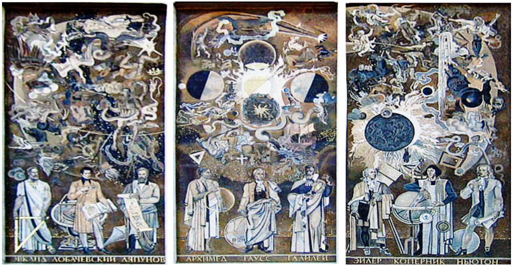


Задача N тел

В. Титов
tit@astro.spbu.ru

Научно-исследовательский Астрономический институт
им. В.В.Соболева

5 курс, 07.10.2025

Интегрируемость

- Задача интегрируема, если она допускает решение в квадратурах, т. е. можно найти общий интеграл системы дифференциальных уравнений ($2n$ независимых интегралов).

Теорема

Если для системы с гамильтонианом H существуют n независимых первых интегралов, то система интегрируется в квадратурах.

Такие системы называются еще вполне интегрируемыми.

- Задача интегрируема, если можно найти точное решение дифференциальных уравнений в виде сходящихся степенных рядов для любых начальных условий.

Интегрируемость

Теорема Брунса. Всякий алгебраический интеграл задачи трех тел имеет вид (Пенлеве: алгебраичность только по скоростям)

$$F(I_1, I_2, \ldots, I_{10}) = C$$

Вообще-то гораздо более простые дифференциальные интегралы не имеют алгебраических интегралов, например,

$$\ddot{x} - (\mu_1 + \mu_2)\dot{x} + \mu_1\mu_2\, x = 0$$

Первый интеграл этого уравнения:

$$\frac{(\dot{x} - \mu_2 x)^{\mu_2}}{(\dot{x} - \mu_1 x)^{\mu_1}} = \mathtt{const}$$

Не является алгебраической функцией, если μ_1/μ_2 не является рациональным числом.

Теорема Пуанкаре. Не существует интегралов ограниченной задачи трех тел (за исключением интералов, равносильных интегралу Якоби), вида

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots,$$

где Φ_i – однозначные аналитические функции от q_1, q_2, p_1, p_2 и периодические по q_1 и q_2.

Региональная интегрируемость

Интегралы движения, являющиеся функциями t и текущего состояния $\mathbf{X}$ $\exists$, например: $x_{j1} = f_1(\mathbf{X}, (t - t_1))$, ряд Зундмана. Множество интегралов, не зависящих от времени, но справедливых только для части орбит. Обратимся к тождеству Лагранжа–Якоби:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = U + 2h$$

Если $h \geq 0$, то I имеет только один минимум I_m:

$$I_m = f(\mathbf{X})$$

Региональная интегрируемость

Если же $h < 0$, то I_m не является непрерывной функцией $\mathbf{X}$, изменяется в каждом минимуме, не изолированный (а орбита может быть и осциллирующей). В этом случае

A если I_m абсолютный минимум, то I_m не является непрерывной функцией состояния,

B если I_m ближайший минимум, то его значение изменяется в каждом максимуме I,

C если I_m частичный минимум (интеграл неизолированный).

Региональная интегрируемость

Иногда удается разбить фазовое пространство на несколько инвариантных областей, в которых существует разное количество интегралов движения. Система может быть интегрируемой при одних значениях интеграла, и не интегрируемой при других.

Гипотеза Алексеева: задача трех тел для гиперболических, гиперболо-эллиптических и гиперболо-параболических движенеий интегрируема в смысле существования полного набора автономных интегралов движения.

Региональная интегрируемость

$$\dot{x}_i = \mu\, f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \dot{y}_j = \omega_j(\mathbf{x}) + \mu\, g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu\, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A}\mathbf{x},$$

Решение

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^0 &= \mathbf{X}, \qquad \mathbf{y}^0(t) = \mathbf{Y} + \mathcal{A}\mathbf{X}t; \\
\mathbf{x}^{n+1}(t) &= \mathbf{X} + \mu \int_0^t \mathbf{f}(\,\mathbf{x}^n(\tau),\, \mathbf{y}^n(\tau)\,)\, d\tau, \\
\mathbf{y}^{n+1}(t) &= \mathbf{Y} + \mathcal{A} \int_0^t \mathbf{x}^{n+1}(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Теорема

Если возмущения достаточно быстро убывают со временем в окрестности порождающего ($\mu = 0$) решения, то движение определено на всей полуоси (или оси) времени, причем медленные переменные стремятся к постоянным, быстрые — к линейным функциям времени; точное решение есть предел итераций пикаровского типа.

Теорема об интегрируемости

Теорема

В фазовом пространстве задачи N тел существуют инвариантные области D бесконечной лебеговой меры, в которых определен полный набор $6N-1$ независимых автономных однозначных аналитических интегралов движения. Все решения в D определены при всех $t \in \mathbf{R}$; каждая орбита в D диффеоморфна прямой.

