta(x) = \delta_+(x) + \delta_-(x). \quad (65)$$

Приложение 3. О преобразованиях Фурье

1. *Разложение в интеграл Фурье.* Определив преобразование Фурье от функции $f(x)$ равенством

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\omega x) dx, \quad (66)$$

проделаем следующую выкладку:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{i\omega x'} dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x'-x)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x'-x) dx' = 2\pi f(x). \end{aligned} \quad (67)$$

Таким образом получилось равенство, называемое интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x'} f(x') dx'. \quad (68)$$

Обычно в математических курсах интеграл Фурье выводят более строго, старательно обходя появление дельта-функции путем введения разрывного множителя Дирихле. Использование дельта-функции делает вывод более коротким.

2. *Равенство Парсеваля.* Выразим через преобразование Фурье норму функции, т. е. интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} f^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) d\omega \tilde{f}^*(\omega). \end{aligned} \quad (69)$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (70)$$

Это соотношение носит название равенства Парсеваля и является далеким обобщением теоремы Пифагора: квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций.

3. *Теорема о свертке.* Сверткой двух функций f и g называется интеграл

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx'. \quad (71)$$

Вычисляя ее преобразование Фурье, находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) \exp(i\omega x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\omega x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x')dx' \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) dx f(x-x') = \tilde{f}(\omega)\tilde{g}(\omega). \end{aligned} \quad (72)$$

При переходе в последнем равенстве была сделана замена переменной интегрирования $x = x' + x''$.

Таким образом, теорема о свертке гласит, что преобразование Фурье от свертки равно произведению преобразований свертываемых функций.

4. *Преобразования производных и интегралов.* Два простых интегрирования по частям приводят к правилам, связывающим преобразования Фурье от производных и интегралов с преобразованиями самих функций. Прделаем эти выкладки, как всегда без обоснования:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \exp(i\omega x) dx &= f(x) \exp(i\omega x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &- i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\omega x) dx = -i\omega \tilde{f}(\omega), \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) dx \int_{-\infty}^x f(x') dx' = \frac{1}{i\omega} \exp(i\omega x) \int_{-\infty}^x f(x') dx' \Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$- \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\omega x) dx = -\frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega}. \quad (73)$$

Таким образом, преобразования от производной и интеграла отличаются от преобразования функции на множитель $-i\omega$.

5. *Разложение в ряд Фурье.* Обычно ряды и интегралы Фурье рассматриваются порознь как мало связанные между собой понятия. Между тем к ним можно подойти с единой точки зрения.

Действительно, пусть функция $f(x)$ периодична с периодом T . Тогда преобразование Фурье (66) можно записать в несколько непривычном виде

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{lT}^{(l+1)T} f(x) e^{i\omega x} dx = \quad (74)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i\omega lT} \int_0^T f(x') e^{i\omega x'} dx' = \int_0^T f(x) e^{i\omega x} dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i\omega lT}.$$

Последнюю сумму можно найти предельным переходом:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i l \beta} = \lim_{q \rightarrow 1-0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{|l|} e^{i l \beta} = \lim_{q \rightarrow 1-0} \left[\sum_{l=0}^{\infty} (q^l e^{i l \beta} + q^l e^{-i l \beta}) - 1 \right] =$$

$$= \lim_{q \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{1 - q e^{i \beta}} + \frac{1}{1 - q e^{-i \beta}} - 1 \right) = \lim_{q \rightarrow 1-0} \frac{1 - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \beta} =$$

$$= \lim_{q \rightarrow 1-0} \frac{1 + q}{2\sqrt{q}} \frac{(1 - q)/2\sqrt{q}}{[(1 - q)/2\sqrt{q}]^2 + \sin^2 \beta/2} = \lim_{s \rightarrow +0} \frac{s}{s^2 + \sin^2 \beta/2}. \quad (75)$$

При проведении выкладки были просуммированы ряды — геометрические прогрессии. Используя представление δ -функции через предел (46), а также ее свойства (54) и (56), получаем далее

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i l \beta} = \pi \delta\left(\sin \frac{\beta}{2}\right) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\beta/2 - \pi l)}{|\cos(l\pi)|} = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\beta - 2\pi l). \quad (76)$$

Таким образом, для преобразования Фурье периодической функции получается

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \int_0^T f(x) e^{i\omega x} dx \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l/T). \quad (77)$$

Обращение преобразования дает

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \frac{2\pi}{T} \int_0^T f(x') e^{i\omega x'} dx' \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l/T) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i l x/T} \int_0^T f(x') e^{i 2\pi l x'/T} dx'. \end{aligned} \quad (78)$$

Т.е. получилось правильное разложение периодической функции в ряд Фурье.

Аналогично равенству Парсеваля получается соотношение, которое в теории рядов Фурье называется уравнением замкнутости. Однако, ясно, что в случае периодической функции нельзя ее квадрат интегрировать по всей оси, так как такой интеграл бесконечен. Поэтому интегрируем по периоду:

$$\begin{aligned} \int_0^T |f(x)|^2 dx &= \int_0^T f^*(x) dx \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i l x/T} \int_0^T f(x') e^{i 2\pi l x'/T} dx' = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T f(x) e^{i 2\pi l x/T} dx \right|^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Здесь связь с теоремой Пифагора более прозрачна.

Приложение 4. О функциях Бесселя

1. *Определения функций Бесселя.* Для вывода формул, описывающих спектр синхротронного излучения, приведем краткие сведения о бesselевых функциях.

Бесселева функция (первого рода) может быть определена сходящимся на всей комплексной плоскости рядом

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (80)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Функция $J_\nu(z)$ является решением уравнения Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 J_\nu(z)}{dz^2} + z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2) J_\nu(z) = 0. \quad (81)$$

Число ν называется порядком уравнения и функции.

Линейно независимыми решениями уравнения Бесселя являются функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$, если только ν не целое число. Второе линейно независимое решение (функция второго рода) представляется в виде следующей линейной комбинации указанных решений

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\pi \nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi \nu)}, \quad (82)$$

которую называют функцией Вебера или Неймана. Она остается линейно независимой от основной и при целых порядках.

Если в уравнении Бесселя (81) заменить переменную z на iz , то уравнение перейдет в

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0, \quad (83)$$

называемое модифицированным уравнением Бесселя. Соответствующие решения носят название модифицированных функций Бесселя. Одна из них — это просто функция Бесселя (основная) от аргумента, умноженного на мнимую единицу:

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(e^{i\pi/2} z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (84)$$

Как и для функции первого рода, вторым решением при нецелых ν может служить $I_{-\nu}(z)$. Более удобна другая функция, которую называют функцией Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi \nu)}. \quad (85)$$

Для нее справедливо рекуррентное соотношение, связывающее производную от этой функции с двумя функциями с соседними номерами:

$$2K'_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z). \quad (86)$$

Аналогичные рекуррентные соотношения имеют место и для функции Бесселя первого рода:

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = 2\frac{\nu}{z} J_\nu(z), \quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2\frac{dJ_\nu(z)}{dz}. \quad (87)$$

Непосредственно из представлений в виде рядов вытекают формулы, характеризующие поведение функций при $z \rightarrow +0$:

$$J_\nu(z) \sim I_\nu(z) \sim \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{2\Gamma(1-\nu) \sin(\pi\nu)} (z/2)^{-\nu} = \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}. \quad (88)$$

При переходе к последнему выражению использована формула дополнения гамма-функции.

2. *Интегральные представления.* Функции Бесселя могут быть представлены в виде определенных интегралов, с помощью которых их удобно исследовать и вычислять. Представление для функции целого порядка

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi - iz \sin \phi} d\phi. \quad (89)$$

доказывается непосредственной выкладкой, при которой экспоненту надо разложить в ряд по степеням z . Аналогично представление модифицированной функции

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-z \sin \phi} \cos n\phi d\phi. \quad (90)$$

Для функции Макдональда справедливо представление

$$K_\nu(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t) dt. \quad (91)$$

Исходя из него получим асимптотику этой функции при $z \rightarrow \infty$ методом Лапласа. Для этого заменим в показателе экспоненты $\operatorname{ch} t = 1 + 2 \operatorname{sh}^2(t/2)$ и примем во внимание, что при больших аргументах z в интеграл дают вклад только малые значения t , так что

$$K_\nu(z) = e^{-z} \int_0^{\infty} e^{-2z \operatorname{sh}^2(t/2)} \operatorname{ch}(\nu t) dt \sim e^{-z} \int_0^{\infty} e^{-zt^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (92)$$

Особый интерес представляет асимптотика функции $J_\nu(z)$, когда велики и аргумент z и порядок ν , причем $z \leq \nu$. Ее мы, следуя книге [19], получим в два этапа.

