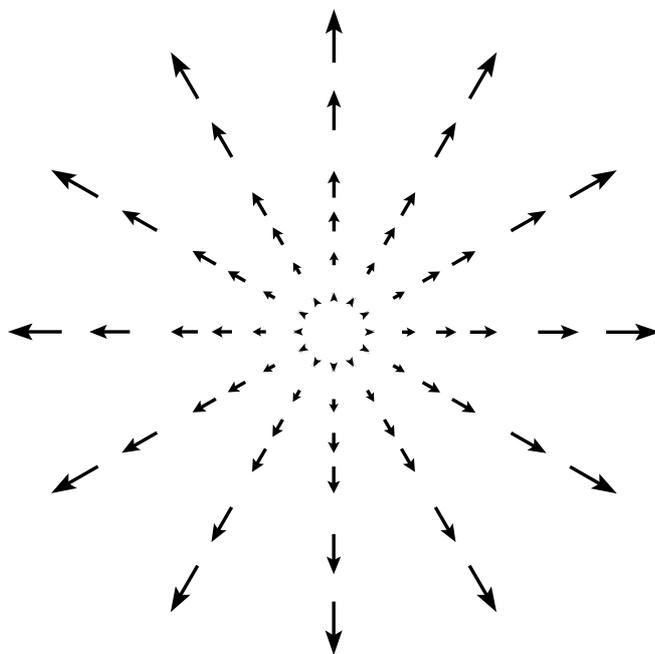


Д. И. Нагирнер

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ



Санкт-Петербург
2022

Санкт-Петербургский государственный университет

Д. И. Нагирнер

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ

Лекции

2022

УДК 523.12
ББК 22.632
Н16

В лекциях излагаются основные положения современной космологии как науки о глобальном строении Вселенной. Определены характеристики однородной (фридмановской) модели: радиус кривизны, метрика пространства—времени, критическая плотность, космологическая постоянная, различные расстояния. Построены простейшие космологические модели: однокомпонентные (пылевидного и ультрарелятивистского вещества, модели де Ситтера), двух и трехкомпонентные. Рассмотрены закономерности распространения излучения в искривленном пространстве, введено понятие геометрического горизонта, дана интерпретация закона Хаббла разбегания галактик. Обосновывается выбор модели, наиболее адекватной реальности — Стандартной космологической модели. Согласно этой модели рассчитаны возраст Вселенной и зависимость расстояний от красного смещения. Описаны свойства реликтового излучения, отмечены основные этапы физической эволюции Вселенной. Дается представление о первичном нуклеосинтезе и образовании крупномасштабной структуры Вселенной. Отмечаются успехи и трудности классической теории. Показано, как трудности преодолеваются теорией космической инфляции. Обсуждается понятия второй инфляции, второго (кинематического) горизонта и будущее Вселенной.

Лекции предназначены для студентов и аспирантов, специализирующихся по астрономии и теоретической физике.

ББК 22.632

© Д. И. Нагирнер, 2022

Введение

Над космологическими проблемами человечество задумывалось с самого начала своего существования. О возникновении и строении Вселенной говорят многочисленные мифы различных народов. Научная космология началась с работ астрономов эпохи Возрождения: Николая Коперника (1473–1543), Иоганна Кеплера (1571–1630) и Галилео Галилея (1564–1642). Однако все они не шли дальше сферы неподвижных звезд, то есть интересовались строением Солнечной системы. Математическую основу это направление приобрело после установления закона всемирного тяготения Исааком Ньютоном (1642–1727). Космогонические теории впервые предложили Пьер Симон Лаплас (1749–1827) и Иммануил Кант (1724–1804). Такие теории продолжают развиваться вплоть до настоящего времени на основе самых современных представлений физики, но эта наука называется космогонией, а не космологией.

Мир звезд в Галактике изучался многими учеными, отметим вклад Вильяма Гершеля (1738–1822), построившего первую схему строения Галактики. После открытия многочисленных слабых туманностей возник спор, где они находятся: в нашей Галактике или за ее пределами. Спор продолжался до 20-х годов двадцатого века, пока не были разложены на звезды ближайшие галактики. Современная космология изучает мир галактик и скоплений галактик, а также общее строение, происхождение и эволюцию Вселенной.

Теоретической основой общепринятой космологии сейчас является теория тяготения Альберта Эйнштейна (1879–1955), так называемая общая теория относительности (ОТО), и работы Александра Александровича Фридмана (1888–1925), получившего в 1922 году первые нестационарные решения уравнений тяготения Эйнштейна. Наблюдательный базис ее составляют открытое в 1929 году Эдвином Поуэллом Хабблом (1889–1953) явление разбегания галактик от нас со скоростями, пропорциональными расстояниям до них, а также существование и свойства реликтового фонового излучения, обнаруженного в 1964 году.

В этом учебном пособии кратко излагаются основные положения современной космологии как науки о глобальном строении Вселенной. Приводятся и изучаются общие уравнения Фридмана, обсуждаются их частные решения, являющиеся моделями Вселенной. Определены основные характеристики моделей. Рассмотрены закономерности распространения излучения в искривленном и расширяющемся пространстве, введено понятие геометрического горизонта. Дается интерпретация соотношений Хаббла. Описываются способы выбора модели, соответствующей реальной Вселенной, и представляется модель, наиболее адекватная ей — Стандартная космологическая модель (Λ CDM). Излагается история открытия реликтового излучения, приводятся его свойства и характеристики его искажения. Дается описание основных эпох истории горячей модели Вселенной и основных физических процессов, происходящих в эти эпохи. Дается представление о теории инфляции, первичном нуклеосинтезе и образовании крупномасштабных структур Вселенной. Рассматриваются некоторые неоднородные модели.

Изложение в основном базируется на монографиях [1–4], но привлечены и другие источники, в том числе и новейшие данные наблюдений и теории.

Лекции фактически является новым, расширенным и исправленным вариантом учебного пособия [5]. Однако, содержание настолько сильно отличается, что название изменено.

Глава I. Однородные космологические модели

§ 1. Ньютонская теория

1. *Постановка задачи.* Как известно, теория тяготения Эйнштейна, опубликованная в 1915 году, впоследствии получила триумфальное обоснование, дав количественно правильное объяснение трем наблюдаемым фактам: смещению перигелия Меркурия (1915), отклонению луча в поле тяжести Солнца (1919) и гравитационному уменьшению частоты излучения, исходящего от тяжелого тела (1961).

Почти сразу после формулировки знаменитых уравнений тяготения А. Эйнштейн (1917) пытался получить на их основе выводы о строении Вселенной. Однако он искал стационарные решения своих уравнений. Как уже говорилось, первые адекватные решения были получены А.А. Фридманом. Они оказались нестационарными. С тех пор именно эти решения описывают основные модели Вселенной.

Вместо того чтобы воспроизводить уравнения ОТО и выводить из них уравнения Фридмана, в курсах космологии обычно используется более простой путь, своего рода полуклассический метод [1]. Дело в том, что в 1934 году Эдуард Артур Милн (1896–1950) показал, что решения типа фридмановских можно получить исходя из закона тяготения Ньютона. Мы в этом параграфе последуем по этому пути.

Введем галилееву систему отсчета с началом в произвольной точке. В ней определены пространственные координаты и обычное время. Пусть все пространство заполнено веществом с однородным и изотропным распределением плотности массы ρ_d , которая зависит только от времени. Это предположение называется космологическим принципом. Насколько оно выполняется, обсудим потом.

Рассмотрим некоторую точку на расстоянии R от начала и поместим туда пробное тело (материальную точку) массой m . Используем известное свойство ньютоновского потенциала, заключающееся в том, что при сферически симметричном распределении плотности на наше тело воздействует только масса, находящаяся внутри сферы радиуса R . Поэтому мысленно вырежем из всего пространства шар, ограниченный этой сферой, и изучим его эволюцию. При этом можно считать, что вся масса шара сосредоточена в его центре.

2. *Уравнение движения и его следствия.* На выбранное тело действует ньютонова сила

$$F = G \frac{mM_d}{R^2}, \quad (1)$$

где $G = 6.672 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}^2\text{г}$ — постоянная тяготения, а

$$M_d = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_d \quad (2)$$

есть масса шара радиусом R , которая в ходе эволюции не меняется.

Вещество не испытывает вращения, и нет других сил, кроме направленной по радиусу силы (1). Кроме того, и скорость тела направлена по радиусу, то есть его движение должно быть прямолинейным. В соответствии с этим уравнение движения тела запишется в скалярном виде

$$m\ddot{R} = -F \quad \text{или} \quad \ddot{R} = -G \frac{M_d}{R^2}. \quad (3)$$

Уравнение (3) соответствует задаче двух тел в наиболее простом случае, когда относительное движение происходит по прямой. При этом несущественно, что вещество движется вместе с рассматриваемым телом. Решается уравнение просто.

Как обычно в задаче двух тел, сначала, домножив уравнение (3) на \dot{R} и проинтегрировав, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{GM_d}{R} - kE, \quad (4)$$

где $E > 0$ — величина полной (модуль суммы кинетической и потенциальной) энергии единицы массы тела, а k — ее знак, то есть k может быть 1, -1 или 0 (полная энергия пробного тела равна $-kE$). Ни величина энергии, ни ее знак не изменяются в ходе движения.

Разрешив соотношение (4) относительно производной, найдем

$$\frac{dR}{\sqrt{2(GM_d/R - kE)}} = dt. \quad (5)$$

Вид решения зависит от знака энергии k .

3. *Решения уравнений.* Рассмотрим сначала случай $k = 1$ и сделаем подстановку

$$R = \frac{GM_d}{E} \sin^2 \frac{\eta}{2}, \quad dR = \frac{GM_d}{E} \sin \frac{\eta}{2} \cos \frac{\eta}{2} d\eta. \quad (6)$$

Тогда из уравнения (5) получим

$$dt = \frac{(GM_d/E) \sin(\eta/2) \cos(\eta/2) d\eta}{\sqrt{2E} \sqrt{1/\sin^2(\eta/2) - 1}} = \frac{GM_d}{(2E)^{3/2}} (1 - \cos \eta) d\eta, \quad (7)$$

так что при условии $\eta = 0$, когда $t = 0$,

$$t = \frac{GM_d}{(2E)^{3/2}} (\eta - \sin \eta). \quad (8)$$

Выражение скорости через ту же переменную имеет вид

$$\dot{R} = \sqrt{2E} \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}. \quad (9)$$

В случае $k = -1$ тригонометрические функции заменяются гиперболическими:

$$R = \frac{GM_d}{E} \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}, \quad dR = \frac{GM_d}{E} \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} d\eta, \quad (10)$$

так что

$$dt = \frac{(GM_d/E) \operatorname{sh}(\eta/2) \operatorname{ch}(\eta/2) d\eta}{\sqrt{2E} \sqrt{1/\operatorname{sh}^2(\eta/2) + 1}} = \frac{GM_d}{(2E)^{3/2}} (\operatorname{ch} \eta - 1) d\eta, \quad (11)$$

и при том же условии $\eta = 0$, когда $t = 0$,

$$t = \frac{GM_d}{(2E)^{3/2}} (\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad \dot{R} = \sqrt{2E} \operatorname{cth} \frac{\eta}{2}. \quad (12)$$

Случай нулевой энергии, когда $k = 0$ и значение величины E несущественно, допускает явное решение

$$\frac{\sqrt{R} dR}{\sqrt{2GM_d}} = dt, \quad R = \left(\frac{9GM_d}{2} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad \dot{R} = \left(\frac{4GM_d}{3} \right)^{1/3} t^{-1/3}. \quad (13)$$

Однако мы запишем его в виде, аналогичном двум предыдущим:

$$R = \frac{GM_d}{E} \frac{\eta^2}{4}, \quad t = \frac{GM_d}{(2E)^{3/2}} \frac{\eta^3}{6}, \quad \dot{R} = \sqrt{2E} \frac{2}{\eta}. \quad (14)$$

4. *Свойства решений.* Выведенные формулы в параметрической форме описывают прямолинейное движение тела в поле тяжести некоторой массы. Иначе можно считать, что они характеризуют изменение масштаба пространственной длины со временем.

Все решения имеют некоторые общие черты. При $t = 0$, когда и $\eta = 0$, радиус $R = 0$. Скорость же в начальный момент $\dot{R} = +\infty$. Это объясняется бесконечностью потенциальной энергии в начале координат, которая должна компенсироваться кинетической энергией, чтобы полная энергия была конечной (неважно, какой она имеет знак или равна 0).

Как явствует из формулы (6), движение при $k = 1$ финитно и периодически, то есть с ростом времени сначала R растет от 0 до максимума, а затем убывает снова до 0 и т. д. График зависимости R от t изображается циклоидой. При $k = -1$ и при $k = 0$ расстояние R при $t \rightarrow \infty$ увеличивается до бесконечности. В последнем случае при этом скорость стремится к 0, а при $k = -1$ остается конечной. Движения при $k = 1, -1, 0$ аналогичны движениям по эллипсу, гиперболе и параболе в задаче двух тел с начальной скоростью, направленной не по прямой, проходящей через центр притяжения.

При $\eta \rightarrow 0$ решения с ненулевой энергией описываются теми же формулами, что и решение с нулевой энергией при всех η . Следовательно, на ранних этапах эволюции все три решения почти неразличимы. Однако различия проявляются уже довольно скоро.

Теперь перейдем к ОТО.

§ 2. Интерпретация решений по ОТО

1. *Переход к решениям Фридмана.* Возвратимся к исходной модели пространства, заполненного однородным веществом с ненулевой средней плотностью. Строго говоря, к такой модели теория Ньютона неприменима, так как согласно ей ньютоновский потенциал обратился бы в каждой точке в бесконечность. Поэтому при нахождении ньютоновских решений пришлось из бесконечного пространства вырезать конечный шар. Между тем основным предположением фридмановской теории является именно однородное распределение вещества и изотропность пространства (космологический принцип). ОТО справляется с этой трудностью. (Отметим высказываемое иногда мнение, что обращение потенциала в бесконечность не является фатальным недостатком, так как сам по себе потенциал не нужен, используются только производные от него.)

Здесь будет подробно изложен один из вариантов космологической теории, при котором, как и в предыдущем параграфе, считается, что так называемая космологическая постоянная Эйнштейна равна нулю, а вещество, заполняющее пространство, имеет характер пыли (индекс d) и не оказывает давления.

Если провести строгое решение уравнений тяготения Эйнштейна при постоянной плотности вещества без давления, то результат получается совпадающим по форме с ньютоновским, но с другой интерпретацией. Как в полуклассическом методе квантовой механики, надо классические величины заменить на новые, в данном случае релятивистские, возникающие в теории Эйнштейна.

В этой теории $R > 0$ обозначает не радиус некоторого шара (или какой-то масштаб), а радиус кривизны трехмерного пространства. Кривизна эта согласно Эйнштейну вызывается наличием тяготеющих масс и при равномерном распределении плотности также не зависит от места в пространстве. Если $k = 0$, то значение радиуса кривизны несущественно (в плоском пространстве он бесконечен), тогда R действительно некоторый масштаб. В общем случае кривизна пространства равна k/R^2 . Классическое финитное (эллиптическое) движение соответствует пространству постоянной положительной, а гиперболическое — постоянной отрицательной кривизны.

Далее, величина E должна быть заменена по формуле $E = c^2/2$, а произведение $GM_d = R_m c^2$. Следовательно, R_m — это расстояние, на котором ньютоновская потенциальная энергия тела по отношению к притягивающему центру равна энергии покоя тела:

$$R_m = \frac{GM_d}{c^2}, \quad G \frac{mM_d}{R_m} = mc^2. \quad (15)$$

Заметим, что удвоенное значение этого расстояния $R_g = 2R_m$ называется гравитационным радиусом. На расстоянии гравитационного радиуса скорость убегания от тела (вторая космическая) как раз равна скорости света.

Нетривиальность замены ньютоновской величины — классической энергии E — на $c^2/2$ показывает, что упрощенное изложение Милна позволяет найти форму решений задачи, но не подменяет общей теории относительности. Только ОТО правильно учитывает метрику пространства—времени. Кроме того, милновский подход возможен лишь при простых моделях.

В результате указанных замен классический закон сохранения энергии примет форму

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{2R_m}{R} - k \right), \quad (16)$$

из которой следует, что амплитуда изменения радиуса кривизны в закрытой модели равна $2R_m$.

Наконец, под временем t подразумевается собственное время каждой точки пространства, что соответствует выбору сопутствующей системы отсчета в каждой точке. Синхронизовать часы можно по значению плотности вещества, которая в данный момент одинакова во всем пространстве. В результате оказывается, что в каждый момент времени метрика пространства, то есть зависимость расстояний от координат одинакова во всех точках и по всем направлениям, а система координат движется вместе с веществом, как приклеенная к нему. Начало координат можно выбрать в любой точке, сопоставив этой точке координату $r = 0$.

2. *Фридмановские решения.* Перепишем полученные нерелятивистские решения в релятивистских обозначениях и приведем их в двух таблицах.

Из последнего столбца Табл. 1 следует, что скорость изменения радиуса кривизны может быть сколь угодно большой. Это не противоречит принципу теории относительности, так как никакой передачи сигналов здесь не происходит. В первом столбце Табл. 2 помещено отношение $H = \dot{R}/R$, которое будем называть функцией Хаббла. О величине, помещенной в последнем столбце Табл. 2, скажем ниже.

Таблица 1: Эволюция радиуса кривизны в модели пылевидного вещества.

k	Время t	Радиус кривизны R	Скорость \dot{R}
1	$\frac{R_m}{c}(\eta - \sin \eta)$	$2R_m \sin^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}$
0	$\frac{R_m}{c} \frac{\eta^3}{6}$	$\frac{R_m \eta^2}{2} = \left(\frac{9R_m c^2 t^2}{2} \right)^{1/3}$	$\frac{2c}{\eta}$
-1	$\frac{R_m}{c}(\operatorname{sh} \eta - \eta)$	$2R_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{cth} \frac{\eta}{2}$

Таблица 2: Эволюция плотности и функции Хаббла в модели пылевидного вещества.

k	H	Плотность ρ_d	$\Omega_d = \rho_d/\rho_c$
1	$\frac{c \cos(\eta/2)}{2R_m \sin^3(\eta/2)}$	$\frac{3 c^2}{8\pi G 4R_m^2 \sin^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\cos^2(\eta/2)}$
0	$\frac{c}{R_m} \frac{4}{\eta^3} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}$	$\frac{3 c^2}{8\pi G 4R_m^2 \eta^6}$	1
-1	$\frac{c \operatorname{ch}(\eta/2)}{2R_m \operatorname{sh}^3(\eta/2)}$	$\frac{3 c^2}{8\pi G 4R_m^2 \operatorname{sh}^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\eta/2)}$

3. *Метрика замкнутого трехмерного пространства.* Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Радиус кривизны растет от 0 при $t = 0$ до максимального значения $2R_m$ при $\eta = \pi$, $t = \pi R_m/c$. Затем рост сменяется уменьшением снова до 0 при $\eta = 2\pi$, $t = 2\pi R_m/c$. Пространство имеет постоянную (в каждый момент) положительную кривизну. Проще всего понять структуру такого пространства исходя из четырехмерной модели.

В четырехмерном евклидовом пространстве можно представить трехмерное пространство постоянной положительной кривизны в виде гиперсферы, определяемой уравнением

$$r^2 + u^2 = R^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (17)$$

где u — четвертая координата, а R — радиус сферы. Тогда ввиду того, что $\vec{r}^2 = r^2$,

$$x dx + y dy + z dz = \vec{r} d\vec{r} = r dr = -u du, \quad du = -\frac{r dr}{u}. \quad (18)$$

Дифференциал интервала в четырехмерном евклидовом пространстве определяется, как обычно, в виде суммы квадратов дифференциалов четырех декартовых координат. Запишем его в сферических координатах

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + du^2, \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (19)$$

где $d\omega$ — элемент длины на сфере единичного радиуса. Заменяя в квадрате элемента длины четырехмерного пространства dl^2 дифференциал четвертой переменной согласно (18), мы перейдем в трехмерную гиперсферу и получим ее матрику

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\omega^2. \quad (20)$$

Сделаем подстановку $r = R \sin \chi$. Тогда $u = R \cos \chi$, а

$$dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\omega^2). \quad (21)$$

Ясно, что $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq r \leq R$.

Квадрат элемента длины определяет всю геометрию пространства. Например, можно найти элемент его объема в разных формах:

$$d^3 r = \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} r^2 d^2 \omega = R^3 d\chi \sin^2 \chi d^2 \omega, \quad d^2 \omega = \sin \theta d\theta d\phi. \quad (22)$$

Возьмем две точки в пространстве с координатами $\chi = 0$ и $\chi = \chi_0$. Соответствующие координаты r будут 0 и $r_0 = R \sin \chi_0$. Пусть в первой точке находится наблюдатель, вторую назовем пробной. Соединим эти точки лучом, исходящим от наблюдателя. Вдоль луча значения углов θ и ϕ постоянны, а элемент расстояния $dl = R d\chi$, так что расстояние от наблюдателя до пробной точки $l_0 = R \chi_0$. Элемент площади поверхности сферы на этом расстоянии $r_0^2 d^2 \omega = R^2 \sin^2 \chi_0 \sin \theta d\theta d\phi$. Элемент $d^2 \omega$ относится к единичной сфере, поэтому r_0 — это радиус сферы, проходящей через пробную точку. В пространстве постоянной положительной кривизны радиус r_0 меньше расстояния от наблюдателя до поверхности сферы $r_0 = R \sin \chi_0 < l_0 = R \chi_0$, наблюдатель не находится в центре этой сферы, который вообще не помещается в реальном пространстве, а является точкой четырехмерного пространства. Площадь поверхности сферы радиуса $r = r_0$ вычисляется сразу, так как интеграл по сферическим углам равен 4π : она равна $4\pi r_0^2 = 4\pi R^2 \sin^2 \chi_0$. Легко находится и длина экватора этой сферы, определяемого условиями $r = r_0$, $\theta = \pi/2$: $l_{\text{eq}} = 2\pi R \sin \chi_0$. Обе эти величины с ростом χ_0 сначала растут до

максимальных значений, а затем убывают и обращаются в нуль при $\chi_0 = \pi$, причем объем, заключенный внутри сферы, с увеличением координаты χ_0 , как и расстояние l_0 , монотонно растет:

$$V(\chi_0) = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1-r^2/R^2}} = 4\pi R^3 \int_0^{\chi_0} \sin^2 \chi d\chi = 2\pi R^3 \left(\chi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\chi_0 \right). \quad (23)$$

Полный объем пространства в данном случае конечен: $V(\pi) = 2\pi^2 R^3$. Поэтому такое пространство называется замкнутым (или закрытым). Оно аналогично поверхности трехмерной сферы.

Действительно, отличие заключается в том, что в двумерном случае нет координаты z . Уравнение сферы имеет вид (17), но $r^2 = x^2 + y^2$. Во всех остальных равенствах также надо опустить z (положить $z = 0$ или считать, что угол $\theta = \pi/2$). Тогда $d\omega = d\phi$ и элемент двумерного объема (площади на сфере) $d^2r = R^2 \sin \chi d\chi d\phi$. Объем такого пространства, естественно, равен площади поверхности сферы $4\pi R^2$. В случае двумерной сферы в трехмерном пространстве очевидно, что расстояние до окружности, проведенной на этой сфере, больше, чем ее радиус, а центр окружности находится не на сфере, а внутри нее. Очевидно также, что радиус окружности (параллели) и ее длина с удалением от фиксированной точки (полюса) сначала растут, а затем уменьшаются, в то время как площадь поверхности от полюса до параллели растет.

4. *Метрика открытых пространств.* Случай $k = -1$ не допускает столь наглядной интерпретации: надо рассматривать сразу четырехмерное пространство Лобачевского. Его описание отличается от приведенного выше заменой некоторых плюсов на минусы. Вместо гиперсферы надо рассматривать другую гиперповерхность: верхнюю часть двуполостного гиперboloида вращения при индефинитной метрике, то есть

$$r^2 - u^2 = -R^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 - du^2. \quad (24)$$

Следствием этого будет замена тригонометрических функций на гиперболические, как при классическом рассмотрении в предыдущем параграфе. Например:

$$r = R \operatorname{sh} \chi, \quad dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\omega^2), \quad d^3r = R^3 \operatorname{sh}^2 \chi d\chi d^2\omega. \quad (25)$$

Трехмерное пространство тоже оказывается пространством Лобачевского и имеет бесконечные протяженность и объем. Оно называется гиперболическим, или открытым. В нем, как легко заметить, радиус сферы, все точки которой находятся на одном расстоянии от наблюдателя, больше этого расстояния: $R \operatorname{sh} \chi > R\chi$.

Случай $k = 0$ соответствует трехмерному евклидову пространству, которое также бесконечно по объему.

Многие соотношения можно записать для трех случаев единым образом. Например, формулы (20) и (22) переписываются так:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2/R^2} + r^2 d\omega^2, \quad d^3r = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R^2}} r^2 d^2\omega. \quad (26)$$

При $k = -1$ и χ и r изменяются от 0 до ∞ .

Если ввести общее обозначение для тригонометрического и гиперболического синуса и их предельного значения (см. Приложение I, формулы (III.1) и (III.2)):

$$\operatorname{sn}_k \chi = \begin{cases} \sin \chi, & \text{при } k = 1, \\ \chi, & \text{при } k = 0, \\ \operatorname{sh} \chi, & \text{при } k = -1, \end{cases} \quad d \operatorname{sn}_k \chi = \sqrt{1 - k \operatorname{sn}_k^2 \chi} d\chi, \quad (27)$$

то при $k = 1, 0, -1$ будет $r = R \operatorname{sn}_k \chi$ и

$$dl^2 = R^2 [d\chi^2 + \operatorname{sn}_k^2 \chi d\omega^2]. \quad (28)$$

Элемент объема также можно представить в виде, справедливом для всех случаев:

$$d^3r = R^3(\eta) d\chi \operatorname{sn}_k^2 \chi d^2\omega. \quad (29)$$

5. *Метрика четырехмерного пространства—времени.* Все рассуждения предыдущего пункта относились к фиксированному моменту времени. Но Вселенная должна рассматриваться как пространственно-временное многообразие, то есть четырехмерное пространство. Это пространство—время не имеет ничего общего с рассмотренными выше фиктивными (вспомогательными) четырехмерными пространствами. Его геометрия определяется, как и в обычной (специальной) теории относительности, выражением для квадрата элемента интервала, которое для однородного пространства и выбранной системы отсчета имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (30)$$

где dl^2 дается одной из приведенных выше формул. Наиболее удобная форма — (28) (ее частные виды — равенства (21) и (25)).

Поскольку R зависит только от времени, можно сделать замену

$$cdt = R(\eta)d\eta. \quad (31)$$

Легко убедиться, что новая переменная η совпадает с использованной в предыдущем параграфе, а

$$ds^2 = R^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sn}_k^2 \chi d\omega^2]. \quad (32)$$

Координата η определяет ход времени и изменение радиуса кривизны согласно данным Табл. 1, а координата χ определяет расстояние. Формула (32) называется метрикой Фридмана—Робертсона—Уокера (ФРУ).

