Задача N тел

В. Титов
tit@astro.spbu.ru

Научно-исследовательский Астрономический институт
им. В.В.Соболева

5 курс, 9.09.2025

Тождество Лагранжа

То есть:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\left(2T + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial r_i}\right) = 2(2T - U) = 2(U + 2h) = 2(T + h).$$

Выразим величину

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} m_i m_j r_{ij}^2,$$

через полную массу всей системы и ее момент инерции.
Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = I + M r_j^2.$$

Умножим обе части на m_j и просуммируем по j от 1 до n, получим

$$2L = 2IM; \qquad \ddot{L} = 2M(2T - U).$$

Свойства решений задачи N тел

При $h \geqslant 0$ хотя бы одна из точек системы должна удалиться на неограниченно большое расстояние от барицентра системы.

Предположим, что $\exists R$ такое, что $\forall t \; |r_i| \leqslant R$, то есть $\forall t \; I \leqslant MR^2$ ($M = \sum_{i=1}^{n} m_i$). Пусть $I(0) = I_0$, $\dot{I}(0) = I_0'$, тогда

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(U + 2h) > 4h,$$
$$I \geqslant I_0 + I_0'(t - t_0) + 4h(t - t_0)^2.$$

Свойства решений задачи N тел

Возможно ли движение, при котором все тела столкнутся в одной точке лишь через бесконечно большой промежуток времени.

$$\ddot{I} = 2(U + 2h) \to \infty \text{ при } t \to \infty$$

$$I(t) > C_0 + C_1 t + \frac{1}{2} C^2 \to \infty,$$

что противоречит условию, поскольку $I(\infty) = 0$.

Свойства решений задачи N тел

При $h < 0$ наименьшее из взаимных расстояний остается ограниченным. $U = T - h \geqslant -h > 0$, следовательно

$$G\sum_{i<j}^{n}\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \geqslant G\sum_{i<j}^{n} m_i m_j / \inf(r_{ij}) \geqslant -h,$$

$$\inf(r_{ij}) \leqslant \frac{G}{-h}\sum_{i<j}^{n} m_i m_j.$$

Свойства решений задачи N тел

Δ — наибольшее из взаимных расстояний в момент t, тогда существуют такие положительные зависящие только от масс константы A и B, что

$$A\Delta^2 \leqslant I \leqslant B\Delta^2.$$

$$MI = \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2 \geqslant m_k m_l \Delta \ \to \ I \geqslant A\Delta, \quad A = \frac{m_k m_l}{M} \geqslant \frac{m^2}{M}$$

$$MI = \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2 \leqslant \sum_{i<j} m_i m_j \Delta \ \to \ I \leqslant B\Delta, \quad B = \frac{\sum\limits_{i<j} m_i m_j}{M}.$$

δ — наименьшее из взаимных расстояний в момент t, тогда существуют такие положительные зависящие только от масс константы C и D, что

$$C\delta \leqslant U^{-1} \leqslant D\delta.$$

Возможен ли *полный коллапс* системы лишь через бесконечно большой промежуток времени?

$$\ddot{I} = 2(U + 2h) \to \infty \text{ при } t \to \infty$$

$$I(t) > C_0 + C_1 t + \frac{1}{2} C^2 \to \infty,$$

Свойства решений задачи N тел

При каком c может произойти полный коллапс?
Докажем неравенство Зундмана:

$$c^2 \leqslant I(\ddot{I} - 2h).$$

$$c^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i |\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i| \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i V_i \right)^2 =$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{m_i} r_i)(\sqrt{m_i} V_i) \right]^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 = 2IT.$$

Неравенство Коши-Буняковского

Задача N тел, момент инерции

Введем среднее квадратичное расстояние ρ:

$$M^*\rho^2 = \sum_{1\le j\le N} m_i m_j r_{ij}^2$$

и среднее гармоническое расстояние ν:

$$M^*/\nu = \sum_{1\le j\le N} m_i m_j / r_{ij}$$

где $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ — полная масса, $M^* = \sum\limits_{1\le j\le N} m_i m_j$.

