

# Нечисловое программирование в задачах небесной механики

В. Титов

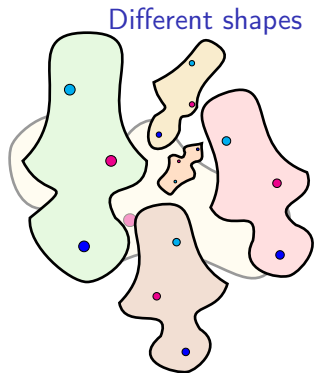
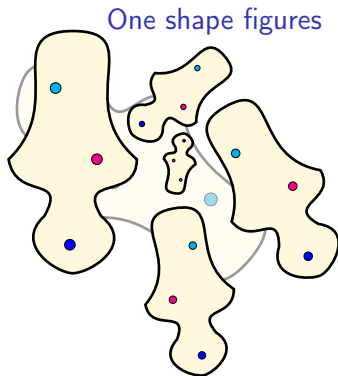
`tit@astro.spbu.ru`

Научно-исследовательский Астрономический институт  
им. В.В.Соболева

5 курс, 26.11.2024

## Пространство форм

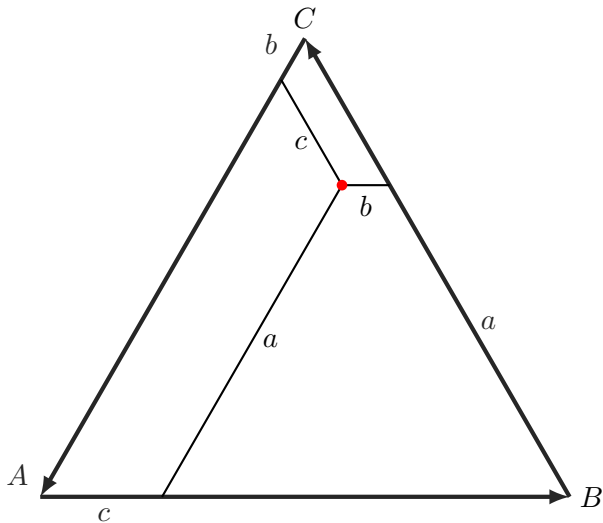
Две плоские фигуры имеют одну и ту же **форму**, если одна фигура в точности совмещается с другой с помощью переносов, вращений и масштабирования *scaling*.



**Note 1.** Для задачи трех тел конфигурация тел всегда треугольник.

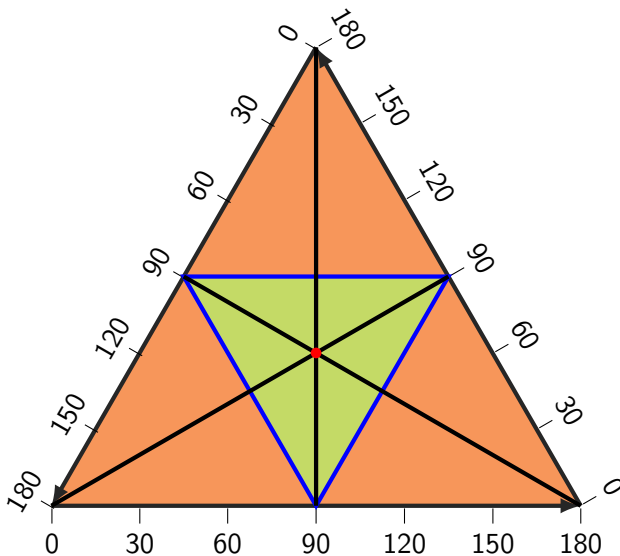
**Note 2.** Для задачи трех тел также важен и размер.

# Треугольники



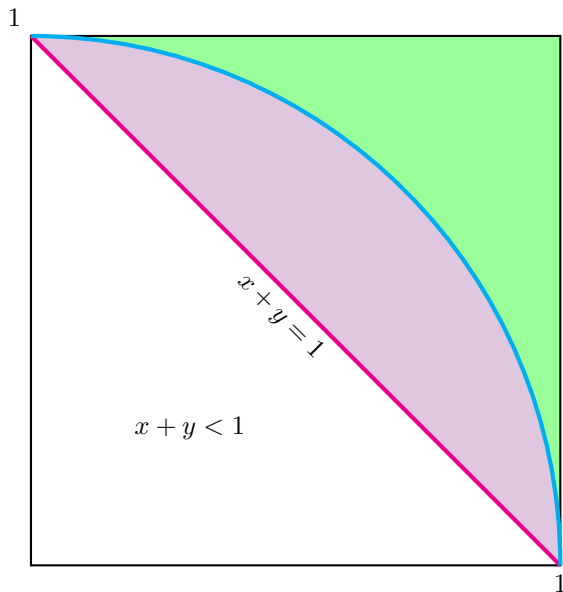
$$a + b + c = 1$$

## Треугольники, II



Доля тупоугольных треугольников: 75%.