Заклучить, что величина R является радиусом кривизны, проще всего исходя именно из квадрата интервала в форме (32), что и делается в книге [4]. Модель с $k = 0$ соответствует евклидову пространству в каждый заданный момент и называется вселенной Эйнштейна—де Ситтера.

§ 3. Уравнения однородных космологических моделей

1. *Два уравнения Фридмана.* Начав с простейших моделей пылевидного вещества, мы пришли к их интерпретации как моделей замкнутого, открытого или плоского пространства, а затем к метрике ФРУ. Теперь обратимся к более общим моделям, основанным на этой метрике.

С принятием метрики (32) из уравнений тяготения Эйнштейна (общей теории относительности) выводятся два независимых уравнения

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R, \quad (33)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2. \quad (34)$$

Напомним, что здесь R — радиус кривизны пространства, Λ — космологическая постоянная, $\rho = \rho_m + \rho_r$ — массовая плотность материи, то есть вещества (m) и излучения (r), $P = P_m + P_r$ — давление. Константа k может принять одно из трех значений: $k = 1, 0, -1$, соответственно для моделей с замкнутой, плоской и открытой метрикой пространства. Подчеркнем, что в уравнении (34) константа k появилась не в результате интегрирования уравнения (33), а как следствие соотношения $\text{cs}_k^2 \chi + k \text{sn}_k^2 \chi = 1$, где $\text{cs}_k \chi$ — общее обозначение для тригонометрического и гиперболического косинусов, а также их предельного случая (см. Приложение I).

Уравнения тяготения Эйнштейна записываются в виде одного тензорного уравнения, куда входят тензоры второго ранга, а именно, тензор кривизны пространства-времени в левой части и тензор энергии-импульса материи в правой. Уравнение представляются в матричном виде, содержащем матрицы четвертого порядка, так что всего уравнений получается 16. Из-за симметрии тензоров число уравнений сводится к 10. Однако для метрики ФРУ, основанной на космологическом принципе, некоторые уравнения оказываются тождествами, другие совпадают, независимых уравнений остается всего два.

2. *Преобразование уравнений.* Космологическое слагаемое в уравнениях стоит отдельно от других слагаемых. Присоединим слагаемые с космологической постоянной в уравнениях (33)–(34) к первым слагаемым, записав их в том же виде, то есть положив

$$\frac{\Lambda c^2}{3} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_\Lambda + 3\frac{P_\Lambda}{c^2} \right), \quad \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda. \quad (35)$$

Чтобы удовлетворить этим соотношениям, надо определить

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (36)$$

Будем для краткости называть носитель этих величин, поскольку это не вещество и не излучение, вакуумом. С учетом определений (36) уравнения (33)–(34) запишутся короче:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} \right) R, \quad (37)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_t R^2 - kc^2, \quad (38)$$

где полные плотность и давление трех компонент

$$\rho_t = \rho + \rho_\Lambda = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad P_t = P + P_\Lambda = P_m + P_r + P_\Lambda. \quad (39)$$

Иногда и последнее слагаемое в уравнении (38) присоединяют к предпоследнему, вводя так называемые плотность и давление кривизны

$$\rho_k = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R^2}, \quad P_k = \frac{1}{8\pi G} \frac{kc^4}{R^2}. \quad (40)$$

Это определение позволяет записать второе уравнение еще короче (вид первого уже не упрощается, но перепишем и его):

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g R, \quad \rho_g = \rho_u + 3\frac{P_u}{c^2}, \quad (41)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_u R^2, \quad (42)$$

где

$$\rho_u = \rho_t + \rho_k = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_k, \quad P_u = P_t + P_k = P_m + P_r + P_\Lambda + P_k. \quad (43)$$

Последнее преобразование уравнений носит совершенно формальный характер, но все же в дальнейшем мы используем уравнения в такой компактной форме.

Как явствует из уравнений (37) и (41), в создании гравитационного воздействия участвует не только плотность, но и давление. Величина, входящая в уравнение (41) и обозначенная ρ_g , называется гравитирующей или гравитационной плотностью:

$$\rho_g = \rho_u + 3\frac{P_u}{c^2} = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}. \quad (44)$$

Отметим еще, что если формально ввести определение полной массы трех гравитационных компонент (кривизна в нее вклада не вносит)

$$M_g = \frac{4\pi}{3} \rho_g R^3, \quad (45)$$

то уравнение (41) записывается в виде, полностью совпадающем с видом ньютоновского уравнения (3):

$$\ddot{R} = -G \frac{M_g}{R^2}. \quad (46)$$

3. *Совместность уравнений.* Просто из вида уравнений Фридмана следует, что для их совместности нужно потребовать выполнения какого-то дополнительного условия. Действительно, в первое уравнение входит давление, которое создает гравитацию вместе с плотностью. Во втором уравнении давления нет. Попробуем найти указанное условие.

Продифференцируем уравнение (38) по времени. Получим

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho}_t R^2 + \frac{8\pi G}{3} \rho_t 2R\dot{R}, \quad \ddot{R} = \frac{4\pi G}{3} \dot{\rho}_t \frac{R^2}{R} + \frac{8\pi G}{3} \rho_t R. \quad (47)$$

Приравняем полученное выражение для второй производной от радиуса кривизны его выражению из уравнения (37). Сократив на $4\pi GR$, найдем

$$\frac{1}{3} \dot{\rho}_t \frac{R}{R} + \frac{2}{3} \rho_t = -\frac{1}{3} \rho_t - \frac{P_t}{c^2}, \quad \frac{1}{3} \dot{\rho}_t \frac{R}{R} + \rho_t + \frac{P_t}{c^2} = 0, \quad \dot{\rho}_t = -3 \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2} \right) H, \quad (48)$$

где новая переменная, называемая в космологии “постоянной” Хаббла, так как она постоянна во всем пространстве в каждый момент времени, равна отношению

$$H = \frac{\dot{R}}{R}. \quad (49)$$

Однако, она зависит от времени, поэтому будем ее называть функцией Хаббла.

4. *Уравнение для функции Хаббла.* Поскольку в последнем соотношении появилась новая функция, полезно найти уравнение и для нее, связав ее с плотностью. Для этого напишем очевидное равенство и приравняем результат к выражению из уравнения (37), сократив на R :

$$\ddot{R} = \frac{d\dot{R}}{dt} = \frac{dRH}{dt} = \dot{R}H + R\dot{H} = R(H^2 + \dot{H}) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} \right) R. \quad (50)$$

Получится

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} \right). \quad (51)$$

Два уравнения (48) и (51) составляют систему, связывающую плотность и функцию Хаббла. Заметим, что реально учет космологического слагаемого не влияет на вид уравнения (48), а добавление кривизны не изменяет вида соотношения (51).

5. *Физический смысл дополнительного условия.* Возьмем объем V и найдем полную энергию, то есть энергию всех компонент, заключенную в этом объеме. Так как ρ — это плотность массы, то для получения энергии ее надо умножить на c^2 . Найдем дифференциал полной энергии и подставим дифференциал плотности из (48). С учетом трехмерности объема ($dV/V = 3dR/R$) получится

$$d(\rho_t c^2 V) = c^2(V d\rho_t + \rho_t dV) = -3c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2} \right) \frac{dR}{R} + c^2 \rho_t dV = -c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2} \right) \frac{dV}{V} + c^2 \rho_t dV = -P_t dV. \quad (52)$$

Таким образом, изменение энергии равно работе силы давления, что в термодинамике означает адиабатичность расширения. Следовательно, космологическое расширение (или сжатие, если оно наступит) можно интерпретировать как адиабатический процесс.

§ 4. Составляющие Вселенной

1. *Невзаимодействующие компоненты.* Из изложенного ясно, что для полного определения эволюции космологической модели необходимо как-то установить уравнение состояния космологической смеси. В различные эпохи уравнение, связывающее вещество и излучение, может иметь различную форму, например, в него может входить температура T , для определения которой придется исследовать физические процессы взаимодействия этих гравитирующих компонент.

Однако, на протяжении большей части эволюции Вселенной вплоть до настоящего времени космологические компоненты между собой не взаимодействуют. Кривизна и вакуум вообще ни с чем взаимодействовать не могут. Две другие компоненты, то есть вещество и излучение, также могут считаться невзаимодействующими после так называемой эпохи рекомбинации, которая закончилась примерно через 200 тысяч лет после начала расширения, а возраст Вселенной более 13 миллиардов лет. Но и до рекомбинации взаимодействие излучения и вещества не изменяли плотности их масс. Так что эти две компоненты можно считать невзаимодействующими после эпохи аннигиляции электрон-позитронных пар, когда масса электронов и всех позитронов перешла в энергию излучения.

Отдельного разговора требует вопрос о нейтрино. Более подробно об этой компоненте будет сказано в другом разделе, однако, уже сейчас заметим, что из-за малой массы покоя нейтрино всех типов оказываются ультрарелятивистскими также почти на всем протяжении эволюции Вселенной. В эпохи, близкие к современности, наличие массы покоя может сказаться на величине плотности массы нейтрино, но в эти эпохи доля их массы в общей массе вещества незначительна, так что можно их по-прежнему считать ультрарелятивистскими, что не приведет к заметным неточностям. Таким образом, вещество можно подразделить на холодную (или пылевидную) и горячую (то есть нейтрино) составляющие: $\rho_m = \rho_d + \rho_\nu$.

Для каждой из этих компонент выполняется свое уравнение состояния. Энергия холодного вещества заключена в его энергии покоя, то есть в массе, а давлением можно пренебречь и считать вещество пылевидным, то есть принять, что $P_d = 0$ (d — dust). Для равновесного (теплого) излучения и для нейтрино выполняется известное соотношение между давлением и плотностью массы, как для всяких ультрарелятивистских частиц: $P = (c^2/3)\rho$. Поэтому можно нейтрино и излучение объединить, положив $\rho_\tau + \rho_\nu = \rho_{\tau\nu}$, $P_\tau + P_\nu = P_{\tau\nu}$.

Таким образом,

$$P_d = 0, \quad P_\tau = \frac{c^2}{3}\rho_\tau, \quad P_\nu = \frac{c^2}{3}\rho_\nu, \quad P_{\tau\nu} = \frac{c^2}{3}\rho_{\tau\nu}, \quad P_\Lambda = -c^2\rho_\Lambda, \quad P_k = -\frac{c^2}{3}\rho_k. \quad (53)$$

Последнее уравнение вытекает из определений (40).

Из уравнений состояния (53) и уравнения (48), записанного для каждой компоненты отдельно, следуют выражения для производных:

$$\dot{\rho}_d = -3\rho_d H, \quad \dot{\rho}_{\tau\nu} = -3 \left(\rho_{\tau\nu} + \frac{1}{3}\rho_{\tau\nu} \right) = -4\rho_{\tau\nu} H, \quad \dot{\rho}_\Lambda = 0. \quad (54)$$

Так как функция Хаббла является производной от логарифма радиуса кривизны, то уравнения (54) легко интегрируются:

$$\rho_d = \rho_d^0 \frac{R_0^3}{R^3}, \quad \rho_{\tau\nu} = \rho_{\tau\nu}^0 \frac{R_0^4}{R^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0. \quad (55)$$

Здесь и в дальнейшем индексом 0 отмечаются величины, относящиеся к определенному моменту времени, как правило, к современной эпохе.

Для определения связи плотности кривизны с радиусом кривизны интегрирования не требуется, так как она задается определениями (40):

$$\rho_k = \rho_k^0 \frac{R_0^2}{R^2}, \quad \rho_k^0 = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (56)$$

Безразмерное отношение $a = R/R_0$ называют масштабным множителем (или фактором). Он связан с особой космологической величиной, определяемой из наблюдений, называемой красным смещением и обозначаемой z . Точное определение красного смещения будет дано в следующей главе, но уже здесь приведем указанную связь:

$$a = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (57)$$

Через масштабный множитель плотности выражаются проще:

$$\rho_d = \frac{\rho_d^0}{a^3}, \quad \rho_{r\nu} = \frac{\rho_{r\nu}^0}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0, \quad \rho_k = \frac{\rho_k^0}{a^2}. \quad (58)$$

С учетом уравнений состояния (53) гравитирующая плотность равна

$$\rho_g = \rho_u + 3\frac{P_u}{c^2} = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} = \rho_d + 2\rho_{r\nu} - 2\rho_\Lambda. \quad (59)$$

2. *Критические величины.* В космологической теории вводится несколько стандартных обозначений для величин, определяющих геометрические свойства пространства. Перенесем в уравнении (38) первое слагаемое в правой части в левую и вынесем множитель при плотности в этом слагаемом за скобки:

$$\frac{8\pi G}{3} R^2 (\rho_c - \rho_t) = -kc^2. \quad (60)$$

Первое слагаемое в скобках — так называемая критическая плотность

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (61)$$

Знак параметра k совпадает со знаком разности $\rho_t - \rho_c$: они положительны, отрицательны или равны нулю соответственно для замкнутой, открытой и плоской моделей.

Из уравнения (60) и определений (61) и (39) вытекает, что $\rho_c = \rho_u$.

Другими критическими параметрами (или параметрами критичности) называют отношения

$$\Omega_d = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad \Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c}, \quad \Omega_{r\nu} = \frac{\rho_{r\nu}}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_t = \frac{\rho_t}{\rho_c}, \quad \Omega_u = \frac{\rho_u}{\rho_c}, \quad \Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c} = -\frac{kc^2}{R^2}. \quad (62)$$

Очевидны соотношения

$$\Omega_t = \Omega_d + \Omega_{r\nu} + \Omega_\Lambda, \quad \Omega_u = \Omega_t + \Omega_k = \Omega_d + \Omega_{r\nu} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (63)$$

Эти параметры суть доли различных составляющих в критической плотности. Через них уравнение (60) записывается в виде

$$\dot{R}^2 (1 - \Omega_t) = -kc^2, \quad k = \text{sgn}(\Omega_t - 1) = \text{sgn}(\Omega_t^0 - 1), \quad (64)$$

так что при $\Omega_t > 1$ пространство замкнуто, при $\Omega_t < 1$ — открыто, при $\Omega_t = 1$ — плоское.

Именно отношение Ω_d для моделей Вселенной без давления и без космологического слагаемого ($\Omega_{r\nu} = \Omega_\Lambda = 0$) было помещено в последнем столбце Табл. 2.

3. *Сохраняющиеся величины.* Из уравнения (48) вытекает, что

$$\frac{\dot{\rho}_t}{\rho_t + P_t/c^2} = -3\frac{\dot{R}}{R}, \quad \frac{d\rho_t}{\rho_t + P_t/c^2} = -3\frac{dR}{R}. \quad (65)$$

Таким образом,

$$\int \frac{d\rho_t}{\rho_t + P_t/c^2} + 3 \ln R = \text{const}. \quad (66)$$

Если привязать эту величину к современным значениям, то получится

$$\frac{R^3}{R_0^3} \exp \left(\int_{\rho_t^0}^{\rho_t} \frac{d\rho_t'}{\rho_t' + P_t'/c^2} \right) = 1. \quad (67)$$

Из соотношения (67) вытекает, что в космологической ситуации сохраняющимися являются не отдельно энергия, масса и другие величины, а их некоторая комбинация.

При не взаимодействующих компонентах сохраняющимися величинами являются

$$M_d = \frac{4\pi}{3}\rho_d R^3, \quad W = 4\pi\rho_{r\nu}R^4, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0, \quad \rho_k R^2. \quad (68)$$

Полная масса всех компонент в космологических моделях не сохраняется, так как

$$M_t = \frac{4\pi}{3}\rho_t R^3 = M_d + M_{r\nu} + M_\Lambda = M_d + \frac{W}{3R} + \frac{4\pi}{3}\rho_\Lambda R^3. \quad (69)$$

Постоянной остается только масса пылевидного вещества, масса излучения и нейтрино с ростом радиуса кривизны убывает как $1/R$, а масса вакуума растет пропорционально росту объема. Таким образом, энергия излучения и нейтрино исчезает, а вакуум рождается.

§ 5. Решение основных уравнений

1. *Общее решение для не взаимодействующих компонент.* В рассмотренном выше случае, когда три компоненты Вселенной: пылевидное вещество, излучение и вакуум, между собой не взаимодействуют, возможно получить решение космологических уравнений в квадратурах.

Перепишем соотношения (58) через современные значения параметров критичности:

$$\rho_d = \rho_c^0 \frac{\Omega_d^0}{a^3}, \quad \rho_{r\nu} = \rho_c^0 \frac{\Omega_{r\nu}^0}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_c^0 \Omega_\Lambda^0, \quad \rho_k = \rho_c^0 \frac{\Omega_k^0}{a^2}, \quad \Omega_\Lambda^0 = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k^0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}. \quad (70)$$

Сюда входят современные значения критической плотности $\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ и функции Хаббла H_0 (то есть постоянная Хаббла). Подставим эти выражения в формулы (43) для полной плотности и (59) для гравитационной плотности через их составляющие:

$$\rho_u = \frac{\rho_c^0}{a^4}(\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4), \quad \rho_g = \frac{\rho_c^0}{a^4}(2\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a - 2\Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (71)$$

Затем подставим полную плотность в уравнение (42):

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{H_0^2}{a^4}(\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (72)$$

В качестве параметров в это уравнение входят только величины, относящиеся к данному моменту. При этом нефизическую величину Ω_k^0 можно исключить, воспользовавшись соотношением (63) при $t = t_0$.

Разделение переменных после извлечения корня дает

$$\frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 dt. \quad (73)$$

Пределы интегрирования в интеграле по a могут быть различными, так как в общем случае подкоренное выражение, представляющее многочлен четвертой степени, может обращаться в нуль. Если этого не происходит, то эволюция масштабного множителя определяется уравнением, неявное решение которого представляется интегралом

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 t. \quad (74)$$

Радиус кривизны R или масштабный множитель a можно находить как функции времени t или в параметрическом виде, как это предполагается в выражении для метрики (32). Тогда находятся функции $R(\eta)$ и $t(\eta)$ от параметра η , связанного со временем соотношением (31) и называемого конформным временем. Уравнения, связывающие a и η выглядят так:

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{H_0 R_0}{c} d\eta, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{H_0 R_0}{c} \eta. \quad (75)$$

С помощью формулы для гравитационной плотности (71) перепишем также уравнение (41):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{H_0^2}{a^4}(2\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a - 2\Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (76)$$

2. *Случай плоских моделей.* В случае плоских моделей в (74) и (75) надо просто подставить $\Omega_k^0 = 0$. Однако тогда величина R_0 неопределенна и не должна входить в величины, имеющие прямой смысл. Поэтому можно просто положить $R_0 = c/H_0$. Тогда элемент размерного метрического расстояния выразится формулой

$$dt^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\chi^2 + \chi^2 d\omega^2], \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (77)$$

Метрика плоского пространства-времени тогда запишется в виде

$$ds^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2]. \quad (78)$$

Для вновь определенной метрики из (74) и (75) находим

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{rv}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 t, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{rv}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \eta. \quad (79)$$

Так как $\Omega_{rv}^0 > 0$ и $\Omega_d^0 > 0$, то нули у многочлена, стоящего под корнем в знаменателе подинтегральной функции, возможны только при $\Omega_\Lambda^0 < 0$. Но отрицательные значения космологической постоянной означали бы не отталкивание, а дополнительное притяжение, что не представляет интереса для теории. Поэтому интеграл в (79) можно написать всегда.

Выбор модели применительно к объективно существующей Вселенной должен быть произведен исходя из наблюдений. После этого определяется и вид функции $\text{sn}_k \chi$ в выражении для пространственной координаты — радиуса сферы, соответствующего координате χ : $r = R \text{sn}_k \chi$.

Рассмотрим подробнее частные случаи общих уравнений, для которых получаются достаточно простые решения.

§ 6. Модели пылевидного и ультрарелятивистского вещества

1. *Пылевидное вещество.* Этот случай рассмотрен в § 1, но вернемся к нему и получим решение в несколько другой форме, исходя из общего решения (74) и положив в нем $\Omega_r^0 = \Omega_\Lambda^0 = 0$. При таких параметрах выражение под корнем в нуль не обращается, так что указанным решением можно воспользоваться.

Вид интеграла зависит от знака $\Omega_d^0 - 1 = -\Omega_k^0$, совпадающего со знаком k :

$$H_0 t = \int_0^a \sqrt{\frac{a}{\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a}} da = \begin{cases} \frac{\sqrt{a[\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a]}}{1 - \Omega_d^0} - \frac{\Omega_d^0}{(1 - \Omega_d^0)^{3/2}} \text{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_d^0}{\Omega_d^0} a}, & k = -1, \\ \frac{2}{3} a^{3/2}, & k = 0, \\ \frac{\Omega_d^0}{(\Omega_d^0 - 1)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_d^0 - 1}{\Omega_d^0} a} - \frac{\sqrt{a[\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a]}}{\Omega_d^0 - 1}, & k = 1, \end{cases} \quad (80)$$

где $\text{arsh } x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. Формула для $k = 0$ получается как предельный случай двух других формул при $\Omega_d^0 \rightarrow 1$.

В частности, при $a = 1$, что соответствует современной эпохе, находим возраст Вселенной согласно этой модели:

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \sqrt{\frac{a}{\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a}} da = \begin{cases} \frac{1}{1 - \Omega_d^0} - \frac{\Omega_d^0}{(1 - \Omega_d^0)^{3/2}} \text{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_d^0}{\Omega_d^0}}, & k = -1, \\ \frac{2}{3}, & k = 0, \\ \frac{\Omega_d^0}{(\Omega_d^0 - 1)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_d^0 - 1}{\Omega_d^0}} - \frac{1}{\Omega_d^0 - 1}, & k = 1. \end{cases} \quad (81)$$

Полученные для $k \neq 0$ выражения можно записать через альтернативную функцию единой формулой:

$$H_0 t = \frac{1}{1 - \Omega_d^0} \left[\sqrt{a[\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a]} - \frac{\Omega_d^0}{\sqrt{|1 - \Omega_d^0|}} \text{arsn}_k \sqrt{\frac{|1 - \Omega_d^0|}{\Omega_d^0} a} \right], \quad (82)$$

однако для $k = 0$ написать ту же функцию нельзя, так как необходим предельный переход с разложением до третьей степени малости аргумента.

Конечно, формулы этого пункта совпадут с приведенными в Табл. 1 и 2, если в соответствии с данными столбцов этих таблиц положить

$$a = \frac{R}{R_0} = \frac{\operatorname{sn}_k^2(\eta/2)}{\operatorname{sn}_k^2(\eta_0/2)}, \quad \Omega_d^0 = \frac{1}{\operatorname{cs}_k^2(\eta_0/2)}, \quad \operatorname{sn}_k \frac{\eta_0}{2} = \sqrt{\frac{|1 - \Omega_d^0|}{\Omega_d^0}}, \quad H_0 = \frac{c}{2R_m} \frac{\operatorname{cs}_k(\eta_0/2)}{\operatorname{sn}_k^3(\eta_0/2)}. \quad (83)$$

Обратные замены

$$\eta = 2 \operatorname{arcsn}_k \sqrt{\frac{|1 - \Omega_d^0|}{\Omega_d^0}} a, \quad R_m = \frac{c}{2H_0} \frac{\Omega_d^0}{|1 - \Omega_d^0|^{3/2}}. \quad (84)$$

На Рис. 1 воспроизведены зависимости R , H , ρ_d и Ω_d от времени в обезразмеренном виде.

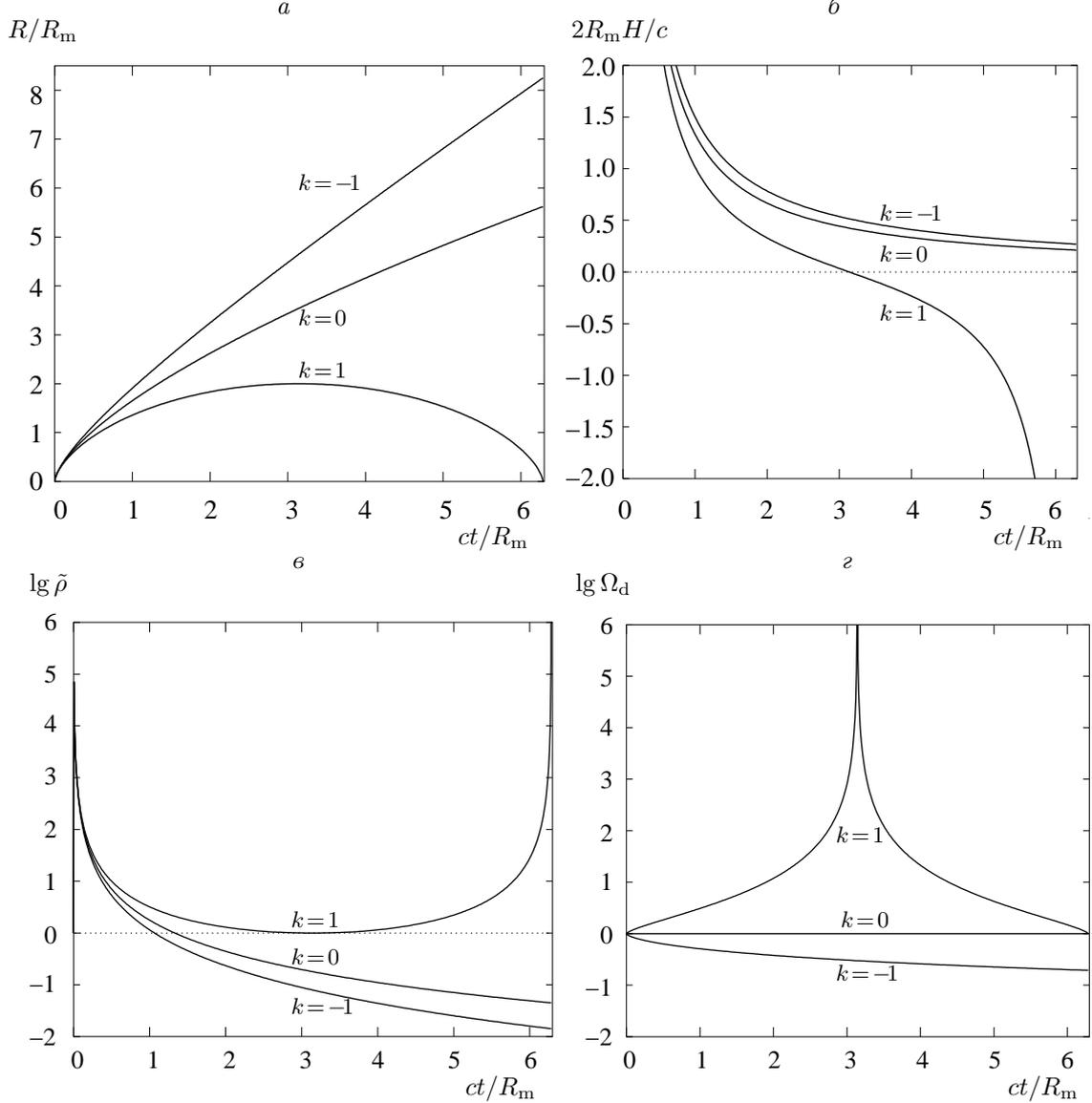


Рис. 1: Эволюция радиуса кривизны R (а), функции H (б), плотности ρ_d (в) и отношения Ω_d (з) для моделей пылевидного вещества.