Пример: три тела равной массы с координатами $\hat{y}_1 = (0,1,0)$, $\hat{y}_2 = (1,0,0)$, $\hat{y}_3 = (0,0,1)$ и скоростями $\hat{x}_1 = (0,0,1)$, $\hat{x}_2(0,1,0)$, $\hat{x}_3(1,0,0)$ удовлетворяют условиям интегрируемости, если $GM/(RV^2) < 1/253$, причем оценки могут быть завышенными на один–три порядка.

Теория Сундмана

Пусть $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) : (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ — решение задачи n тел с центром масс в начале координат. Будем говорить, что система испытывает **полное соударение**, если сущенствует такая точка $\mathbf{p}_\omega \in \mathbb{R}^3$, что

$$\lim_{t \nearrow \omega} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{p}_\omega, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если происходит полное соударение, то $\mathbf{p}_\omega = 0$ и $\omega < \infty$.

Неравенство Сундмана:

$$c^2 \leq 4I(\ddot{I} - h).$$

Теорема (Теорема Сундмана о полном соударении)

Если в системе n тел с центром масс, фиксированном в начале координат, происходит полное соударение, то угловой момент равен нулю.

Теория Сундмана, одномерная задача

$$\ddot{x} = -x^{-2}$$

Интеграл энергии

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{x} + 2h.$$

Пусть столкновение происходит в момент $t_1 = 0$, тогда

$$x(\dot{x})^2 = 2 + 2hx \sim 2, \quad \Rightarrow \quad x^{1/2}\dot{x} \sim -2^{1/2} \quad \Rightarrow \quad x^{3/2}(t) \sim -3t/\sqrt{2}$$

$$x(t) = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}, \quad \text{for } t \to 0.$$

Положим $x(t) = X(t)t^{2/3}$ и, подставив в уравнение, получим

$$t^2\ddot{X} + \frac{4}{3}t\dot{X} - \frac{2}{9}X = -\frac{1}{X^2}\,.$$

Преобразуем независимую переменную $s = t^{1/3}$.

$$s^2X'' + 2sX' - 2X = -\frac{9}{X^2}\,,$$

Теория Сундмана, одномерная задача

Последнее уравнение имеет аналитическое решение

$$x(t) = \sum_k a_k t^{\frac{2k}{3}}.$$

Сундман продемонстировал, что, если $J \neq 0$, то

$$\max_{i \neq j} \{|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j|\} > D(\mathbf{c}) > 0.$$

Система не допускает комплексных особенностей в полосе комплексной плоскости (зависящей от значения $\mathbf{c}$), содержащей вещественную ось. Эта полоса является аналитической областью интервала существования (то есть вещественной осью) и достаточно найти конформное преобразование, способное преобразовать полученную таким образом полосу в единичный диск.

Теория Сундмана, одномерная задача

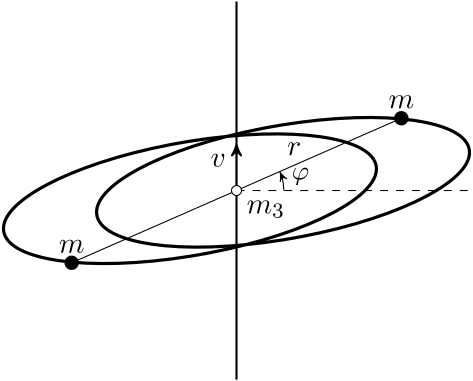
Это делает еще одна замена независимой переменной:

$$\sigma = \left(e^{\pi s/2\beta} - 1\right)\left(e^{\pi s/2\beta} + 1\right)^{-1}$$

В единичной окржности особенностей нет, σ соответсвует всем вещественным значениям времени, таким образом, ряды сходятся $\forall t$. Увы, очень междленно. (10^{80} членов).

Задача Ситникова

Пусть $m_1 = m_2 = m/2$



Выберем единицы так, чтобы $T = 2\pi$, $G = 1$, $2m = 1$, $a = 1$, тогда

$$\ddot{z} = -\frac{z}{(z^2 + r(t)^2)^{3/2}}$$

Задача Ситникова

В случае кругового движения пары тел m

$$\ddot{z} = -\frac{z}{(z^2+1)^{3/2}}, \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\dot{z}^2 = h + \frac{2}{\sqrt{z^2+1}} : \qquad \begin{aligned} &h > 0, \quad \dot{z} \xrightarrow[t\to\infty]{} h \\ &h = 0, \quad \dot{z} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \\ &h < 0, \quad |z| < \rho \end{aligned}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2/\sqrt{z^2+1}+h}} = t + \varphi.$$

Задача Ситникова

$$\ddot{z} = -\frac{z}{(z^2 + r(t)^2)^{3/2}}$$
$$r(t) = a(1 - e\cos t) + o(e^2).$$