3. *Метод ВКБ.* Метод, называемый методом ВКБ по именам физиков Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна, применивших его в различных областях физики к ряду задач, теперь стал одним из методов приближенного решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$u'' + f(z)u = 0. \quad (93)$$

Пусть функция $f(z)$ существенно изменяется на большом масштабе $s \gg 1$ изменения z . Введем новую переменную $\tau = z/s$, изменение которой имеют небольшой диапазон. В этой переменной уравнение предстанет в форме

$$\frac{1}{s^2} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + fu = 0. \quad (94)$$

Ищем решение в виде

$$u(z) = e^{is\psi(\tau)}. \quad (95)$$

Находим производные по аргументу τ :

$$\frac{du}{d\tau} = uis \frac{d\psi}{d\tau}, \quad \frac{d^2 u}{d\tau^2} = u \left(is \frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 + uis \frac{d^2 \psi}{d\tau^2}, \quad (96)$$

подставляем их в уравнение (94):

$$- \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 + \frac{i}{s} \frac{d^2 \psi}{d\tau^2} + f = 0. \quad (97)$$

Смысл подстановки (95) заключается в том, что в уравнении для новой функции малый множитель появился явно у производной второго порядка, так что в первом приближении ее можно отбросить, но уравнение, получившееся в результате такой процедуры, имеет смысл. Такое приближение невозможно осуществить в исходном уравнении (93) или в уравнении (94).

Решение уравнения (97) ищется в виде разложения по малому параметру:

$$\psi = \psi_0 + \frac{i}{s} \psi_1 + \dots \quad (98)$$

Это разложение подставляется в уравнение. Приравниваются выражения при одинаковых степенях параметра малости $1/s$. При этом ограничиваются двумя первыми слагаемыми. Получаются два уравнения, нулевого и первого порядка:

$$\left(\frac{d\psi_0}{d\tau} \right)^2 = f, \quad -2 \frac{d\psi_0}{d\tau} \frac{d\psi_1}{d\tau} + \frac{d^2 \psi_0}{d\tau^2} = 0. \quad (99)$$

В этих двух уравнениях и заключается приближение ВКБ.
Уравнение нулевого приближения решается сразу:

$$\psi_0 = \pm \int \sqrt{f} d\tau. \quad (100)$$

В уравнении первого приближения переменные разделяются:

$$2 \frac{d\psi_1}{d\tau} = \frac{d^2\psi_0}{d\tau^2}, \quad \psi_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{d\psi_0}{d\tau} = \frac{1}{4} \ln f. \quad (101)$$

Собрав вместе два приближения и подставив их в формулу (95), найдем

$$u(z) = \exp\left(\pm i s \int \sqrt{f} d\tau - (1/4) \ln f\right) = f^{-1/4}(z) \exp\left(\pm i \int f^{1/2}(z) dz\right). \quad (102)$$

Наличие двойного знака перед интегралом в показателе экспоненты означает существование двух независимых решений уравнения. Общее решение можно записать так:

$$u(z) = \frac{1}{f^{1/4}(z)} \left[C_1 \exp\left(i \int f^{1/2}(z) dz\right) + C_2 \exp\left(-i \int f^{1/2}(z) dz\right) \right]. \quad (103)$$

Очевидно, что если функция f положительна, то решение имеет колебательный характер, если отрицательна, то одно из решений возрастает, а другое убывает.

Обсудим условие применимости приближения. Чтобы слагаемое первого приближения было меньше нулевого, требуется выполнение неравенства (в качестве ψ подставлено ψ_0 , неравенство написано в различных модификациях)

$$\frac{1}{s} \left| \frac{d^2\psi_0}{d\tau^2} \right| \ll \left| \left(\frac{d\psi_0}{d\tau} \right)^2 \right|, \quad \frac{1}{s} \left| \frac{d}{d\tau} f^{1/2} \right| \ll |f|, \quad \left| \frac{d}{dz} f^{-1/2} \right| \ll 1. \quad (104)$$

Приближение ВКБ широко применяется не только в конкретных задачах, но и чисто математических вопросах, в частности, в теории специальных функций. Здесь применим его при выводе асимптотики бесселевой функции.

4. *Приближение ВКБ для функции Бесселя.* Применим к уравнению (81) сначала метод ВКБ. Для этого заменим в нем независимую переменную z на y по формуле $z = \nu e^y \leq \nu$, $y \leq 0$. Тогда уравнение перейдет в

$$\frac{d^2 J_\nu}{dy^2} - \nu^2 u^2 J_\nu = 0, \quad (105)$$

где обозначено

$$u = \sqrt{1 - z^2/\nu^2} = \sqrt{1 - e^{2y}}, \quad z = \nu\sqrt{1 - u^2}. \quad (106)$$

Решение методом ВКБ уравнения (105) имеет вид

$$w = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{\pm \nu \int u dy}. \quad (107)$$

Входящий в формулу для решения интеграл легко вычисляется:

$$v = \int_y^0 u dy = \int_y^0 \sqrt{1 - e^{2y}} dy = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u, \quad (108)$$

Тогда решение уравнения (105) в приближении ВКБ запишется в виде

$$J_\nu(z) = u^{-1/2} (C_1 e^{\nu v} + C_2 e^{-\nu v}). \quad (109)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим, исходя из поведения функции Бесселя около нуля (88). При больших значениях порядка ν для гамма-функции воспользуемся формулой Стирлинга. С другой стороны при $z \rightarrow 0$ будет $u \sim 1 - z^2/(2\nu^2) \rightarrow 1$, а $v \sim \frac{1}{2} \ln \frac{2}{z^2/(2\nu^2)} - 1 = \ln \frac{2\nu}{ze}$. Тогда

$$J_\nu(z) \sim \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sim \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu, \quad J_\nu(z) \sim C_1 \left(\frac{2\nu}{ze}\right)^\nu + C_2 \left(\frac{ze}{2\nu}\right)^\nu. \quad (110)$$

Отсюда находим, что $C_1 = 0$, $C_2 = 1/\sqrt{2\pi\nu}$. Следовательно,

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu u}} e^{-\nu v}. \quad (111)$$

Как обычно, решение методом ВКБ неприменимо, когда u и, следовательно, v близки к нулю. Но полученные асимптотические формулы можно существенно уточнить, так, чтобы они не имели указанного недостатка.

5. *Формулы Лангера.* В исходном уравнении (81) сделаем (второй этап вывода) следующие замены искомой функции и ее аргумента:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{u}} F(v). \quad (112)$$

Замена производной получается при помощи формул

$$\frac{d}{dz} = \frac{dv}{du} \frac{du}{dz} \frac{d}{dv} = \left(\frac{1}{1-u^2} - 1 \right) \frac{-z}{u\nu^2} \frac{d}{dv} = -\frac{u}{z} \frac{d}{dv}. \quad (113)$$

Тогда

$$z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} = z \left[-\frac{1}{2u^{3/2}} \frac{-z}{\nu^2 u} F - \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{u}{z} F' \right] = \left(\frac{z^2}{2\nu^2 u^{5/2}} F - \sqrt{u} F' \right). \quad (114)$$

Уравнение для функции F получается таким:

$$F'' - \nu^2 F = -\frac{z^2}{4\nu^2 u^6} \left(5 \frac{z^2}{\nu^2} + 4u^2 \right) F = -\frac{1-u^2}{4} u^{-6} (5-u^2) F. \quad (115)$$

Нам надо уточнить наше решение при малых u , поэтому преобразуем уравнение именно для этой области. В ней можно принять, что $v \sim u^3/3$. Тогда уравнение (114) можно переписать так:

$$F'' - \nu^2 F + \frac{5}{36} v^{-2} F = 0. \quad (116)$$

От уравнения, которому удовлетворяет решение (111), полученное уравнение отличается последним слагаемым, которое велико при малых v .

Чтобы привести уравнение (116) к стандартному виду, сделаем еще одну замену:

$$F(v) = \sqrt{\nu v} G(\nu v). \quad (117)$$

Для вновь введенной функции получается уравнение

$$x^2 G''(x) + xG'(x) - (1/9 + x^2)G(x) = 0, \quad (118)$$

т. е. модифицированное уравнение Бесселя порядка $1/3$. Поведение решения при больших v согласно (111) таково, что надо выбрать в качестве G функцию Макдональда $K_{1/3}$. Окончательно

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{v}{u}} \frac{1}{\pi} K_{1/3}(\nu v). \quad (119)$$

Теперь значение $J_\nu(\nu)$ получается конечным:

$$J_\nu(\nu) = \sqrt{\frac{u^3}{3u}} \frac{\Gamma(1/3)}{\pi} 2^{-2/3} \left(\frac{\nu u^3}{3}\right)^{-1/3} = \frac{\Gamma(1/3)}{\pi} 2^{-2/3} 3^{-1/6} \nu^{-1/3}. \quad (120)$$

Для получения производной от функции Бесселя $J'_\nu(z)$ достаточно продифференцировать асимптотическую формулу (119):

$$J'_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{uv} K_{2/3}(\nu v). \quad (121)$$

Значение $J'_\nu(\nu) = [\Gamma(2/3)/\pi] 2^{-1/3} 3^{-1/6} \nu^{-2/3}$ также конечно.

Полученные асимптотики носят название формул Лангера. Они вполне годятся для оценок различных величин, выражающихся через функции Бесселя. Однако для аккуратных расчетов их точность оказывается недостаточной и ее можно существенно повысить. Для этого можно воспользоваться методом, разработанным Черри, который применительно к функциям Бесселя воспроизводится в [16].