2. *Ультрарелятивистское вещество.* Поскольку пространство Вселенной расширяется, то раньше плотность материи была значительно выше, чем сейчас. Кроме того, на ранних стадиях расширения вещество было горячим. Поэтому имеет особый смысл рассмотреть ультрарелятивистский предел, то есть эволюцию при $\rho_d = \rho_\Lambda = 0$ и $P_m = \rho_m c^2/3$. Такое же уравнение состояния, как отмечалось выше, справедливо и для излучения (поэтому в этом пункте пишем индекс r). При таком уравнении состояния, как следует из второго соотношения (55), константой движения остается

$$W = 4\pi\rho_r R^4, \quad (85)$$

а аналог уравнения движения (3), вытекающий из уравнения Эйнштейна (33), принимает вид

$$\ddot{R} = -\frac{2GW}{3R^3}. \quad (86)$$

Это уравнение допускает интеграл, который получается так же, как выводилось аналогичное соотношение (4). Конечно, указанный интеграл совпадает с уравнением (34), в котором надо сделать замены, выраженные равенствами (85) и $\Lambda = 0$:

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{GW}{3R^2} - k\frac{c^2}{2}. \quad (87)$$

Разрешая выведенное соотношение относительно производной и интегрируя, получим Табл. 3 и 4, аналогичные Табл. 1 и 2.

Таблица 3: Эволюция радиуса кривизны при ультрарелятивистском веществе.

k	Время t	Радиус кривизны R	Скорость \dot{R}
1	$\frac{2R_m}{c}(1 - \cos \eta)$	$2R_m \sin \eta$	$c \operatorname{ctg} \eta$
0	$\frac{2R_m}{c} \frac{\eta^2}{2}$	$2R_m \eta = (4R_m c t)^{1/2}$	$\frac{c}{\eta}$
-1	$\frac{2R_m}{c}(\operatorname{ch} \eta - 1)$	$2R_m \operatorname{sh} \eta$	$c \operatorname{cth} \eta$

Таблица 4: Эволюция плотности и функции Хаббла при ультрарелятивистском веществе.

k	H	ρ_r	$\Omega_r = \rho_r/\rho_c$
1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\cos \eta}{\sin^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\sin^4 \eta}$	$\frac{1}{\cos^2 \eta}$
0	$\frac{c}{2R_m} \frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{2t}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\eta^4}$	1
-1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{sh}^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^4 \eta}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta}$

В Табл. 3 и 4 введены обозначения, близкие к использованным в Табл. 1 и 2, хотя величина R_m (в закрытой модели это полуамплитуда радиуса кривизны) определяется по-другому:

$$R_m = \sqrt{\frac{GW}{6E}}. \quad (88)$$

Для ультрарелятивистского случая, когда $\Omega_d = \Omega_\Lambda = 0$, отношение Ω_r приведено в последнем столбце Табл. 4.

И для этого случая можно получить решение из общих формул. Подставив в (74) $\Omega_d^0 = \Omega_\Lambda^0 = 0$, найдем

$$H_0 t = \frac{\sqrt{\Omega_r^0 + (1 - \Omega_r^0)a^2} - \sqrt{\Omega_r^0}}{1 - \Omega_r^0} = \frac{a^2}{\sqrt{\Omega_r^0 + (1 - \Omega_r^0)a^2} + \sqrt{\Omega_r^0}}, \quad H_0 t_0 = \frac{1}{1 + \sqrt{\Omega_r^0}}. \quad (89)$$

Связь между двумя вариантами решений устанавливается соотношениями, следующими из Табл. 3 и 4:

$$a = \frac{\operatorname{sn}_k(\eta)}{\operatorname{sn}_k(\eta_0)}, \quad \operatorname{cs}_k \eta_0 = \frac{1}{\sqrt{\Omega_r^0}}, \quad \operatorname{sn}_k \eta_0 = \sqrt{\frac{|1 - \Omega_r^0|}{\Omega_r^0}}, \quad H_0 = \frac{c}{2R_m} \frac{\operatorname{cs}_k(\eta_0)}{\operatorname{sn}_k^2(\eta_0)} = \frac{c}{2R_m} \frac{\sqrt{\Omega_r^0}}{|1 - \Omega_r^0|}. \quad (90)$$

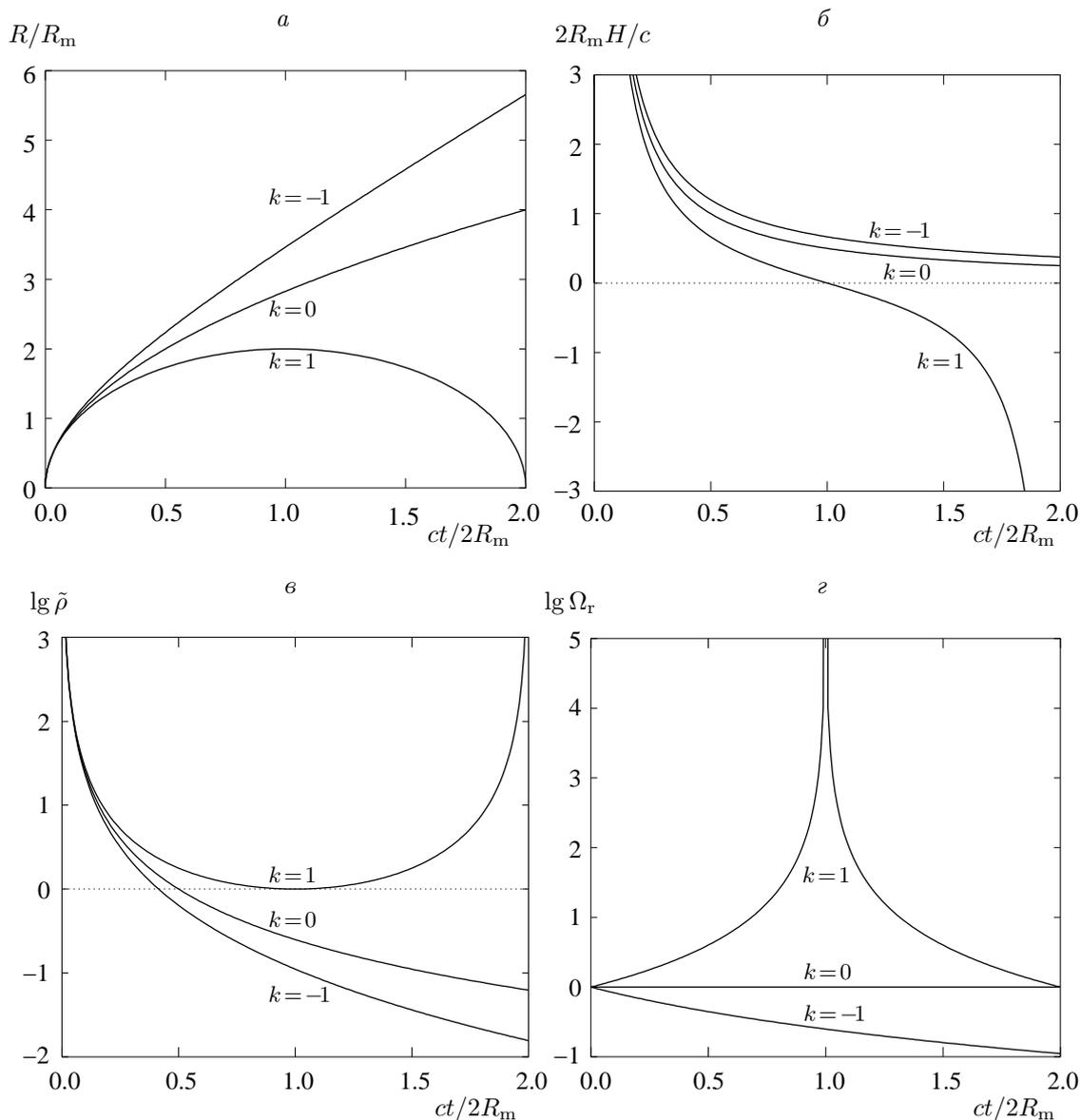


Рис. 2: Эволюция радиуса кривизны R (а), функции H (б), плотности ρ_r (в) и отношения Ω_r (г) для моделей с излучением.

3. Сравнение решений для пылевидного вещества и для излучения. На рис. 1 приведены графики зависимостей радиуса кривизны (а), постоянной Хаббла (б), плотности (в) и отношения ее к критической (г) от времени t при трех типах моделей для пылевидного вещества. Все величины даны в относительных единицах, то есть приводятся $R(\eta)/R_m$, $2R_m H/c$ и логарифмы $\lg \tilde{\rho} = \lg[(8\pi G/3)(4R_m^2/c^2)\rho_d]$, $\lg \Omega_d$. Время измеряется в единицах R_m/c . Кривая зависимости R от t — это циклоида, которую описывают точки обода колеса при его качении по прямой.

На рис. 2 приведены те же величины, что и на рис. 1, но для ультрарелятивистского вещества, то есть соответственно отношения $R(\eta)/R_m$, $2R_m H/c$ и логарифмы $\lg \tilde{\rho} = \lg[(32\pi G/3)(4R_m^2/c^2)\rho_r]$, $\lg \Omega_r$ как функции времени t , измеряемого в единицах $2R_m/c$. Напомним, что значения R_m для моделей с пылевидным и релятивистским веществом различаются.

Качественно решения для ультрарелятивистского и пылевидного вещества ведут себя одинаково, однако в закрытых моделях параметр η изменяется в разных пределах. Различаются и масштабы изменения времени.

Отметим, что закрытые модели выделяются своим поведением. Согласно этим моделям при достижении максимума радиуса кривизны постоянная Хаббла и критическая плотность обращаются в нуль (H меняет знак), а параметр Ω в бесконечность. Кривые, относящиеся к открытым и плоским моделям, не являются периодическими и могут быть продолжены по времени сколь угодно далеко.

Следующие параграфы посвящены решениям уравнений, когда присутствует космологическое слагаемое.

§ 7. Первые модели с космологическим слагаемым

1. *Стационарная модель Эйнштейна.* Как говорилось во Введении, Эйнштейн искал стационарное решение своих уравнений при принятии космологического принципа. Для возможности такого решения он добавил к своим уравнениям космологическое слагаемое. Воспроизведем это решение.

Положим в уравнениях (33) и (34) для случая пылевидного вещества производные по времени равными нулю. Получится два алгебраических соотношения:

$$\ddot{R} = 0 = \left(-\frac{4\pi G}{3}\rho_d + \frac{\Lambda c^2}{3} \right) R^2 = 0, \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad \dot{R}^2 = 0 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_d + \rho_\Lambda) R^2 - kc^2 = 0. \quad (91)$$

Из этих соотношений следует, что для стационарного решения должно быть

$$\rho_d = 2\rho_\Lambda, \quad 8\pi G\rho_\Lambda R^2 = kc^2, \quad (92)$$

что возможно только при $k = 1$, то есть для замкнутого пространства, причем постоянный по времени радиус кривизны жестко связан с космологической постоянной:

$$R = R_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \Lambda = \frac{1}{R_0^2}. \quad (93)$$

2. *Неустойчивость решения.* Однако, такое стационарное решение, как показал Артур Эддингтон, оказалось неустойчивым. Действительно, предположим, что решение мало отличается от стационарного, то есть

$$R = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \delta, \quad \rho = 2\rho_\Lambda + \varepsilon. \quad (94)$$

Подставив эти переменные в уравнения и ограничившись поправками только первого порядка малости, найдем два уравнения, одно дифференциальное, другое алгебраическое:

$$\ddot{\delta} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Lambda}}, \quad 0 = \frac{8\pi G}{3}(3\rho_\Lambda + \varepsilon)(R_0^2 + 2R_0\delta) - c^2 = 0, \quad \varepsilon R_0^2 + 6\rho_\Lambda R_0\delta = 0, \quad \varepsilon = -6\rho_\Lambda \sqrt{\Lambda}\delta. \quad (95)$$

Отсюда находится уравнение для отклонения радиуса кривизны от постоянного значения:

$$\ddot{\delta} = \Lambda c^2 \delta. \quad (96)$$

Только при исключительном соотношении между начальными значениями самого отклонения и скорости его изменения $(\sqrt{\Lambda}c\delta + \dot{\delta})_{t=0} = 0$ возможно экспоненциально убывающее решение. Во всех остальных случаях малейшее начальное отклонение приведет к экспоненциальному росту отличия радиуса кривизны от постоянного значения. Даже если оно остается малым по величине, все равно стационарность решения сохранить невозможно. Поэтому Эйнштейн сначала усомнился в правильности введения космологического слагаемого, а затем полностью отказался от него.

3. *Метрики де Ситтера.* Другие космологические модели, основанные на уравнениях Эйнштейна, построил голландский астроном Виллем де Ситтер (W. de Sitter, 1872–1934) в 1917 году, то есть почти сразу после опубликования уравнений ОТО. Он искал метрики, которые совместимы с уравнениями при отсутствии материи, то есть для пустого пространства, но с космологическим слагаемым.

Де Ситтер рассматривал вселенную с метрикой пространства-времени, отличающейся от метрики Фридмана—Робертсона—Уокера тем, что при квадрате дифференциала конформного времени приписывается дополнительный множитель, зависящий от конформного же расстояния:

$$ds^2 = R^2(\eta) (cs_k^2 \chi d\eta^2 - d\chi^2 - sn_k^2 \chi d\omega^2), \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (97)$$

В частности, подробно рассматривались метрики с постоянным радиусом кривизны $R(\eta) = R_0$:

$$ds_0^2 = R_0^2 (cs_k^2 \chi d\eta^2 - d\chi^2 - sn_k^2 \chi d\omega^2), \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (98)$$

Затем он пробовал различные преобразования координат и времени, находил изменяющуюся при этом метрику и выяснял свойства симметрии пространства с принятой метрикой. Воспроизведем некоторые его преобразования, не изменяя сферических координат и тем самым метрику на единичной сфере $d\omega^2$.

Сначала при постоянном радиусе кривизны вернемся к размерной пространственной координате:

$$r = R_0 sn_k \chi, \quad sn_k \chi = \frac{r}{R_0}, \quad \chi = \text{arsn}_k \frac{r}{R_0}, \quad d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} \frac{dr}{R_0}, \quad cs_k^2 \chi = 1 - k sn_k^2 \chi = 1 - k \frac{r^2}{R_0^2}. \quad (99)$$

Метрика (98) перейдет в

$$ds_0^2 = (R_0^2 - kr^2)d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} - r^2d\omega^2. \quad (100)$$

Затем перейдем к размерному времени:

$$R_0d\eta = cdt, \quad ds_0^2 = c^2 \left(1 - k \frac{r^2}{R_0^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} - r^2d\omega^2. \quad (101)$$

Наконец, введем экспоненциальный временной множитель в расстояние и сместим отсчет времени, положив при этом $R_0 = \frac{c}{H}$ и $S = 1 - k \frac{r^2}{R_0^2} = 1 - k \frac{H^2}{c^2} r^2$:

$$r = r_* e^{Ht_*}, \quad t_* = t + \frac{1}{2H} \ln S, \quad r_* = r e^{-Ht_*} = \frac{r e^{-Ht}}{\sqrt{S}}. \quad (102)$$

Дифференциал r находится сразу:

$$dr = dr_* e^{Ht_*} + r_* e^{Ht_*} H dt_* = e^{Ht_*} dr_* + H r dt_*, \quad (103)$$

а дифференциал времени через него:

$$dt = dt_* + k \frac{H}{c^2} \frac{r dr}{S} = dt_* + k \frac{H}{c^2} \frac{r}{S} (e^{Ht_*} dr_* + H r dt_*) = dt_* \left(1 + k \frac{H^2}{c^2} \frac{r^2}{S}\right) + k \frac{H}{c^2} \frac{r_*}{S} e^{2Ht_*} dr_* = \frac{1}{S} \left(dt_* + k \frac{H}{c^2} e^{Ht_*} r dr_*\right). \quad (104)$$

Подставляем найденные дифференциалы в метрику:

$$\begin{aligned} ds_0^2 &= \frac{c^2}{S} \left(dt_*^2 + k^2 \frac{H^2}{c^4} e^{2Ht_*} r^2 dr_*^2 + 2 dt_* k \frac{H}{c^2} e^{Ht_*} r dr_* \right) - \frac{1}{S} \left(e^{2Ht_*} dr_*^2 + H^2 r^2 dt_*^2 + 2 e^{Ht_*} r dr_* dt_* \right) - r^2 d\omega^2 = \\ &= \frac{c^2}{S} dt_*^2 \left(1 - \frac{H^2}{c^2} r^2\right) + \frac{dr_*^2}{S} \left(k^2 \frac{H^2}{c^2} r^2 - 1\right) e^{2Ht_*} + 2 \frac{H}{S} (k-1) r dr_* dt_* e^{Ht_*} - r_*^2 e^{2Ht_*} d\omega^2. \end{aligned} \quad (105)$$

При $k = 1$ выражение упрощается:

$$ds_0^2 = c^2 dt_*^2 - e^{2Ht_*} (dr_*^2 + r_*^2 d\omega^2). \quad (106)$$

Именно в таком виде принимал метрику де Ситтера в своей первой работе.

4. *Уравнения с метрикой де Ситтера.* Можно вывести уравнения ОТО с метрикой (97).

В пространстве де Ситтера, как считается, никакой материи нет. Поэтому уравнения Эйнштейна записываются без плотности массы и давления, но с космологическим слагаемым. После преобразований получается три уравнения (штрихом отмечается производная по η):

$$3 \frac{(R')^2}{R^4 \text{cs}_k^2 \chi} + \frac{3k}{R^2} - \Lambda = 0, \quad 2 \frac{R''}{R^3 \text{cs}_k^2 \chi} - \frac{(R')^2}{R^4 \text{cs}_k^2 \chi} + \frac{3k}{R^2} - \Lambda = 0, \quad 2k \frac{R'}{R^3 \text{cs}_k^3 \chi} = 0. \quad (107)$$

Из последнего уравнения следует, что имеются две возможности: либо $R' = 0$, либо $k = 0$. В первом случае с необходимостью получается, что

$$R = R_0, \quad \Lambda = \frac{3k}{R_0^2}, \quad (108)$$

то есть радиус кривизны и кривизна пространства постоянны, а космологическая постоянная равна утроенной кривизне. Это и есть вселенная де Ситтера. Пространство может быть замкнутым, открытым или плоским, но в последнем случае $k = 0$ и $\Lambda = 0$.

Таким образом, уравнения при метрике (97) сводятся всего к одному соотношению (108), связывающему постоянный радиус кривизны пространства с космологической постоянной. При этом расстояние до объектов вселенной де Ситтера (вдоль луча) не изменяется со временем и просто связано с координатой: $l = R_0 \chi$. Ход времени зависит от координаты.

3. *Излучение в пространстве де Ситтера.* При постоянном радиусе кривизны сделаем замену $ct = R_0 \eta$. Тогда метрика (98) примет вид

$$ds_0^2 = \text{cs}_k^2 \chi c^2 dt^2 - R_0^2 (d\chi^2 + \text{sn}_k^2 \chi d\omega^2). \quad (109)$$

Возьмем луч с фиксированными полярными углами. Вдоль луча $d\omega = 0$. Движение фотона предполагает, что $ds_0 = 0$. Тогда (аналогично случаю метрики ФРУ) для расстояния вдоль луча

$$l = R_0 \chi, \quad c \text{cs}_k \chi dt = R_0 d\chi. \quad (110)$$

Связь времени с координатой χ определяется интегралом

$$\frac{ct}{R_0} = \xi = \int_0^\chi \frac{d\chi}{\text{cs}_k \chi} = \text{arsn}_{-k}(\text{tn}_k \chi) = 2 \text{artn}_{-k} \text{tn}_k(\chi/2) = \begin{cases} \text{arsh tg } \chi = 2 \text{arth tg}(\chi/2) & \text{при } k = 1, \\ \chi & \text{при } k = 0, \\ \text{arcsin th } \chi = 2 \text{arctg th}(\chi/2) & \text{при } k = -1, \end{cases} \quad (111)$$

а обратная связь

$$\chi = \text{artn}_k \text{sn}_{-k} \xi = 2 \text{artn}_k \text{tn}_{-k}(\xi/2) = \begin{cases} \text{arctg sh } \xi = 2 \text{arctg th}(\xi/2) & \text{при } k = 1, \\ \xi = ct/R_0 & \text{при } k = 0, \\ \text{arth sin } \xi = 2 \text{arth tg}(\xi/2) & \text{при } k = -1. \end{cases} \quad (112)$$

В случае замкнутой модели координата χ принимает только конечные значения: $\chi = 0$ при $t = 0$ и $\chi = \pi/2$ при $t = \infty$, расстояние тоже ограничено $0 \leq l \leq \pi R_0/2$. Напротив, в случае открытой модели время изменяется в конечных пределах от нуля при $\chi = 0$ до $\pi R_0/(2c)$ при $\chi = \infty$, а расстояние меняется до бесконечности. В плоской модели координата, а с ней и расстояние пропорциональны времени $l = R_0 \chi = ct$.

Скорость изменения расстояния выражается через производную от координаты из (112). Оба выражения зависимости координаты от времени дают одинаковый результат:

$$v = \dot{l} = R_0 \dot{\chi} = R_0 \frac{\text{cs}_{-k} \xi}{1 + k \text{sn}_{-k}^2 \xi} \frac{c}{R_0} = \frac{2R_0}{1 + k \text{th}_{-k}^2(\xi/2)} \frac{1}{\text{cs}_{-k}^2(\xi/2)} \frac{c}{R_0} = \frac{c}{\text{cs}_{-k}(\xi)} = c \text{cs}_k \chi = c \text{cs}_k \frac{l}{R_0}. \quad (113)$$

Скорость зависит от расстояния, но не из-за расширения пространства, а вследствие того, что от расстояния зависит ход времени. Из приведенной выкладки вытекает интересное соотношение между временем и координатой $\text{cs}_k \chi \text{cs}_{-k} \xi = 1$.

При закрытой модели скорость $v = c/\text{ch } \xi = c \cos \chi$ с ростом времени и координаты монотонно убывает от c при $t = 0$, $\chi = 0$, до нуля при $t \rightarrow \infty$, $\chi \rightarrow \pi/2$. При открытой модели скорость растет неограниченно при $t \rightarrow \pi R_0/2c$, $\chi \rightarrow \infty$. При $k = 0$ скорость постоянна и равна скорости света, так как $\text{cs}_0 \chi = 1$.

4. *Нестационарная плоская модель.* При $k = 0$ из первых двух уравнений следует, что

$$3 \frac{(R')^2}{R^4} - \Lambda = 0, \quad 2 \frac{R''}{R^3} - \frac{(R')^2}{R^4} - \Lambda = 0. \quad (114)$$

Исключив Λ , найдем

$$2 \frac{R''}{R^3} = 4 \frac{(R')^2}{R^4}, \quad \frac{R''}{R'} = 2 \frac{R'}{R}. \quad (115)$$

Решение этого уравнения

$$R(\eta) = \frac{1}{A\eta + B}, \quad R' = -\frac{A}{(A\eta + B)^2}, \quad R'' = \frac{2A^2}{(A\eta + B)^3}. \quad (116)$$

Постоянная A выражается через Λ :

$$3 \frac{(R')^2}{R^4} = 3A^2 = \Lambda, \quad A = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad Ac = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c = H_\Lambda. \quad (117)$$

Зависимость от времени находится из соотношения $R(\eta)d\eta = cdt$:

$$\frac{d\eta}{A\eta + B} = cdt, \quad \frac{1}{A} \ln[(A\eta + B)R_0] = c(t - t_0), \quad R_0(A\eta + B) = \frac{R_0}{R} = e^{Ac(t-t_0)} = e^{H_\Lambda(t-t_0)}, \quad R = R_0 e^{-H_\Lambda(t-t_0)}. \quad (118)$$

Получилось строго экспоненциально убывающее со временем решение. Такое решение возможно при $k = 0$ в пространстве без материи с метрикой ФРУ, что будет показано в следующем параграфе.

Пространство и модели де Ситтера служат базой для исследования свойств симметрии различных моделей, а также широко используются в современной теории струн и моделях с многомерными пространствами.

§ 8. Решения с космологическим слагаемым при метрике ФРУ

1. *История космологического слагаемого.* Это слагаемое первоначально было введено А. Эйнштейном для того, чтобы привести уравнения к виду, допускающему стационарные решения за счет компенсации тормозящего действия притяжения. При этом оно было помещено в левую часть его тензорного уравнения совершенно формально как средство противопоставить притяжению некоторое отталкивание. Потом, после получения решений Фридманом, последующего открытия расширения Вселенной и тем самым ее нестационарности, А. Эйнштейн

отказался от этого слагаемого, назвав его введение самой большой своей ошибкой. В разные периоды развития космологии космологическое слагаемое добавляли и отбрасывали, так что вопрос о нем оставался открытым.

Впервые космологическое слагаемое как проявление некоторой гравитирующей компоненты истолковал в конце шестидесятых годов прошлого века Э.Б. Глинер [6]. Он перенес это слагаемое из левой части уравнений Эйнштейна в правую и интерпретировал его как проявление какой-то сущности, назовем ее субстанцией, имеющей плотность и создающую давление. Э.Б. Глинер представил это слагаемое как пропорциональное тензору энергии-импульса:

$$\Lambda \{\delta_j^i\} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} = \frac{8\pi G}{c^4} \{T_j^i\} = \frac{8\pi G}{c^4} \begin{pmatrix} c^2 \rho_\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_\Lambda \end{pmatrix}. \quad (119)$$

Отсюда получаются выражение для плотности массы вакуума и уравнение состояния (36). Применение к космологии не производилось.

Можно получить решения космологических уравнений, не приписывая определенного значения параметру Λ , а пытаясь найти его из наблюдений. В последнее время наблюдения с определенностью указывают на то, что эта постоянная отлична от 0. К этому мы еще вернемся.

Прежде чем находить решения уравнений с космологическим слагаемым, обсудим, какой физический смысл можно приписать этому слагаемому.

2. *Природа космологического слагаемого.* Возникает вопрос о физической сущности введенной субстанции. Первоначально считалось, что раз это не вещество и не излучение, то наверное, это вакуум, а от вакуума не следует требовать заранее какого-то определенного уравнения состояния, так что приходится принять выраженное равенством (36). Отрицательность давления и означает, что эта субстанция вызывает отталкивание.

Заметим, что физический вакуум — это не просто пустота. Например, в квантовой электродинамике, описывающей процессы взаимодействия излучения с электронами, вакуум — это живая среда, реально проявляющаяся в теории и эксперименте.

Квантовая электродинамика развивалась в 30–40 годы XX столетия и завершилась работами Ричарда Фейнмана (1918–1988). Он ввел в теорию так называемые фейнмановские диаграммы, которые не только давали схему процессов квантовой электродинамики, но и позволяли выписывать и вычислять матричные элементы, через которые выражаются сечения и вероятности процессов, значительно проще, чем это делалось до этого. Более сложные процессы вообще оказалось возможным описать количественно только после создания диаграммной техники. Рассмотрим некоторые процессы второго порядка по взаимодействию.

