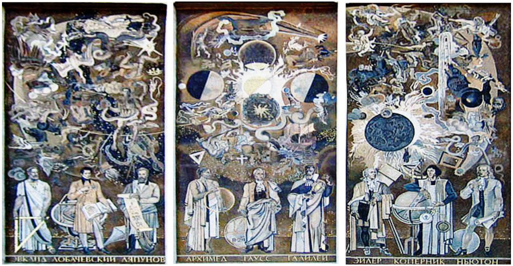


Задача N тел

В. Титов
tit@astro.spbu.ru

Научно-исследовательский Астрономический институт
им. В.В.Соболева

5 курс, 30.09.2025

Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \\ & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Решение $\mathbf{x}$ называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что $\forall\, t_0, \epsilon; \|\mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ решение $\mathbf{x}^*(t)$ с начальными условиями $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0^*$ удовлетворяет неравенству $\|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)\| < \epsilon$.

Устойчивость по Ляпунову

В приближении задачи двух тел уравнения Гамильтона (**??**) можно записать как

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

где $q = (q_1, q_2)$, $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ и $\omega = \omega(r) = \frac{1}{r^{3/2}}$. Рассмотрим круговое исходное решение и варьированное решение, которое также является круговым. Период обращения изменяется вместе с r как $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot r^{3/2}$; следовательно, существует момент, когда две частицы находятся в противоположных направлениях относительно центра масс, что несовместимо с устойчивостью по Ляпунову.

Орбитальная устойчивость

Задача Кеплера неустойчива в смысле Ляпунова, но орбитально устойчива: если не учитывать временну́ю эволюцию частиц по их относительным орбитам, то отклонение между орбитами остается постоянным.
Например, если параметризовать движение по орбите аномалией.
Указанная неустойчивость тесно связана с выбором независимой переменной.

Орбитальная устойчивость

Рассмотрим две круговые орбиты радиуса r и $r + \delta r$. Даже если относительное расстояние первоначально мало, $\delta r \ll r$, эволюцию углового расстояния между частицами $\delta\vartheta$ можно нагляднo представить посредством разложения в ряд:

$$\delta\vartheta = \left[\sqrt{\frac{\mu}{(r+\delta r)^3}} - \sqrt{\frac{\mu}{r^3}}\right] t = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{r^5}} t\delta r + O(\delta r^2) \qquad (1)$$

Оно растет вековым образом (движение неустойчиво по Ляпунову). Однако, расстояние между орбитами, δr, постоянно и остается малым. То есть орбитальное движение устойчиво по Пуанкаре (или орбитально/структурно).

Орбитальная устойчивость

Пусть $\mathbf{\Sigma}$ — сечение Пуанкаре, трансверсальное потоку и пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots$ — последовательные пересечения орбиты с $\mathbf{\Sigma}$. Отображение Пуанкаре $\mathcal{P} : \mathbf{\Sigma} \mapsto \mathbf{\Sigma}$ это такое отображение

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathcal{P}(\mathbf{p}_n)$$

и для периодической орбиты $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j \equiv \mathbf{p}$ или $\mathcal{P}^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Если расстояние между орбитами измеряется в заданный момент t, оно определяется как $\|\mathbf{r}^*(t) - \mathbf{r}(t)\|$ и растет экспоненциально. Однако, если расстояние измерять значением истинной аномалии (что эквивалентно анализу расстояний в сечении Пуанкаре), то это $\|\mathbf{p}^* - \mathbf{p}\|$, и остается постоянным. Это означает, что независимая переменная играет решающую роль при построении орбитального движения.

Линейная устойчивость

Устойчивость в случае линейной системы

$$\dot{\mathbf{h}} = A\mathbf{h},$$

где A — постоянная вещественная $n \times n$ матрица, и мы изучаем решения $t \mapsto \mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$. Начало координат $\mathbf{0}$ есть точка равновесия этой системы.

Решение – линейную комбинацию

$$t^k\, e^{\lambda t},\; t^k\, e^{at} \cos bt,\; t^k\, e^{at} \sin bt,$$

где λ может быть любым вещественным собственным значением, $a \pm i\, b$ – любым комплексным собственным значением. Характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$.

Утверждение

Начало координат является устойчивым равновесием линейной системы $\dot{\mathbf{h}} = A\mathbf{h}$, если и только если нет собственных значений с положительной вещественной частью и $k_{max} = 1$ для всех чисто мнимых собственных значений.

Устойчивость точек Лагранжа

Точка $(\mathbf{q}^\circ, \mathbf{p}^\circ) = (q_1^\circ, \ldots, q_n^\circ, p_1^\circ, \ldots, p_n^\circ)$ называется **точкой равновесия** данной гамильтоновой системы

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,,\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,,\ i = 1, \ldots, n,$$

если частные производные H в этой точке равны нулю, другими словами, если постоянное отображение $t \mapsto (\mathbf{q}^\circ, \mathbf{p}^\circ)$ является решением уравнений Гамильтона.