Приложение 5. Некоторые вспомогательные понятия

1. *Диадное произведение.* Часто оказывается удобным векторы представлять в виде столбцов, как это делается в линейной алгебре. Эти столбцы можно рассматривать как частный случай матриц и производить с ними обычные матричные операции. Такое представление позволяет использовать удобные обозначения и ввести одно вспомогательное понятие. Продемонстрируем это на примере двумерных комплексных векторов. Обобщение на векторы произвольной размерности тривиально.

Пусть даны два двумерных вектора

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (122)$$

Скалярное произведение этих векторов можно записать в виде произведения матриц

$$\vec{a}^\dagger \vec{b} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2. \quad (123)$$

Здесь звездочкой отмечается комплексно сопряженная величина, а крестом эрмитово сопряженная матрица.

Произведение этих же векторов, взятое в обратном порядке, дает не число, а квадратную матрицу:

$$\vec{b} \vec{a}^\dagger = \begin{pmatrix} b_1 a_1^* & b_1 a_2^* \\ b_2 a_1^* & b_2 a_2^* \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Такие матрицы называются диадными произведениями, или просто диадами. Определитель такой матрицы всегда равен нулю, так как ее строчки (и столбцы) пропорциональны.

Приведем полезную формулу для определителя от матрицы, равной сумме единичной матрицы и двух вещественных диад. Такую структуру часто имеют функциональные матрицы, т. е. составленные из частных производных, при заменах векторных переменных. Формула имеет вид

$$\det(1 + \vec{a}\vec{b}^T + \vec{c}\vec{d}^T) = 1 + \vec{a}^T \vec{b} + \vec{c}^T \vec{d} + (\vec{a}^T \vec{b})(\vec{c}^T \vec{d}) - (\vec{a}^T \vec{d})(\vec{b}^T \vec{c}). \quad (125)$$

2. *Диадные произведения трехмерных и четырехмерных векторов.* Они по существу ничем не отличаются от приведенного выше, но мы будем их записывать иначе, а именно для трехмерных векторов в виде

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^T = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}, \quad (126)$$

а для четырехмерных из пространства Минковского

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 \vec{b}^T \\ \underline{a} b_0 & \vec{a} \vec{b}^T \end{pmatrix}. \quad (127)$$

Здесь предполагается, что векторы вещественны, в противном случае вместо транспонирования надо производить эрмитово сопряжение.

3. *Базисы на двух векторах.* Для сокращения записи ряда формул введем следующее обозначение. Пусть \vec{a} и \vec{b} — два неколлинеарных вектора, т. е. $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$. Тогда обозначим

$$\vec{e}_1(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a^2 \vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{a}}{a |\vec{a} \times \vec{b}|}, \quad \vec{e}_2(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}, \quad \vec{e}_3(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}}{a}. \quad (128)$$

Если α — угол между нашими векторами, то $\vec{a}\vec{b} = ab \cos \alpha$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha$ и

$$\vec{e}_1(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a\vec{b} - b \cos \alpha \vec{a}}{ab \sin \alpha}, \quad \vec{e}_2(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{ab \sin \alpha}, \quad \vec{e}_3(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}}{a}. \quad (129)$$

Наконец, если векторы единичные, то $a = b = 1$ и

$$\vec{e}_1(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{b} - \cos \alpha \vec{a}}{\sin \alpha}, \quad \vec{e}_2(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\sin \alpha}, \quad \vec{e}_3(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}. \quad (130)$$

Базис, построенный на тех же векторах, но взятых в обратном порядке, не совпадает с первым. Чтобы сделать у них один вектор общим, изменим знаки у первых двух ортов, а именно, обозначим

$$\vec{e}_j(\vec{b}|\vec{a}) = (-1)^{\text{Ent}((j-1)/2)} \vec{e}_j(\vec{b}, \vec{a}), \quad (131)$$

где Ent означают взятие целой части. Тогда $\vec{e}_2(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{e}_2(\vec{b}|\vec{a})$. Векторы этих двух базисов связаны матрицей

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1(\vec{b}|\vec{a}) \\ \vec{e}_2(\vec{b}|\vec{a}) \\ \vec{e}_3(\vec{b}|\vec{a}) = \vec{b}/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{e}_2(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{e}_3(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}/a \end{pmatrix}. \quad (132)$$

Коротко такую связь будем записывать

$$(\vec{e}_j(\vec{b}|\vec{a})) = \check{L}_2(\alpha)(\vec{e}_j(\vec{a}, \vec{b})), \quad \check{L}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (133)$$

Аналогичные обозначения для матриц используем и в дальнейшем:

$$\check{L}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \check{L}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Обратная связь получается транспонированием матриц, что сводится к изменению знака их аргументов. Четырехмерные векторы, соответствующие всем этим ортам, будем записывать в виде \underline{e}_j с теми же аргументами, что и у трехмерных.

Приложение 6. Некоторые интегралы

1. *Интегралы по косинусу полярного угла.* В теории встречаются такие интегралы двух видов.

а. По полному промежутку.

$$I_{m n}(\beta) = \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta \cos^m \vartheta d\vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^n} = \int_{-1}^1 \frac{\eta^m}{(1 - \beta \eta)^n} d\eta. \quad (135)$$

Для них легко получить рекуррентные соотношения

$$I_{m n}(\beta) = \frac{I_{m-1 n}(\beta) - I_{m-1 n-1}(\beta)}{\beta}, \quad I'_{m n}(\beta) = n I_{m+1 n+1}(\beta). \quad (136)$$

Интегралы с нечетным первым индексом пропорциональны β , множители у них при β , как и интегралы с четным первым индексом, являются четными функциями β .

Приведем значения этих интегралов для первых натуральных чисел, опустив их аргумент:

$$\begin{aligned}
I_{02} &= 2\gamma^2, \quad I_{03} = 2\gamma^4, \quad I_{04} = \frac{2}{3}(3 + \beta^2)\gamma^6, \quad I_{05} = 2(1 + \beta^2)\gamma^8, \\
I_{13} &= 2\beta\gamma^4, \quad I_{14} = \frac{8}{3}\beta\gamma^6, \quad I_{15} = \frac{2}{3}\beta(5 + \beta^2)\gamma^8, \quad (137) \\
I_{24} &= \frac{2}{3}(1 + 3\beta^2)\gamma^6, \quad I_{25} = \frac{2}{3}(1 + 5\beta^2)\gamma^8, \quad I_{35} = 2\beta(1 + \beta^2)\gamma^8, \\
I_{06} &= \frac{2}{5}(5 + 10\beta^2 + \beta^4)\gamma^{10}, \quad I_{16} = \frac{4}{5}\beta(5 + 3\beta^2)\gamma^{10}, \\
I_{26} &= \frac{2}{15}(5 + 38\beta^2 + 5\beta^4)\gamma^{10}.
\end{aligned}$$

Здесь $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ — лоренцевский множитель, если считать, что

β — это скорость. Приведем также производную от него: $\frac{d\gamma}{d\beta} = \beta\gamma^3$.

Удобно иметь следующие комбинации интегралов:

$$I_{05} - I_{25} = 4\gamma^6/3, \quad I_{15} - I_{35} = 4\beta\gamma^6/3. \quad (138)$$

б. Четные по β интегралы.

$$I_{n,m}(\beta) = \int_0^1 \frac{\eta^m}{(1 - \beta^2\eta^2)^n} d\eta. \quad (139)$$

Аналогично предыдущему пункту получаются рекуррентные соотношения

$$I_{n,m}(\beta) = \frac{I_{n,m-1}(\beta) - I_{n-1,m-1}(\beta)}{\beta^2}, \quad I'_{n,m}(\beta) = 2\beta n I_{n+1,m+1}(\beta). \quad (140)$$

Опять приведем интегралы для небольших значений индексов.

$$I_{0,m}(\beta) = \frac{1}{2m+1}, \quad I_{1,0}(\beta) = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad I_{1,1}(\beta) = \frac{I_{1,0}(\beta) - 1}{\beta^2}, \quad (141)$$

$$I_{2,0}(\beta) = \frac{1}{2} [\gamma^2 + I_{1,0}(\beta)], \quad I_{2,1}(\beta) = \frac{1}{2\beta^2} [\gamma^2 - I_{1,0}(\beta)], \quad (142)$$

$$I_{2,2}(\beta) = \frac{1}{2\beta^4} [\gamma^2 + 2 - 3I_{1,0}(\beta)]. \quad (143)$$

2. *Интегралы с косинусом азимута.* Это интегралы вида

$$U_n(\beta) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{(1 - \beta \cos \phi)^n}. \quad (144)$$

Взяв производную, получим рекуррентное соотношение

$$U_{n+1}(\beta) = U_n(\beta) + \frac{\beta}{n} U_n'(\beta). \quad (145)$$

Первые такие интегралы: $U_0(\beta) = \pi$, $U_1(\beta) = \pi\gamma$,

$$U_2(\beta) = \pi\gamma^3, \quad U_3(\beta) = \frac{\pi}{2}(2 + \beta^2)\gamma^5, \quad U_4(\beta) = \frac{\pi}{2}(2 + 3\beta^2)\gamma^7. \quad (146)$$