Например, комптоновскому рассеянию, то есть рассеянию фотона электроном, отвечают две диаграммы Фейнмана, представленные на Рис. 3. Электрон изображается сплошной линией, а фотон волнистой. Время течет снизу вверх. Взаимодействие происходит в точках, где встречаются электронные и фотонные линии. Диаграммы различаются порядком поглощения и излучения фотонов.

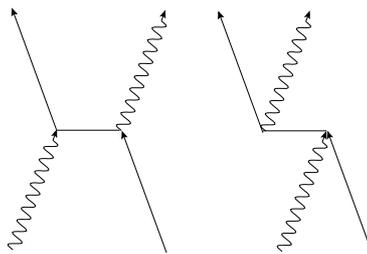


Рис. 3: Диаграммы комптоновского рассеяния.

Наряду с частицами, реально участвующими во взаимодействии, то есть имевшимися до взаимодействия и преобразовавшимися или образовавшимися вновь, которые изображаются входящими или исходящими линиями, на диаграммах присутствуют внутренние линии. Эти линии отвечают частицам, которые появляются в ходе процесса, но потом преобразуются в другие. Поэтому они называются виртуальными. От виртуальных частиц не надо требовать всех физических свойств реальных частиц. Например, для виртуальных частиц необязательно выполнение релятивистского соотношения между энергией и импульсом. Виртуальный электрон вообще теряет свою природу, то есть с равным успехом может считаться как электроном, так и позитроном. Позитрон, как и электрон, изображается сплошной линией, но направленной обратно по времени.

Среди диаграмм второго порядка имеется три, описывающие процессы, осуществление которых не вызывает никаких заметных изменений у частиц, участвующих в этих процессах. Диаграммы таких процессов приведены на рис. 4.

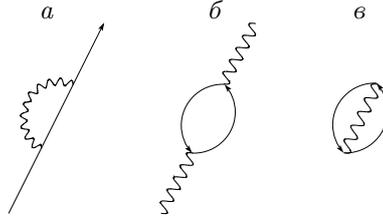


Рис. 4: Диаграммы собственной энергии электрона (а) и фотона (б) и диаграмма спонтанной поляризации вакуума (в)

Диаграмма рис. 4а соответствует так называемой собственной энергии электрона. Электрон испускает фотон, а затем его же поглощает. В классической электродинамике похожий процесс называется самодействием заряда. Движущийся с ускорением заряд порождает электромагнитное поле, которое в свою очередь воздействует на породивший его заряд. Классическая электродинамика описывает такие процессы не вполне корректно, только в случае слабого воздействия поля нерелятивистского заряда удается объяснить затухание его излучения и расширение спектральной линии около собственной частоты осциллятора. Изображенную на рис. 4б диаграмму можно логично приписать собственной энергии фотона. Оба процесса виртуальные. Еще одна диаграмма, а именно, 4а, повернутая на 180° , изображает собственную энергию позитрона, но она по смыслу не отличается от электронной.

Согласно диаграмме рис. 4в вообще никаких частиц нет ни в начале, ни в конце процесса, процесс чисто виртуальный. Фотон рождает виртуальную пару электрон-позитрон, которая аннигилирует и превращается в фотон, который ее и породил. Временная последовательность описанных событий несущественна, так как процесс виртуальный. Он называется поляризацией вакуума. Впрочем, и диаграмма на рис. 4б часто связывается с поляризацией вакуума, так как в обоих случаях в вакууме образуются виртуальные пары. Уместно назвать процессы, диаграммы которых помещены на рис. 4б и 4в, соответственно фотонной и спонтанной поляризацией вакуума.

Все три процесса оставляют состояние системы неизменным, поэтому они могут происходить сколь угодно часто, то есть все время. Вероятности их оказываются формально бесконечными. Эти процессы можно включить во все другие, поляризацию вакуума просто добавить к любому процессу, а собственные энергии вставить в любую электронную или фотонную линию. Появление при этом бесконечностей признается логическим несовершенством теории, частично объясняемым применением разложения по кратностям взаимодействия.

Виртуальные процессы могут превращаться в реальные, когда сильное внешнее поле оказывается способным разорвать какую-то замкнутую линию и ее концы добавляются к диаграмме. Например, разрыв замкнутой линии поляризации вакуума приводит к спонтанному рождению пар частица-античастица, что реально наблюдается.

Разработана процедура, при которой многие процессы оказываются не зависящими от наличия виртуальных бесконечностей. Однако, некоторые величины получают заметные добавки, причем с большой точностью совпадающие с теми, которые наблюдаются в экспериментах. Примерами являются так называемый лембовский сдвиг уровней атомов, в частности, атома водорода как наиболее изученного, а также аномальный магнитный момент электрона.

Таким образом, физический вакуум реально воздействует на процессы взаимодействия вещества и излучения. Вакуум, так же как и космологическое слагаемое, не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой. Однако попытки согласовать физические соображения с величиной космологической постоянной пока что к успеху не привели. В последнее время эту субстанцию называют темной энергией, что, конечно, нелепо, так как энергия это количественная характеристика субстанции, но так все говорят по аналогии с темным веществом (о котором речь впереди). Примем этот термин как общепринятый.

3. *Общее решение уравнения с космологическим слагаемым.* Пусть нет ни вещества, ни излучения, а присутствует только космологическое слагаемое. В отличие от изложенного в § 7 здесь примем метрику ФРУ. Тогда уравнение (33) предстанет в виде

$$\ddot{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} R \quad (120)$$

или

$$\ddot{R} = H_\Lambda^2 R, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c. \quad (121)$$

Второе уравнение теории Фрийдмана для рассматриваемого случая

$$\dot{R}^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2 = H_\Lambda^2 R^2 - kc^2 \quad (122)$$

всегда совместно с первым, так как Λ и, следовательно, H_Λ постоянны. Напомним, что плотность массы вакуума $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ тоже постоянна. Отметим, что начальный толчок не требуется, так как расширение вызывается не им, а постоянно действующим отталкиванием.

Можно, в принципе, взять любую линейную комбинацию двух независимых решений уравнения (121)

$$R(t) = R_+ e^{H_\Lambda t} + R_- e^{-H_\Lambda t}. \quad (123)$$

Коэффициенты R_\pm будем называть амплитудами экспонент.

Подставив в уравнение (122) решение (123), получим

$$H_\Lambda^2 (R_+^2 e^{2H_\Lambda t} + R_-^2 e^{-2H_\Lambda t} - 2R_+ R_-) = H_\Lambda^2 (R_+^2 e^{2H_\Lambda t} + R_-^2 e^{-2H_\Lambda t} + 2R_+ R_-) - kc^2 \quad (124)$$

или после сокращений

$$4R_+ R_- H_\Lambda^2 = kc^2. \quad (125)$$

Таким образом, амплитуды экспонент связаны и зависят от параметра k . Для того, чтобы происходило расширение при $t > 0$, необходимо, чтобы было $R_+ > 0$.

4. *Классификация моделей.* Если $k = -1$, то амплитуды экспонент имеют противоположные знаки. Положим

$$R_+ = R_* e^{H_\Lambda t_*}, \quad R_- = -R_* e^{-H_\Lambda t_*}, \quad (126)$$

то есть

$$R_* = \sqrt{-R_+ R_-} > 0, \quad t_* = \frac{1}{2H_\Lambda} \ln \left(-\frac{R_+}{R_-} \right). \quad (127)$$

Тогда

$$R = 2R_* \operatorname{sh}(H_\Lambda(t + t_*)) \quad (128)$$

и при $t = -t_*$ радиус кривизны обращается в нуль. Этот случай соответствует модели с отрицательной кривизной и положительной полной энергией, что кажется естественным, так как расширение происходит неограниченно.

Напротив, при $k = 1$ обе амплитуды положительны и можно положить

$$R_+ = R_* e^{H_\Lambda t_*}, \quad R_- = R_* e^{-H_\Lambda t_*}, \quad (129)$$

то есть

$$R_* = \sqrt{R_+ R_-}, \quad t_* = \frac{1}{2H_\Lambda} \ln \frac{R_+}{R_-}. \quad (130)$$

Тогда

$$R = 2R_* \operatorname{ch}(H_\Lambda(t + t_*)). \quad (131)$$

Так как $k = 1$, то модель отвечает постоянной положительной кривизне пространства и отрицательной полной энергии. Несмотря на это происходит неограниченное экспоненциальное расширение. Радиус кривизны имеет не наибольшее, а наименьшее значение, которое принимается при $t = -t_*$.

В обоих случаях без ограничения общности можно принять $t_* = 0$.

При $k = 0$ одна из амплитуд должна быть равна нулю. Если рассматривать только растущее решение, то $R_- = 0$.

Рассмотрим три случая подробнее.

5. *Расширение от нуля.* В этом пункте обратимся к решению в случае разных знаков амплитуд, когда решение обращается в нуль при $t = 0$, то есть

$$R(t) = 2R_* \operatorname{sh}(H_\Lambda t). \quad (132)$$

Здесь

$$R_- = -R_+ = R_* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{2H_\Lambda}. \quad (133)$$

Функция Хаббла для такой модели в произвольный момент времени

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{2R_* H_\Lambda \operatorname{ch}(H_\Lambda t)}{2R_* \operatorname{sh}(H_\Lambda t)} = \frac{H_\Lambda}{\operatorname{th}(H_\Lambda t)}, \quad (134)$$

радиус кривизны и постоянная Хаббла в некоторую фиксированную эпоху $t_0 > 0$, которую в случае обычных моделей отождествляют с современностью,

$$R_0 = 2R_* \operatorname{sh}(H_\Lambda t_0), \quad H_0 = \frac{H_\Lambda}{\operatorname{th}(H_\Lambda t_0)}, \quad (135)$$

а масштабный множитель

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{\operatorname{sh}(H_\Lambda t)}{\operatorname{sh}(H_\Lambda t_0)}. \quad (136)$$

На достаточно больших временах, точнее при $H_\Lambda t \gg 1$,

$$R(t) \sim R_* e^{H_\Lambda t}, \quad a(t) \sim \frac{e^{H_\Lambda t}}{2 \operatorname{sh}(H_\Lambda t_0)}, \quad H \sim H_\Lambda. \quad (137)$$

6. *Решение без сингулярности.* Теперь рассмотрим случай, когда радиус кривизны в нуль не обращается ни в какой момент. Для этого надо, чтобы R_+ и R_- были оба положительны.

Без ограничения общности можно считать $t_* = 0$, то есть принять, что коэффициенты при экспонентах равны:

$$R_+ = R_- = R_* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{2H_\Lambda}, \quad (138)$$

так что

$$R = 2R_* \operatorname{ch}(H_\Lambda t), \quad H = H_\Lambda \operatorname{th}(H_\Lambda t), \quad a(t) = \frac{\operatorname{ch}(H_\Lambda t)}{\operatorname{ch}(H_\Lambda t_0)}. \quad (139)$$

Если рассматривать только положительное время, то наименьшее значение принимается в начальный момент.

Асимптотики $R(\eta)$ и H в этом случае точно те же, что и (137), асимптотика масштабного множителя отличается знаменателем.

Конформное время с условием $\eta = 0$ при $t = 0$ вводится равенством

$$\eta = c \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \frac{c}{R_* H_\Lambda} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{H_\Lambda t}{2} \right). \quad (140)$$

7. *Расширение в плоском случае.* Наконец, рассмотрим случай $k = 0$, тогда зависимость радиуса кривизны от времени ($R_- = 0$, $R_+ = R_*$) задается формулой

$$R(t) = R_* e^{H_\Lambda t}, \quad (141)$$

при которой он мог бы обратиться в нуль при $t = -\infty$, то есть в бесконечном прошлом. Соотношения, которые в предыдущих моделях были асимптотическими, здесь выполняются точно:

$$H = H_\Lambda, \quad R(t) = R_* e^{H_\Lambda t}, \quad R_0 = R_* e^{H_\Lambda t_0}, \quad a(t) = e^{-H_\Lambda(t_0-t)}. \quad (142)$$

И в этой модели имеет смысл конформное время

$$\eta = c \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \frac{c}{R_* H_\Lambda} (1 - e^{-H_\Lambda t}), \quad t = \frac{1}{H_\Lambda} \ln \frac{1}{1 - l_{H_\Lambda} \eta / R_*}. \quad (143)$$

6. *Сводка решений.* В Табл. 5 приведены основные характеристики этих решений. На больших временах различие между решениями с разными k стирается, асимптотики у всех решений одинаковы.

Таблица 5: Сводка решений с космологическим слагаемым.

k	$t(\eta)$	R	\dot{R}	H	Ω_Λ
1	$\frac{2}{H_\Lambda} \operatorname{arth} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{R_* H_\Lambda}{c} \eta \right) \right)$	$2R_* \operatorname{ch}(H_\Lambda t)$	$2R_* H_\Lambda \operatorname{sh}(H_\Lambda t)$	$H_\Lambda \operatorname{th}(H_\Lambda t)$	$\operatorname{cth}^2(H_\Lambda t)$
0	$\frac{1}{H_\Lambda} \ln \frac{1}{1 - \frac{c}{H_\Lambda R_*} \eta}$	$R_* e^{H_\Lambda t}$	$R_* H_\Lambda e^{H_\Lambda t}$	H_Λ	$\frac{\Lambda c^2}{3H_\Lambda^2} = 1$
-1	—	$2R_* \operatorname{sh}(H_\Lambda t)$	$2R_* H_\Lambda \operatorname{ch}(H_\Lambda t)$	$H_\Lambda \operatorname{cth}(H_\Lambda t)$	$\operatorname{th}^2(H_\Lambda t)$

Конечно, главную роль играет растущая экспонента. Как будет показано, в самый начальный период эволюции Вселенной происходило именно быстрое экспоненциальное расширение, называемое инфляцией. В далеком прошлом также началось ускоренное расширение, но экспоненциальный характер оно примет нескоро и с гораздо меньшим темпом.

Глава II. Излучение в космологии

§ 1. Распространение излучения

1. *Распространение излучения и горизонт.* В этом параграфе рассмотрим эффекты, связанные с распространением излучения в искривленном и расширяющемся пространстве. Траектория фотона в трехмерном пространстве определяется, как и в обычной теории относительности, тем, что вдоль нее $ds = 0$ (ds берем в виде (I.32)).

Пусть фотон в трехмерном пространстве летит по лучу, исходящему из точки, где находится наблюдатель. Поместим в нее начало координат. Луч задается тем, что вдоль него постоянны углы θ и ϕ , то есть $\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$, так что $d\theta = d\phi = 0$. Следовательно, для такого фотона $d\eta^2 = d\chi^2$ и уравнение его траектории в принятых координатах

$$\theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0, \quad \chi = \pm\eta + \text{const.} \quad (1)$$

Знак плюс отвечает фотону, удаляющемуся от начала координат, так как с ростом времени растет и координата, а минус — движущемуся к началу.

Если фотон доходит до наблюдателя, где $r = 0$, $\chi = 0$, в момент $t_0 = t(\eta_0)$, то распространение такого фотона определяется уравнением $\chi = \eta_0 - \eta$. Этот фотон был испущен в некоторый момент η_e , $0 \leq \eta_e \leq \eta_0$, в точке пространства, имеющей координату $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$. Рассуждение не изменится, если считать, что фотон пришел в указанную точку в указанное время в направлении на наблюдателя.

Мы видим прошлое Вселенной, тем более отдаленное по времени от настоящего момента, чем дальше смотрим. Ясно, что $\chi_e \leq \eta_0$ и расстояние от места возникновения фотона не может отстоять от точки наблюдения сколь угодно далеко. Фотон, излученный в начальный момент $\eta = \eta_e = 0$ в сторону наблюдателя, находящегося в точке $\chi = 0$, может дойти до него в момент $t_0 = t(\eta_0)$ только с поверхности сферы, точки которой имели (в тот же начальный момент) координату $\chi_0 = \eta_0$. Поскольку координата χ точек пространства при его расширении не изменяется, то в каждый момент времени $t(\eta_0)$ существует сфера, ограничивающая область пространства, из которой доходит излучение в данную точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от точек этой сферы. Эта сфера называется в космологии горизонтом. Вся остальная часть Вселенной наблюдениям принципиально недоступна. Вывод о существовании горизонта не зависит от вида метрики пространства. Видимая в данный момент часть пространства всегда имеет конечный объем (см. подробнее ниже). Так как параметр η_0 с течением времени увеличивается, то горизонт расширяется.

2. *Движение фотона от начала координат.* Для фотона, излученного из точки с координатой $\chi = 0$ вдоль луча, который исходит из этой точки, имеем $\chi = \eta - \eta_e$, где опять $t_e = t(\eta_e)$ — момент испускания. Длина пути, пройденного фотоном к моменту $t = t(\eta)$ (тогда он находится в точке с координатой χ):

$$l_{\text{ph}}(t_e, t) = \int_0^\chi R(\chi + \eta_e) d\chi = \int_{\eta_e}^\eta R(\eta) d\eta = c \int_{t_e}^t dt = c[t(\eta) - t(\eta_e)] = c(t - t_e), \quad (2)$$

непрерывно возрастает. Расстояние же от места фотона в момент $t(\eta)$ до начала координат

$$l(\eta) = R(\eta)\chi = R(\eta)(\eta - \eta_e) \quad (3)$$

монотонно растет только для открытых пространств. Радиус кривизны замкнутого пространства после $\eta = \pi$ убывает, и с некоторого момента фотон начинает приближаться к месту своего возникновения, увлекаемый общим сжатием пространства.

Проследим изменение со временем радиуса сферы, на которой располагается в момент $t(\eta)$ рассматриваемый фотон. Этот радиус равен $r_{\text{ph}}(\eta) = R(\eta)|\text{sn}_k(\eta - \eta_e)|$. При $k = -1$ и $k = 0$ с ростом времени η радиус $r_{\text{ph}}(\eta)$ увеличивается неограниченно. При $k = 1$, то есть в закрытой модели, поведение этого радиуса из-за немонотонного изменения радиуса кривизны и координаты r более сложно. Действительно, в закрытой модели пылевидного вещества

$$r_{\text{ph}}(\eta) = R_m(1 - \cos \eta)|\sin(\eta - \eta_e)|. \quad (4)$$

Здесь величина η ограничена снизу моментом испускания фотона $\eta \geq \eta_e$, а сверху значением 2π , при котором обращается в 0 множитель $1 - \cos \eta$, то есть радиус кривизны. Поведение последнего множителя существенно зависит от начального значения η_e . Если $\eta_e \leq \pi$, то при изменении η от η_e до $(2/3)(\eta_e + \pi)$ с ней растет и радиус $r_{\text{ph}}(\eta)$ от 0 до своего максимального значения $r_{1 \text{ max}} = R_m[1 - \cos(2(\eta_e + \pi)/3)] \sin(2\pi/3 - \eta_e/3)$. При дальнейшем росте η этот радиус убывает и при $\eta = \eta_e + \pi$ обращается в 0. Затем фотон переходит с направления $\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$ на противоположное направление $\theta = \pi - \theta_0$, $\phi = \phi_0 \pm \pi$. На этом направлении параметр χ изменяется от π до η_e по закону $\chi = 2\pi + \eta_e - \eta$: фотон приближается к точке, из которой вышел. При $\eta_e + \pi \leq \eta \leq 2(\eta_e + 2\pi)/3$ радиус $r_{\text{ph}}(\eta)$ опять растет до максимума $r_{2 \text{ max}} = R_m[1 - \cos(2(\eta_e + 2\pi)/3)] \sin(\pi/3 + \eta_e/3)$ и обращается в 0 при

$\eta = 2\pi$. Значения $r_{\text{ph}}(\eta)$ для фотона, вышедшего из начала в момент $\eta_e + \pi \geq \pi$, и для фотона, стартовавшего оттуда же в момент $\eta_e \leq \pi$, при одних и тех же $\eta \geq \eta_e + \pi$ одинаковы, хотя $\sin(\eta - \eta_e)$ и $\sin(\eta - \pi - \eta_e)$ имеют противоположные знаки.

Если опять для наглядности трехмерное пространство моделировать двумерной поверхностью в трехмерном пространстве, формально полагая координату $z = 0$, то для пространства с отрицательной энергией вместо уравнения гиперсферы (I.17) получается уравнение трехмерной сферы $u = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а в случае положительной энергии соответствующее уравнение будет $u = \sqrt{x^2 + y^2 + R^2}$, но при неопределенной метрике, когда квадраты расстояний по оси u берутся с минусом в согласии с формулами (I.24). Делаются обычные для полярной системы координат подстановки $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r = R \operatorname{sn}_k(\chi)$, после чего метрика таких пространств принимает вид

$$dl^2 = R^2[d\chi^2 + \operatorname{sn}_k^2(\chi)d\varphi^2]. \quad (5)$$

По сравнению с точной эта метрика игнорирует угол θ (формально $\theta = \pi/2$). Таким образом, в замкнутой космологической модели пространство изображается сферой, в открытой — верхней частью двуполостного гиперболоида, а в плоской — их общим пределом при $R \rightarrow \infty$, то есть плоскостью $u = R$ в трехмерном пространстве. Начало координат во всех трех случаях находится в точке $x = y = 0$, $u = R$. Путь фотона, вышедшего из начала, изображается кривой на поверхности при постоянном угле φ . На сфере это большой круг, выходящий из полюса (меридиан), на гиперболоиде — ветвь гиперболы, проходящая через вершину параболоида и лежащая в той же плоскости, что и ось u . Вдоль указанной ветви гиперболы $r = R \operatorname{sh} \chi$, $u = R \operatorname{ch} \chi$, $\varphi = \varphi_0$, $l = R\chi < r$. В плоской модели путь фотона — луч на плоскости $u = R$.

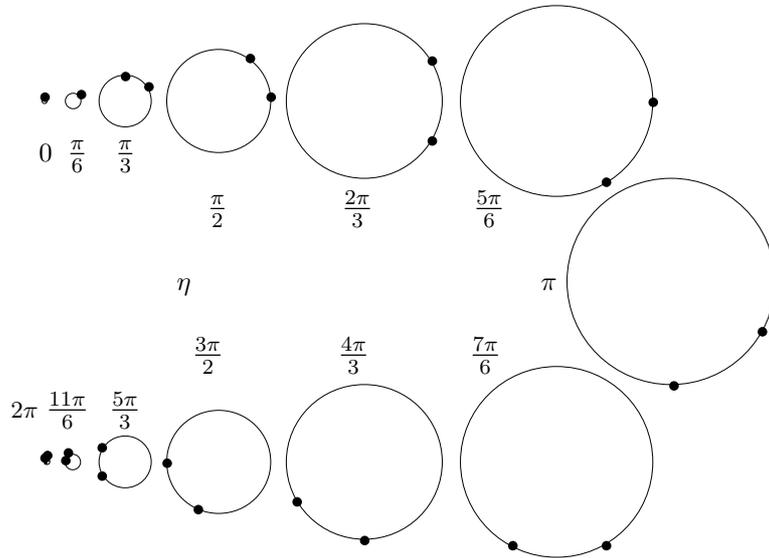


Рис. 5: Последовательные положения фотонов, вышедших из точки $\chi_e = 0$ в моменты $\eta_e = 0$ и $\pi/3$, в замкнутой модели.

Пусть фотоны, вышедшие одновременно из начала координат реального пространства в разных направлениях, дошли по своим траекториям до некоторой сферы. Эта сфера моделируется окружностью в сечении модельной поверхности плоскостью, параллельной плоскости x, y . Расстояние их r до оси u соответствует радиусу указанной сферы, а длина дуги, пройденной фотонами — расстоянию их от начала координат. В случае модели с нулевой энергией все происходит на плоскости и $l(\eta) = R_m(\eta^3 - \eta_e^3)/6$, $l_{\text{ph}}(\eta) = R_{\text{ph}}(\eta) = R_m \eta^2(\eta - \eta_e)/2$.

На рис. 5 представлена схема движения фотонов в замкнутой модели с пылевидным веществом. Радиус сферы сначала растет до $\eta = \pi$, а потом уменьшается и обращается в нуль при $\eta = 2\pi$. Точка $\chi = 0$ совпадает с верхней точкой сферы. Изображено сечение сферы, содержащее траектории фотонов. Фотоны, вышедшие из начала $\chi = 0$, все время движутся от исходной точки, но с уменьшением радиуса кривизны само пространство тянет их к началу. Фотон, вышедший в начальный момент $\eta_e = 0$, на рисунке располагается в точках, дуги до которых от верхней точки равны фазам расширения η , так что $\chi = \eta$. Этот фотон указывает на положение горизонта, так как до наблюдателя в момент η_0 доходят фотоны, вышедшие из точки с координатой η_0 в его сторону в начальный момент. В момент $\eta_e = \pi$ наблюдателю становится доступно все пространство, а после этого момента он начинает видеть излучение, вышедшее в противоположную от него сторону. Вторым фотон, вышедший в момент $\eta = \pi/3$, все время отстает от первого на ту же фазу, но сначала отстает от него по расстоянию, а потом они вместе движутся к началу и сближаются, сливаясь в момент коллапса пространства.

На рис. 6а и 6б даны пройденные пути и расстояния от исходной точки до места, до которого дошли фотоны, вышедшие в разные моменты η_e из начала координат $\chi_e = 0$, в замкнутой модели с пылевидным веществом. На рис. 7а и 7б приведены радиусы сфер, до которых дошли такие же фотоны в замкнутой и открытой моделях. Характер зависимости радиусов достигнутых фотонами сфер от координаты η совершенно различный. В замкнутой модели радиусы ограничены, причем при $\eta_e < \pi$ имеют два максимума, а при $\eta_e > \pi$ их значения совпадают с ветвью со вторым максимумом. В открытой же модели эти радиусы растут экспоненциально.

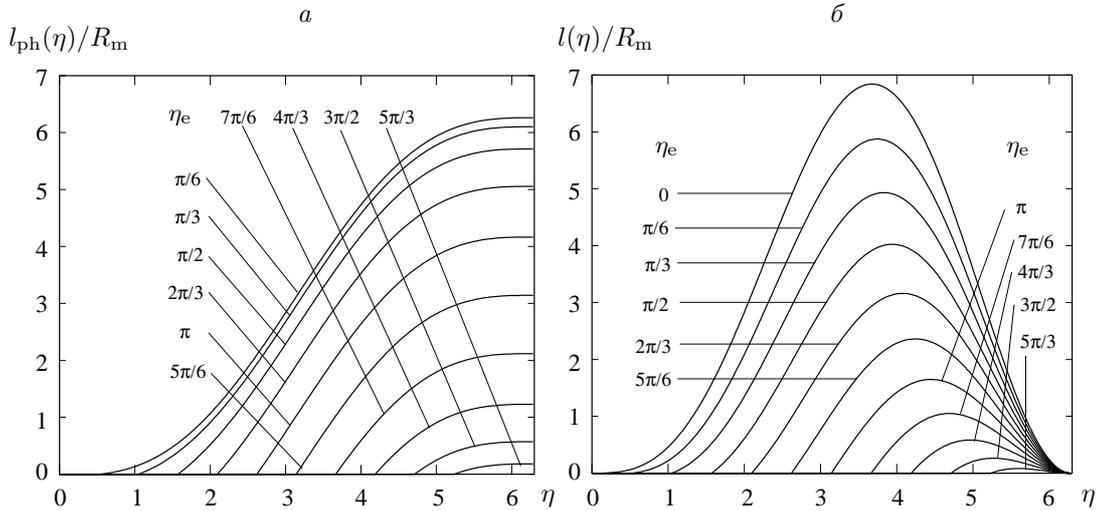


Рис. 6: Пути, пройденные фотонами, вышедшими из начала координат в разные моменты времени в замкнутой модели (а), и расстояния до этих фотонов от места их старта (б).

