Задача N тел

В. Титов
tit@astro.spbu.ru

Научно-исследовательский Астрономический институт
им. В.В.Соболева

5 курс, 23.09.2025

Ограниченная задача

Масса m_3 пренебрежимо мала. Тогда

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|} + \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|} \end{cases} \tag{R3B}$$

Первые два уравнения – уравнения задачи двух тел. Третье уравнение – уравнение только для $\mathbf{r}_3$ (неавтономное). Предположим, что тела m_1 и m_2 двигаются по круговым орбитам.

Ограниченная задача

Определим вращающуюся систему, в которой $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ неподвижны, начало координат – в центре тяжести m_1 и m_2, а единицы масс, времени и длины выбраны так, что

$$m_1 + m_2 = 1, \quad G = 1, \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 1,$$

обозначим $m2 = \mu \in (0, 1/2]$, $m_1 = 1 - \mu$, а сами массы в точках $(-\mu, 0)$ и $(1 - \mu, 0)$. Угловая скорость этой системы $n = 1$.

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = m_1 \mathbf{r}_{13} \left(1 - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + m_2 \mathbf{r}_{23} \left(1 - \frac{1}{r_{23}^3}\right) + \begin{pmatrix} 2\dot{y}_3 \\ -2\dot{x}_3 \\ -\dot{z}_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - (1-\mu)\frac{(x - x_1)}{r_1^3} - \mu \frac{m_2(x - x_2)}{r_2^3}, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3}, \\
\ddot{z} &= \quad - (1-\mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}.
\end{aligned}$$

Ограниченная задача

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\,,$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}\,,$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

Интеграл Якоби

$$C = (x^2 + y^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Круговая ограниченная задача

$$\begin{aligned} y^2 &= r_1^2 - (x+\mu)^2 = r_1^2 - x^2 - 2\mu x - \mu^2 \\ y^2 &= r_2^2 - (x-(1-\mu))^2 = r_2^2 - x^2 + 2(1-\mu)x - (1-\mu)^2 \end{aligned}$$

Исключим x и решим относительно $z^2 + y^2$:

$$x^2 + y^2 = (1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 - \mu(1-\mu)$$

Поверхность $\dot{\mathbf{r}} = 0$ записывается

$$(1-\mu)\left(r_1^2 + \frac{2}{r_1}\right) + \mu\left(r_2^2 + \frac{2}{r_2}\right) = C + \mu(1-\mu) = C'$$

Запишем в виде

$$r_1^3 + ar_1 + b = 0,$$

где $b = 2$, $a = -\frac{C'}{1-\mu} + \frac{\mu}{1-\mu}\left(r_2^2 + 2/r_2\right)$.
Очевидно a отрицательно, и уравнение имеет три различных действительных корня, если $27b^2 + 4a^3 < 0$, то есть $a + 3 < 0$.

Круговая ограниченная задача

В предельном случае $a = -3$ и из выражения для a получим

$$r_2^3 + a' r_2 + b' = 0,$$

где $b' = 2$, $a' = -\frac{C'}{\mu} + \frac{3(1-\mu)}{\mu}$. Откуда $a' + 3 \leq 0$, и, значит

$$-\frac{C'}{\mu} + \frac{3(1-\mu)}{\mu} = -3 \qquad \Rightarrow \qquad C' = 3.$$

Итак, поверхность нулевой скорости

$$C = (x^2 + y^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Поверхность нулевой скорости (поверхность Хилла)

Из интеграла Якоби в системе $\mathcal{O}_1$ следует, что движение возможно лишь на множестве $\mathcal{T}$