3. *Интегралы, сводящиеся к предыдущим.* Несколько отличающиеся от предыдущих интегралы сводятся к ним:

$$\begin{aligned} V_n(\beta) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - \beta^2 \cos^2 \phi)^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{[1 - \beta^2(1 + \cos 2\phi)/2]^n} = \\ &= \frac{1}{2(1 - \beta^2/2)^n} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(1 - \beta^2 \cos^2 \psi / (2 - \beta^2))^n} = \frac{U_n(\beta^2 \gamma^2)}{2(1 - \beta^2/2)^n}. \end{aligned} \quad (147)$$

Для этих интегралов выполняется похожее на (145) рекуррентное соотношение

$$V_{n+1}(\beta) = V_n(\beta) + \frac{\beta}{2n} V_n'(\beta). \quad (148)$$

Первые интегралы (147) (по-прежнему $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$)

$$V_0(\beta) = \frac{\pi}{2}, \quad V_1(\beta) = \frac{\pi}{2}\gamma, \quad V_2(\beta) = \frac{\pi}{4}(2 - \beta^2)\gamma^3, \quad (149)$$

$$V_3(\beta) = \frac{\pi}{16}(8 - 8\beta^2 + 3\beta^4)\gamma^5, \quad V_4(\beta) = \frac{\pi}{32}(16 - 24\beta^2 + 18\beta^4 - 5\beta^6)\gamma^7. \quad (150)$$

4. *Интегралы с тремя индексами.* Последние интегралы в этом приложении

$$I_{p m n} = \int_0^\infty \frac{v^m dv}{(1 + v^p)^n}. \quad (151)$$

Эти интегралы заменой переменной интегрирования $y = 1/(1 + v^p)$ сводятся к бета-функции:

$$I_{p m n} = \frac{1}{p\Gamma(n)} B\left(n - \frac{m+1}{p}, \frac{m+1}{p}\right) = \frac{1}{p} \Gamma\left(n - \frac{m+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right). \quad (152)$$

Физические приложения

Приложение А. Размерности и единицы электродинамических величин

1. *Немного истории.* Единицы измерения появились, наверное, с самого начала активной человеческой истории, по крайней мере тогда, когда от собирательства, охоты и рыболовства перешли к производству (неолитическая революция). Тогда племена разделились на земледельческие и скотоводческие, так что появилась необходимость обмена. Даже если обмен был чисто натуральным, приходилось как-то соразмерять обмениваемые продукты.

Понятно, что в разное время и в разных местах существовало чрезвычайное разнообразие единиц. Многие из них связывались с человеческим телом. Локти, пяди, футы (ноги), вершки, сажени и т. д. Некоторые названия дошли и до нашего времени. Размер таких единиц варьировался в довольно широких пределах.

С появлением государства потребовалось унифицировать единицы, но все равно даже в одной стране единообразия не было.

Понятно, что основные системные единицы следует определять так, чтобы их было легко воспроизвести и проверить, т. е. их надо связать с какими-то объектами, которые не изменяются.

Метрическую систему единиц ввели, как известно, во время Великой французской революции (1789-1793). Тогда было актуально измерение размеров Земли, поэтому в качестве единицы длины была принята одна сорокамиллионная доля земного (парижского) меридиана. Был изготовлен платино-иридиевый стержень, служивший эталоном единицы длины — метра. Другой эталон — массы — также хранился в парижской Палате мер и весов. С них изготовлялись многочисленные копии.

Эталоном единицы времени также служила Земля. Астрономы наблюдали моменты прохождения звезд через определенные инструменты и тем самым находили поправки показаниям часов. Хранение времени осуществлялось на высокоточных маятниковых часах.

Примерно в середине XX века всего этого оказалось недостаточно и были приняты несколько другие меры с теми же названиями, но привязывались они к физическим явлениям и процессам. Подробно о системах единиц и истории их создания рассказано в книге [20] (см. также [21]). Здесь кратко опишем две системы: CGS и SI.

2. *Современные единицы.* Метод построения систем единиц разрабатывал К.Ф.Гаусс (1777–1855). Его система, названная им абсолютной, базируется на трех единицах, применяется до сих пор и называется CGS (от французских слов centimetre, gramm, seconde), а по-русски СГС (см — сантиметр, г — грамм, с — секунда). Именно ее, в основном, применяют в электродинамике.

Две из трех основных единиц определяются путем привязки к атомам. Единицей длины — метром — называется такая длина, в которую укладываются 1650763.73 длин волн оранжевой линии криптона ^{86}Kr (заряд ядра и порядковый номер 36, изотоп с атомным весом 86). Секунда определяется как продолжительность 9192631770 периодов линии, возникающей при переходах между двумя подуровнями основного (самого низкого по энергии) уровня атома цезия ^{133}Cs . Хранится время на кварцевых или молекулярных часах, точность которых выше, чем точность вращения Земли, так что теперь астрономы изучают неравномерность ее вращения.

В конце 1950 — начале 1960 годов была выработана и принята Международная система единиц SI (System International, по-русски СИ, в нашей стране принята в 1961 году). Единицы механических величин в ней это: кг — килограмм, м — метр и с — секунда.

3. *Размерности механических единиц.* Будем показывать размерность через размерности массы M , длины L и времени T . В Табл. 2 приведены основные механические величины, их размерности и единицы в системе CGS и SI.

Таблица 2. Размерности и единицы механических величин.

Величина	Размерн.	Система CGS	Система SI
Длина	L	см	$m = 10^2$ см
Масса	M	г	$kg = 10^3$ г
Время	T	с	с
Площадь	L^2	см^2	$m^2 = 10^4$ см^2
Объем	L^3	см^3	$m^3 = 10^6$ см^3
Период	T	с	с
Частота	T^{-1}	с^{-1}	с^{-1}
Скорость	LT^{-1}	$\text{см} \text{с}^{-1}$	$m \text{с}^{-1} = 10^2$ $\text{см} \text{с}^{-1}$
Ускорение	LT^{-2}	$\text{см} \text{с}^{-2}$	$m \text{с}^{-2} = 10^2$ $\text{см} \text{с}^{-2}$
Энергия	ML^2T^{-2}	$\text{эрг} = \text{г} \text{см}^2 \text{с}^{-2}$	$\text{Дж} = \text{кг} \text{м}^2 \text{с}^{-2} = 10^7$ эрг
Мощность	ML^2T^{-3}	$\text{эрг} \text{с}^{-1} = \text{г} \text{см}^2 \text{с}^{-3}$	$\text{Вт} = \text{кг} \text{м}^2 \text{с}^{-3} = 10^7$ эрг с^{-1}
Сила	MLT^{-2}	$\text{дин} = \text{г} \text{см} \text{с}^{-2}$	$\text{Н} = \text{кг} \text{м} \text{с}^{-2} = 10^5$ г $\text{см} \text{с}^{-2}$
Давление	$ML^{-1}T^{-2}$	$\text{бар} = \text{г} \text{см}^{-1} \text{с}^{-2}$	$\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{кг} \text{м}^{-1} \text{с}^{-2} = 10$ бар
Импульс	MLT^{-1}	$\text{г} \text{см} \text{с}^{-1}$	$\text{кг} \text{м} \text{с}^{-1} = 10^5$ г $\text{см} \text{с}^{-1}$
Плотность	ML^{-3}	$\text{г} \text{см}^{-3}$	$\text{кг} \text{м}^{-3} = 10^{-3}$ г см^{-3}
Момент	ML^2T^{-1}	$\text{г} \text{см}^2 \text{с}^{-1}$	$\text{кг} \text{м}^2 \text{с}^{-1} = 10^7$ г $\text{см}^2 \text{с}^{-1}$
Действие	ML^2T^{-1}	$\text{эрг} \text{с} = \text{г} \text{см}^2 \text{с}^{-1}$	$\text{кг} \text{м}^2 \text{с}^{-1} = 10^7$ г $\text{см}^2 \text{с}^{-1}$

В системе SI (которую мы не употребляем) единица силы Н — ньютон, единица мощности Вт — ватт, единица давления Па — паскаль, а энергии Дж — джоуль. При этом все отыменные единицы в сокращении пишутся с заглавной буквы.

Основные величины системы SI просто связаны с величинами CGS: $1 \text{ кг} = 10^3 \text{ г}$, $1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$, секунда у обеих систем общая единица. Поэтому тем же свойством обладают и производные величины. Например, единица силы $1 \text{ Н} = \text{кг м/с}^2 = 10^5 \text{ г см/с}^2 = 10^5 \text{ дин}$.

4. *Электродинамические величины.* Единицы этих величин в двух системах различаются значительно больше.

В системе CGS дополнительных единиц не вводится. Это наиболее часто применяемая в электродинамике система единиц, так как при ее принятии многие уравнения и формулы записываются в простейшем виде. С другой стороны в этой системе получаются дробные степени основных единиц. Для вывода размерностей электродинамических величин надо исходить из формулировки закона Кулона для равных зарядов:

$$F = \frac{q^2}{r^2}. \quad (1)$$

Отсюда так как $[F] = M \cdot L/T^2$, то $[q] = ([F] \cdot L^2)^{1/2} = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$. Размерности остальных величин получаются уже просто.