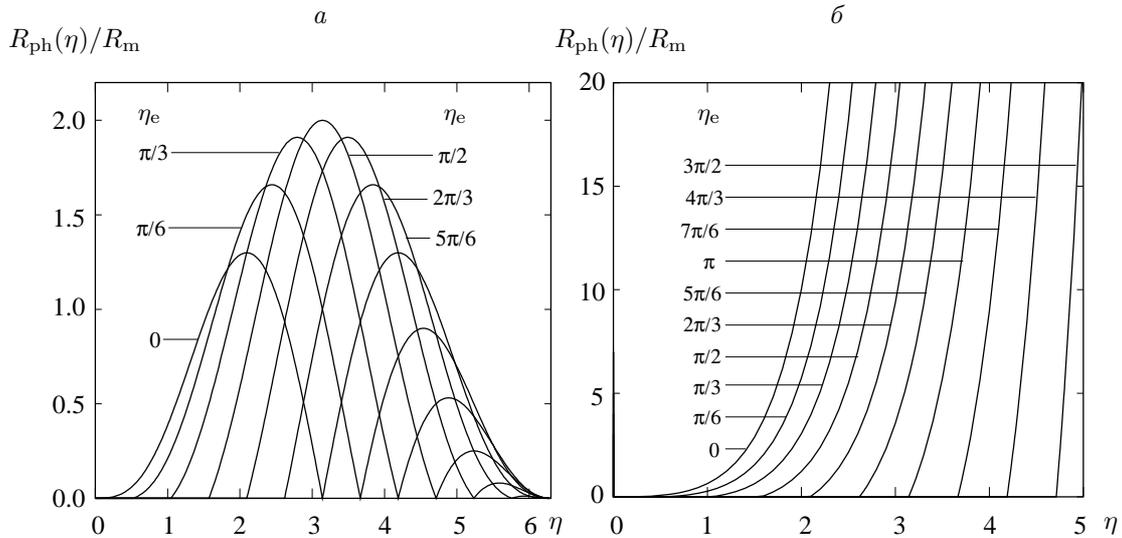


Рис. 7: Радиусы сфер, до которых дошли фотоны, вышедшие из начала координат в разные моменты времени в замкнутой (а) и открытой (б) моделях.

3. *Видимая часть Вселенной.* Множество точек, из которых излучение вышло в момент $t(\eta_e) = t(\eta_0 - \chi_e)$ и дошло до наблюдателя в начале координат в момент $t(\eta_0)$, образует во Вселенной в момент $t(\eta_e)$ сферу радиусом $R(\eta_e) \text{sn}_k(\chi_e)$. Ее площадь $4\pi R^2(\eta_0 - \chi_e) \text{sn}_k^2(\chi_e)$. Радиус сферы (а с ним и ее площадь) с удалением исходной точки от наблюдателя, то есть с ростом χ_e , сначала возрастает от нуля при $\chi_e = 0$ (то есть прямо от наблюдателя, здесь $\text{sn}_k(0) = 0$) до некоторого максимума, а затем снова спадает до 0 при $\chi_e = \eta_0$ (здесь, как в начальный момент $R(0) = 0$, это горизонт). При модели с пылевидным веществом $R(\eta) = 2R_m \text{sn}_k^2(\eta/2)$, так что (используем первое равенство в (III.11)) максимум радиуса сферы достигается при $\chi_e = \eta_0/3$ и равен $R(2\eta_0/3) \text{sn}_k(\eta_0/3)$. Теоретически наблюдатель может видеть всю историю развития Вселенной (хотя не все составляющее ее пространство).

В частности, горизонт определяется фотонами, испущенными в момент $\eta_e = 0$ и имеет координату $\chi_0 = \eta_0$. Расстояние до частицы, которая в момент $t_0 = t(\eta_0)$ находится на горизонте, равно $R(\eta_0)\eta_0$, радиус сферы,

на которой располагаются частицы горизонта, $R(\eta_0) \operatorname{sn}_k(\eta_0)$, а длина экватора есть $2\pi R(\eta_0) \operatorname{sn}_k(\eta_0)$. Площадь такой сферы уже приводилась выше, она равна $4\pi R^2(\eta_0) \operatorname{sn}_k^2(\eta_0)$. Наконец, объем доступного наблюдению пространства равен $V_0 = R^3(\eta_0)\pi|2\eta_0 - \operatorname{sn}_k(2\eta_0)|$, а масса заключенного в нем вещества $\rho_0 V_0$, где $\rho_0 = \rho(\eta_0)$.

Приведенные рассуждения справедливы, в частности, для всех моделей с пылевидным веществом. Замкнутая модель имеет особенности. Величина η в ней изменяется до 2π , а координата χ только до π . Поэтому при $\eta_0 > \pi$ координата χ_e будет пробегать значения в обратном порядке, что соответствует возврату лучей после прохождения ими наиболее удаленной точки сферы, ограничивающей вселенную. Соответственно и объем достигает своего предела при $\eta_0 = \pi$, а при дальнейшем увеличении координаты η_0 объем пространства будет учитываться повторно.

Хотя с точки зрения геометрии расширения можно увидеть все его этапы, на самом деле наблюдения электромагнитного излучения ранних этапов расширения Вселенной невозможны, ибо, как будет показано дальше, в начальный период вплоть до некоторого момента пространство было заполнено веществом, которое непрозрачно для излучения и экранирует все возможные источники, действовавшие до этого момента.

Таким образом, в настоящее время мы можем видеть только конечную часть Вселенной, причем это ограничение вызвано не несовершенством наших приборов, а принципиальной невозможностью наблюдать излучение от части Вселенной, находящейся за физическим горизонтом. Это заключение связано с расширением и не зависит от того, конечен или бесконечен объем трехмерного пространства, так что различие между замкнутыми и открытыми моделями в этом смысле сглаживается. Однако, как будет ясно из дальнейшего, посредством других агентов, отличных от прямого излучения, можно заглянуть и в более ранние эпохи.

§ 2. Красное смещение в космологии

Радиус кривизны, расстояние до горизонта и связанные с ними величины не могут быть непосредственно наблюдаемы. Поэтому особый интерес представляют величины, доступные наблюдениям.

Одна из таких величин — красное смещение. Фотон, излученный в момент $t_e = t(\eta_e)$ в точке с координатой χ_e , согласно (1) дойдет до наблюдателя в точке $\chi = 0$ в момент $t_0 = t(\eta_0)$, где

$$\eta_0 = \eta_e + \chi_e. \quad (6)$$

Свяжем с моментом t_e произвольный гребень излучаемой электромагнитной волны. Пусть следующий гребень покидает точку излучения в момент $t_e + \tau_e$ и приходит к наблюдателю в момент $t_0 + \tau_0$, то есть через периоды колебаний волны, соответствующие точкам излучения и наблюдения. Эти периоды на много порядков меньше характерного времени расширения пространства. Поэтому можно считать, что радиус кривизны за время, равное периоду волны, не меняется, так что $t_e + \tau_e = t(\eta_e + d\eta_e) = t_e + R(\eta_e)d\eta_e/c$ и $t_0 + \tau_0 = t(\eta_0 + d\eta_0) = t_0 + R(\eta_0)d\eta_0/c$. Так как точки излучения и наблюдения фиксированы, то $\chi_e = \text{const}$ и согласно (6) $d\eta_0 = d\eta_e$. Поэтому

$$\frac{\tau_0}{\tau_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(\eta_0)}{R(\eta_e)} = \frac{R_0}{R_e} = 1 + z. \quad (7)$$

Здесь наряду с соотношением для периодов написаны соотношения для частот (ν_e и ν_0) и длин волн (λ_e и λ_0) фотона, испущенного в точке с координатой χ_e и наблюдаемого в начале координат. Введена также величина $z \geq 0$, называемая красным смещением, так как в настоящее время происходит уменьшение частоты вследствие расширения пространства. Конечно, строго говоря, в красную сторону смещается только излучение с исходным спектром, имеющим частоты, большие, чем красный конец спектра, однако термин, исторически возникший по отношению к оптическому диапазону, применяется ко всему спектру.

§ 3. Космологические расстояния

1. *Различные типы расстояния.* Понятие расстояния, очевидное в случае евклидовой геометрии пространства, допускает неоднозначное толкование в искривленном и расширяющемся пространстве. Приведем несколько типов расстояний, различно определяемых [7].

1) Самое простое понятие — это расстояние между двумя точками на одном луче зрения ($\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$) с координатами χ_1 и $\chi_2 > \chi_1$ в один и тот же момент времени $t = t(\eta)$. Его естественно назвать метрическим расстоянием, так как его выражение непосредственно следует из метрики (I.32):

$$l = R(\eta) \int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi = R(\eta)(\chi_2 - \chi_1). \quad (8)$$

Если одна точка совмещена с наблюдателем, а координата другой χ , то метрическое расстояние точки от наблюдателя $l = R(\eta)\chi$. Это расстояние уже было использовано.

Метрическое расстояние — основное, но не единственное понятие расстояния. Остальные расстояния определяются так: находится выражение для некоторой зависящей от расстояния величины в условиях расширяющегося и искривленного пространства. Это выражение приравнивается к тому выражению, которое бы имела та же величина в стационарном плоском пространстве.

2) Расстояние по видимому размеру. Пусть к наблюдателю (в точку $r = 0$) приходят одновременно (в момент t_0) два фотона, испущенных в одно и то же время $t = t(\eta)$ из бесконечно близких точек с одинаковыми координатами χ . Расстояния до этих точек также одинаковы. Для обоих фотонов выполняется уравнение $\chi = \eta_0 - \eta$. Квадрат элемента линейного расстояния между точками согласно формуле (I.28) при $d\chi = 0$

$$dD_{\text{ад}}^2 = R^2(\eta) \text{sn}_k^2(\chi) d\omega^2. \quad (9)$$

При движении фотонов по лучу зрения их координаты θ и ϕ не меняются, так что не меняется видимое угловое расстояние между точками испускания $d\omega$. Например, это может быть угловой размер некоторого объекта. В обычном пространстве линейный размер объекта, находящегося на расстоянии $l_{\text{ад}}$, был бы $dD^2 = l_{\text{ад}}^2 d\omega^2$. Таким образом, расстояние по видимому размеру (или угловому диаметру) определяется так:

$$l_{\text{ад}} = R(\eta) \text{sn}_k(\chi) = R(\eta_0 - \chi) \text{sn}_k(\chi). \quad (10)$$

3) Расстояние по параллаксу. Пусть теперь начало координат помещено в точку, из которой исходят два фотона, принимаемые на концах другого объекта, также расположенных по отношению к точке испускания с одной координатой χ . Половина угла между направлениями указанных фотонов называется параллаксом исходной точки. Например, суточный параллакс — это угол, под которым из данной точки виден радиус Земли, а годичный — радиус земной орбиты. Оба радиуса перпендикулярны одной из линий наблюдения.

Фотоны будут зарегистрированы в момент $t_0 = t(\eta_0)$. Рассуждая так же, как и выше, найдем, что

$$l_{\text{пл}} = R(\eta_0) \text{sn}_k(\chi) = R_0 \text{sn}_k(\chi). \quad (11)$$

Это просто радиус сферы, на которую расходятся вышедшие из одной точки фотоны.

4) Расстояние по числу фотонов. Параллаксом определяется телесный угол, под которым фотоны испускаются точечным источником. Поэтому параллактическое расстояние определяет площадь сферы с центром в точке испускания, проходящей через точку наблюдения. Если число фотонов, испускаемых некоторым изотропным источником в единицу времени, равно N_{nb} , то количество фотонов, приходящих на единицу поверхности в единицу времени к наблюдателю, будет (время источника и время наблюдателя текут по-разному, так что и их единицы различны)

$$\tilde{N}_{\text{nb}} = \frac{N_{\text{nb}}}{4\pi l_{\text{пл}}^2 [R_0/R]} = \frac{N_{\text{nb}}}{4\pi l_{\text{nb}}^2}. \quad (12)$$

Последний множитель в знаменателе учитывает различие хода времени наблюдателя и источника dt_0/dt , что согласно соотношению (I.31) равно отношению соответствующих радиусов кривизны. Таким образом, расстояние по числу фотонов

$$l_{\text{nb}} = l_{\text{пл}} \sqrt{\frac{R_0}{R}}. \quad (13)$$

5) Расстояние по болометрической яркости. При распространении в расширяющемся пространстве все фотоны изменяют свои частоты: частоты принимаемых фотонов в $R(\eta_0)/R(\eta)$ раз меньше, чем у исходных. Поэтому регистрируемая в точке наблюдения яркость объекта, то есть часть его полной (болометрической) энергии, дошедшая до наблюдателя, окажется уменьшенной в $(dt_0/dt)^2$ раз, так что соответствующее расстояние

$$l_{\text{bb}} = l_{\text{nb}} \sqrt{\frac{R_0}{R}}. \quad (14)$$

2. *Свойства расстояний.* Таким образом, все масштабы в трехмерном пространстве в определенный момент времени пропорциональны радиусу кривизны в тот же момент или, что то же самое, масштабному множителю.

Каждое из введенных здесь расстояний изменяется в соответствии с величиной, по которой оно определяется. Поскольку эти величины изменяются по-разному, соответствующие расстояния также различаются. Легко заметить, что они связаны равенствами

$$l_{\text{bb}} = l_{\text{nb}} \sqrt{\frac{R_0}{R}} = l_{\text{пл}} \frac{R_0}{R} = l_{\text{ад}} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = R_0 \frac{R_0}{R} \text{sn}_k(\chi). \quad (15)$$

В этой цепочке равенств каждое следующее расстояние меньше предыдущего. Так как отношение $R_0/R = 1 + z$, то все введенные расстояния можно выразить через красное смещение.

Отдельного обсуждения требует расстояние по видимому размеру. Очевидно, что при $\chi = 0$ все расстояния равны нулю, так как это место наблюдателя. Однако, $l_{\text{ад}}$ обращается в нуль не только при $\chi = 0$ за счет второго множителя, но и при $\chi = \eta_0$ за счет первого, то есть и в месте наблюдения и на горизонте. Так как в промежуточных точках оно положительно, должен существовать максимум этого расстояния. Расстояние сначала увеличивается, а после максимума уменьшается. Парадоксальное на первый взгляд обстоятельство, следующее из приведенных рассуждений, означает, что угловой размер объектов одинакового линейного размера с удалением от наблюдателя сначала уменьшается, а затем начинает увеличиваться. Понять это можно, исходя из аналогии с передвижением дуги большого круга одного линейного размера вдоль меридиана на сфере. Действительно, пусть дуга размером $2R\phi_0$ (с небольшим ϕ_0) передвигается на сфере радиуса R . Тогда, как нетрудно вывести, она при расположении ее середины в точке $(R \sin \theta_0, 0, R \cos \theta_0)$ с полюса будет видна под углом

$$\Theta_{\text{ад}} = 2 \arcsin \frac{\sin \phi_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0 \cos^2 \phi_0}}. \quad (16)$$

При $\theta_0 = 0$ этот угол равен π , затем он уменьшается, при $\theta_0 = \pi/2$ достигает минимума $2\phi_0$, а потом снова растет до исходного значения. Причина здесь заключается в том, что к полюсам меридианы сближаются.

Смена первоначального уменьшения угла, под которым виден объект одного линейного размера, ростом в космологии объясняется тем, что отдаленным областям пространства соответствуют более ранние эпохи расширения Вселенной, когда ее масштабы были меньше, так что лучи, между которыми заключен угол, располагались ближе друг к другу.

Не все расстояния используются одинаково часто. Наиболее употребительны помещенные здесь под номерами 2), 3) и 5) (пятое называется также фотометрическим) наряду с метрическим расстоянием, определенным равенством (8).

3. *Расстояние до горизонта.* Так как координата космологического горизонта $\chi = \eta$, то есть она равна конформному времени, определяющему возраст Вселенной в фиксированную эпоху, то метрическое расстояние до него от наблюдателя с координатой $\chi = 0$ согласно (8) равно

$$l_{\text{Hor}} = R(\eta)\eta. \quad (17)$$

Найдем изменение этого расстояния, то есть скорость расширения горизонта. Она равна производной от (17) по времени:

$$\dot{l}_{\text{Hor}} = v_{\text{Hor}} = \dot{R}\eta + R(\eta)\dot{\eta} = HR\eta + R(\eta)\frac{d\eta}{dt} = HR\eta + c = Hl_{\text{Hor}} + c. \quad (18)$$

В частности, в случае плоской модели с пылевидным веществом

$$l_{\text{Hor}} = R_m \frac{\eta^2}{2} \eta = 3c \frac{R_m}{c} \frac{\eta^3}{6} = 3ct, \quad v_{\text{Hor}} = 3c, \quad (19)$$

то есть горизонт расширяется со скоростью, равной трем скоростям света.

Заметим, что согласно этой модели за год горизонт пройдет всего $3 \cdot 9.46 \cdot 10^{17}$ см = 0.919 парсек. Более близкие к реальности модели, как мы увидим, дают величину того же порядка. Расстояния в пределах Галактики — это десятки килопарсек, космологические же расстояния — это сотни мегапарсек и гигапарсеки. Таким образом, существенное изменение положения горизонта в настоящую эпоху происходит за миллиарды лет.

В случае произвольной плоской модели расстояние до горизонта

$$l_{\text{Hor}} = R_0 a \eta = \frac{R_0 H_0}{c} \frac{c}{H_0} \eta a = \frac{c}{H_0} \eta a = l_{\text{H}}^0 \eta a. \quad (20)$$

Современное его значение

$$l_{\text{Hor}}^0 = \frac{c}{H_0} \eta_0 = l_{\text{H}}^0 \eta_0. \quad (21)$$

§ 5. Реликтовое излучение

1. *Открытие реликтового излучения.* В этом параграфе приведем некоторые сведения о состоянии излучения во Вселенной.

Несмотря на открытия квазаров, пульсаров и других интересных объектов, представления о формах вещества в современную эпоху в науке до конца последнего столетия коренным образом не изменились. Между тем, как оказалось, основной формой излучения в смысле, о котором скажем ниже, является не то излучение, которое испускают видимые объекты, а тепловое радиоизлучение с температурой около 3 К, называемое по-русски реликтовым излучением (РИ), а по-английски космическим микроволновым фоновым (cosmic microwave background radiation — CMBR).

РИ было открыто случайно (serendipitously, то есть его открытие не планировалось). Подробная история открытия РИ содержится в книгах Пиблса [8] и Вайнберга [9]. Здесь изложим ее кратко.

Весной 1964 года два радиоастронома, сотрудники фирмы “Bell Telephone Laboratories” Арно Пензиас и Роберт Вилсон на территории научно-исследовательской фирмы “Crawford Hill Laboratory” в Холмделе (Holmdel, штат Нью Джерси) готовились к измерениям интенсивности непрерывного излучения Галактики на рупорной антенне высотой около 6 метров на длине волны 20 см (вблизи линии нейтрального водорода 21 см).

Аппаратура была высокочувствительная (по тому времени) с предельно низким уровнем шума. Первоначально эту аппаратуру предполагалось использовать для получения отраженных сигналов от спутников связи. Первая такая попытка была успешно произведена со спутником ЕСНО, который представлял собой просто шар диаметром около 30 метров, отражающий радиоизлучение.

Программа Пензиаса и Вилсона состояла в том, чтобы, исследовав шумы антенны и приемника, получить возможность абсолютных измерений. Было обнаружено, что регистрируемый шум на λ 12.5 см превосходит шум, наблюдавшийся в лаборатории. Шум был приписан излучению Земли, принимаемому обратными лепестками антенны. Э. Ом, который разрабатывал приемную систему для ЕСНО [10], указывал, что такое объяснение не проходит. Приглашенный в качестве третьей стороны Д. Вилкинсон высказал мысль, что, может быть, именно это излучение ожидают астрономы в связи с теорией горячей Вселенной.

Для уточнения уровня шума антенны Пензиас и Вилсон настроили приемник на волну 7.35 см и направили антенну на совершенно темный участок Галактики. Принятый сигнал оказался неожиданно большим. Около года открыватели перепроверяли свои наблюдения, пока не убедились в неаппаратурном происхождении сигнала, интенсивность которого не зависела ни от направления, ни от времени суток, ни от сезона, то есть положения Солнца и Земли, ни от места антенны. Тщательное изучение показало, что это фоновое излучение, не имеющее каких-либо локальных источников, а идущее равномерно со всех сторон.

О наблюдениях узнали участники другой группы, работавшей в том же штате в Принстоне (Роберт Дикке, Филипп Пиблс и др.) и сознательно готовившейся к аналогичным наблюдениям для проверки выводов теории горячей Вселенной, основоположником которой был Георгий Антонович Гамов (1904–1968). Был установлен контакт между двумя группами. Теоретическая статья второй группы была опубликована в том же номере *Astrophysical Journal*, что и результаты наблюдений Пензиаса и Вилсона. В скором времени и эта, вторая группа получила наблюдения РИ на волне 3 см с теми же свойствами. Отождествление РИ с охладившимся и разреженным излучением первоначального огненного шара было принято астрофизиками сразу. За открытие РИ Пензиасу и Вилсону была присуждена Нобелевская премия по физике 1978 года.

2. *Предшественники открытия.* Интересно отметить, что обнаружение РИ обладает чертами других открытий, например, открытия Америки Колумбом. Авторы не понимали, что они открыли, природу явления пояснили другие, впоследствии оказалось, что существование РИ фактически было установлено раньше, но без осознания этого факта и без широкой известности о нем. В случае Колумба — Америго Веспуччи и викинги. В случае РИ — Дикке и более ранние наблюдения, о которых скажем отдельно.

Еще в 1941 году В. Адамс [11] выполнил наблюдения межзвездного поглощения в оптическом спектре звезды ξ Змееносца в линиях молекулы CN и обнаружил, что поглощают молекулы, находящиеся не только в основном, но и в первом возбужденном вращательном состоянии, отстоящем от основного на 2.6 мм. Мак-Келлар [12] в предположении, что относительные населенности уровней подчиняются формуле Больцмана, оценил температуру возбуждения в ≈ 2.3 К. Источником возбуждения не могли быть излучение звезд или столкновения, поэтому возбуждение было приписано какому-то космическому агенту. Наблюдения таких линий в спектрах других звезд подтвердили изотропность источника. У молекул с большими потенциалами возбуждения первого вращательного уровня такие линии поглощения на наблюдались. Только в 1966 году источник возбуждения был связан с РИ (подробнее см. [1]).

Прямая регистрация РИ была осуществлена на рупорной же антенне в Пулковской обсерватории на длине волны 3.2 см аспирантом С.Э. Хайкина Т.А. Шмаоновым. Его измерения, опубликованные в 1957 г. в техническом журнале [13], к сожалению, не обладали достаточной точностью и их значение оценено не было.

Спектр излучения в эволюционирующей Вселенной был впервые рассчитан в 1964 году А.Г. Дорошкевичем и И.Д. Новиковым [14]. Ими было предсказано, что РИ в радиобласти превосходит все остальные виды фоновых излучений и доступно наблюдениям с аппаратурой того времени. О работе Шмаонова они не знали. И их статья не была известна открывателям РИ, что и отметил А.А. Пензиас в своей лекции при получении Нобелевской премии.

3. *Свойства РИ.* К 1972 году свойства РИ были подтверждены наблюдениями более 15 групп наблюдателей на длинах волн от 0.27 до 73.5 см. В 1975 году наблюдения были продолжены до области длин волн около 0.1 мм, которая лежит ниже частоты максимума РИ $\nu_{\max} = 1.6 \cdot 10^{11}$ 1/с, что соответствует длине волны 1.87 мм.

Это излучение действительно заполняет все пространство и идет равномерно со всех сторон. Оно имеет чисто чернотельный спектр, то есть описывается функцией Планка с температурой $T_0 = 2.7277 \pm 0.002$ К и подчиняется всем его законам. В соответствии с законом смещения Вина располагается ее максимум, в 1 см^3

находится $0.244(T_0 k_B / c\hbar)^3 = 411$ реликтовых фотонов с общей энергией $(8\pi^5 k_B / 15h^3 c^3) T_0^4 = 4.187 \cdot 10^{-13}$ эрг (или 0.25 эВ) и массой $\rho_r^0 = 4.659 \cdot 10^{-34}$ г.

Поскольку современный спектр РИ с огромной точностью чисто чернотельный, а за большой промежуток времени оно ни с чем не могло реагировать, этот спектр должен был быть когда-то сформирован. Согласно теории горячей Вселенной на ранних стадиях эволюции все компоненты Вселенной взаимодействовали между собой и находились в состоянии термодинамического равновесия (ТДР) с единой температурой. В определенный период излучение оторвалось от вещества, то есть перестало с ним взаимодействовать и стало распространяться свободно.

За счет расширения пространства концентрация фотонов убывает пропорционально a^{-3} , то есть $n_r = n_r^0 / a^3$, а плотность массы — пропорционально a^{-4} , то есть $\rho_r = \rho_r^0 / a^4$ (вторая формула в (I.58)). В настоящую эпоху эти величины определяются формулами

$$n_r^0 = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{e^{h\nu_0/(k_B T_0)} - 1} = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_B}{ch}\right)^3 T_0^3, \quad \rho_r^0 = \frac{8\pi h}{c^5} \int_0^\infty \frac{\nu_0^3 d\nu_0}{e^{h\nu_0/(k_B T_0)} - 1} = \frac{a_{SB}}{c^2} T_0^4, \quad (22)$$

где $\zeta(3) = 1.202$ — значение дзета-функции, а $a_{SB} = (8\pi^5 h / 15c^3)(k_B/h)^4$ — постоянная Стефана).

Согласно формуле красного смещения $\nu_0 = a\nu$, так что

$$n_r^0 = \frac{8\pi}{c^3} a^3 \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{e^{ah\nu/(k_B T_0)} - 1} = a^3 n_r, \quad n_r = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_B}{ch}\right)^3 T^3, \quad T = \frac{T_0}{a}. \quad (23)$$

Таким образом, в течение всего периода расширения пространства излучение оставалось чернотельным, а его температура уменьшалась так же, как и частота. Тот же вывод следует и из рассмотрения плотности массы.

4. *Сравнение с другими фоновыми излучениями.* Из данных Табл. 6, извлеченной из книги [1], следует, что по плотности энергии и в особенности по концентрации фотонов РИ далеко превосходит все другие фоновые излучения, то есть это основная форма существования излучения в современной Вселенной.

Таблица 6: Фоновые излучения и их свойства.