$$(x^2 + y^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} \geq C$$

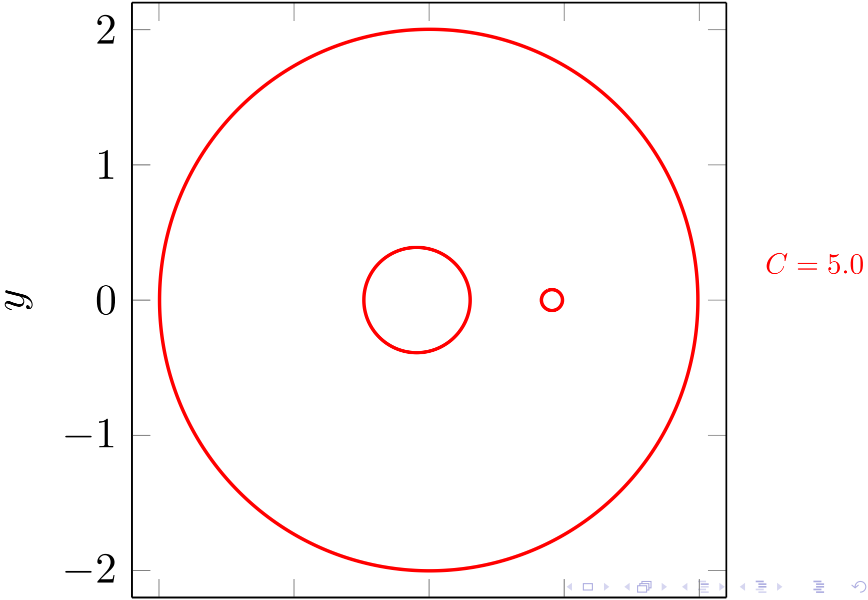
граница которого $\mathcal{S}$

$$(x^2 + y^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C$$

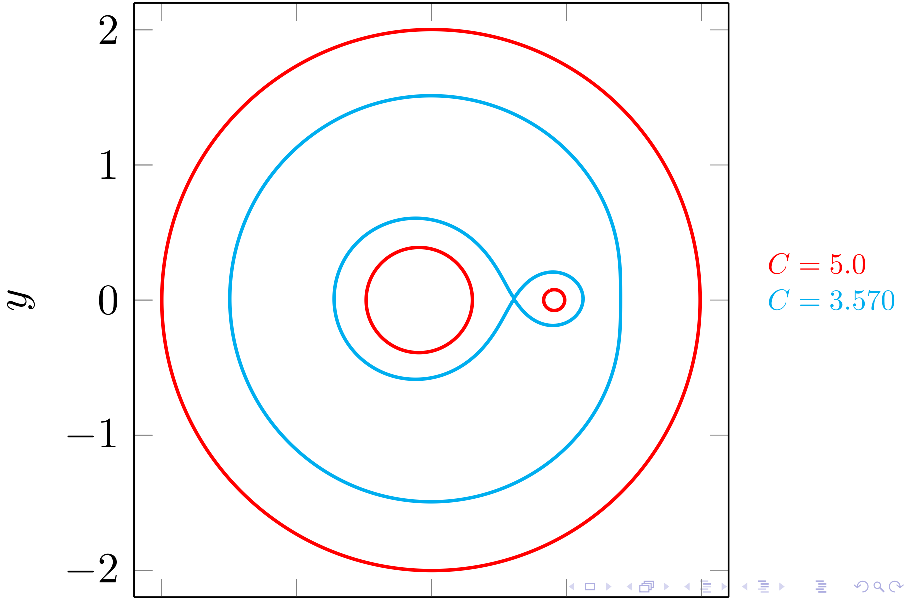
называется поверхностью нулевой скорости (поверхностью Хилла)

Прямая, параллельная оси z, пересекает поверхность в двух точках, либо не пересекает ее вовсе.
Поверхности заключены внутри цилиндра с осью z и радиусом $\sqrt{C}$ $(x^2 + y^2 = C)$.