В системе SI к указанным выше механическим величинам добавляется еще одна основная величина — сила тока, обозначаемая I . Единица силы тока — А (ампер) — и связь единиц двух систем устанавливается, исходя из законов Био—Савара или Ампера. Запишем формулу (3.57) для двух одинаковых параллельных проводников и расстояния между ними по перпендикуляру, равному их длине (т. е. при $I_1 = I_2 = I$, $s_1 = s_2 = r$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$):

$$F = 2 \frac{I^2}{c^2}. \quad (2)$$

Ампер определяется так: если сила тока равна 1 А, то проводники действуют друг на друга с силой $2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ дин}$. Таким образом, $(1 \text{ А})^2 = 10^{-2} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 \text{ дин}$ и $1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGS}$ единиц силы тока, так как скорость света $c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/с} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$. Во многих формулах под цифрой 3 подразумевается число 2.99792458. Впрочем, при многих практических расчетах замена этого числа на 3 оправдана.

Отыменные названия других единиц в международной системе следующие: заряда Кл — кулон, потенциала В — вольт, магнитной индукции Т — тесла.

Так как ампер — это кулон в секунду, то коэффициент в соотношении между кулоном и единицей заряда CGS точно тот же, что и между ампером и единицей силы тока CGS, т. е. $3 \cdot 10^9$. Так же просто устанавливается связь между единицами потенциала и напряженности в двух системах. Если течет постоянный ток силой 1

А в проводнике, к которому приложено напряжение (разность потенциалов) 1 В, то выделится мощность в 1 Вт = 10^7 эрг/с, так что $1 \text{ В} = 10^7 / (3 \cdot 10^9) = 1/300$ единиц CGS. Единица напряженности $1 \text{ В/м} = 1 / (3 \cdot 10^4)$ единиц CGS.

В Табл. 3 приведена сводка используемых единиц двух систем.

Таблица 3. Единицы электродинамических величин.

Величина	Система CGS	Система SI	SI/CGS
Заряд	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-1}$	Кл	$3 \cdot 10^9$
Плотность заряда	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{-3/2} \text{ с}^{-1}$	Кл м ⁻³	$3 \cdot 10^3$
Поверхностн. плотность	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-1}$	Кл м ⁻²	$3 \cdot 10^5$
Линейная плотность	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ с}^{-1}$	Кл м ⁻¹	$3 \cdot 10^7$
Плотность тока	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-2}$	Кл м ⁻² с ⁻²	$3 \cdot 10^5$
Сила тока	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-2}$	А	$3 \cdot 10^9$
Электр. напряженность	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-1}$	В м ⁻¹	1/30000
Магнит. напряженность	$\Theta = \Gamma^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-1}$	А м ⁻¹	$10^3 / (4\pi)$
Магнитная индукция	$\Gamma_{\text{с}} = \Gamma^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-1}$	Тл	10^4
Потенциалы	$\Gamma^{1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ с}^{-1}$	В	1/300

Заметим однако, что строго говоря, в Табл. 3 приведены не совсем те размерности единиц, которые употребляются в системе SI. В ней помимо трех механических величин M , L , T (масса, длина, время) и их единиц (кг, м, с), как уже говорилось, вводится в качестве основной еще одна, электродинамическая величина — сила тока I и ее единица А — ампер. Все электродинамические величины и единицы выражаются наряду с механическими величинами и единицами и через эти. Тогда получается, что Кл — это А с (кулон — это ампер-секунда) и, следовательно, размерность заряда IT (размерность силы тока обозначается той же буквой, что и сама величина). Произведение силы тока на напряжение — это мощность, т. е. Вт = В А (вольт-ампер), следовательно, размерность потенциала $[\varphi] = ML^2T^{-3}I^{-1}$, а размерность электрической напряженности $[E] = [\varphi]/L = MLT^{-3}I^{-1}$.

Отдельного разговора требуют так называемые электрическая ε_0 и магнитная μ_0 постоянные. Дело в том, что многие формулы электродинамики в системе SI записываются не так, как в системе CGS. В SI вводятся относительные диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости, которые во всех системах одинаковы, а в пустом пространстве $\varepsilon = \mu = 1$. Наряду с ними употребляются абсолютные величины с теми же названиями, которые равны произведениям: $\varepsilon_0\varepsilon$ и $\mu_0\mu$. Закон Кулона в SI имеет вид

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}, \quad (3)$$

а закон Ампера при тех же условиях, что и в формуле (2), вид

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} I^2. \quad (4)$$

Из закона Ампера находим размерность магнитной постоянной: $[\mu_0] = M L T^{-2} I^{-2}$. В согласии с этим можно было бы принять за единицу этой постоянной Н/А², но принято ее выражать в единице Гн/м (генри на метр), где Гн — это единица индуктивности. В системе CGS эта единица равна 10⁹ см. Из той же формулы находим и численное значение (при $I = 1$ А)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}. \quad (5)$$

Размерность электрической постоянной находится из закона Кулона (3): $I^2 M^{-1} L^{-3} T^4$. Вместо возможной единицы А²с²м⁻²/Н в качестве единицы измерения взято отношение Ф/м (фарада на метр), где фарада — единица емкости (конденсаторов), в системе CGS равная 3² · 10¹¹ см. Численное значение электрической постоянной находится из условия, что произведение численных значений двух постоянных равно 1/(3 · 10⁸)², т. е. обратному квадрату скорости света в системе SI (без ее размерности). Таким образом,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 3^2 \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}}. \quad (6)$$

Все приведенные размерности и единицы помещены в Табл. 4. Как и раньше, цифра 3, стоящая в коэффициентах, обозначает число 2.99792458. Если в (6) и (5) подставить значения Гн и Ф в CGS, то получится $\varepsilon_0 = 1/(4\pi)$, $\mu_0 = 4\pi$.

Таблица 4. Размерности и единицы электромагнитных величин.

Вл.	Размерн.	Единица	Связь	SI/CGS
I	I	А	А	$3 \cdot 10^9$
q	TI	А с	Кл	$3 \cdot 10^9$
φ	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	кг м ² с ⁻³ А ⁻¹	В=Вт/А	1/300
E	$MLT^{-3}I^{-1}$	кг м с ⁻³ А ⁻¹	В/м	1/30000
ε_0	$M^{-1}L^{-3}T^4I^2$	кг ⁻¹ м ⁻³ с ⁴ А ²	Кл/(В м)	$1/(4\pi \cdot 3^2 \cdot 10^9)$
D	$L^{-2}TI$	м ⁻² с А	Кл/м ²	$3 \cdot 10^5$
μ_0	$MLT^{-2}I^{-2}$	$\frac{\text{кг м}}{\text{с}^2 \text{А}^2}$	$\frac{\text{В с}}{\text{А м}}$	$4\pi \cdot 10^{-7}$
H	$L^{-1}I$	А/м	А/м	$10^3/(4\pi)$
B	$MT^{-2}I^{-1}$	кг с ⁻² А ⁻¹	Н м ⁻¹ А ⁻¹	10^4

Указанные сложности системы SI объясняют неприменение ее в электродинамике.

5. *Пример расчета.* В качестве примера рассчитаем плотность энергии электромагнитного поля в единицах двух систем.

Пусть в свободном пространстве имеется электрическое поле единичной напряженности в CGS ($E = 1 \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-1}$) и магнитное поле, напряженность которого $H = 1 \text{ Э}$. Тогда и индукции в этой системе тоже единичные, т. е. электрическая индукция $D = 1 \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ с}^{-1}$, а магнитная индукция равна 1 Гс (для свободного пространства в системе CGS напряженность и индукцию можно не различать). Плотность энергии в системе CGS находится по формуле $w = w_E + w_H$, где

$$w_E = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi}, \quad w_H = \frac{H^2}{8\pi} = \frac{HB}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (7)$$

Для указанного поля

$$w_E = w_H = \frac{1 \text{ эрг}}{8\pi \text{ см}^3} = \frac{1}{8\pi} \frac{10^{-7} \text{ Дж}}{10^{-6} \text{ м}^3} = \frac{1}{80\pi} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \quad (8)$$

В системе SI электрическая напряженность того же поля равна $E = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$. Строго говоря, как уже отмечалось, здесь надо умножать не на 3, а на 2.99792458 (с точностью до девятого знака), т. е. на величину скорости света в единице 10^{10} см/с . Однако, подразумевая это число, для краткости пишем, как и раньше, 3. Согласно определению индукция такого электрического поля

$$D = \varepsilon_0 E = \frac{1}{4\pi \cdot 3^2 \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot 3 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл/м}^2}{3 \cdot 4\pi \cdot 10^5}. \quad (9)$$

Плотность энергии электрической и магнитной частей поля в системе SI определяется другими формулами:

$$w_E = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}, \quad w_H = \mu_0 \frac{H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (10)$$

При принятом поле электрическая часть плотности энергии

$$w_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 ED = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}} \frac{1}{\text{м} \cdot 3 \cdot 4\pi \cdot 10^5} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{1}{8\pi \cdot 10} \frac{\text{В Кл}}{\text{м}^2}. \quad (11)$$

Результаты совпадают, так как $\text{В Кл} = \frac{3 \cdot 10^9}{300} \text{ эрг} = 10^7 \text{ эрг} = \text{Дж}$.