Диапазон	Плотность энергии, эВ/см ³	Концентрация фотонов, 1/см ³
Длинноволновый радио	$\sim 10^{-7}$	~ 1
Сантиметровый и миллиметровый (РИ)	0.25	400
Инфракрасный	$\sim 10^{-2}$	~ 1
Оптический	$\sim 3 \cdot 10^{-3}$	$\sim 10^{-3}$
Мягкий рентгеновский (< 1 кэВ)	$10^{-5} \div 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-8} \div 10^{-8}$
Жесткий рентгеновский (> 1 кэВ)	10^{-4}	$3 \cdot 10^{-9}$
Мягкий гамма (1 ÷ 6 МэВ)	$\leq 10^{-5}$	$\leq 3 \cdot 10^{-12}$
Жесткий гамма (> 10 МэВ)	$< 10^{-5}$	$< 10^{-12}$

5. *Изотропия излучения.* Реликтовое излучение, как уже говорилось, в высокой степени изотропно. Однако, как было предсказано [15, 16], имеется дипольная анизотропия $T = T_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)$. Наилучшее приближение к наблюдениям дает дипольный момент 3.343 ± 0.016 мкК в направлении $\alpha = 11.2^h, \delta = -7^\circ$ или $l = (264.4 \pm 0.3)^\circ, b = (48.4 \pm 0.5)^\circ$. После исправления за движение Земли вокруг Солнца, Солнца вокруг центра Галактики и Галактики по отношению к центру масс Местной Группы получается, что Местная Группа галактик движется со скоростью 627 ± 22 км/с по отношению к РИ в направлении $l = (276 \pm 3)^\circ, b = (30 \pm 3)^\circ$. Попытки определить направление и скорость движения Местной Группы относительно других, более удаленных, галактик и скоплений галактик другими способами давали противоречивые результаты.

Имеется и квадрупольная составляющая анизотропии, вызываемая, как считается, неоднородностью распределения материи в Местной Группе галактик. На РИ влияют также различные источники, расположенные в Галактике и в Магеллановых облаках. Источники имеют различный спектр, максимум их излучения может располагаться в областях спектра, далеких от радио, но при очень точных наблюдениях их влияние необходимо учитывать и исключать.

Указанные анизотропии фактически не относятся к РИ, а возникают из-за движения системы отсчета относительно этого излучения. Таким образом, РИ играет роль эфира. Об искажениях изотропии собственно РИ скажем в дальнейшем.

Ввиду того, что нейтрино имеют очень малую массу и могут рассматриваться как ультрарелятивистские частицы, свойства которых близки к свойствам излучения, приведем некоторые сведения о них в этой главе.

§ 6. Нейтрино

1. *История открытия.* Существование нейтрино было предположено Вольфгангом Паули (1900–1958) в 1930 году. Причиной такого предположения явился факт кажущегося невыполнения закона сохранения энергии при бета-распаде нейтрона на протон и электрон. Среднее время жизни неподвижного нейтрона составляет $\bar{t}_N = 15.3$ минуты (период полураспада $t_{1/2} = \ln(2)\bar{t}_N = 10.6$ минуты). Вылетающий при таком процессе электрон уносит энергию, однако, ее оказывалось меньше, чем разность между энергиями покоя нейтрона и протона.

Некоторое время в начале становления квантовой механики физики думали, что законы сохранения могут в природе соблюдаться в среднем, аналогично тому, что величины в произвольных состояниях имеют только среднее значение. Последующее развитие теории установило, что это не так и законы сохранения должны выполняться точно. Нарушение закона сохранения энергии при бета-распаде было недопустимо. Это и стимулировало Паули предположить, что недостающую энергию уносит какая-то неизвестная нейтральная частица, названная нейтрино. При этом разрешалась еще одна трудность, а именно, соблюдение условия сохранения момента. Так как и протон, и нейтрон, и электрон имеют спин половина, то и гипотетической частице следовало приписать спин половина, тогда при определенной ориентации проекций спинов частиц общий спин сохранялся. Необнаружение нейтрино объяснялось его слабым взаимодействием с остальными частицами. Все подобные процессы составляют элементы так называемого слабого взаимодействия.

Впоследствии гипотеза Паули полностью подтвердилась, нейтрино было зафиксировано в 1956 году. В настоящее время свойства нейтрино достаточно подробно изучены. При этом долгое время считалось, что масса нейтрино точно равна нулю, как у фотона.

2. *Нейтрино в природе.* Нейтрино относятся к так называемым лептонам, то есть к частицам, участвующим в слабых взаимодействиях и не участвующим в сильных. Они не имеют заряда, так что и в электромагнитных взаимодействиях не участвуют. Однако в начале 1970-х годов была построена теория, объединившая электромагнитное и слабое взаимодействия. Теория была подтверждена экспериментами и ее авторам, С.Вейнбергу, А.Саламу и С.Д.Глешоу в 1979 году была присуждена Нобелевская премия по физике.

При многих ядерных реакциях, например, при распаде нейтрона, как уже говорилось, образуются нейтрино. Изучение свойств этих частиц продолжается в экспериментальных установках (ядерных реакторах и ускорителях). Наблюдаются нейтрино и от астрономических объектов. Так как они с веществом взаимодействуют слабо, то большинство астрономических объектов для них прозрачно, так что выделившиеся нейтрино выходят из областей своего образования и летят свободно.

Так как выделение энергии в звездах происходит посредством термоядерных реакций, при которых излучаются нейтрино, для подтверждения основных положений теории внутреннего строения и эволюции звезд были предприняты попытки наблюдать солнечные нейтрино. В нескольких местах были построены нейтринные обсерватории, где основным веществом, с которым должны реагировать нейтрино, была вода, точнее ядра водорода — протоны, которых в каждую молекулу воды входит по паре.

Довольно долгое время не удавалось их обнаружить, а после обнаружения оказалось, что их поток меньше, чем предсказывала теория. Однако, после уточнения сечений реакций и решений уравнений теории строения звезд теорию с наблюдениями удалось согласовать.

Не прекращаются попытки зарегистрировать нейтрино от других небесных тел. Самыми вероятными источниками нейтрино являются сверхновые звезды. Во время вспышки выделяется большое количество нейтрино, причем в самом начале разлета вещества нейтрино в нем заперты и взаимодействуют многократно, так что при расчете взрывов сверхновых учитывался перенос нейтрино в расширяющейся оболочке. Для регистрации таких нейтрино также имеются установки, в частности, Ледяной Куб (IceCube) со стороны в 1 км в Антарктиде. В своем отчете в январе 2014 года [17] коллектив этого проекта (называемый коллаборация) сообщил, что за два года (май 2010 – май 2012) было зафиксировано 28 событий, которые можно интерпретировать как регистрации нейтрино космических лучей (КЛ). Энергии E этих нейтрино заключены в диапазоне от 50 ТэВ (10^{12} эВ) до нескольких ПэВ (10^{15} эВ).

Согласно теории горячей Вселенной должны быть и космические (космологические) нейтрино. Однако, их существование — это чисто теоретическое заключение. Но так как из теории однозначно вытекает необходимость их присутствия во Вселенной, примем эту гипотезу (см. следующую главу).

3. *Проблема массы нейтрино.* Согласно современной теории в природе имеются три сорта нейтрино: электронные, мюонные и тау-нейтрино. Им обычно присваивают номера 1, 2 и 3 соответственно. Каждому сорту отвечает свое антинейтрино.

Нейтрино одного сорта, как показывают эксперименты, могут трансформироваться в нейтрино другого сорта. Такие переходы называются нейтринными осцилляциями. Переходы возможны только при условии, что

массы нейтрино не равны нулю. Однако эти массы столь малы, что их измерить с уверенностью пока не удастся. Устанавливаются лишь верхние пределы.

4. *Космологические нейтрино.* Нейтрино, спин которых равен половине, подчиняются статистике Ферми—Дирака. При термодинамическом равновесии их распределение по энергиям определяется температурой и химическим потенциалом. Относительно космологических нейтрино считается, что в первые эпохи расширения Вселенной эти нейтрино находились в многократном взаимодействии с другими частицами и их химический потенциал равен нулю. Примем это значение.

Как и излучение, космологические нейтрино в определенный момент перестали взаимодействовать с остальным веществом и с тех пор распространяются свободно. Момент обособления нейтрино относится к более ранней эпохе, чем отрыв излучения от вещества. Хотя процесс их перехода к свободному полету занимает какой-то период времени, примем, что это произошло мгновенно. Разные типы нейтрино отделяются в разные периоды, но за каждым из них можно следить отдельно от других, так что рассмотрим какой-нибудь один тип нейтрино или антинейтрино.

Массы нейтрино столь малы, что можно их отличие от нуля не принимать во внимание. Рассмотрим поведение нейтринного газа подробнее.

5. *Эволюция космологических нейтрино.* Температура отделения нейтрино T_ν^* достаточно высока и все компоненты вещества были ультрарелятивистскими, так что их энтропии были пропорциональны третьей степени температуры. Нас интересуют электроны, позитроны, нейтрино и фотоны. Энтропии трех газов фермионов в момент отделения нейтрино были одинаковы, а энтропия фотонного газа отличалась множителем. Указанные энтропии в объеме V_* тогда были

$$S_{e^\pm}^* = S_\nu^* = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3, \quad S_\gamma^* = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3. \quad (24)$$

Космологическое расширение происходит как адиабатический процесс, при котором энтропия определенного объема не меняется. Следовательно, температура всех ультрарелятивистских газов изменяется обратно пропорционально масштабному множителю.

После отделения нейтрино разлетались свободно, а электроны и позитроны продолжали взаимодействовать. Когда температура стала существенно ниже, чем $6 \cdot 10^9$ К, все позитроны аннигилировали с электронами, и аннигилировавшие пары передали свою энергию, включая энергию покоя, фотонному газу. В результате этого и энтропия электрон-позитронных пар перешла к фотонам. Фотоны продолжали взаимодействовать с оставшимися электронами и газ фотонов пришел к равновесному состоянию, повысив свою температуру, которая впоследствии уменьшалась в соответствии с общим расширением пространства. Энтропия после повышения сохранялась:

$$S_\gamma = \left(\frac{4}{3} + 2 \frac{7}{6} \right) a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{11}{3} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V T^3. \quad (25)$$

Энтропия нейтринного газа не изменялась, то есть сохранялась формула

$$S_\nu = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* \left(\frac{a}{a_*} \right)^3 T_\nu^3 = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V T_\nu^3 = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3. \quad (26)$$

Вследствие космологического расширения объема в моменты, которым соответствуют значениям масштабного множителя a_ν^* и a , связаны соотношением $V_* (a_\nu^*)^3 = V a^3$.

Подставив в (25) произведение $V_* (T_\nu^*)^3$ из (26), получим связь между температурами фотонного и нейтринного газов после аннигиляции электрон-позитронных пар [18]:

$$\frac{11}{3} a_{\text{SB}} V T_\nu^3 = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V T^3, \quad T^3 = \frac{11}{4} T_\nu^3, \quad T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T = 0.713765856 T. \quad (27)$$

В частности, современная температура безмассовых нейтрино $T_\nu^0 = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T_0 = 1.95$ К, так что плотность их массы (всех типов вместе) и доля в критической плотности

$$6\rho_\nu^0 = 6a_\rho (T_\nu^0)^4 = 6.35 \cdot 10^{-34} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \Omega_\nu^0 = 6 \frac{\rho_\nu^0}{\rho_c^0} = 6.90 \cdot 10^{-5}. \quad (28)$$

Глава III. Закон Хаббла и проблема выбора модели

§ 1. Соотношения Хаббла

1. *Открытие Хаббла.* Как уже говорилось выше, в 1929 году Э. Хаббл опубликовал свое открытие [19], заключавшееся в том, что скорости внегалактических туманностей, на самом деле являющихся галактиками, пропорциональны расстоянию до них, то есть

$$v = H_0 l. \quad (1)$$

Фактически, измерялись красные смещения линий в спектрах этих галактик. Наряду с собственными наблюдениями на 2.5-метровом телескопе обсерватории Маунт Вилсон Хаббл использовал измерения z , произведенные по спектрам галактик, которые были получены Весто Мелвином Слайфером (1875-1969) и Милтоном Хьюмасоном (1891-1972) на этом и на других, не столь мощных телескопах. Наибольшее значение красного смещения в его данных было $z = 0.004$.

Красные смещения линий Хаббл перевел в скорости, как это обычно делается до сих пор по отношению, например, к звездным спектрам, исходя из соотношения

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{v}{c} = \tilde{v}. \quad (2)$$

Отсюда с учетом определения (II.7) следует, что

$$\frac{v}{c} = \tilde{v} = z. \quad (3)$$

Принятые во внимание Хабблом галактики имели скорости, не превосходящие 1200 км/с.

Конечно, из приведенных соотношений вытекает, что

$$z = \frac{H_0}{c} l. \quad (4)$$

Расстояния до галактик Хаббл определил в несколько этапов. До ближайших галактик расстояния Хабблу удалось найти, обнаружив в них несколько цефеид. В этих же ближайших галактиках были определены светимости других, более ярких объектов — шаровых скоплений, которые видны также в галактиках близкого к нам скопления Девы. Относительные расстояния до далеких (по понятиям тех времен) скоплений Хаббл определял, считая, что пятые по яркости галактики в скоплении имеют одинаковую светимость. Тем самым удалось построить шкалу расстояний. В результате было найдено, что $H_0 \approx 500$ км/(с Мпк), где 1 Мпк (мегапарсек) = $3.086 \cdot 10^{24}$ см.

Техника измерений красных смещений, то есть положений смещенных линий в спектрах далеких галактик, отработана хорошо, проблема только в получении спектров слабых объектов и убедительном отождествлении линий.

Для определения значения H_0 необходимо знать расстояния до галактик. Их получение — очень серьезная проблема. Существует процедура установления масштаба расстояний в части Вселенной, доступной наблюдениям и называемой Метагалактикой. Опишем ее кратко.

2. *Определение расстояний в Метагалактике.* Измерения тригонометрических параллаксов возможно только по отношению к ближайшим звездам. Поэтому для определения расстояний до звезд используется соотношение между периодом и средней светимостью пульсирующих звезд — цефеид. Однако самые близкие цефеиды находятся довольно далеко, и их параллаксы были недоступны измерениям до последнего времени.

Ключевую роль в определении промежуточных расстояний играют рассеянные звездные скопления, в первую очередь Гиады. Можно принять, что все звезды этого скопления имеют одинаковую пространственную скорость. На небесной сфере они движутся в одном направлении к фиктивной точке — радианту (“падающие звезды” метеорных потоков, напротив, все исходят из своих радиантов). Это означает, что их скорости параллельны направлению на радиант (параллельные прямые сходятся на бесконечности). Обозначим угол между направлениями на радиант и некоторую звезду, которая как бы движется к нему, через α . Этот угол легко измерить. Можно измерить также лучевую скорость звезды v_r . Тогда ее полная скорость $v = v_r / \cos \alpha$, а тангенциальная $v_t = v_r \operatorname{tg} \alpha$. Скопление Гиады находится достаточно близко, так что собственные движения его звезд, то есть угловое перемещение их в единицу времени, поддаются измерению. Пусть у выбранной звезды оно равно v_t / l_{Star} . Отсюда находим расстояние l_{Star} до этой звезды. Оказалось, что расстояния до звезд Гиад l_{Star} лежат в пределах от 27 до 47 пк.

Следующий шаг в этом направлении — определение групповых параллаксов входящих в скопления звезд одинакового цвета, то есть располагающихся в одном месте на диаграмме Герцшпрунга—Рессела “спектр-светимость” и, следовательно, имеющих примерно одинаковый возраст и светимость.

В ряде рассеянных скоплений имеются цефеиды. По ним устанавливается нуль-пункт соотношения период-светимость для цефеид. Проблема эта сложная, нуль-пункт несколько раз пересматривался. По цефеидам находят, как уже говорилось, расстояния до шаровых звездных скоплений и ближайших галактик.

Потом получают связь найденных по цефеидам расстояний с определяемыми по самым ярким звездам и шаровым скоплениям в галактиках, а затем и по определенным галактикам в скоплениях галактик. Самыми яркими звездами могут считаться сверхновые или сверхгиганты. Самые яркие галактики в богатых скоплениях — гигантские эллиптические галактики. Считается, что они поглотили несколько других галактик. Поэтому предполагается, что одинаковые светимости имеют не они, а несколько меньшие по светимости галактики и они могут быть приняты в качестве эталонов (стандартных свечей).

Во всей этой процедуре имеются неопределенности и допущения. Один из источников неопределенностей — отсутствие теории эволюции наблюдаемых объектов, ведь наблюдая далекие объекты, мы смотрим в прошлое. Приходится делать какие-то предположения.

История определения расстояний пережила несколько раз изменения их масштаба. После введения в строй 5-метрового телескопа обсерватории Маунт Паломар оказалось, что цефеиды, использовавшиеся Хабблом, в 4 раза ярче, чем считалось. Еще одна ошибка заключалась в смешении звезд и шаровых скоплений с яркими областями ионизованного водорода, которые теперь называются областями HII. Они были открыты в радиодиапазоне как яркие неточечные источники. Затем радиоисточники были отождествлены с оптическими объектами, выглядевшими как туманности, так что это не были звезды. Завысив светимости опорных объектов, Хаббл занижил расстояния и, следовательно, завилил значение H_0 . В результате исправления ошибок значение H_0 снизилось до 75 км/(с Мп). Дальнейшая работа привела к значению $H_0 = 55$ км/(с Мпк).

Не все были согласны с этим значением. Многочисленные определения расстояний в 70-х годах привели к заключению, что наиболее вероятное значение постоянной Хаббла лежит в пределах $H_0 = (50 \div 75)$ км/(с Мпк). Соответствующее значение критической плотности $\rho_c^0 = 5 \cdot 10^{-30} \div 10^{-29}$ г/см³.

Прямые измерения параллаксов цефеид стали доступны только в последнее время после запуска спутника Гиппаркос (HIPPARCOS), названного в честь древнегреческого астронома Гиппарха (в латинской транскрипции Hipparchus), составившего первый каталог положений звезд на небесной сфере. Одновременно название спутника является сокращением выражения, определяющего его основную функцию: High Precision PARallaxes Collection Satellite. Данные HIPPARCOS увеличили все расстояния на 10 %. Следующий шаг делает запущенный в 2013 году спутник Gaia, который должен определить параллаксы всех звезд в Галактике. Его миссия успешно продолжается.

По данным начала XXI века $H_0 = 74.37 \pm 2.27 \pm 4.92$ км/(с Мпк), где первая неопределенность вызывается случайными ошибками, определяемыми в пределах одного метода, а вторая — систематическими, то есть различием применяемых методов. Конечно, доли единиц и даже единицы имеют здесь чисто формальное значение.

По данным миссии WMAP астрономы склонялись к значению $H_0 = 70$ км/(с Мпк) и считали, что оно верно с точностью до 10 %. Последние определения миссии Planck несколько уменьшают значение до $H_0 = 68$ км/(с Мпк). Поставлена задача довести в ближайшее десятилетие точность определения H_0 до 1 %.

3. *Закон Хаббла.* Хаббл открыл пропорциональность красного смещения и расстояния. Он сам и все космологи сразу же интерпретировали ее как пропорциональность скорости разбегания галактик тому же расстоянию. Это следовало из толкования красного смещения как следствия эффекта Доплера.

В произвольный момент соотношение (1) следует записать так:

$$v = Hl. \quad (5)$$

В равенстве (5) под скоростью $v = dl/dt$ надо понимать скорость изменения в единый мировой момент расстояния между точками, жестко связанными с расширяющимся пространством. Таковыми точками считаются галактики в среднем, то есть после исключения их собственных движений и собственного движения нашей Галактики в Местной группе галактик. Надо исключить также все локальные движения Земли: вращение вокруг своей оси и по орбите вокруг Солнца, а также движение самого Солнца вместе с Солнечной системой вокруг центра Галактики, что всегда делается всеми исследователями, начиная с Хаббла. Соотношения (3) и (5) также называют законом Хаббла.

Понять соотношение (5) довольно просто исходя из той же двумерной модели трехмерного пространства, о которой говорилось в §2 Главы I и в §1 Главы II. Например, если на сфере проведена некоторая окружность и радиус сферы увеличивается, то каждая точка на окружности удаляется от любой другой точки на той же окружности со скоростью, пропорциональной длине дуги между ними, а от центра окружности со скоростью, пропорциональной расстоянию по большому кругу до этого центра. Обе скорости (и расстояния) пропорциональны увеличивающемуся радиусу сферы. Ясно, что если радиусы сферы и окружности велики, то могут быть велики и указанные скорости. Ясно также, что если расширяющаяся окружность находится далеко от своего центра на сфере (дальше горизонта), то ее удаление от этого центра очень быстрое и испущенный с нее фотон не может дойти до наблюдателя, находящегося в центре. При этом очевидно, что картина расширения не зависит от выбора центра окружности на сфере. Такая же интерпретация проходит и в случае плоской модели:

вместо сферы надо взять плоскость. Для открытой модели надо брать окружность, центр которой лежит на оси гиперboloида, так как в других случаях геометрия Лобачевского не столь наглядна.

Заметим, что сами галактики и скопления галактик (по внутренней структуре) не участвуют в глобальном расширении, так как они связаны локальной силой тяжести. Тем более не расширяются структуры меньшего масштаба, не говоря уже об атомах и молекулах, связываемых электромагнитными силами.

Заметим также, что при замкнутой модели с пылевидным веществом произведение $Ht = \sin \eta(\eta - \sin \eta)/(1 - \cos \eta)^2$ при $0 \leq \eta \leq \pi$ строго убывает от $2/3$ при $\eta = 0$ до 0 при $\eta = \pi$, затем постоянная Хаббла изменяет знак, так как расширение сменяется сжатием. Однако сейчас Вселенная еще расширяется, так что $\eta < \pi$ и указанное произведение не мало. При открытой модели $Ht = \text{sh} \eta(\text{sh} \eta - \eta)/(\text{ch} \eta - 1)^2$ и при изменении η от 0 до ∞ это произведение строго возрастает от $2/3$ до 1 . Для модели Эйнштейна—де Ситтера это произведение тождественно равно $2/3$. Поэтому значение H характеризует возраст Вселенной. Современный ее возраст порядка $1/H_0 \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ с} = 10^{10} \text{ лет} = 10 \text{ Г лет}$ (гигалет). Такая величина согласуется с определениями возраста земной коры, Солнца, звезд, галактик и других объектов. Промежутки времени порядка миллиардов лет называются космологическими (геологические периоды, за которые заметно смещаются материки, — десятки миллионов лет). Для каждой из моделей можно вычислить возраст Вселенной по формулам, которые будут получены в следующей главе.

Как уже говорилось, скорость, вычисленная как произведение Hl согласно формуле (5), может превосходить скорость света. Расстояние, на котором она равна скорости света, называется хаббловским расстоянием. В произвольный момент и в настоящую эпоху это расстояние

$$l_H = \frac{c}{H}, \quad l_H^0 = \frac{c}{H_0}. \quad (6)$$

Через него закон Хаббла записывается в виде

$$v = c \frac{l}{l_H^0}. \quad (7)$$

Что касается сверхсветовых скоростей — это скорости расширения пространства, а не скорости движения тел в пространстве. Поэтому нет ничего страшного в сверхсветовой скорости этого расширения. Никакие сигналы с такой скоростью при этом не передаются.

§ 2. Интерпретации космологического красного смещения

1. *Интерпретация соотношения (5)*. Таким образом, имеется три формулировки закона Хаббла. Две из них независимы, третья является их следствием. Покажем, что соотношение (5) может быть строго выведено в рамках космологических моделей.

Для доказательства продифференцируем расстояние в данный момент от начала координат ($\chi = 0$) до точки с координатой χ вдоль проведенного между ними луча, которое согласно метрике (I.32) и формуле (II.8) равно

$$l = R(\eta)\chi. \quad (8)$$

Так как координата точки, жестко связанной с пространством, с течением времени не изменяется, то скорость изменения метрического расстояния выражается через то же расстояние:

$$v = \frac{dl}{dt} = \dot{R}\chi = \dot{R} \frac{l}{R} = Hl. \quad (9)$$

2. *Связь скорости с красным смещением*. В отличие от своего следствия (5) равенство (4) не является точным. Действительно, будем исходить из той же формулы (5), связывающей скорость расширения с расстоянием до сопутствующего тела. Для упрощения выкладки для всех величин кроме красного смещения, относящихся к моменту наблюдения $t_0 = t(\eta_0)$, будем использовать обозначения с ноликом, а для относящихся к моменту выхода фотона $t_e = t(\eta_e)$ из источника используем индекс e . Без индекса обозначаются переменные, по которым ведется дифференцирование и интегрирование (для красного смещения приходится ставить штрих). Соответственно имеем ряд переменных со следующими связями:

$$\chi = \eta_0 - \eta, \quad \chi_e = \eta_0 - \eta_e, \quad d\chi = -d\eta, \quad d\eta = c \frac{dt}{R(\eta)} = c \frac{dR}{R} \frac{dt}{dR}. \quad (10)$$

Как отмечалось выше, интеграл, который входит в формулу (II.8), определяющую расстояние l , не зависит от времени. Его можно преобразовать следующим образом:

$$\chi_e = \int_0^{\chi_e} d\chi = \int_{\eta_e}^{\eta_0} d\eta = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(\eta(t))} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{HR^2} = \frac{c}{R_0} \int_{R_0}^{R_e} \frac{d(R_0/R)}{H} = \frac{c}{R_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (11)$$

Здесь $\eta(t)$ — функция, обратная по отношению к $t(\eta)$. Использовано также соотношение (II.7) между радиусами кривизны и красным смещением. В результате получаем связь скорости с красным смещением

$$v = \dot{R}_0 \int_0^{x_0} d\chi = cH_0 \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (12)$$

Подставив эту связь в формулу (5), найдем соотношение между расстоянием и z [20]:

$$l = c \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (13)$$

Вычисление интеграла надо производить после принятия конкретной модели.

3. *Интерпретация соотношения* (12). Во многих руководствах по космологии, не говоря уже о популярных изданиях, равенство (4) связывают с продольным эффектом Доплера. Согласно этому эффекту частота фотона при излучении его удаляющимся со скоростью v источником уменьшается на множитель

$$1 + z = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (14)$$

откуда

$$\tilde{v} = \frac{v}{c} = z \frac{2 + z}{2 + 2z + z^2}. \quad (15)$$

Как показывает приведенная выкладка, в космологии дело обстоит сложнее. Действительно, эффект Доплера описывает изменение частоты при движении излучающего источника в пространстве-времени Минковского с евклидовым трехмерным пространством. Частота фотона (или волны) изменяется одномоментно, непосредственно при излучении, затем фотон движется без изменения частоты. Космологические же модели соответствуют расширяющемуся пространству, так что частота фотона уменьшается в каждой точке его пути от источника до наблюдателя. Поэтому классический эффект Доплера зависит только от относительной скорости источника и наблюдателя, а космологическое красное смещение — от расстояния, пройденного фотоном, а через него и от скорости удаления источника.

