Задача N тел

В. Титов
tit@astro.spbu.ru

Научно-исследовательский Астрономический институт
им. В.В.Соболева

5 курс, 2.09.2025

Задача N тел

- Решение (неизвестно)
- Частные решения
- Интегралы (только 10)
- Сходящиеся ряды
- Свойства решений
- Финальные движения
- Периодические орбиты
- Особенности
- Устойчивость
- Численные эксперименты
- Теория возмущений

История

- До Ньютона Солнце-Земля-Луна (2134 г. до н. э. Хи и Хо, 585 г. до н. э. затмение послужила миру между Мидией и Ливией (Фалес Милетский)
- В современном понимании задача трех тел сформулирована Ньютоном в «Началах». Точное решение было необходимо для задачи определения долготы.
- Решение задачи двух тел получается легко, а вот общее решение задачи хотя бы трех тел оказалось трудной задачей. Частные решения открыты Эйлером (1763) и Лагранжем (1772). Только в 1993 году численно открыто еще одно частное решение – «восьмерка», а в 2000 году было строго доказано, что такая орбита действительно существует.
- Брунс и Пуанкаре доказали, что существует лишь 10 классических первых интегралов, т.е. точно решить задачу трех тел невозможно.
- Сундман в 1912 году построил общее решение общей задачи трех тел в виде сходящихся рядов.
- Периодические решения.
- Качественные решения.

Задача N тел. Что изучать

1) Топология фазового пространства $\mathcal{E}$ и многообразий энергии-момента, центральные конфигурации и относительные равновесия,
2) Регулярность решений и роль соударений,
3) Устойчивость простых решений и Нормальные Формы в их окрестности,
4) Периодические орбиты: как они появляются/исчезают, устойчивость, некоторые исключительные классы, такие как хореографии, задача о плотности п.о.,
5) Инвариантные торы разных размерностей, бифуркации, создание/разрушение, локальное поведение в их окрестности, свойства приводимости,
6) Инвариантные Канторовы множества, подобные множествам Обри-Мазера, динамика в их окрестности, их роль в скорости диффузии,
7) Условия проверки существования бифуркаций, торов, и т. д., вдали от простых решений.
8) Явления расщепления между инвариантными многообразиями совершенно разных инвариантных объектов (возможно частично слабо гиперболических), ответственных за возникновение хаотической динамики,

9) Границы Убегания/Захвата и механизм их создания: не-аналитические инвариантные многообразия инвариантных объектов на бесконечности,
10) Нормально Гиперболические Инвариантные Многообразия, такие как центральные многообразия, которые включают п.о., к-п.о. и области хаоса, связанные многообразия коразмерности 1, «практическая» устойчивость,
11) Отображения Возвращения к окрестности некоторого (возможно, частично слабо) гиперболического инвариантного объекта, подобные отображениям сепаратрисс и расширения (многосепаратриссные отображени) или проекциям (отображениям рассеяния),
12) Регулярные и хаотические решения, принимая во внимание роль резонансов и различных временны́е масштабы,
13) Статистические Свойства, такие как скорость диффузии, скорость убегания, перенос масс, эргодичность в большинстве фазовых пространств,
14) Движение комет и астероидов, астероиды, сближающиеся с Землей(NEO), определение и анализ орбит экзопланет,

Задача N тел:

- Теория
  - Интегралы задачи N тел.
    - Момент инерции
      - Оценки взаимных расстояний
    - Теорема Вейерштрасса–Зундмана
    - Теорема вириала, теорема Полларда
    - Ряды Зундмана
    - Регуляризация
      - Регуляризация в задаче двух тел
      - Регуляризация в задаче трех тел
      - Регуляризация в задаче N тел
  - Интегрируемость задачи трех тел
    - Региональная интегрируемость
      - Слабая интегрируемость
  - Частные случаи
  - Центральные конфигурации

Задача N тел:

- Классификация, периодические орбиты, косы
  - Финальные движения
  - Ограниченная задача трех тел
    - Поверхность Хилла
- Компьютерное моделирование задачи N тел.
  - Периодические орбиты. Устойчивость и Хаос.
    - Классификация
      - Косы
    - Фрактальные свойства
  - Стохастичность решений
  - Выбор начальных условий. Пространство форм.
  - Модель Пламмера и другие
  - Тройные системы с положительной энергией
  - Тройные системы с отрицательной энергией
- Результаты численных исследований.
  - Орбиты

Задача N тел:

- движение тел Солнечной системы, планетные и спутниковые системы
- системы искусственных небесных тел
- кратные звезды
- рассеяные и шаровые скопления
- взаимодействующие галактики
- группы галактик
- Метагалактика
- кратные радиоисточники в ядрах галактик
- эллиптические галактики
- дисковые галактики
- бары галактик
- спиральная структура галактик
- пылевые комплексы и кольца планет
- протопланетное облако
- сталкивающиеся звезды
- кратные протозвезды

Задача N тел:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial x_i},\\
\ddot{y}_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial y_i},\\
\ddot{z}_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial z_i}.
\end{aligned}$$

$$U = G \sum_{1\le i<k\le N} \frac{m_i m_k}{r_{ik}}, \qquad r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|.$$

Интегралы задачи N тел:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{A}t + \mathbf{B},$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{C}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U = T - U = h.$$

Симметрия масштаба:

Если $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, представляют решение задачи N тел, то решением задачи также является и

$$\boldsymbol{\rho}_i(t) = \lambda \mathbf{r}_i(\lambda^{-3/2} t)$$

При этом

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i(t) &= \lambda^{-1/2} \mathbf{v}_i(\lambda^{-3/2} t) \\ h' &= h/\lambda, \\ J' &= \lambda^{1/2} J. \end{aligned}$$

Постоянная энергии $h = -1, 0, 1$.

Тождество Лагранжа:

Момент инерции (в барицентрической системе):

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Получим тождество Лагранжа–Якоби, выражение для второй производной от I по t.

$$\frac{dI}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \mathbf{v}_i,$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i \left(v_i^2 + \mathbf{r}_i \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \right) = 2\left(2T + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right) =$$

Применим тождество Эйлера:
Если f — однородная функция степени m, то есть

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots) = \lambda^m f(x, y, z, \ldots),$$

то

$$f_x(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots)x + f_y(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots)y + f_z(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots)z + \ldots = m\lambda^{m-1} f(x, y, z, \ldots)$$

Тождество Лагранжа

То есть:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\left(2T + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial r_i}\right) = 2(2T - U) = 2(U + 2h) = 2(T + h).$$

Выразим величину

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} m_i m_j r_{ij}^2,$$

через полную массу всей системы и ее момент инерции.
Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = I + M r_j^2.$$

Умножим обе части на m_j и просуммируем по j от 1 до n, получим

$$2L = 2IM; \qquad \ddot{L} = 2M(2T - U).$$