или

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{z}{(z^2+1)^{3/2}} - \frac{3ez\cos t}{(z^2+1)^{5/2}}\,.$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{z}{(z^2+1)^{3/2}} - \frac{3ez\cos t}{(z^2+1)^{5/2}}\,. \end{aligned}$$

Задача Ситникова

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{6evz\cos t}{(z^2+1)^{5/2}} \,.$$

Вблизи $z = 0$

$$\begin{aligned} z &= v_c\sqrt{h+2}(t-\tau_c), \\ v &= \sqrt{h+2}(t-\tau_c). \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{6e(h+2)(t-\tau_c)\cos t}{[(h+2)(t-\tau_c)^2+1]^{5/2}} \,,$$

$$\Delta h = -6e\,(h+2)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau_c)\cos t}{[h+2)(t-\tau_c)^2+1]^{5/2}}dt = \frac{4e}{v_c^2}K_1\left(\frac{1}{(h+2)^{1/2}}\right)\sin\tau_c.$$

Задача Ситникова

Предположим, что мы характеризуем орбиту числами периодов двойной, которые проходят между каждым последующим пересечением плоскости двойной, т. е. такой последовательностью как ...2, 5, 314159, 27182818, 5 ... Тогда для каждой такой последовательности существует соответствующая орбита! Можно построить периодические орбиты, используя постоянную последовательность, орбиты захвата или ухода, завершив последовательность ∞ на одном или другом конце орбиты, которые захватываются, а затем снова уходят (завершая последовательность на обоих концах). Вы даже можете построить орбиты, которые остаются вместе произвольное число периодов, а затем расходятся на свои собственные орбиты. Именно это мы называем существенной зависимостью от начальных условий. Похожие примеры можно использовать, чтобы показать, что если $e \neq 0$, не только не сохраняется энергия, но даже нет гладкой функции; другими словами задача неинтегрируема.

Задача Ситникова

Различные сценарии эволюции:

- тело m_3 покоится в барицентре;
- затухающие колебания около барицентра;
- периодические колебания;
- колебания с нарастающей амплитудой, завершающиеся уходом на ∞;
- колебания с нарастающей амплитудой без ухода на ∞ (осциллирующие движения).

Задача Ситникова, символическая динамика

Теорема (Алексеева)

Множество M_V решений задачи Ситникова находится во взаимно однозначном соответствии со множеством Ω всех символических последовательностей вида

$$v^- i_{n_1} | \dots m_{n-1} i_{n-1} m_n i_n m_{n+1} i_{n+1} \dots | v^+, \qquad i_n = 0 \text{ *или* } 1$$

Пример:

$$v^- 0 \underbrace{N_1 1 N_1 0 \dots 1 N_1 0}_{2k_1 \text{ раз}} \underbrace{N_2 \dots N_2 0}_{2k_2 \text{ раз}} N_1 1 N_1 0 N_1 1 v^+$$

Из ∞ со скоростью v^-, k_1 полных колебаний на близкой к периодической орбите (период $4\pi N_1$, за период дважды в плоскости тел, один раз в момент наибольшего сближения, второй — наибольшего удаления), затем k_2 полных колебаний на близкой к периодической орбите (период $4\pi N_2$), затем полтора колебания на первоначальной орбите и уход со скоростью v^+ в ту же сторону.

Расширенная задача Ситникова

$m_1 = m_2 = m_3 = m$. Конфигурация: $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$, $x_3 = y_3 = 0$ и $z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} z_3$.
Положим $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_3$, с учетом интеграла углового момента $r^2 \dot{\theta} = C/2m$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{C^2}{4m^2 r^3} - \frac{mr}{(r^2 + 9z^2)^{3/2}} - \frac{m}{4r^2}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{3mz}{(r^2 + 9z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Интеграл энергии

$$m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{4m^2 r^2} + \frac{3}{4}\dot{z}^2\right) - \frac{m^2}{2r} - \frac{2m^2}{\sqrt{r^2 + 9z^2}} = h = \mathtt{const}.$$

$-\frac{25m^5}{4C^2} \le h$, а если еще $h \le -\frac{m^5}{4C^2}$, то $\sqrt{r^2 + 9z^2} \le \frac{2m^2}{h_1 - h}$

Задача Ситникова. Равновесие

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \left(\frac{1}{r^3}\right) z = 0.$$

Подставив r, т. е. $\left(E(e,t) = t + \sum \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}(\sin^n t)}{dt^{n-1}} e^n\right)$, получим

$$\ddot{z} + \left(\omega^2 + p(t,e)\right) z = 0.$$

$\omega = \sqrt{8 + 12e^2}$,
$p(t,e) = 24e\cos t + (36\cos 2t)e^2 + (27\cos t + 53\cos 3t)e^3$.

e_1	0.544469	e_6	0.996022
e_2	0.855863	e_7	0.998305
e_3	0.944770	e_8	0.999276
e_4	0.977522	e_9	0.999690
e_5	0.990604		

Устойчивость точек либрации

$$27\mu^2 - 27\mu + 1 \geq 0$$