В системе СИ напряженности в один эрстед отвечает $\frac{10^3 \text{ А}}{4\pi \text{ м}}$, а индукции в один гаусс — 10^{-4} Тл. Проверим это. Согласно формуле $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$1 \text{ Гс} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10^3 \text{ Гн А}}{4\pi \frac{\text{м}}{\text{м}}} = 10^{-4} \text{ Тл}. \quad (12)$$

Чтобы получилось правильное значение, надо не обращать внимания на единицы перемножаемых величин, т. е. считать, что $\frac{\text{Гн А}}{\text{м}} = \text{Тл}$, а не переводить эти единицы в систему CGS. Проверим магнитную часть плотности энергии:

$$w_H = \frac{1}{2} \frac{10^3 \text{ А}}{4\pi \text{ м}} \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = \frac{1}{8\pi \cdot 10} \text{ Тл} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{1}{80\pi} \text{ Дж}. \quad (13)$$

Опять после перевода величин в систему СИ единицы измерения величин уже не подставляются, т. е. считается, что $\text{Тл} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \text{Дж}$.

6. *Приставки, изменяющие величины.* Приведем еще таблицу приставок, приписывание которых изменяет величину на определенный множитель.

Таблица 5. Математические приставки.

Название	Обозн.	Множ.	Название	Обозн.	Множ.
деци	д	10^{-1}	дека	да	10
санци	с	10^{-2}	гекто	г	10^2
милли	м	10^{-3}	кило	к	10^3
микро	мк	10^{-6}	мега	М	10^6
нано	н	10^{-9}	гига	Г	10^9
пико	п	10^{-12}	тера	Т	10^{12}
фемто	ф	10^{-15}	пета	П	10^{15}
атто	а	10^{-18}	экса	Э	10^{18}
зенто	з	10^{-21}	зета	З	10^{21}
йокто	и	10^{-24}	йотта	И	10^{24}

Приложение Б. Атмосферное электричество

1. *Заряд и токи Земли.* Оказывается (см., например, [22]), что поверхность Земли (земля) имеет отрицательный заряд. Этот заряд над поверхностью Земли, точнее над плоской равниной или над океаном, создает потенциал, который возрастает с высотой с градиентом у поверхности 1 В/см, так что у человека ростом в 2 метра разность потенциалов от пятки до головы составляет примерно 200 В, что совсем не мало. Рост потенциала постепенно замедляется и примерно на высоте 50 км, где начинаются слои атмосферы с высокой проводимостью, прекращается. Полная разность потенциала составляет $4 \cdot 10^5$ В. Всякие объекты на поверхности земли (горы, леса, строения и т. п.) искажают ее поле. В частности, человеческое тело является довольно хорошим проводником электричества, некоторая часть заряда Земли поднимается по телу и поднимает уровень поля над стоящим на равнине человеком, так что разность потенциала на протяжении его роста почти равна нулю.

В атмосфере также текут токи. Плотность тока очень мала. Через квадратный метр параллельно земной поверхности проходит примерно несколько единиц 10^{-12} А, а на всю поверхность Земли падает ток в 1800 А при напряжении в 400000 В, что соответствует мощности 700 МВт.

Ток идет потому, что воздух не идеальный изолятор, в нем наряду с нейтральными молекулами и атомами имеются ионы (малые ионы). Заряженными могут быть и частички аэрозоля, т. е. пыль, дым, водяной пар, кристаллики соли и др. (крупные ионы). Малые ионы создаются так называемыми космическими лучами (КЛ), т. е. частицами, в основном, протонами, летящими в космическом пространстве, попадающими в атмосферу, ионизирующими молекулы воздуха и сообщаящими положительный заряд. С высотой проводимость атмосферы увеличивается, так как КЛ действуют тем сильнее, чем выше, а кроме того, плотность воздуха падает, ионам легче передвигаться. В ионосфере Земли текут токи силой в МА (мегаамперы).

Однако постоянно идущий ток не приводит к нейтрализации заряда поверхности Земли, а уменьшаемый КЛ заряд все время восстанавливается. Его восстанавливают грозы. Каждые сутки на Земле происходит около 300 гроз, в основном, в тропической зоне. В так называемой грозовой ячейке вследствие конвективных вертикальных потоков воздуха создаются слои противоположных зарядов. При этом на высоте 6–7 км, где температура составляет около -20°C , находятся положительные заряды, а на нижней части тучи, на 3–4 км с температурой от 0 до -10 — отрицательные. Заряд там скапливается настолько большой, что создается разность потенциала по отношению к поверхности в 20–30 и даже до 100 миллионов вольт, т. е. намного больше, чем в ясную погоду с ее полным перепадом в атмосфере в 0.4 миллиона вольт ($4 \cdot 10^5$ В).

Оценим полный заряд Земли, точнее ее поверхности. Полный потенциал равен ($1 \text{ В} = \frac{1}{300} \text{ г}^{1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ с}^{-1}$) $\varphi_{\text{З}} = \frac{4}{3} \cdot 10^3$ единиц CGS. Если считать, что весь заряд находится в центре Земли, радиус которой $R_{\text{З}} = 6.36 \cdot 10^8 \text{ см}$, то потенциал равен $\varphi_{\text{З}} = \frac{q_{\text{З}}}{R_{\text{З}}}$, так что

заряд $q_{\text{З}} = \varphi_{\text{З}} R_{\text{З}} = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \cdot 6.36 \cdot 10^8 = 8.5 \cdot 10^{11}$ CGS = 280 Кл. На самом деле полный заряд Земли отрицателен и равен $5.7 \cdot 10^5$ Кл, а ее потенциал $2.85 \cdot 10^7$ В. Заметим здесь же, что момент инерции Земли равен $10^{38} \text{ кг/м}^2 = 10^{37} \text{ г/см}^2$.

Сравним две силы, а именно, силу притяжения двух тел, равных по массе Земле, при их соприкосновении и силу отталкивания тех же тел с зарядом Земли. Масса Земли $M_{\text{З}} = 6 \cdot 10^{27} \text{ г}$. Две

Земли притягивались бы при соприкосновении с силой $G \frac{M_{\text{З}}^2}{(2R_{\text{З}})^2} =$

$\frac{(6 \cdot 10^{27})^2}{(12.7 \cdot 10^8)^2} 1.5 \cdot 10^7 = 1.5 \cdot 10^{30}$ дин. Электростатическая сила бы-

ла бы $\frac{q_{\text{З}}^2}{(2R_{\text{З}})^2} = \frac{(\varphi_{\text{З}} R_{\text{З}})^2}{(2R_{\text{З}})^2} = \frac{\varphi_{\text{З}}^2}{4} = \frac{16}{4 \cdot 9} \cdot 10^6 = \frac{4}{9} \cdot 10^6$ дин, т. е.

значительно меньше силы гравитационной.

2. *Молния.* В туче созревшей грозы заряд опускается до 1 км, разность потенциалов создает напряженность до $10^8/10^5 = 10^3$ В/см и происходит пробой воздуха. Сухой воздух пробивается при напряженности $E_{\text{air}} = 3 \cdot 10^4$ В/см, влажный — при значительно меньших значениях. В результате пробоя молния обрушивается на землю 20–30 кулон отрицательного электрического заряда. На землю падает ток в среднем силой в 4 А. Конечно, заряд растекается по поверхности.

Теория, объясняющая процесс создания зарядов в грозе и динамику разрядов, а также свойства и строение молний, очень сложна. Ее схематическое изложение можно найти в Фейнмановских лекциях по физике [23].

Молния — это и есть пробой воздуха при большой напряженности электрического поля тучи. Пробой воздуха начинается с прохождения так называемого ступенчатого лидера. Он идет короткими отрезками по 50 метров со скоростью в $1/6$ скорости света, так что этот путь он проходит за $5 \cdot 10^3 / (3 \cdot 10^{10} / 6) = 10^{-6}$ с. При переходе от одного отрезка к другому заряд остается неподвижным примерно $5 \cdot 10^{-5}$ с, так что средняя скорость лидера $5 \cdot 10^3 / (5 \cdot 10^{-5}) = 10^8$ см/с. Весь путь в 1 км лидер проделывает за $10^5 / 10^8 = 10^{-3}$ с и создает ток в $(20 \div 30) / 10^{-3} = (2 \div 3) \cdot 10^3$ А.

При переходе от одного отрезка пути к другому лидер изменяет направление и поэтому называется ступенчатым. Он создает что-то вроде ломанной трубки ионизованных молекул. Затем по проложенному пути устремляются другие потоки зарядов с переменным знаком, этот путь они проходят несколько раз туда и обратно, постепенно ослабляясь. Однако в целом на землю попадает отрицательный заряд.