Различие формул (12) и (15) проявляется в следующем. Во-первых, согласно формуле эффекта Доплера скорость не может превосходить скорость света, а в космологии это осуществляется. Во-вторых, формула (15) универсальна, то есть скорость и красное смещение связаны однозначно. Соотношение же (12), как говорят, модельно зависимо, так как для вычисления интеграла необходимо знать функцию $H(t(z))$, которая определяется только после принятия определенной космологической модели. Летящий фотон относительно каждой точки, в которой он в данный момент находится, летит со скоростью света, а точка удаляется от наблюдателя, при этом скорость ее удаления определяется моделью. Конечно, при желании и это явление можно назвать каким-то обобщенным или кумулятивным эффектом Доплера (хотя непонятно, как можно эту кумулятивность продемонстрировать), но не классическим.

Однако если z мало и зависимостью H от z можно пренебречь, то соотношение (12) переходит в равенство (2), которое при малых z тождественно равенству (15), а формула (13) совпадает с исходным законом (4), так что в приближении малых (по космологическим масштабам) расстояний закон (4) выполняется и интерпретация красного смещения как эффекта Доплера возможна.

§ 3. Проблема выбора модели

1. *Космологические тесты.* Для выбора модели, наиболее близкой к реальной Вселенной, необходимо работать и применять методы, которые называются космологическими тестами. Отметим некоторые возможные варианты.

Казалось бы выбрать наиболее подходящую модель довольно просто. Надо измерить на некотором расстоянии l от наблюдателя длину окружности $2\pi r$ или площадь сферы $4\pi r^2$ с центрами в точке наблюдения и сравнить результаты с теми, которые справедливы для плоского пространства $2\pi l$ и $4\pi l^2$. Если окажется, что $l > r$, значит пространство замкнутое, если $l < r$ — открытое, ну а если $l = r$, то плоское. Именно измерения длин на поверхности Земли методом триангуляции позволили в XVII–XIX веках окончательно убедиться в том, что Земля очень близка к шару, и уточнить ее форму.

Однако, такой способ не дает никаких результатов по отношению к космосу, так как радиус кривизны, даже если он конечен, настолько велик, что пространство с большой степенью точности можно считать плоским. Ведь даже земная поверхность долгое время человечеству представлялась плоской. Для выяснения геометрии космического пространства приходится привлекать не столь прямые (геометрические) методы.

Другой прямой метод заключается в измерении плотности массы и сравнении ее с критической плотностью. Применяются также различные косвенные методы. О некоторых будет сказано ниже, но сначала расскажем подробнее о плотности массы.

2. *Проблема массы во Вселенной.* Долгое время астрономы, да и вообще человечество, думали, что основная масса Вселенной заключена в звездах, так как массы планет, спутников, комет и других тел Солнечной системы, а следовательно, и подобных тел в звездных системах, значительно меньше. Уже в XX веке выяснилось, что кроме звезд в Галактике имеется диффузное вещество, образующее светлые и темные туманности, газовые и пылевые, и его массу также надо учитывать.

Массы близких галактик определяют по кинематике звезд, основываясь на моделях звездной динамики. По ним устанавливаются средние значения для разных типов галактик, по ним рассчитывают общую массу видимых галактик и среднюю плотность их массы.

Если принимать во внимание только видимые части галактик, то есть светящееся вещество, то получается $\Omega_{\text{vis}}^0 = 0.012$. Однако, это вещество не может объяснить кривые вращения нашей Галактики и других галактик. Скорости вращения должны были бы быстро уменьшаться с приближением к краям галактик, чего не наблюдается. Это истолковывается так, что в периферийных областях галактик имеется несветящаяся, темная материя (dark matter) и тем самым скрытая масса. Добавление темного вещества, обеспечивающего правильную кривую вращения, увеличивает критический параметр до $\Omega_{\text{gal}}^0 = 0.04 \div 0.05$.

Следующий шаг — оценка масс скоплений галактик. Если допустить, что скопления галактик являются гравитационно связанными и для них выполняется теорема вириала, то оказывается, что масса скоплений также превышает массу составляющих его галактик. Добавление этой вириальной массы приводит к значению $\Omega_{\text{cls}}^0 = 0.25$. Очевидно, до замкнутой или даже плоской модели все это не дотягивает.

В настоящее время принято, что барионная составляющая Вселенной, то есть фактически нуклоны, вносит в плотность массы $\rho_b^0 = 2 \cdot 10^{-31}$ г/см³, что соответствует плотности числа нуклонов $\rho_b^0/m_n = 1.2 \cdot 10^{-7}$ 1/см³ и $\Omega_b = 0.025$. (Напомним, что барионами называются адроны с полуцелым спином: нуклоны, гипероны и так называемые резонансы. Адроны — общее название семейства частиц, участвующих в сильном взаимодействии. Наряду с барионами это семейство содержит пи-мезоны.)

В связи с вопросами об устойчивости галактик и скоплений галактик, а также замкнутости или открытости Вселенной возникает проблема скрытой массы, то есть наличия во Вселенной темного вещества, которое не светится и мы его не видим. Обсуждались многие возможности. Это могла бы быть барионная материя, то есть многочисленные слабые и недоступные наблюдениям нейтронные звезды и потухшие звезды (коричневые или бурые карлики), тела типа планет и др. Такая возможность не подтверждается. Это могли бы быть нейтрино с ненулевой массой, однако их масса, даже если она не равна 0, столь мала, что почти не влияет на среднюю плотность. Предполагаются также особые элементарные частицы (аксионы, нейтралино, фотино и др.), пока не наблюдавшиеся ни в лаборатории, ни в космосе, или первичные черные дыры малых масс. Проблема остается нерешенной, ей посвящается много работ физиков и астрофизиков. Попытки обнаружить присутствие темного вещества в пределах Солнечной системы результатов не дали [21].

Напомним, что плотность излучения во Вселенной в настоящее время значительно меньше, чем плотность любых видов вещества, и ее вклад в общую массу не решает проблему выбора модели.

Если постоянная Хаббла определялась с разбросом примерно от 40 до 100 км/с/Мпк, а теперь известна с точностью около десяти процентов, то значения других параметров модели, которую можно было бы принять как наиболее близкую к реальности, до самого последнего времени оставались совершенно неопределенными. Следовательно, не было ясно, какая модель более адекватна Вселенной. Долгое время усилия наблюдателей были направлены на определение параметров критичности модели с пылевидным веществом Ω_0 и тем самым определения, какова Вселенная: замкнутая, открытая или плоская.

Два способа определения параметра Ω_0 из наблюдений называются классическими тестами. Один из них заключается в сопоставлении видимой полной светимости одинаковых источников и их красного смещения z , при применении другого с z сопоставляется угловой диаметр объектов. Эти тесты должны ответить на вопросы, замкнута или нет наша Вселенная, чему равны константы, характеризующие ее модели. Скажем об этом немного подробнее.

3. *Тест видимая яркость — красное смещение.* Пусть галактика имеет координату χ по отношению к нам и светимость (то есть полную мощность излучения) L . Мы ее наблюдаем в момент $t_0 = t(\eta_0)$. Тогда площадь сферы, на которую растекается излучение этой галактики, равна $4\pi R_0^2 \text{sn}_k^2(\chi)$. Энергия излучения, испускаемого источником, в данном случае галактикой, как указывалось выше, ослабляется за счет уменьшения энергий (частот) всех фотонов в результате красного смещения в $1 + z$ раз и на тот же множитель за счет того, что отдельные фотоны реже приходят к наблюдателю, так как время наблюдателя и время источника текут порозному.

Таким образом, видимая полная светимость галактики на единицу площади

$$\tilde{L} = \frac{L}{4\pi R_0^2 \text{sn}_k^2(\chi)(1+z)^2}. \quad (16)$$

Эта величина и есть видимая болометрическая яркость, о которой говорилось выше. Соответствующее ей расстояние

$$l_{\text{bb}} = R_0 \text{sn}_k(\chi)(1+z). \quad (17)$$

Наблюдая далекие галактики и измеряя их видимые звездные величины, а затем переводя их в светимости (хотя бы относительные), а также определяя их красные смещения, можно было бы по тому, при какой модели наилучшим образом выполняется соотношение между этими величинами, судить о соответствии модели реальной Вселенной. Однако для этого надо знать настоящую светимость галактики, то есть выбрать стандартную свечу. На практике в качестве стандартной свечи выбирались либо вторая, либо пятая по яркости галактика в скоплении. Однако на этом пути оказываются значительные трудности. Одна из них уже упоминалась, это — отсутствие теории, описывающей эволюцию галактик и, в частности, их светимости. Другая трудность заключается в том, что при выборе стандартной свечи в удаленном скоплении галактик легко ошибиться, приняв за нее более яркую галактику, принадлежащую, возможно, не тому скоплению. Сама идея, что галактики определенного номера по порядку светимости светят одинаково, не имеет глубокого основания.

Согласно двум исследованиям этого теста либо $\Omega_0 = 2 \pm 2$, либо $\Omega_0 = 0.66 \pm 1.36$. Улучшить результаты удалось в последние годы, но не по галактикам, о чем скажем ниже.

4. *Тест видимый размер — красное смещение.* Другим способом уточнения величины Ω_0 может служить второй классический тест, заключающийся в измерении угловых диаметров источников в зависимости от их красных смещений.

Если источники имеют одинаковый размер D , то их видимый угловой диаметр

$$\vartheta = \frac{D}{l_{\text{ad}}}, \quad (18)$$

где расстояние l_{ad} дается формулой (II.10). Из соотношения (II.14) между двумя расстояниями находим

$$l_{\text{ad}} = R(\eta_e) \text{sn}_k(\chi) = \frac{R_0}{1+z} \text{sn}_k(\chi). \quad (19)$$

В качестве источников одного размера брали ядра богатых скоплений галактик. Этот тест мог бы предоставить независимую возможность определить параметр q_0 , причем с использованием более удаленных объектов: не галактик, а их скоплений. Однако и здесь возникают трудности, аналогичные уже упомянутым, и улучшить результат не удается.

5. *Современная диаграмма Хаббла.* В последнее время в связи с технологическим прогрессом появилась возможность наблюдать более слабые, а следовательно, более далекие объекты, чем ранее. В частности, определены видимые яркости сверхновых звезд в сравнительно удаленных галактиках. Известно, что у некоторых сверхновых, а именно сверхновых типа Ia кривые блеска и, что более важно, светимости в максимуме блеска очень близки. Точнее, светимость в максимуме и скорость спада блеска довольно жестко связаны. Даже если пропускается момент максимума, скорость спада светимости определяется надежно. Следовательно, оказывается возможным довольно уверенно оценить светимость в максимуме и построить абсолютную кривую блеска. Такое свойство сверхновых типа Ia объясняется тем, что взрываются белые карлики, разброс масс которых невелик. Светимость этих сверхновых не зависит от возраста галактики, а определяется только звездами, в первую очередь их массой. Поэтому такие сверхновые можно рассматривать как стандартные свечи. Впрочем, работы по уточнению деталей взрывов и кривых блеска продолжают.

Привлечение новой стандартной свечи позволило не только приблизиться к определению геометрии пространства, но и обнаружило новое обстоятельство.

На самых больших расстояниях, в настоящее время доступных наблюдениям на 2-метровом зеркальном космическом телескопе им. Хаббла (около сотни сверхновых в галактиках с красными смещениями $z \sim 1 \div 2$), наблюдается отклонение от моделей при $\Lambda = 0$. Наблюдения указывают на то, что эта постоянная отлична от 0. Две группы наблюдателей ([22] и [23]) пришли к одинаковым заключениям.

Современная диаграмма Хаббла представлена на рис. 8а, построенном по данным работы [22]. По осям отложены $\lg z$ и величина $D_{\text{bb}} = 44.832 + 5 \lg(2H_0 q_0^2 l_{\text{bb}}/c)$, где l_{bb} — расстояние по болометрической светимости. Величина D_{bb} равна разности наблюдаемой и абсолютной болометрических звездных величин, применяемых в астрономии.

Три кривые построены для моделей, содержащих пылевидное вещество и то, что мы называем вакуумом, с различными значениями Ω_{Λ}^0 и $\Omega_{\Lambda}^0 = c^2 \Lambda / 3H_0^2$. Нижняя и верхняя кривые соответствуют плоскому пространству,

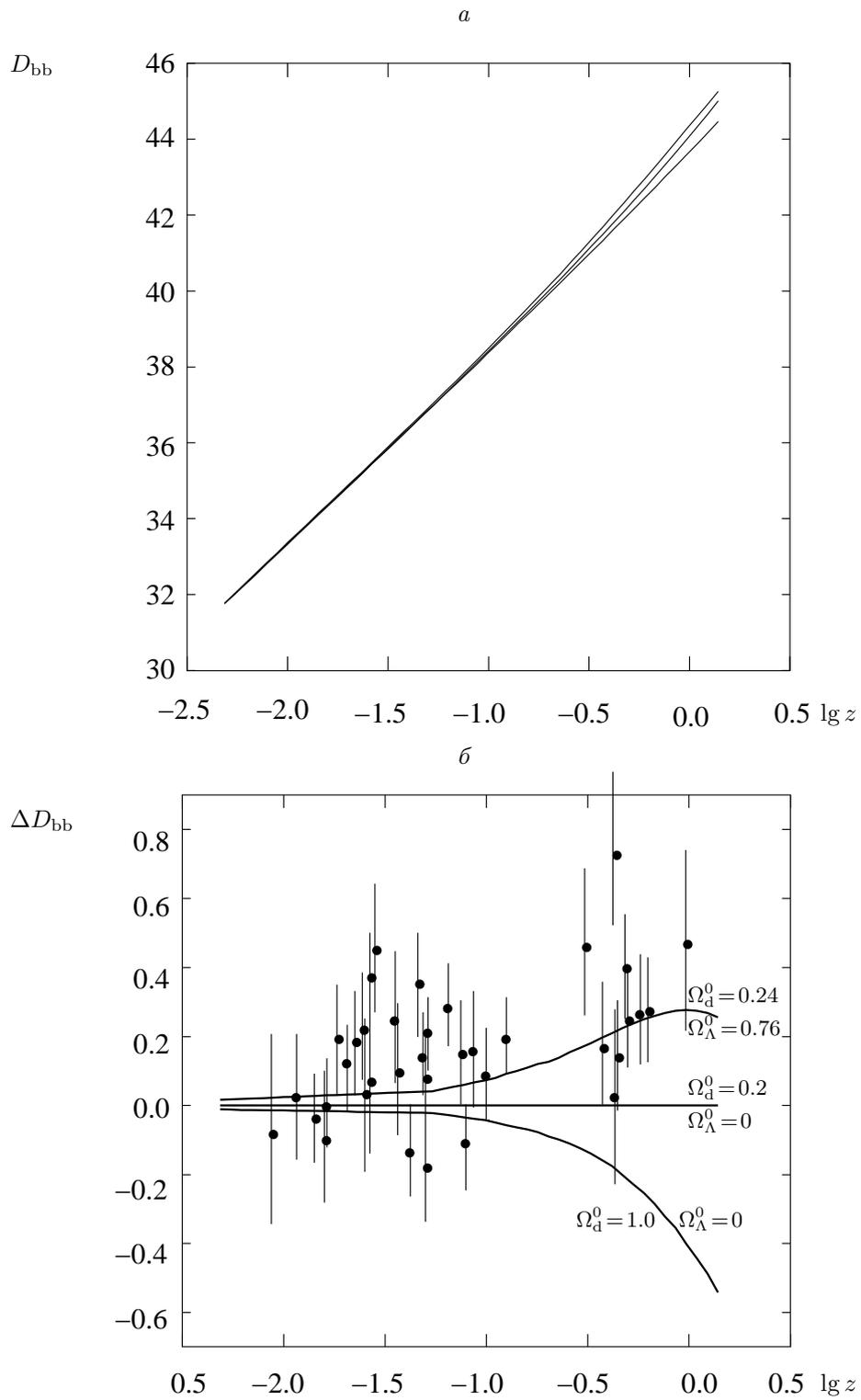


Рис. 8: Диаграмма Хаббла по современным данным.

а средняя — открытому, причем средняя и нижняя построены без учета влияния вакуума, то есть для $\Omega_\Lambda^0 = 0$ и, соответственно, $\Omega_d^0 = 0.20$ и 1.00 (модель чисто пылевидного вещества). При расчете верхней кривой принято, что $\Omega_M^0 = 0.24$, $\Omega_\Lambda^0 = 0.76$.

На рис. 8б диаграмма дана в увеличенном и нормализованном по отношению к средней кривой виде. Там же указаны точки, соответствующие наблюдениям, и средние ошибки (усы или error boxes). В самой правой части диаграммы наблюдаемые точки, полученные по сверхновым, поднимаются над двумя нижними кривыми и больше соответствуют верхней кривой, что дает основания к выводу о большом влиянии космологического слагаемого и, следовательно, вакуума.

Напомним, что построенная Э. Хабблом в 1929 году первоначальная диаграмма составляет самую левую и нижнюю часть современной диаграммы до $z \approx 0.004$ ($\lg z \approx -2.7$) и не поместилась на рисунке. К 1936 году диаграмма была продолжена до $z = 0.1$.

6. *Λ CDM-модель.* По данным наблюдений сверхновых и, как будет рассказано в дальнейшем, и по другим соображениям, моделью, наиболее адекватной нашей современной (реальной) Вселенной, является плоская двухкомпонентная модель, составляющими которой являются темное вещество (CDM - cold dark matter) и вакуум (или темная энергия), соответствующий лямбда-слагаемому уравнений тяготения Эйнштейна.

Однако, на ранних этапах эволюции Вселенной большую роль играли еще две компоненты материи, а именно, излучение и нейтрино. О них было сказано в главе II.

Глава IV. Наиболее адекватная модель

§ 1. Стандартная космологическая модель Λ CDM

1. *Параметры модели.* Современная космология стала наукой, основанной на данных наблюдений, которые теперь имеют достаточную точность для построения модели, наиболее адекватной настоящей Вселенной.

Самым существенным является обстоятельство, что пространство весьма близко к плоскому, поэтому принимается, что $k = 0$.

Единственной космической компонентой, плотность которой известна с большой точностью, является излучение. Современному значению температуры теплового реликтового фона (о нем рассказано в § 5 Главы II) $T_r^0 = 2.7277 \pm 0.002$ К отвечает плотность числа фотонов 411 $1/\text{см}^3$, а согласно закону Стефана—Больцмана плотность энергии $4.187 \cdot 10^{-13}$ эрг/ см^3 и массовая плотность $\rho_r^0 = 4.659 \cdot 10^{-34}$ г/ см^3 .

В произвольную эпоху температура реликтового излучения $T = T_0/a = T_0(1+z)$. К ней привязана температура нейтрино. Согласно формуле (II.27) $T_\nu = \sqrt[3]{4/11} T = 0.71377 T$, в частности, $T_\nu^0 = 1.9469$ К. Для шести типов нейтрино, которые являются не бозонами, а фермионами (II.28),

$$\rho_\nu^0 = 6 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} (T_\nu^0)^4 = 6.35 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3. \quad (1)$$

Вместе излучение и нейтрино имеют плотность

$$\rho_{\text{гв}}^0 = 1.10 \cdot 10^{-33} \text{ г/см}^3. \quad (2)$$

Значение современной критической плотности известно менее точно, так как величина постоянной Хаббла по различным определениям довольно долго колебалась от 40 до 80 км/с/Мпк. Поэтому обычно ее представляли в виде $H_0 = h \cdot 100$ км/с/Мпк = $3.24 \cdot 10^{-18} h$ 1/с. В последнее время интервал возможных значений H_0 сузился, считается, что она известна с погрешностью $6 \div 10$ % и заключена в промежутке (68, 79) км/с/Мпк. Поставлена задача в недалеком будущем довести точность определения этой постоянной до 1 %.

Среднее и наиболее приемлемое значение постоянной $H_0 \approx 70$ км/с/Мпк = $2.268 \cdot 10^{-18}$ 1/с, то есть $h = 0.70$, для которого и будут производиться все оценки. Для этого значения H_0 все остальные величины будут приводиться с 4–5 значащими цифрами.

Критическая плотность в нашу эпоху тогда

$$\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.879 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ г/см}^3 \approx 9.2071 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (3)$$

Современная доля излучения весьма мала, а именно

$$\Omega_r^0 = 2.4796 \cdot 10^{-5} h^{-2} \approx 5.0604 \cdot 10^{-5}. \quad (4)$$

Современные доли нейтрино и их суммы с излучением получаются такими:

$$\Omega_\nu^0 = 6.90 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_{\text{гв}}^0 = 1.196 \cdot 10^{-4}. \quad (5)$$

Следующий параметр, известный примерно с такой же относительной точностью, — это значение доли вакуума $\Omega_\Lambda^0 \approx 0.72$ [23,22]. На долю вещества остается

$$\Omega_d^0 = 1 - \Omega_r^0 - \Omega_\Lambda^0 = 0.27995 \approx 0.28. \quad (6)$$

Плотности вакуума и вещества следовательно

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda^0 \rho_c^0 = 6.6291 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3, \quad \rho_d = (1 - \Omega_r^0 - \Omega_\Lambda^0) \rho_c^0 \approx 2.5775 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (7)$$

По плотности темной энергии находится современное значение космологической постоянной $\Lambda = 3 \frac{\Omega_\Lambda^0}{(t_H^0)^2} = 1.24 \cdot 10^{-56}$ 1/ см^2 .

По плотностям можно рассчитать, какому числу атомов водорода (протонов) в одном кубическом метре сейчас они соответствуют. Получается, что критической плотности отвечает число 5.5, плотности вакуума около 4, плотности пылевого вещества 1.5, а плотности барионов всего 0.14. Совсем уж ничтожны содержания излучения $2.8 \cdot 10^{-4}$, нейтрино $3.8 \cdot 10^{-4}$ и даже их совместное содержание $6.6 \cdot 10^{-4}$. Все эти значения во много раз меньше тех, которые характерны для астрономических объектов: на Земле при нормальных условиях $2.7 \cdot 10^{19}$ (число Лошмидта), в атмосфере Солнца на его поверхности $\approx 10^{12}$, в планетарных туманностях 10^4 , в разреженной межзвездной среде ≈ 1 , но все это в одном кубическом сантиметре, а не метре. Из этих чисел следует, что большую часть космического пространства занимают пустоты, где плотность материи почти нулевая.

В то же время в 1 см^3 содержится $n_{\text{ph}}^0 = 412$ реликтовых фотонов и $6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{11} n_{\text{ph}}^0 = 674$ реликтовых нейтрино.

2. *Основные зависимости* Для плоской модели выполняются соотношения (1.79). Приведем их и здесь:

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{\text{rv}}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_{\Lambda}^0 a^4}} = H_0 t, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{\text{rv}}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_{\Lambda}^0 a^4}} = \eta. \quad (8)$$

Если ввести обозначения ($\Omega_{\text{rv}}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 + \Omega_{\Lambda}^0 = \Omega_{\text{t}} = 1$)

$$H_{\Lambda} = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda}^0}, \quad x_0 = \left(\frac{\Omega_{\Lambda}^0}{\Omega_{\text{rv}}^0} \right)^{1/4}, \quad \beta = \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(\Omega_{\text{rv}}^0)^{3/4} (\Omega_{\Lambda}^0)^{1/4}}, \quad \eta_* = (\Omega_{\text{rv}}^0 \Omega_{\Lambda}^0)^{-1/4}, \quad (9)$$

и сделать замену переменной $a = x/x_0$, то связи между переменными примут вид

$$H_{\Lambda} t = I_1(x, \beta), \quad \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad I_j(x, \beta) = \int_0^x \frac{x^j dx}{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}. \quad (10)$$

Приведем также дифференциальную форму первого из этих двух уравнений:

$$H = \frac{\dot{x}}{x} = H_{\Lambda} \frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x^2}. \quad (11)$$

При принятых значениях параметров модели параметр интегралов с переменным верхним пределом $\beta = 265.69$. Значения постоянных $H_{\Lambda} = 59.397 \text{ км/с/Мпк} = 1.9249 \cdot 10^{-18} \text{ 1/с}$, $x_0 = 8.8088$, $\eta_* = 10.381$. Возраст Вселенной согласно Стандартной модели с принятыми значениями параметров составляет $t_0 = I_1(x_0, \beta)/H_{\Lambda} = 13.722 \text{ Г лет}$.

3. *Роли компонент в различные эпохи.* Поскольку в полной и гравитирующей плотностях

$$\rho_{\text{t}} = \rho_{\text{c}} = \rho_{\text{d}} + \rho_{\text{rv}} + \rho_{\Lambda} = \rho_{\text{c}}^0 \Omega_{\Lambda}^0 \frac{1 + \beta x + x^4}{x^4}, \quad (12)$$

$$\rho_{\text{g}} = \rho_{\text{d}} + 2\rho_{\text{rv}} - 2\rho_{\Lambda} = \rho_{\text{c}}^0 \Omega_{\Lambda}^0 \frac{2 + \beta x - 2x^4}{x^4} \quad (13)$$

плотности компонент изменяются по-разному, в различные эпохи компоненты играли разные роли.

В определенные моменты плотности оказываются равными. Так как в гравитационную плотность компоненты дают другие вклады, а именно, излучение — двойной положительный, а вакуум — двойной отрицательный, то их воздействие выравливается в другие моменты. Все эти моменты приведены в Табл. 7, где показаны значения параметра x , красного смещения и координаты η , доли полного возраста и сам возраст Вселенной в соответствующие моменты, а также время, прошедшее от этих моментов до настоящей эпохи. Гравитационная плотность обращается в нуль при значении x , определяемом уравнением $x^4 - (\beta/2)x - 1 = 0$. Моменты, когда $\rho_{\text{d}} = \rho_{\Lambda}$ и когда $\rho_{\text{g}} = 0$, почти совпадают, так как плотности излучения и нейтрино тогда малы. Моменту, когда $\rho_{\text{rv}} = \rho_{\Lambda}$, отвечает значение x , очень близкое к 1.

Таблица 7: Моменты равенства плотностей и сил.

Эпоха	x	z	η	t/t_0	t Гигалет	$t_0 - t$
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\text{r}}$	0.00159	5529	0.0151	$1.34 \cdot 10^{-6}$	$1.85 \cdot 10^{-5}$	13,7
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\nu}$	0.00217	4057	0.0200	$2.41 \cdot 10^{-6}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$	13,7
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\text{r}}$	0.00319	2764	0.280	$4.90 \cdot 10^{-6}$	$6.72 \cdot 10^{-5}$	13,7
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\text{rv}}$	0.00376	2339	0.0324	$6.64 \cdot 10^{-6}$	$9.11 \cdot 10^{-5}$	13,7
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\nu}$	0.00434	2028	0.365	$8.59 \cdot 10^{-6}$	$1.72 \cdot 10^{-4}$	13,7
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\text{rv}}$	0.00752	1169	0.0572	$2.27 \cdot 10^{-5}$	$3.11 \cdot 10^{-4}$	13,7
$\rho_{\text{rv}} = \rho_{\Lambda}$	1.0000	7.809	1.198	0.0488	0.669	13,0
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\Lambda}$	5.1025	0.7264	2.7138	0.5261	7.219	6,5
$\rho_{\text{g}} = 0$	5.1050	0.7255	2.7144	0.5264	7.224	6,5
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\Lambda}$	6.4288	0.3702	2.983	0.7043	9.66	4,06
Соврем.	8.8088	0	3.32	1	13,7	0

Из приведенных оценок можно сделать заключение, что между моментами, когда плотности ультрарелятивистских компонент (излучения и нейтрино) сравниваются с плотностью вещества, а затем вакуума и вещества, проходит очень большое время. На протяжении большей части этого времени не играют роли или вакуум, или излучение с нейтрино. В связи с этим обстоятельством можно построить простую приближенную космологическую модель.