# Треугольники, III



$$S = \frac{1}{2}$$

$$S_o = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.285 \text{ (57.1\%)}$$

$$S_a = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215 \text{ (42.9\%)}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

## Редукция по переносам и поворотам

Координаты Якоби + преобразования Хопфа:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{Q}_1 - \frac{m_3}{M}\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{Q}_1 - \frac{m_3}{M}\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3, \\ \mathbf{r}_3 &= \frac{m_1+m_2}{M}\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}\mu_1|\mathbf{Q}_1|^2 - \frac{1}{2}\mu_2|\mathbf{Q}_2|^2, \\ \xi_2 + i\xi_3 &= \sqrt{\mu_1\mu_2}\mathbf{Q}_1\bar{\mathbf{Q}}_2; \\ \xi_2 &= 2\sqrt{\mu_1\mu_2}\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2, \\ \xi_3 &= 2\sqrt{\mu_1\mu_2}\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2.\end{aligned}$$

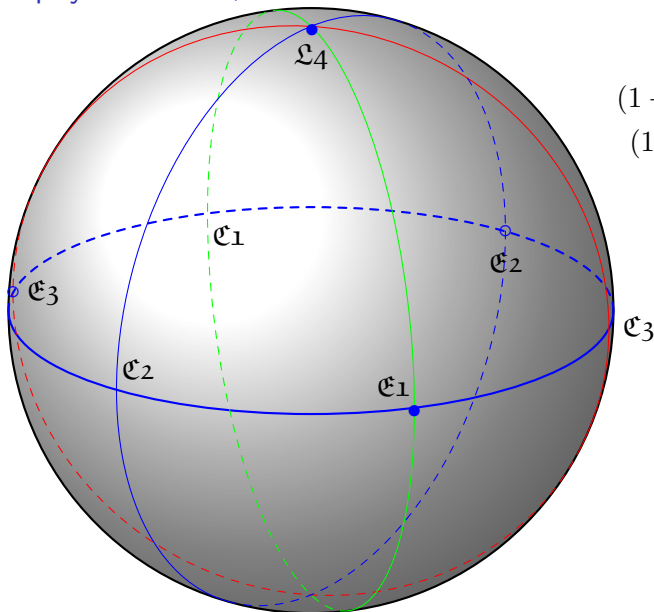
$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{X}$  — 3-мерное пространство (ориентируемых) конгруэнтных треугольников.

Взаимные расстояния:

В сферических координатах взаимные расстояния можно записать

$$\begin{aligned}r_{12}^2 &= \rho(1 + \cos \varphi \cos \theta), \\ r_{13}^2 &= \rho(1 - \cos(\varphi - \pi/3) \cos \theta), \\ r_{23}^2 &= \rho(1 - \cos(\varphi + \pi/3) \cos \theta).\end{aligned}\tag{1}$$

