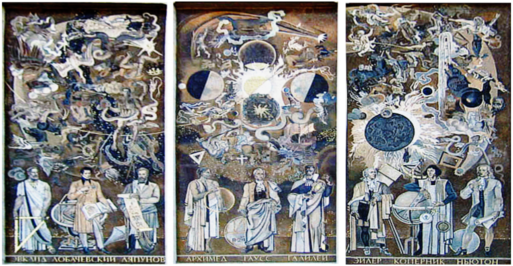


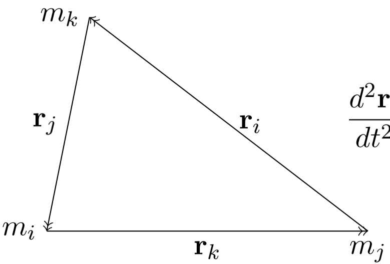
Задача N тел

В. Титов
tit@astro.spbu.ru

Научно-исследовательский Астрономический институт
им. В.В.Соболева

5 курс, 16.09.2025

Центральные конфигурации



$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -\kappa^2(m_j + m_k)\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \kappa^2 m_i\left(\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3}\right),$$

$$\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_k = 0, \qquad i, j, k = 1, 2, 3$$

Будем искать такое движение, в котором каждое трех из движений тел – кеплерово:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -\kappa^2 h_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}, \qquad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Или

$$(m_j + m_k - h_i)\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} - m_i\left(\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3}\right)$$

Центральные конфигурации

$$\mathbf{r}_i\left(\frac{m_k}{r_i^3}+\frac{m_i+m_j-h_k}{r_k^3}\right)+\mathbf{r}_j\left(\frac{m_k}{r_j^3}+\frac{m_i+m_j-h_k}{r_k^3}\right)=0.$$

То есть либо $\mathbf{r}_l$ коллинеарны, либо выражения в круглых скобках нулевые. Коллинеарное решение. Пусть m_j лежит между m_i и m_k, то есть $r_j = r_i + r_k$. Положим $r_i = zr_k \to r_j = (1+z)r_k$, получаем

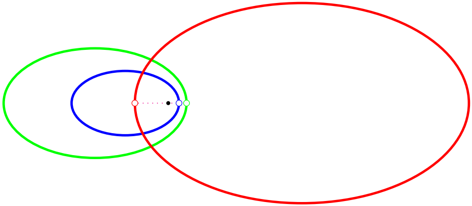
$$\begin{aligned}
h_1 &= m_2+m_3-m_1\frac{z^3(2+z)}{(1+z)^2}\,,\\
h_2 &= m_3+m_1+m_2(1+z)^2(1+z^{-2}),\\
h_3 &= m_1+m_2-m_3\frac{1+2z}{z^2(1+z)^2}\,.
\end{aligned}$$

Из уравнения задачи двух тел: $h_i = z^3 h_k$; $(1+z)^3 h_i = z^3 h_j$; исключив отсюда h_l, получим:

$$\begin{aligned}
&(m_i+m_j)z^5+(3m_i+2m_j)z^4+(3m_i+m_j)z^3\\
&\qquad -(m_j+3m_k)z^3-(2m_j+3m_k)z-m_j-m_k=0.
\end{aligned}$$

Единственный положительный вещественный корень z. Расположив тела на прямой и придав скорости удовлетворяющие $\dot r_i = -z/(1+z)\dot r_j = z\dot r_k$, получим кеплеровы движения.

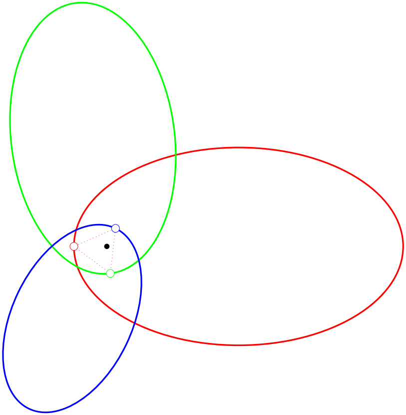
Центральные конфигурации, $N = 3$



Центральные конфигурации, $N = 3$

Неколлинеарный случай: все выражения в квадратных скобках равны нулю, тогда

$$r_i = r_j = r_k; \quad h_i = h_j = h_k = m_i + m_j + m_k.$$



Центральные конфигурации

Не существует решений, в которых конфигурация n тел остается неизменной во времени. Существуют ли такие, где конфигурация изменяется только подобно. Другими словами, выбирая начало координат $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ в качестве центра подобия, мы ищем решения $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ в форме $\mathbf{r}_i(t) = \phi(t)\mathbf{a}_i$ фиксированными $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^3$ и положительной вещественно-значной функцией ϕ.