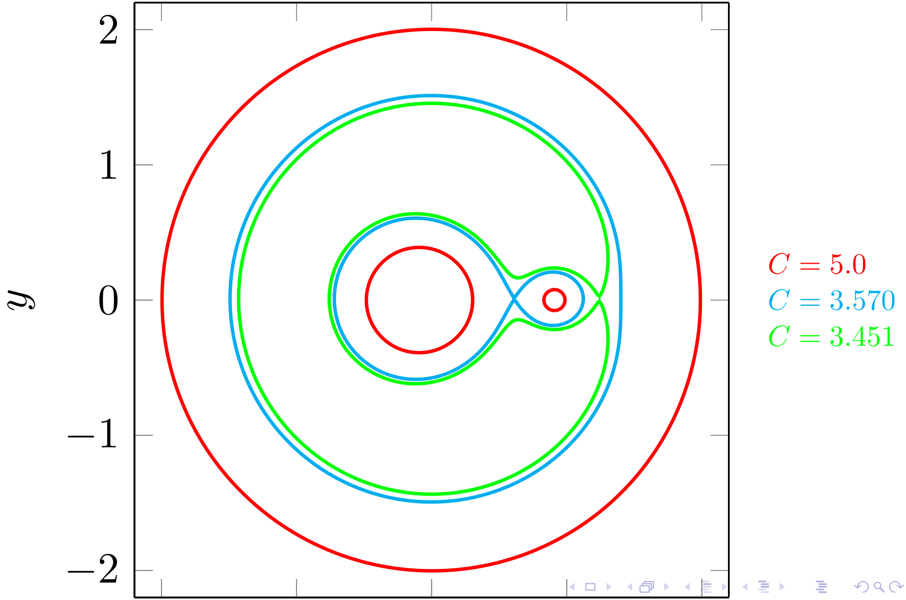
Круговая ограниченная задача



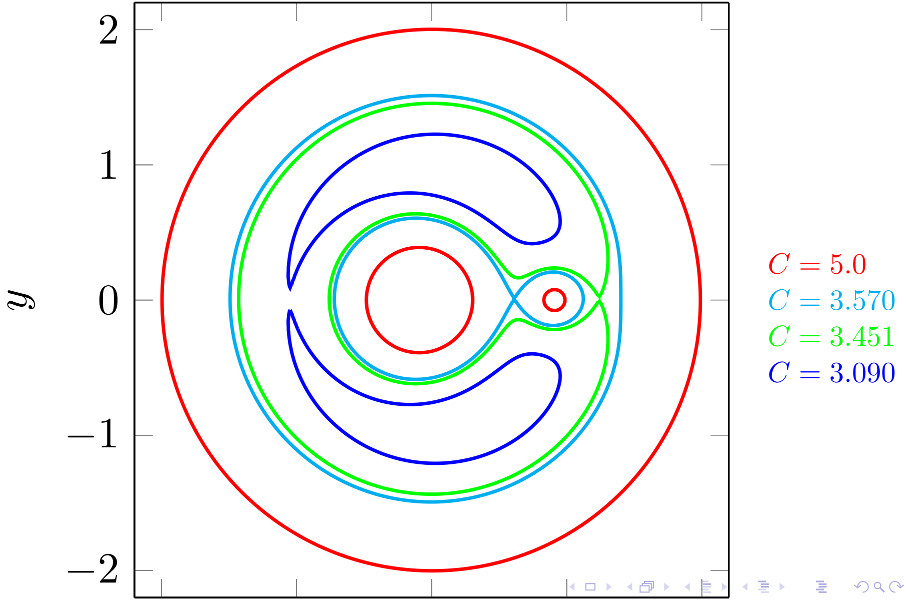
Круговая ограниченная задача



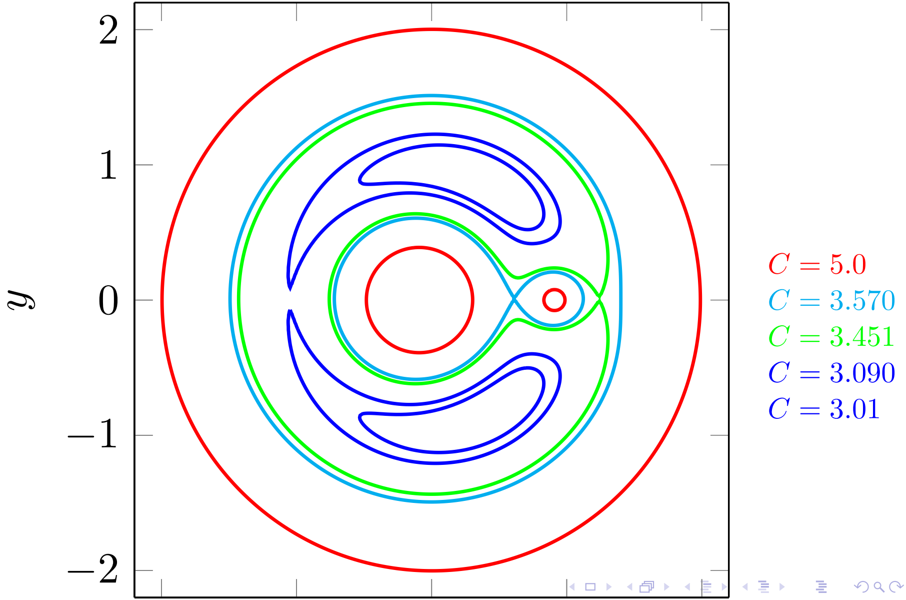
Круговая ограниченная задача



Круговая ограниченная задача



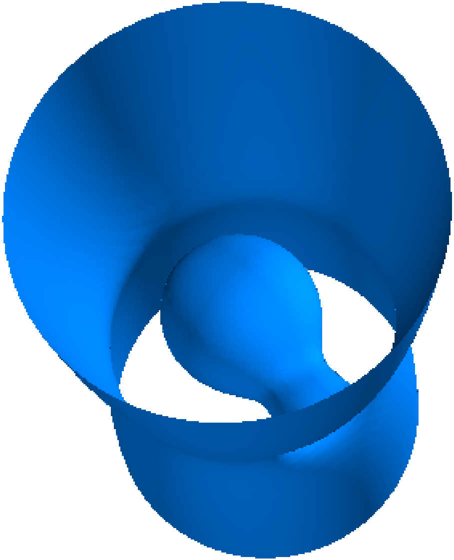
Круговая ограниченная задача



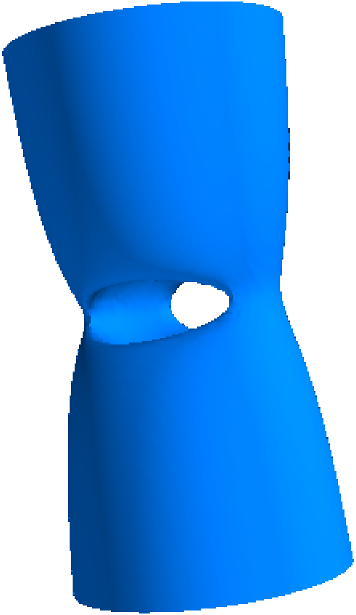
$C = 3.8$

$C = 3.5$

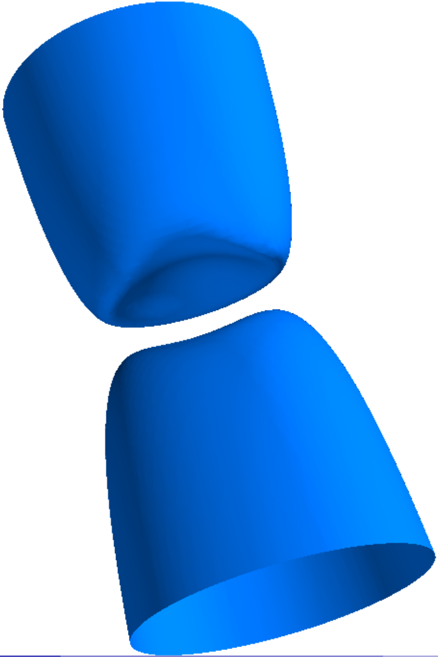
$C = 3.2$



$C = 3.0$

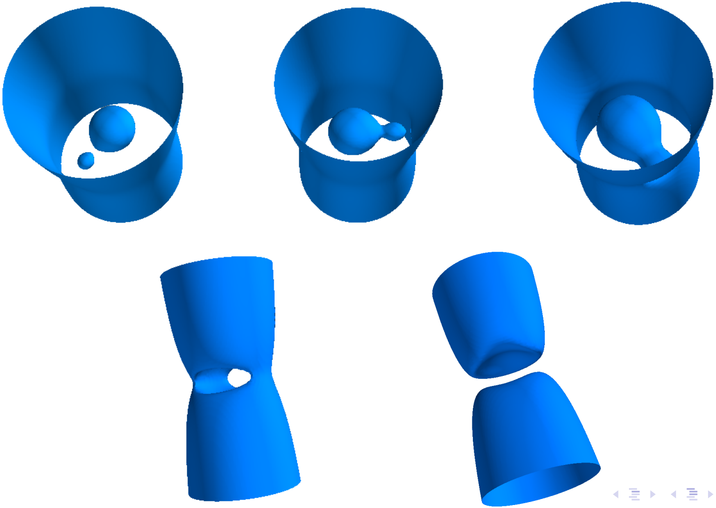


$C = 2.8$



Поверхность нулевой скорости (поверхность Хилла)

Поверхность Хилла в зависимости от $\mathfrak{h}$ состоит из 1, 2, или 3 кусков.
Один или два куска некомпактны (уходят на бесконечность).



Плоская круговая ограниченная задача

$$x'' - 2y' = \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$
$$y'' + 2x' = \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

$$\Omega(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

Интеграл Якоби

$$x'^2 + y'^2 = 2\Omega(x,y) - C,$$

Симметрии

$$(x,y,x',y',t) \to (x,-y,-x',y',-t).$$

Постоянные Якоби в точках равновенсия: $C(L_i)$:

$$3 = C_4 = C_5 < C_3 \leq C_1 < C2,$$

Поверхность Хилла

$$2\Omega(x,y) - C = 0.$$

Подковообразная орбита