$M^*\rho^2/2M$ это момент инерции I ($I = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^2$).

$$\inf(r_{ij}) \le \nu \le \rho \le \sup(r_{ij}).$$

Задача N тел, момент инерции

Введем еще обобщенную большую полуось и обобщенный параметр орбиты:

$$
\begin{aligned}
a &= -GM^*/2h, \\
p &= M\,c^2/GM^{*2}.
\end{aligned}
$$

тогда можно записать как

тождество Лагранжа–Якоби

$$(\rho^2)'' = 2\mu(1/\nu - 1/a),$$

неравенство Сундмана

$$\rho/\nu \geq j,$$

функция Сундмана

$$j = p/2\rho + \rho/2a + \rho\rho'^2/2\mu,$$

Отсюда

$$(\rho^2)'' \geq 2\mu\{\sup(1;j)/\rho - 1/a\}$$

В предельном случае

$$(\rho^2)'' = 2\mu\{\sup(1;j)/\rho - 1/a\}.$$

Задача N тел. Момент инерции

Пусть $j \leq 1$, тогда

$$(\rho^2)'' = 2\mu\{1/\rho - 1/a\}.$$

Это уравнение для взаимного расстояния в задаче двух тел, интегрируем

$$\rho^2 \rho'^2 - 2\mu\rho + \mu\rho^2/a = 2\mu\rho(j-1) - \mu p = \text{constant}.$$

Эволюция ρ такая же как эволюция взаимного расстояния в задаче двух тел.

$j \geq 1$:

$$(\rho^2)'' = 2\mu(j/\rho - 1/a).$$

Интегрируем:

$$\rho\rho'^2 + \mu p/\rho + \mu\rho/a = \text{constant} = 2\mu j.$$

Задача N тел. Момент инерции

Что мы можем узнать о будущем ρ и ρ', если в некоторый начальный момент t_0 заданы начальные значения ρ_0 и ρ'_0 и если мы рассмотрим все возможные траектории, совместимые с неравенством?

Теорема

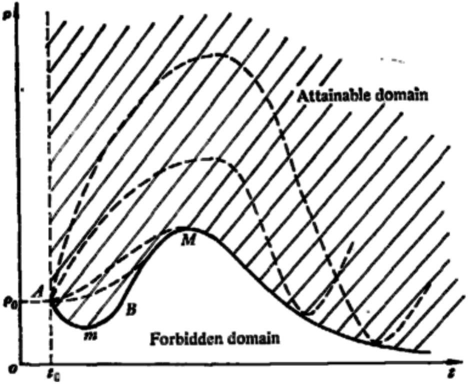
В конечный момент t_f, больший, чем t_0, значения p_f, p'_f достижимы тогда и только тогда, когда существуют такие ρ'_1 и ρ'_2, что

(A) $\rho'_1 \geq \rho'_0, \rho'_2 \leq \rho'_f$;

(B) *предельное дифференциальное уравнение приводит от ρ_0, ρ'_1, t_0 к ρ_f, ρ'_2, t_f.*

Задача N тел. Момент инерции

В зависимости от начальных значений h, и ρ_0' можно изучить поведение предельной кривой (огибающих кривых решений уравнения Лагранжа-Якоби для разных начальных значений ρ_0, ρ_0', например



Кривая AB является предельной кривой $\rho_0(t)$ решения и начинающейся в ρ_0, ρ_0', t_0. Пунктирные кривые это кривые $\rho_k(t)$ решений (7), начинающиеся в ρ_0, ρ_k', t_0 с $\rho_k' > \rho_0'$. Полную кривую $AmBM$ будем обозначать $\varphi(t)$ и (после B) является огибающей кривых $\rho_k(t)$.

Область возможного движения

Proposition (Arnold et all, 1.7)

Имеем неравенство: $J^2 \le 2IT$

$$J^2 = \left|\sum m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)\right|^2 \le \left(\sum m_i|\mathbf{r}_i|\,|\mathbf{v}_i|\right)^2 \le \left(\sum m_i\mathbf{r}_i^2\right)\left(\sum m_i\mathbf{v}_i^2\right) = I\cdot 2T.$$

Ограничения (интеграл центра тяжести)

$$\Gamma = \left\{\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n} : \sum m_i\mathbf{r}_i = 0\right\}.$$

В плоской задаче трех тел (Proposition 1.8)

$$B_{J,h} = \left\{\mathbf{r} \in \Gamma : U + \frac{J^2}{2I} \le h\right\},$$

в пространственном случае

$$B_{J,h} \subset \left\{\mathbf{r} \in \Gamma : U + \frac{J^2}{2I} \le h\right\} \subset \Gamma.$$