Включим это выражение в уравнения задачи n тел:

$$\phi^2 \ddot{\phi} m_i \mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} G m_i m_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i|^3}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Правая часть этих уравнение не зависит от времени, следовательно, должна быть такая вещественная константа μ, что

$$\ddot{\phi} = -\frac{\mu}{\phi^2}$$

и

$$-\mu \mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} G m_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i|^3}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Центральные конфигурации

Определение

Конфигурация $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ заданных n тел с массами m_1, ..., m_n называется **центральной конфигурацией**, если она удовлетворяет этому условию для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$.

Если $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ – ц.т., то и $(\lambda\mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_n)$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}^+$ то же ц.т. Таким образом любая центральная конфигурация порождает гомотетическое решение задачи N тел.

Утверждение

n точек $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) =: \mathbf{a}$ образуют центральную конфигурацию, когда $\mathbf{a}$ является критической точкой функции $V^2 I$.

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i} = m_i \mathbf{r}_i \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}(\mathbf{a}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$\mu \cdot 2I(\mathbf{a}) = \mu \left\langle \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{a}), \mathbf{a} \right\rangle = -V(\mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{V(\mathbf{a})}{2I(\mathbf{a})} > 0.$$

Центральные конфигурации

- Три тела, не лежащие на прямой образуют центральную конфигурацию, если и только если тела образуют равносторонний треугольник.
- Четыре тела, не лежащие в плоскости, образуют центральную конфигурацию, если и только если тела образуют правильный тетраэдр.
- Правильный n-угольник это центральная конфигурация для n равных масс.

Определение

Решение задачи N тел, в которых конфигурация, образуемая телами, остается само-подобной, называется *гомографическим*.

Центральные конфигурации

Любая плоская центральная конфигурация порождает плоское гомографическое решение. ($\ddot{\phi} = -\mu/\phi^2$).

Утверждение

Пусть $(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$ — плоское гомографическое решение задачи n тел (с центром масс в начале координат). Тогда $\mathbf{r}_i = \phi \mathbf{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ — плоская центральная конфигурация, и ϕ есть решение соответствующей двумерной задачи Кеплера.

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \lambda(t) e^{i\varphi(t)} \mathbf{a}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Центральные конфигурации

Определение

Решение задачи n тел, в которых конфигурация, образуемая телами, остается само-конгруентной называется **относительным равновесием**.

Центральные конфигурации

- $\{\mathbf{r}_i\}$ — ц.к., то $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i = 0$.
- $(\{\mathbf{r}_i\}, \lambda)$ — ц.к., то $(\{\mathcal{A}\mathbf{r}_i\}, \lambda)$ — ц.к. для любой ортогональной матрицы $\mathcal{A}$ и $(\{\tau\mathbf{r}_i\}, \lambda/\tau^3)$ — ц.к.
- $\nabla IU^2 = 0$
- $\lambda = \frac{U}{I}$.

Функция IU^2 инвариантна относительно вращений и масштабирования. $\sqrt{I}$ можно рассматривать как диаметр системы, а конфигурационную меру $\sqrt{I}U$ как отношение мер максимального и минимального расстояний между телами.

Гомографические решения

Теорема

- Гомографическое решение является гомотетическим тогда и только тогда, когда угловой момент равен нулю.
- Гомографическое решение является относительным равновесием тогда и только тогда, когда оно плоское и его конфигурация вращается с постоянной угловой скоростью.
- Если гомографическое решение не компланарное, то оно гомотетическое.

Теорема

Если решение является гомографическим, то в любой момент времени тела образуют центральную конфигурацию.

Центральные конфигурации

Теорема (Мультона)

Для $N \geq 3$ существует ровно $N!/2$ коллинеарных центральных конфигураций

Доказано Мультоном по индукции.
Топологическое доказательство: положение точек $q = (q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{R}^N$, $S' = \{q | I(q) = 1\}$ (топологическая сфера S^{N-1}), $C = \{q | \sum_{i=1}^N m_i q^i = 0\}$ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$. $S = S' \cap C$ — сфера размерности $N - 2$. Многообразие столкновений m_i с m_j: $\Delta'_{ij} = \{q | q_i = q_j\}$.
Множество $\Delta' = \cup \Delta'_{ij}$ — объединение плоскостей размерности $N - 1$, а $\Delta = S \cap \Delta'$ — объединение сфер размерности $N - 3$.
Пусть $\mathcal{V}$ — сужение V на $S \setminus \Delta$. Ц.к. — критическая точка $\mathcal{V}$.
Пространство $S \setminus \Delta$ допускает $N!$ связных компонент (соответствующих определенному порядку). На $V \to \infty$ при $\Delta_{ij}\Delta$, следовательно, имеется по крайней мере один минимум для каждой связной составляющей (ровно один, так как $\mathcal{V}$ выпукла). Следовательно, имеется ровно $N!/2$ ц.к.