# Треугольники, IV



$$r_{12}^2 = r_{13}^2 + r_{23}^2$$

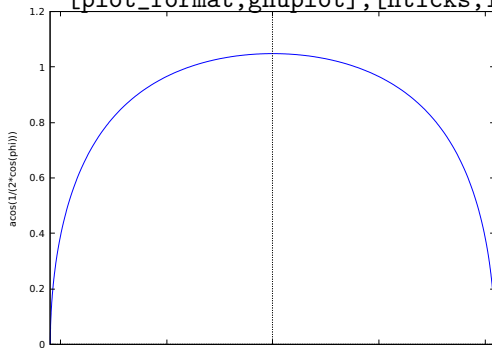
$$(1 + \cos \varphi \cos \theta) =$$

$$(1 - \cos(\varphi - \pi/3) \cos \theta) +$$

$$(1 - \cos(\varphi + \pi/3) \cos \theta)$$

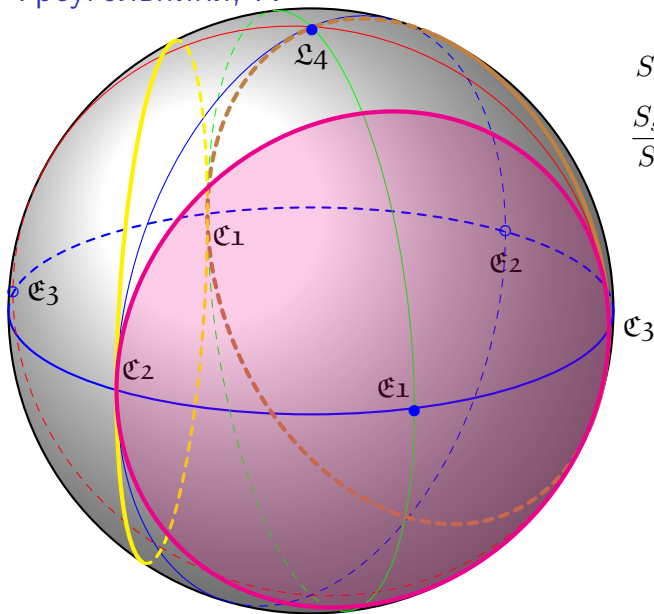
## Треугольники, IV

```
r12p2:1+cos(theta)*cos(phi)$  
r13p2:1-cos(theta)*cos(phi+%pi/3)$  
r23p2:1-cos(theta)*cos(phi-%pi/3)$  
  
eq12:trigsimp(trigexpand(r12p2-r13p2-r23p2));  
(%o4) 2*cos(phi)*cos(theta)-1  
subst([x=cos(phi)*cos(theta)],  
       solve(subst([cos(phi)=x/cos(theta)],%o4),x));  
(%o5) [cos(phi)*cos(theta)=1/2]  
plot2d([acos(1/(2*cos(phi)))],[phi,-%pi/3,%pi/3],  
        [plot_format,gnuplot],[nticks,100])$
```





# Треугольники, IV



$$S_s = 2\pi(1 - \cos \frac{\pi}{3}) = \pi$$

$$\frac{S_s}{S} = \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

```
le(q, lag) := expand (diff(diff(lag, diff(q,t)),t)-  
                      diff(lag, q)) = 0
```

# Механика на Maxima

```
leN(qL,Lag) :=  
  block([qdL, qLdiff, Lag2, eqnL],  
    qdL: map('lambda ([x], concat (x,d)), qL), /*[xd,yd]*/  
    depends(qL,t),  
    qLdiff: diff(qL,t), /*[dx/dt,dy/dt] */  
    qLR: map("=",qdL,qLdiff), /*[xd=dx/dt,yd=dy/dt] */  
    Lag2: subst(qLR, Lag), /* (dx/dt)^2/2 + ... */  
    map ('lambda ([x],le(x, Lag2)), qL))
```

## Механика на Maxima

```
(%i3) mylag: xd^2/2+yd^2/2 + 1/(x^2+y^2)^(1/2)$
```

```
(%i4) leN([x,y], mylag);
```

$$\left[ \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \right]$$

## Ряды Пуассона

$$S = \sum C_j^i x^i \frac{\sin}{\cos}(jy),$$

$$i = (i_1, \dots, i_n), j = (j_1, \dots, j_m)$$

E:kepler(u,e,4);

$$\frac{e^4 \sin(4u)}{3} + \frac{3e^3 \sin(3u)}{8} - \frac{e^4 \sin(2u)}{6} + \frac{e^2 \sin(2u)}{2} - \frac{e^3 \sin(u)}{8} + e \sin(u) + u$$

intopois(E);

$$/P/ \quad \frac{e^4 \sin(4u)}{3} + \frac{3e^3 \sin(3u)}{8} + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6}\right) \sin(2u) + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \sin(u) + u$$

```
p:4; /* Определения порядка точности */
for n:0 thru p+1 do /* Вычисление функций Бесселя для Гекубы */
    j[n]:sum((-1)^k*(n*e/2)^(2*k+n)/(k!*(n+k)!),
              k,0,truncate(float(p-n+1)/2));
for n:0 thru p+1 do /* Вычисление функций Бесселя для Юпитера */
    j[n]:sum((-1)^k*(n*e1/2)^(2*k+n)/(k!*(n+k)!),
              k,0,truncate(float(p-n+1)/2));
for n:1 thru p+1 do dj[n]:diff(j[n],e); /* Вычисление производных */
for n:1 thru p+1 do dj1[n]:diff(j1[n],e1); /* Вычисление производных */
for m:0 thru p do for k:0 thru p-m do /* Вычисление чисел Коши */
    (N[-m-k-2,m,k]:0,N[m+k+2,m,k]:0);
for k:0 thru p do for n:0 thru k do
    N[2*n-k,0,k]:(-1)^(k-n)*binomial(k,n);
for m:0 thru p-1 do for k:0 thru p-m-1 do
    for n:0 thru m+k+1 do
        N[2*n-m-k-1,m+1,k]: N[2*n-m-k-2,m,k]+N[2*n-m-k,m,k];
ff:sum(sum(sum(2*(2*n-m-k)^(k-1)*(e/2)^(m+k)* /* Разложение истинно
        N[2*n-m-k,m,k]*sin((2*n-m-k)*M)/k!,n, /* аномалии для Гекубы
        truncate(float((m+k)/2)+1),m+k),k,0,p-m),m,0,p);
f:M+expand(taylor(ff*(1-e^2)^(1/2),e,0,p));
```