На самом деле процесс более сложен, так как при подходе заряда примерно к высоте 100 метров от поверхности ему навстречу устремляется заряд противоположного знака, особенно с высоких и остроконечных предметов. Туда и бьет молния. Если заряд от такого предмета успевает нейтрализовать заряд молнии, то она не достигает этого предмета. Именно на этом свойстве основано применение молниеотводов. Но отрицательный заряд молнии все же передается Земле, так как такой заряд остается после ухода положительного навстречу молнии.

Между последовательными молниями выдерживается некоторый промежуток времени, в среднем это 7.5 с. При 30 кулонах заряда от каждой молнии средняя сила тока получается $30/7.5 = 4$ А. Грозы обычно длятся не слишком долго, в тропиках они дольше и мощнее. В целом гроз хватает, чтобы поддерживать отрицательный заряд Земли постоянным несмотря на нейтрализующие токи.

Оценим, сколько стоит молния. Такой вопрос был поставлен в книге Я.И.Перельмана Занимательная физика. Попробуем оценить ее теперешнюю стоимость. Берем максимальные значения.

При силе тока в $3 \cdot 10^3$ А и напряжении в 10^7 В мощность, порождаемая молнией, оказывается равной $3 \cdot 10^{10}$ Вт или $3 \cdot 10^7$ кВт. За время ее действия будет произведена работа $3 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^4$ кВт с или примерно 8.3 киловаттчасов. Тариф на электроэнергию в дневное время в Санкт-Петербурге в середине 2016 года составляет около 4 рублей за киловаттчас, так что максимальная цена одной молнии примерно равна всего 30 рублям.

Оглавление

Введение	3
Глава 0. Некоторые сведения из истории электродинамики	5
1. Древние века и средневековье (5). 2. Первые шаги в изучении электричества (5). 3. Начало современных исследований (8). 4. Проблема электрона (12). 5. Развитие и приложения теории (13).	
Глава 1. Уравнения Максвелла	15
§ 1. Заряды и токи	15
1. Типы распределений зарядов (15). 2. Точечные заряд и ток в свободном пространстве (17).	
§ 2. Уравнения Максвелла для свободного пространства 18	
1. Характеристики электромагнитного поля (18). 2. Уравнения Максвелла (20). 3. Физический смысл уравнений (20). 4. Об уравнениях Максвелла (21).	
§ 3. Уравнения Максвелла для среды	23
1. Усреднение зарядов и токов в среде (23). 2. Усреднение напряженностей и уравнений (24). 3. Альтернативная форма уравнений (25).	
§ 4. Материальные уравнения	26
§ 5. Энергетическое соотношение	28
§ 6. Потенциалы	30
1. Определение потенциалов (30). 2. Калибровочная инвариантность (31). 3. Уравнения для потенциалов (32). 4. Функция Грина на волнового уравнения и ее преобразование Фурье (32). 5. Обращение преобразования Фурье (34). 6. Запаздывающие потенциалы (35).	
§ 7. Граничные условия для электромагнитных полей в свободном пространстве и в веществе	36
1. Граничные условия для электрической напряженности в свободном пространстве (36). 2. Граничные условия для магнитной напряженности (38). 3. Граничные условия в диэлектрике (39).	

Глава 2. Основы теории относительности	42
§ 1. Основные положения	42
1. Принцип относительности (42). 2. События и интервал (43). 3. Преобразование Лоренца (44).	
§ 2. Простейшие эффекты	47
1. Различие между интервалами (47). 2. Лоренцево замедление времени (48). 3. Лоренцево сокращение (50). 4. Сложение скоро- стей (51).	
§ 3. Скаляры и векторы	52
1. Скаляры (52). 2. Векторы (53). 3. Координаты в неортого- нальных системах (54). 4. Ковариантные и контравариантные со- ставляющие (55). 5. Скалярное произведение (56). 6. Примеры век- торов (56).	
§ 4. Скорость, импульс и ускорение	57
1. Скорость (57). 2. Импульс (58). 3. Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы (59). 4. Ускорение (59). 5. Квадрат ускорения (60). 6. Относительная скорость (60).	
§ 5. Импульс фотона	62
1. Импульс фотона (62). 2. Эффект Доплера (63). 3. Абберация (65). 4. Классическая формула абберации (68). 5. Инварианты (69).	
§ 6. Тензоры и действия с ними	70
1. Определение и типы тензоров (70). 2. Базисные тензоры (70). 3. Матричные обозначения (71). 4. Матричное представление преобразования Лоренца (73). 5. Действия с тензорами (75).	
§ 7. Релятивистские формулы для величин электродинамики	75
1. Вектор тока (75). 2. Потенциалы (76).	
§ 8. Вариационный принцип для заряда в электромагнитном поле	76
1. Действие и функция Лагранжа для частицы (76). 2. Varia- ционный принцип для свободной частицы (78). 3. Заряд в электро- магнитном поле (79). 4. Уравнения движения заряда в поле (80). 5. Общее релятивистское уравнение движения (81).	

§ 9. Тензор электромагнитного поля	82
1. Определение тензора (82). 2. Выражение через напряженности (83). 3. Свойства тензора (84). 4. Первая пара уравнений Максвелла (86).	
§ 10. Вариационный принцип для поля	87
1. Действие для электромагнитного поля (87). 2. Вариация действия (88). 3. Вторая пара уравнений Максвелла (88).	
§ 11. Тензор энергии–импульса	89
1. Определение тензора энергии-импульса (89). 2. Дивергенция тензора (90). 3. Тензор зарядов (91). 4. Сохранение моментов (92).	
§ 12. Проявления эффектов относительности	93
1. Проявления в физике (93). 2. Сверхсветовые скорости (94). 3. Проявление лоренцева сокращения (96). 4. Форма летящей сферы (98). 5. Базисы в плоскости абберации (99). 6. Восприятие сферы наблюдателями (100). 7. Влияние абберации (103).	
Глава 3. Постоянные электрическое и магнитное поля .	104
§ 1. Постоянное электрическое поле	104
1. Поле одиночного точечного заряда (104). 2. Поле диполя (105). 3. Поверхности уровня диполя (107). 4. Силовые линии диполя (109). 5. Потенциалы распределенных зарядов (111).	
§ 2. Законы Био—Савара—Лапласа, Эрстеда и Ампера .	114
1. Четвертое уравнение Максвелла (114). 2. Закон Эрстеда (114). 3. Закон Био—Савара—Лапласа и его обобщение (115). 4. Доказательство закона (116). 5. Закон Ампера (117).	
§ 3. Магнитный момент	118
1. Определение (118). 2. Связь магнитного и механического моментов (119). 3. Поле на больших расстояниях (122). 4. Энергия заряда в однородном магнитном поле (123).	
§ 4. Характерные структуры магнитного поля	124
1. Дипольное магнитное поле (124). 2. Тороидальное и полоидальное поле (125). 3. Простые примеры (126). 4. Космические магнитные поля (128).	

§ 5. Движение заряда в постоянном поле	129
1. Постоянное и однородное электрическое поле (129). 2. Постоянное и однородное магнитное поле (130).	
Глава 4. Волны в однородных средах	133
§ 1. Волновые уравнения	133
1. Однородные уравнения Максвелла (133). 2. Волновые уравнения для векторов поля (133). 3. Уравнения для потенциалов (134). 4. Другой вывод (135).	
§ 2. Плоские волны	136
1. Одномерные волны (136). 2. Одномерные электромагнитные волны (137). 3. Произвольная плоская волна (138). 4. Энергетические величины (139).	
§ 3. Монохроматические волны	140
1. Понятие монохроматической волны (140). 2. Уравнения для комплексных амплитуд (141). 3. Плоские монохроматические волны (141).	
§ 4. Сферические волны	142
1. Понятие сферических волн (142). 2. Сферические гармоники (143). 3. Разделение переменных (144). 4. Функции Бесселя полужелого порядка (145). 5. Сферические функции Бесселя (146). 6. Функция Грина (146). 7. Асимптотическое поведение волн (147).	
§ 5. Поляризация электромагнитных волн	148
1. Поляризация монохроматической волны (148). 2. Почти монохроматическая волна (150). 3. Поляризационная матрица и параметры Стокса (151). 4. Свойства поляризационной матрицы и параметров Стокса (152). 5. Преобразование параметров при повороте базиса (153). 6. Наблюдаемая интенсивность и поляризация (154). 7. Частные случаи поляризации (157). 8. Дискретные преобразования параметров Стокса (158). 9. Представление общей поляризации через частные случаи (159). 10. Другие параметры (160). 11. Дифференциальные инварианты линейной поляризации (160).	