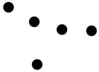
Неколлинеарные центральные конфигурации

Предполагается, что при заданном N и заданных массах число конфигураций ограничено постоянной, не зависящей от масс, но не доказано даже, что при любом выборе масс число конфигураций конечно (при $N > 3$). Известно, что это число конечно для открытого всюду плотного множества масс.

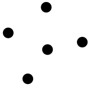
Центральные конфигурации, $N = 5$

1.

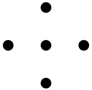
2.



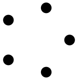
3.



4.



5.



Устойчивость точек либрации

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_0 + \dots \\
\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 + \dots \\
\ddot{\zeta} &= \xi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)_0 + \zeta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x, \\
\dot{y} &= v_y, \\
\dot{v}_x &= 2v_y + ax, \\
\dot{v}_y &= -2v_x - by,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H_l}{\partial p_x} = p_x + y, \\
\dot{y} &= \frac{\partial H_l}{\partial p_y} = p_y - x, \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H_l}{\partial x} = p_y - x + ax, \\
\dot{p}_y &= -\frac{\partial H_l}{\partial y} = -p_x - y - by.
\end{aligned}
$$

Инеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 - ax^2 + by^2),$$

Движение в окрестности точек либрации

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -b & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

Характеристический полином:

$$p(\beta) = \beta^4 + (2 - \bar{\mu})\beta^2 + (1 + \bar{\mu} - 2\bar{\mu}^2).$$

здесь $a = 2\bar{\mu} + 1$, $b = \bar{\mu} - 1$, $\bar{\mu} = \mu|x_e - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu)|x_e + \mu|^{-3}$.
Собственные значения линеаризованной системы уравнений $\pm\lambda$ и $\pm i\nu$

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\bar{\mu} - 2 - \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}}{2}.$$

Приведем все к осям, определяем собств.векторами

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \lambda\xi, \\
\dot{\eta} &= -\lambda\eta, \\
\dot{\zeta}_1 &= \nu\zeta_2, \\
\dot{\zeta}_2 &= -\nu\zeta_1,
\end{aligned}
$$

интеграл энергии

$$E_l = \lambda\xi\eta + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2).$$

Решение

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= \xi^0 e^{\lambda t}, \\
\eta(t) &= \eta^0 e^{-\lambda t}, \\
\zeta(t) &= \zeta_1(t) + i\zeta_2(t) = \zeta^0 e^{-i\nu t},
\end{aligned}
$$

Устойчивость точек либрации

Треугольные точки: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, т. е. $x = \frac{1}{2} - \mu$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = 0$.
$U_{xx} = \frac{3}{4}$, $U_{yy} = \frac{9}{4}$, $U_{zz} = -1$, $U_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1), U_{xz} = U_{yz} = 0$

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{3}{4}\xi - \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\eta, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\xi + \frac{9}{4}\eta, \quad \ddot{\zeta} = -\zeta.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \tfrac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

$$\mu = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.0385208965045513 9.$$

$$\lambda_{12} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} - 1}{2}}, \quad \lambda_{34} = \pm\, i\sqrt{\frac{\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} + 1}{2}}.$$

Какая устойчивость?

- «устойчивой по Ляпунову», если достаточно близкое по начальным условиям решение остается в сколь угодно малой окрестности данного решения для любых будущих моментов времени $t \in [t_0, +\infty)$;
- «устойчивой по Лагранжу», если она остается ограниченной для всех будущих моментов времени $t \in [t_0, +\infty)$;
- «устойчивой по Лапласу», если e_i^0, i_i^0 – малые величины, a_i^0 в течение некоторого промежутка (t_0, T) мало отличаются от своих начальных значений, $m_i\sqrt{\mu_i}\sqrt{a_i^0}$ – величины одного порядка, то в промежутке (t_0, T) e_i, i_i также будут оставаться малыми;
- «устойчивой по Пуассону», если она в будущем возвращается бесконечное число раз в произвольную окрестность любого из своих прошлых состояний;
- «устойчивой по Хиллу», если не происходит обмена удаленного компонента ни с одним из компонентов близкой пары;
- «устойчивой по Арнольду», при выполнении условий теоремы Лапласа для большинства начальных условий в смысле меры Лебега возмущенные значения на $(-\infty, \infty)$ имеют условно-периодический характер