Устойчивость точек либрации

Пусть (x_0, y_0) — точка Лагранжа. Рассмотрим точку $(X_0 + \xi, y_0 + \eta, \zeta)$ со скоростью $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\
\ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Подставим в это уравнение и разложим в ряд Тейлора

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_0 + \ldots \\
\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 + \ldots \\
\ddot{\zeta} &= \xi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 + \ldots
\end{aligned}
$$

Устойчивость точек либрации

Общее решение (плоское):

$$\xi = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \exp(\lambda_i), \quad \eta = \sum_{i=1}^{4} \beta_i \exp(\lambda_i).$$

λ_i — корни характеристического уравнения:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - U_{xx} & -2\lambda - U_{xy} \\ 2\lambda - U_{xy} & \lambda^2 - U_{yy} \end{bmatrix} = 0$$

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

$$U_{xx} = 1 - A + 3(1-\mu)\tfrac{(x_0 - x_1)^2}{r_1^5} + 3\mu\tfrac{(x_0 - x_2)^2}{r_2^5},$$
$$U_{yy} = 1 - A + By_0^2, \quad U_{zz} = -A + Bz_0^2,$$
$$U_{xy} = Cy_0, \quad U_{xz} = Cz_0, \quad U_{yz} = By_0 z_0.$$

Устойчивость точек либрации

$$A = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}, \quad B = 3\left(\frac{1-\mu}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^5}\right),$$
$$C = 3\left(\frac{1-\mu}{r_1^5}(x_0 - x_1) + \frac{\mu}{r_2^5}(x_0 - x_2)\right).$$

Прямолинейные точки: $y_0 = z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{xy} = U_{xz} = U_{yz} = 0$

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \xi U_{xx} = \xi(1 + 2A), \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \eta U_{yy} = \eta(1 - A), \quad \ddot{\zeta} = -A\zeta.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + (2 - A)\lambda^2 + (1 + A - 2A^2) = 0$$

Для коллинеарных точек либрации существует три значения (L_1, L_2, L_3).
Все три значения удовлетворяют неравенству (при $\mu < 1/2$)

$$1 + A - 2A^2 < 0$$

Устойчивость точек либрации

Треугольные точки: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, т. е. $x = \frac{1}{2} - \mu$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = 0$.
$U_{xx} = \frac{3}{4}$, $U_{yy} = \frac{9}{4}$, $U_{zz} = -1$, $U_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1), U_{xz} = U_{yz} = 0$

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{3}{4}\xi - \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\eta, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\xi + \frac{9}{4}\eta, \quad \ddot{\zeta} = -\zeta.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \tfrac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

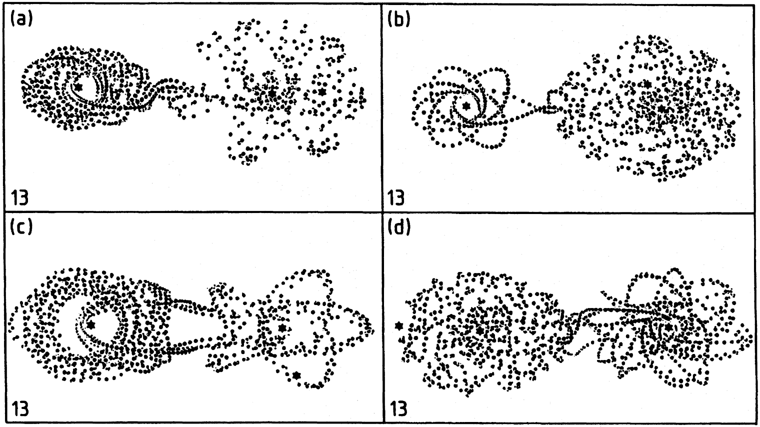
$$\mu = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.0385208965045539.$$

$$\lambda_{12} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} - 1}{2}}, \quad \lambda_{34} = \pm\, i\sqrt{\frac{\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} + 1}{2}}.$$

Какая устойчивость?

- «устойчивой по Ляпунову», если достаточно близкое по начальным условиям решение остается в сколь угодно малой окрестности данного решения для любых будущих моментов времени $t \in [t_0, +\infty)$;
- «устойчивой по Лагранжу», если она остается ограниченной для всех будущих моментов времени $t \in [t_0, +\infty)$;
- «устойчивой по Лапласу», если e_i^0, i_i^0 – малые величины, a_i^0 в течение некоторого промежутка (t_0, T) мало отличаются от своих начальных значений, $m_i\sqrt{\mu_i}\sqrt{a_i^0}$ – величины одного порядка, то в промежутке (t_0, T) e_i, i_i также будут оставаться малыми;
- «устойчивой по Пуассону», если она в будущем возвращается бесконечное число раз в произвольную окрестность любого из своих прошлых состояний;
- «устойчивой по Хиллу», если не происходит обмена удаленного компонента ни с одним из компонентов близкой пары;
- «устойчивой по Арнольду», при выполнении условий теоремы Лапласа для большинства начальных условий в смысле меры Лебега возмущенные значения на $(-\infty, \infty)$ имеют условно-периодический характер

Пример орбит неустойчивых по Хиллу, но устойчивых по Лагранжу ($\alpha = \lg \frac{m_1}{m_2}$, $\beta = \lg \frac{m_1+m_2}{m_3}$)



Примеры систем, неустойчивых по Хиллу, но устойчивых по Лагранжу, при $\alpha = 1.2$, $\beta = -0.4$ (верхние рисунки) и $\alpha = 2.0$, $\beta = 0$ (нижние).