§ 6. Особые точки поля поляризации	163
1. Поле поляризации (163). 2. Особые точки дифференциальных уравнений (164). 3. Особенности поля поляризации (164). 4. Характер поляризации вблизи особенности (166). 5. Особенности в различных системах координат (167). 6. Классификация особенностей (168). 7. Примеры (170). 8. Особые случаи (171).	
§ 7. Энергетические характеристики электромагнитных волн	172
1. Тензор энергии-импульса волны (172). 2. Потенциалы и напряженности плоских волн (173). 3. Плотность и поток энергии (174). 4. Выражение тензора через амплитуды потенциалов (175).	
Глава 5. Классическая теория излучения	177
§ 1. Потенциалы точечного заряда	177
1. Постановка задачи (177). 2. Вычисление потенциалов (179).	
§ 2. Поле точечного заряда	182
1. Соотношения между переменными, связанными с зарядом и с наблюдателем (182). 2. Вычисление напряженностей (184). 3. Условие Лоренца (185).	
§ 3. Поле точечного заряда на больших расстояниях ..	186
1. Направление и время на большом расстоянии от заряда (186). 2. Потенциалы на больших расстояниях (187). 3. Дополнительные соотношения (188). 4. Напряженности (189). 5. Энергетика поля (189).	
§ 4. Дипольное приближение	190
1. Нерелятивистский заряд (190). 2. Формулы Лармора (191).	
§ 5. Рассеяние излучения свободными зарядами	192
1. Схема рассеяния (192). 2. Поляризационные базисы (193). 3. Движение заряда (194). 4. Создаваемое поле (194). 5. Преобразование напряженности (194). 6. Матрица томсоновского рассеяния (195). 7. Сечение и индикатриса рассеяния (196).	

§ 6. Излучение быстрых зарядов	198
1. Полное излучение (198). 2. Сравнение эффективности излучения (199). 3. Угловое распределение (200). 4. Связь с полным излучением (201). 5. Излучаемый импульс (203). 6. Движение по прямой (204).	
§ 7. Торможение излучением	207
1. Самодействие зарядов (207). 2. Сила реакции излучения нерелятивистского заряда (208). 3. Торможение гармонического осциллятора (210). 4. Затухание излучения и линия излучения (212). 5. Тормозящая сила релятивистского заряда (214). 6. Случай движения в электромагнитном поле (215). 7. Стационарное однородное поле (216).	
§ 8. Спектр излучения в волновой зоне	218
1. Преобразования Фурье от потенциалов (218). 2. Преобразования напряженностей (220). 3. Энергетические величины (220). 4. Разложения Фурье при периодическом движении заряда (221). 5. Спектр излучения периодического заряда (223).	
Глава 6. Магнитотормозное излучение	225
§ 1. Геометрия и терминология	225
1. Движение и излучение заряда (225). 2. Описание движения электрона (225). 3. Полное излучение и классификация (227). 4. Доля излучаемой энергии (228).	
§ 2. Угловая зависимость излучения	229
1. Общие формулы (229). 2. Мгновенное излучение (229). 3. Среднее излучение (231). 4. Среднее синхротронное излучение (232). 5. Переход к синхротронному излучению (233).	
§ 3. Спектр магнитотормозного излучения в волновой зоне	234
1. Характер спектра (234). 2. Формула Шотта (236). 3. Поляризация в линиях (236). 4. Полное излучение в линиях (238).	
§ 4. Спектр синхротронного излучения	239
1. Направленное излучение в линиях (239). 2. Полное излучение в линиях (241). 3. Поляризация в полном излучении (243). 4. Усреднение по энергиям электронов (244). 5. Торможение излучением (245). 6. Синхротронное излучение в природе (246).	

Глава 7. Волны в неоднородных, диспергирующих и анизотропных средах	248
§ 1. Уравнения для напряженностей	248
1. Неоднородный диэлектрик (248). 2. Уравнения для напряженностей (248). 3. Монохроматические волны (249).	
§ 2. Геометрическая оптика	250
1. Приближение геометрической оптики (250). 2. Уравнение эйконала (250). 3. Монохроматическая волна (251). 4. Метод решения (251). 5. Лучи (252). 6. Частные случаи (252). 7. Применение приближения (254).	
§ 3. E- и H-волны	254
1. Точное рассмотрение (254). 2. E -волны (254). 3. H -волны (255). 4. Слабая неоднородность (256). 5. Условие применимости (257).	
§ 4. Диспергирующие среды	257
1. Материальные уравнения для быстропеременных процессов (257). 2. Преобразования Фурье (259).	
§ 5. Аналитические свойства преобразования функции отклика	260
1. Функция комплексного аргумента (260). 2. Вещественная и мнимая части (260). 3. Интеграл типа Коши (262). 4. Связь вещественной и мнимой частей (264).	
§ 6. Волны в диспергирующих средах	266
1. Плоская монохроматическая волна (266). 2. Немагнитная почти прозрачная среда (267).	
§ 7. Энергетическое соотношение при наличии дисперсии	267
1. Поток энергии (267). 2. Монохроматическая волна (268).	
§ 8. Групповая скорость	269

§ 9. Плазма как диспергирующая система	271
1. Квазинейтральность плазмы (271). 2. Движение электрона под действием волны в плазме (271). 3. Поляризация зарядов (272). 4. Аналитические свойства $\varepsilon(\omega)$ (273). 5. Оптические характеристики плазмы (274).	
§ 10. Дисперсия на атомах	275
1. Осцилляторная модель атома (275). 2. Гармонический осциллятор (276). 3. Действие волны на атомный электрон (276). 4. Смещение электронов и поляризация зарядов (277). 5. Оптические свойства атома (277). 6. Правило сумм (278). 7. Нормальная и аномальная дисперсии (279).	
§ 11. Волны в анизотропных средах	279
1. Материальное уравнение кристаллов (279). 2. Плоская монохроматическая волна (280). 3. Поляризация волны (282). 4. Одноосный кристалл (284).	
§ 12. Волны в гиротропных средах	286
1. Гиротропные среды (286). 2. Материальное уравнение для плазмы в магнитном поле (287). 3. Волна параллельная полю (288). 4. Волна перпендикулярная полю (290).	
Глава 8. Волновые и корпускулярные свойства света ..	292
§ 1. Воззрения на природу света	292
§ 2. Отражение и преломление волн на границе двух сред	293
1. Уравнения и граничные условия (293). 2. Связи между углами (295). 3. Соотношения между амплитудами волн (297). 4. Формулы Френеля (298). 5. Свойства волн при отражении и пропускании (299). 6. Поляризация волн (301). 7. Дисперсия белого света (303).	
§ 3. Интерференция	304
1. Когерентные источники света (304). 2. Когерентные волны (304). 3. Интенсивность (307). 4. Упрощенное рассуждение (308). 5. Интерференция (308). 6. Интерференция на пленках (309).	

§ 4. Явление дифракции	310
1. Экран на пути пучка света (310). 2. Формула Кирхгофа (311). 3. Дифракция Френеля (312). 4. Дифракция от полуплоскости (314). 5. Распределение интенсивности (316). 6. Дифракция Фраунгофера (318). 7. Частные случаи (319).	
§ 5. Корпускулярные свойства света	320
1. Фотоэффект (320). 2. Эффект Комптона (321).	
Заключение	325
Список литературы	326
Математические приложения	328
Приложение 1. Некоторые сведения из векторного анализа	328
1. Производная по направлению (328). 2. Градиент (328). 3. Нормаль и касательная плоскость к поверхности (329). 4. Поверхность уровня и нормаль к ней (330). 5. Линии и трубки тока (330). 6. Поток и циркуляция (331). 7. Дивергенция (331). 8. Ротор или вихрь (332). 9. Операции второго порядка (333). 10. Криволинейные координаты (334). 11. Полезные формулы (335).	
Приложение 2. О дельта-функции	335
1. Определение (335). 2. Приближения дельта-функции (335). 3. Основное свойство дельта-функции (336). 4. Интеграл Фурье (336). 5. Другие свойства дельта-функции (337). 6. Трехмерная дельта-функция (338). 7. Некоторые тождества (338). 8. Односторонние дельта-функции (338).	
Приложение 3. О преобразованиях Фурье	339
1. Разложение в интеграл Фурье (339). 2. Равенство Парсеваля (339). 3. Теорема о свертке (340). 4. Преобразования производных и интегралов (340). 5. Разложение в ряд Фурье (341).	
Приложение 4. О функциях Бесселя	342
1. Определения функций Бесселя (342). 2. Интегральные представления (344). 3. Метод ВКБ (345). 4. Приближение ВКБ для функции Бесселя (346). 5. Формулы Лангера (348).	

Приложение 5. Некоторые вспомогательные понятия ..349

1. Диадное произведение (349). 2. Диадные произведения трехмерных и четырехмерных векторов (350). 3. Базисы на двух векторах (350).

Приложение 6. Некоторые интегралы351

1. Интегралы по косинусу полярного угла (351). 2. Интегралы с косинусом азимута (353). 3. Интегралы, сводящиеся к предыдущим (353). 4. Интегралы с тремя индексами (353).

Физические приложения354

**Приложение А. Размерности и единицы
электродинамических величин 354**

1. Немного истории (354). 2. Современные единицы (354). 3. Размерности механических единиц (355). 4. Электродинамические величины (356). 4. Пример расчета (359). 5. Приставки, изменяющие величины (360).

Приложение Б. Атмосферное электричество.....361

1. Заряд и токи Земли (361). 2. Молния (362).

Учебное издание

Дмитрий Исидорович Нагурнер

Электродинамика для астрономов

Учебное пособие

Подписано в печать 05.08.2016 Формат 60x84 1/16 Цифровая Печ.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 04/08 печать 16.6

Типография «Фалкон Принт»
(197101, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Пушкарская, д. 41, литер Б,
сайт: falconprint.ru)