4. *Приближенное описание модели.* Применительно к сделанным выше оценкам современных значений долей составляющих плотности множитель при среднем слагаемом под корнем в знаменателе подинтегральных выражений интегралов в формулах (10) $\beta = 256.69$. В то же время, как уже отмечалось, в разные эпохи два других слагаемых, имеют разный порядок. При малых значениях аргумента x , то есть в ранние эпохи расширения Вселенной можно пренебречь слагаемым x^4 , что соответствует пренебрежимо малой роли вакуума в эти эпохи. Напротив, когда x достаточно велико, можно пренебречь единицей по сравнению с двумя другими слагаемыми, что отвечает малой роли излучения и нейтрино в эпохи, близкие к современной.

Вычислим интегралы в указанных противоположных случаях. При пренебрежении x^4 оба интеграла становятся табличными и указанные формулы принимают вид

$$I_1^{(1)}(x, \beta) = \frac{2}{\beta^2} \left[\frac{(1 + \beta x)^{3/2}}{3} - \sqrt{1 + \beta x} + \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{3} \frac{x^2}{\sqrt{1 + \beta x} + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \beta x} + 1} + 1 \right) = H_\Lambda t, \quad (14)$$

$$I_0^{(1)}(x, \beta) = \frac{2}{\beta} (\sqrt{1 + \beta x} - 1) = \frac{2x}{\sqrt{1 + \beta x} + 1} = \sqrt{\Omega_r^0 \Omega_\Lambda^0} \eta. \quad (15)$$

Из (15) следует соотношение

$$\sqrt{1 + \beta x} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Omega_d^0}{\sqrt{\Omega_r^0}} \eta, \quad (16)$$

которое приводит к квадратичной зависимости масштабного множителя от времени η :

$$a = \sqrt{\Omega_r^0} \eta + \frac{1}{4} \Omega_d^0 \eta^2 = \frac{1}{1 + z}. \quad (17)$$

Обратная формула

$$\eta = \frac{2a}{\sqrt{\Omega_r^0} + \Omega_d^0 a + \sqrt{\Omega_r^0}} = \frac{2}{\sqrt{1+z} \left[\sqrt{\Omega_r^0(1+z)} + \Omega_d^0 + \sqrt{\Omega_r^0(1+z)} \right]}. \quad (18)$$

Такая модель впервые рассматривалась в работе [24]. Подставив (16) в выражение (14), найдем

$$H_0 t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega_r^0} \eta^2 + \Omega_d^0 \frac{\eta^3}{6} \right). \quad (19)$$

Если в (10) отбросить 1, то интеграл в этой формуле тоже берется в элементарных функциях, достаточно заменить переменную интегрирования $x = \beta^{1/3} \text{sh}^{2/3} y$:

$$I_1^{(2)}(x, \beta) = \int_0^x \sqrt{\frac{x}{\beta + x^3}} dx = \frac{2}{3} \text{arsh} \sqrt{\frac{x^3}{\beta}}. \quad (20)$$

Эту неявную зависимость масштабного множителя от времени можно обратить и сделать явной:

$$a = \left(\frac{\Omega_d^0}{\Omega_\Lambda^0} \right)^{1/3} \text{sh}^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda^0} t \right) = \left(\frac{\Omega_d^0}{\Omega_\Lambda^0} \right)^{1/3} \text{sh}^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_\Lambda t \right). \quad (21)$$

Возраст Вселенной, вычисленный по приближенной формуле, получается равным 13.730 Гига лет.

Интеграл $I_0(x, \beta)$ в этом случае не является элементарной функцией. Он представляется в виде интеграла с переменным верхним пределом без параметров:

$$I_0^{(2)}(x, \beta) = \frac{2}{\beta^{1/3}} \int_0^{\sqrt{x}/\beta^{1/6}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^6}} = 2 \frac{x^{1/2}}{\beta^{2/3}} F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, -\frac{x^3}{\beta} \right). \quad (22)$$

Таким образом, интеграл выражается через гипергеометрическую функцию. При малых и больших значениях верхнего предела интеграл можно разложить в сходящиеся ряды.

§ 2. Вселенная согласно Стандартной модели

1. *Скорость расширения пространства.* Возьмем производную от функции Хаббла (11) по x :

$$\frac{d}{dx} \frac{H}{H_\Lambda} = -\frac{2}{x^3} \sqrt{1 + \beta x + x^4} + \frac{1}{x^2} \frac{\beta + 4x^3}{2\sqrt{1 + \beta x + x^4}} = -\frac{3\beta x + 4}{2x^3 \sqrt{1 + \beta x + x^4}}. \quad (23)$$

Эта производная отрицательна, так что функция при всех x убывает. При $x \rightarrow \infty$ она стремится к постоянной H_Λ , что отражает все возрастающую роль космологического слагаемого (вакуума). Производную по времени можно найти либо по формуле

$$\dot{H} = \frac{dH}{dx} \dot{x} = \frac{dH}{dx} H_\Lambda \frac{1 + \beta x + x^4}{x} = -H_\Lambda^2 \frac{3\beta x + 4}{2x^4}, \quad (24)$$

либо согласно уравнению (I.51) и выражению для гравитационной плотности (13):

$$\dot{H} = -H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_g = -H_\Lambda^2 \frac{1 + \beta x + x^4}{x^4} - \frac{4\pi G}{3} \frac{3H_0^2 H_\Lambda^2}{8\pi G H_0^2} \frac{2 + \beta x - 2x^4}{x^4} = -H_\Lambda^2 \frac{3\beta x + 4}{2x^4}. \quad (25)$$

Естественно, функция Хаббла строго убывает и со временем.

Найдем скорость расширения в зависимости от z . Точнее, найдем ее в функции от x , но x просто выражается через a , а следовательно, и через z :

$$x = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_r^0} \right)^{1/4} a = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_r^0} \right)^{1/4} \frac{1}{1+z}, \quad dz = - \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_r^0} \right)^{1/4} \frac{dx}{x^2}. \quad (26)$$

По формуле для скорости находим

$$\frac{v}{c} = H_0 \int_0^z \frac{dz}{H} = \frac{1}{(\Omega_\Lambda^0 \Omega_r^0)^{1/4}} \int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + \beta x + x^4}} = \frac{I_0(x_0, \beta) - I_0(x, \beta)}{(\Omega_\Lambda^0 \Omega_r^0)^{1/4}} = \eta_0 - \eta, \quad (27)$$

то есть безразмерная скорость расширения пространства прямо выражается через конформное время, чем является физический смысл этой переменной. В частности, η_0 — это скорость того места, где сейчас находится горизонт. Как показано в пункте 6 § 2 Главы II, скорость самого горизонта на единицу больше.

2. *Расстояния.* Поскольку модель плоская, все типы расстояний и скорость расширения выражаются через метрическое расстояние:

$$\tilde{l}_{pl} = \frac{v}{c} = \tilde{l}, \quad \tilde{l}_{ad} = \frac{\tilde{l}}{1+z}, \quad \tilde{l}_{nb} = \sqrt{1+z} \tilde{l}, \quad \tilde{l}_{bb} = (1+z) \tilde{l}. \quad (28)$$

На рис. 9 показаны зависимости четырех типов расстояний от параметра x и красного смещения z .

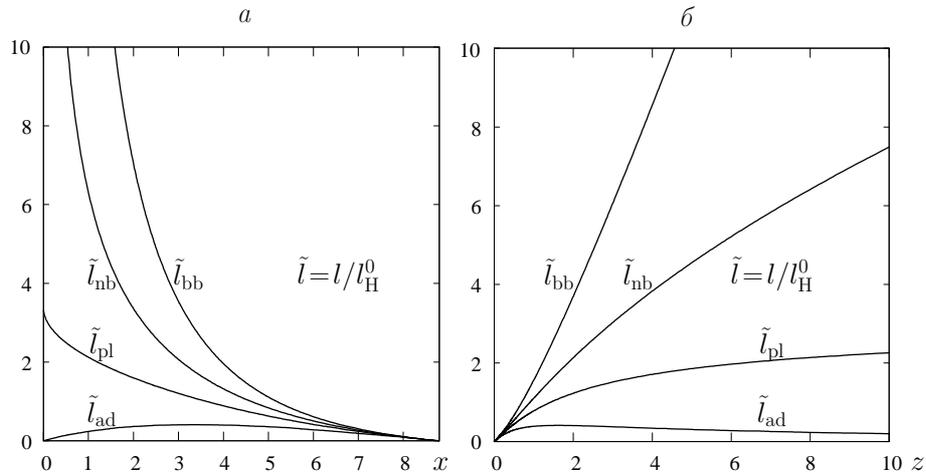


Рис. 9: Расстояния в зависимости от x (а) и z (б).

Отметим два момента, связанных с расстояниями: момент, когда расстояние по видимому размеру принимает максимальное значение ($z = 1.6302$), и когда метрическое расстояние оказывается равным хаббловскому ($z = 1.4233$). Само это расстояние равно $l_H^0 = c/H_0 = 1.3215 \cdot 10^{28}$ см = 14.2 Г св. лет = 4.2828 Гпк.

Скорость расширения пространства на хаббловском расстоянии по определению равна скорости света. Скорость изменения самого хаббловского расстояния находится с использованием уравнения (51):

$$\dot{l}_H = \frac{d}{dt} \frac{c}{H} = -\frac{c}{H^2} \dot{H} = \frac{c}{H^2} \left(H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_g \right) = c \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_g}{\rho_c} \right) = \frac{c}{2} \frac{4 + 3\beta x}{1 + \beta x + x^4}. \quad (29)$$

Из формулы следует, что в начале расширения эта скорость близка к двум световым, она уменьшается, а в отдаленном будущем устремится к нулю.

3. *Ускорения.* Ускорение космологического расширения находится с помощью первого уравнения в (I.41):

$$\dot{v} = \ddot{l} = \frac{d^2}{dt^2} l_H^0 a \chi = l_H^0 \ddot{a} \chi = \frac{\ddot{a}}{a} l = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g l = H_\Lambda^2 \frac{x^4 - \beta x/2 - 1}{x^4} l. \quad (30)$$

Как уже говорилось, в гравитационной плотности $\rho_g = \rho_d + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda$ плотности ρ_d и ρ_r с ростом возраста Вселенной убывают, а $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0$. Поэтому в числителе последней дроби в (30) роль первого слагаемого со временем возрастает. В настоящее время ($x = x_0$) гравитационная плотность отрицательна: $\rho_g^0 = \rho_d^0 + 2\rho_r^0 - 2\rho_\Lambda^0 = -1.0677 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$, так что расширение происходит с ускорением. Ускорение на современном хаббловском расстоянии, где по определению скорость равна скорости света, составляет весьма малую величину:

$$\dot{v}_H^0 = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g^0 l_H^0 = \frac{H_0 c}{2} (2\Omega_\Lambda^0 - \Omega_d^0 - 2\Omega_{r\nu}^0) = 3.94 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2 \approx 4 \text{ \AA/с}^2. \quad (31)$$

Ускорение на хаббловском расстоянии с течением времени возрастает, но остается конечным:

$$\dot{v}_H = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g l_H = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g \frac{c}{H} = H_\Lambda c \frac{x^4 - \beta x/2 - 1}{x^2 \sqrt{1 + \beta x + x^4}} \rightarrow H_\Lambda c = 5.77 \text{ \AA/с}^2. \quad (32)$$

Ускорение самого расстояния отрицательно:

$$\ddot{l}_H = -\frac{c}{2} \frac{H_\Lambda}{x} \frac{\beta + 16x^3 + 9\beta x^4}{(1 + \beta x + x^4)^{3/2}} \sim -c H_\Lambda \frac{9}{2} \frac{\beta}{x^3}. \quad (33)$$

Величины, связанные с движением горизонта, определим позже.

4. *Будущее Вселенной.* В далеком будущем при $t \rightarrow \infty$ масштабный множитель будет расти:

$$a = \frac{1}{1+z} \sim \left(\frac{\Omega_d^0}{4\Omega_\Lambda^0} \right)^{1/3} e^{H_\Lambda t} = 0.460 e^{H_\Lambda t}, \quad z \sim -1 + 2.2e^{-H_\Lambda t}, \quad x \sim 4.05 e^{H_\Lambda t}, \quad \eta \sim \eta_\infty - 2.56e^{-H_\Lambda t}, \quad \eta_\infty = 4.45. \quad (34)$$

Таким образом, масштаб Вселенной будет увеличиваться экспоненциально, то есть осуществится вторая инфляция, о которой скажем подробнее дальше. Однако, согласно (34) реально экспоненциальное расширение начнется лишь при $t \sim t_\Lambda = 1/H_\Lambda$. Масштаб времени $1/H_0 = 4.41 \cdot 10^{17} \text{ с} = 13.97 \text{ Гига лет}$, $t_\Lambda = 1/H_\Lambda = 5.195 \cdot 10^{17} \text{ с} = 16.46 \text{ Гига лет}$. Определим также расстояние $l_\Lambda = c/H_\Lambda = l_H^0/\sqrt{\Omega_\Lambda^0} = 1.557 \cdot 10^{28} \text{ см} = 5.047 \text{ Гпк}$.

§ 3. Эволюция красного смещения и видимой светимости

1. *Зависимость красного смещения от эпохи.* Как говорилось выше, масштабный множитель a , а следовательно и красное смещение $1 + z = 1/a$ привязаны к эпохе наблюдения. Поэтому значение z для каждого достаточно удаленного объекта должно изменяться с увеличением возраста Вселенной. Изменениям подвержены и наблюдаемые светимости объектов. На это обратил внимание А. Сэндедж. Он рассчитал эти изменения для модели пылевой материи при различных значениях Ω_d^0 . В приложении к статье МакВитти произвел такие же расчеты с добавлением космологического слагаемого. Позднее А. Лоеб (по-видимому, независимо) предложил определять изменения красного смещения z квазаров по наблюдениям L_α -леса на 10-метровом телескопе Кеск. Он же перевел эти изменения в изменения скоростей излучающих объектов. Все такие изменения стали называть эффектом Сэндеджа—Лоеба.

Найдем изменение z в зависимости от изменяющегося возраста Вселенной согласно Стандартной модели. Поскольку в этом параграфе существенна зависимость радиуса кривизны от времени, будем писать $R(t)$, не изменяя обозначения.

Красное смещение линий в спектре некоторого объекта, расположенного в месте, которое соответствует времени $t = t(\eta)$ от начала расширения при закрепленной эпохе в месте наблюдения $t_0 = t(\eta_0)$, как известно, определяется формулой $1 + z = R(t_0)/R(t)$. Тогда z однозначно связано со временем t , а в месте наблюдения $z = 0$. Для полного определения z следовало бы указывать оба времени в качестве аргументов, то есть писать

$z(t, t_0)$, однако по традиции этого не делается, так как подразумевается, что эпоха t_0 закреплена. В прошлом по отношению к ней значения $z > 0$, в будущем $-1 < z < 0$. В этом пункте аргументы явно не приводим.

Если прошло сколько-то времени, возраст Вселенной увеличился и эпоха, к которой привязываются красные смещения, перешла в момент $t'_0 = t(\eta'_0)$, то и объект, так сказать, переместился в момент $t' = t(\eta')$ без изменения своей пространственной координаты χ . Связь моментов испускания излучения и его принятия наблюдателем в терминах конформных координат при этом не изменяется, а разность времен эпох наблюдателя и объекта сохраняется:

$$\chi = \eta'_0 - \eta' = \eta_0 - \eta, \quad \eta'_0 - \eta_0 = \eta' - \eta. \quad (35)$$

В частности, будут равны и бесконечно малые смещения: $d\eta_0 = d\eta$. Из соотношения $cdt = R(t)d\eta$ и такого же в эпоху t_0 получается соотношение между дифференциалами времен и производная от одного по другому:

$$dt_0 = \frac{R(t_0)}{c}d\eta_0 = \frac{R(t_0)}{c}d\eta = \frac{R(t_0)}{c} \frac{c}{R(t)}dt = \frac{R(t_0)}{R(t)}dt, \quad \frac{dt}{dt_0} = \frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{1}{1+z}. \quad (36)$$

На самом деле последнее соотношение между ходом времени объекта и наблюдателя очевидно и уже было использовано в § 3 Главы II при переходе от расстояния по параллаксу к расстоянию по числу фотонов.

Чтобы обнаружить изменения z , надо измерять смещения линий в спектре одного и того же объекта (с одним и тем же значением координаты χ) в моменты, разделенные некоторым промежутком времени. Желательно, чтобы такой промежуток был значительно меньше, чем сами времена, тогда приращения величин можно заменить их дифференциалами (бесконечно малыми) и достаточно найти производные изменяющихся величин. С помощью (36) находим

$$\frac{dR(t)}{dt_0} = \frac{dR(t)}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \dot{R}(t) \frac{R(t)}{R(t_0)}, \quad \frac{dR(t_0)}{dt_0} = \dot{R}(t_0). \quad (37)$$

Отсюда получаем

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{d(1+z)}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t)} - \frac{R(t_0)}{R^2(t)} \dot{R}(t) \frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \frac{R(t_0)}{R(t)} - \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = H_0(1+z) - H. \quad (38)$$

Зависимость H от z получается, если в (IV.11) вместо x подставить $x_0/(1+z)$:

$$H = \frac{\dot{x}}{x} = H_\Lambda \frac{\sqrt{1+\beta x+x^4}}{x^2} = H_\Lambda \sqrt{1+\beta \left(\frac{1+z}{x_0}\right)^3 + \left(\frac{1+z}{x_0}\right)^4}. \quad (39)$$

2. *Эволюция видимой светимости объектов.* Изменение красного смещения должно приводить к изменению наблюдаемой светимости объектов. Скорость изменения фотометрического расстояния в современную эпоху $l_{bb}^0 = l^0(1+z)$ согласно (38), равна

$$\frac{dl_{bb}^0}{dt_0} = \dot{l}^0(1+z) + l^0 \frac{dz}{dt_0} = H_0 l^0(1+z) + l^0 [H_0(1+z) - H] = \left(2H_0 - \frac{H}{1+z}\right) l_{bb}^0. \quad (40)$$

Тогда ($L_{bb} = L_O/4\pi l_{bb}^2$)

$$\dot{L}_{bb}^0 = -2 \frac{L_O}{4\pi (l_{bb}^0)^3} \frac{dl_{bb}^0}{dt_0} = -2 \frac{L_{bb}^0}{l_{bb}^0} \frac{dl_{bb}^0}{dt_0} = -2L_{bb}^0 \left(2H_0 - \frac{H}{1+z}\right), \quad \frac{1}{H_0} \frac{d \ln L_{bb}^0}{dt_0} = -2 \left(2 - \frac{1}{1+z} \frac{H}{H_0}\right). \quad (41)$$

На рис. 10 (для краткости производная dz/dt_0 обозначена \dot{z}) отражены зависимости \dot{z}/H_0 и отношения $\dot{z}/[H_0(1+z)]$ от (современного) красного смещения z . Сначала скорость \dot{z} положительна, то есть z возрастают. В нуль производная \dot{z} обращается при $z = 2.34$. Между двумя нулями в точке $z = 1.06$ располагается максимум, равный 0.280. Красные смещения более далеких объектов ($z > 2.34$) уменьшаются, причем скорость уменьшения с удалением быстро растет. У отношения эти закономерности выражены слабее. Нули \dot{z} и $\dot{z}/(1+z)$ совпадают, а максимум отношения, естественно, меньше, он равен 0.148 и достигается при меньшем $z = 0.726$.

На том же рисунке помещен график обезразмеренной производной по времени от логарифма видимой светимости как функции z . При $z = 0$ эта производная равна -2 , что отражает уменьшение телесного угла источника в самом начале его удаления от наблюдателя. При небольших z скорость уменьшения слегка растет, при $z = 0.726$ имеет (отрицательный) максимум, затем уменьшается и при $z = 13.2$ обращается в нуль. Наблюдаемая яркость далеких объектов с красным смещением $z > 13.2$ должна возрастать и тем сильнее, чем объект дальше, хотя неясно, что это за объекты, так как такие красные смещения соответствуют времени от начала расширения, меньшему 326 миллионов лет, что составляет долю 0.0238 от современного возраста Вселенной.

Измерять изменения всех этих величин удобнее всего при наблюдениях L_α -леса, то есть смещения линии L_α в спектрах облаков галактик, расположенных на пути излучения более далеких квазаров. Облака эти могут

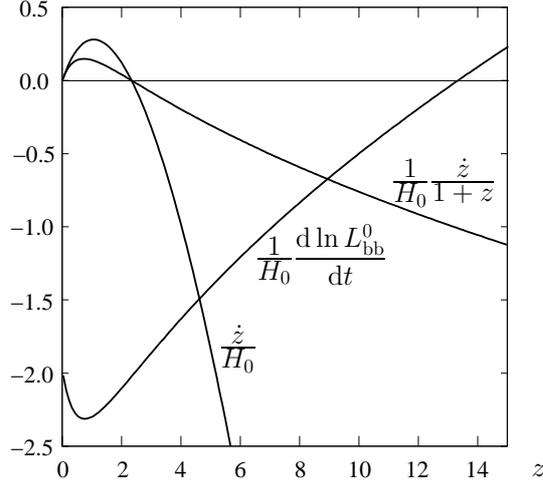


Рис. 10: Изменения красного смещения и светимости как функции от z .

передвигаться с некоторыми скоростями. Их лучевая компонента может влиять на наблюдаемые смещения линий. Однако, хотя в измерения изменений положений линий войдет изменение скоростей облаков, но весьма маловероятно, что их скорости за время между наблюдениями изменятся сколько-нибудь заметно.

Несмотря на важность эффекта с точки зрения проверки теории, реальная возможность его наблюдения современными приборами требует слишком большого промежутка времени между наблюдениями, сравнимого с сотнями лет (до порядка тысячи). Так как $\lambda(t_0)/\lambda(t) = 1 + z(t, t_0)$, то $d\lambda_0/\lambda_0 = dz/(1+z)$ и

$$dt_0 = \frac{1}{H_0} \frac{dz/(1+z)}{z/[H_0(1+z)]}. \quad (42)$$

Например, если принять, что точность измерения относительного смещения линий $d\lambda/\lambda = dz/(1+z) = 10^{-6}$, то при $z = 4$, как видно из рисунка, $z/[H_0(1+z)] \approx -0.2$ и $dt_0 \sim 14 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}/0.2 = 3 \cdot 10^3$ лет — промежуток времени, незначительный по космологическим масштабам, но слишком большой для человечества. При больших z точность измерения положений линий меньше, так что приходится надеяться на происходящий технологический прогресс.

Оценена возможность детектирования смещения линий из-за космологического расширения в спектрах различных объектов в разных диапазонах и при разных космологических моделях после введении в строй телескопов с ультрабольшими размерами зеркал (40–60 м), планируемого на двадцатые годы 21 века. Утверждается, что на 42-м телескопе можно будет измерить такое смещение, если наблюдать 4000 часов после 40 летнего перерыва. В этой же статье дан обзор предшествующих работ, посвященных проблеме изменения красного смещения.

3. *Независимые константы и переменные.* Так как красное смещение и масштабный множитель изменяются с увеличением возраста Вселенной, возникает необходимость найти переменные, свободные от этого эффекта. Здесь выявим переменные, обладающие тем же свойством в рамках модели с невзаимодействующими компонентами, представленной в § 3 и 4 Главы I.

Сначала напомним постоянные величины. Это прежде всего космологическая постоянная Λ и связанная с ней массовая плотность темной энергии (вакуума) $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$.

Другой постоянной величиной является масса пыли, заключенная в сфере радиусом, равным радиусу кривизны: $M_d = \frac{4\pi}{3} \rho_d R^3$. Написанная формула, справедливая при неплоских моделях, не подходит для плоской модели, так как радиус кривизны в ней бесконечен. Выход из этого затруднения был указан в последнем (с номером 2) пункте § 5 Главы I: в качестве значения радиуса кривизны можно взять хаббловское расстояние c/H_0 .

Наконец, третьей основной постоянной величиной служит константа, связанная с излучением и нейтрино: $W = 4\pi \rho_{\nu} R^4$. И для этой величины при плоской модели можно R_0 заменить на c/H_0 .

Через три основных постоянных выражаются константы, входящие в формулы (IV.9–(IV.10), определяющие модель. Это следующие величины:

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c, \quad \eta_* = (\Omega_{\nu}^0 \Omega_\Lambda^0)^{-1/4} = \left(\frac{9}{2} \frac{c^2}{GW\Lambda} \right)^{1/4} \quad (43)$$

$$\beta = \frac{\Omega_d^0}{(\Omega_{\nu}^0)^{3/4} (\Omega_\Lambda^0)^{1/4}} = \frac{3M_d}{W^{3/4} (4\pi \rho_\Lambda)^{1/4}}. \quad (44)$$

(45)

Независимыми от эпохи являются и переменные, использованные в тех же формулах, а именно, переменные x и η . Первая пропорциональна радиусу кривизны:

$$x = x_R R, \quad x_R = \left(\frac{4\pi\rho_\Lambda}{W} \right)^{1/4}. \quad (46)$$

Отсюда находится и выражение для параметра x_0 , который связывает независимую переменную x с масштабным множителем $x = x_0 a$:

$$x_0 = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_{\text{rv}}^0} \right)^{1/4} = x_R R_0 = \left(\frac{4\pi\rho_\Lambda}{W} \right)^{1/4} R_0. \quad (47)$$

Наконец, через независимые переменные можно записать и метрику:

$$ds^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\eta^2 - dx^2 - \sin_k^2 \chi d\omega^2]. \quad (48)$$

Здесь в квадратных скобках все переменные независимы, а множитель

$$\frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) = \frac{c^2}{H_0^2} \frac{x^2}{x_0^2} = \frac{c^2}{H_0^2} \frac{x^2}{\frac{c^2}{H_0^2} (4\pi\rho_\Lambda/W)^{1/2}} = \frac{x^2}{\sqrt{4\pi\rho_\Lambda/W}}. \quad (49)$$

Поскольку мы живем в современную эпоху, ее параметры принимаются за основные и определяются временная и пространственная координаты для всех эпох одинаково, то есть конформное время η и безразмерную пространственную координату χ .

4. *Константы при Стандартной модели.* При этой модели величины, не зависящие от эпохи, к которой привязано красное смещение, принимают численные значения.

Так как Стандартная модель описывает плоскую Вселенную, то вместо современного радиуса кривизны берется хаббловское расстояние $R_0 = c/H_0$. Тогда для всех констант получаются численные значения. Некоторые из них уже приводились, но здесь они вычисляются по формулам, выражающим их через три основных постоянных. Напомним их и приведем их численные значения.

Исходные постоянные величины это, во-первых, космологическая постоянная $\Lambda = 1.24 \cdot 10^{-56} \text{ л/см}^2$ и связанная с ней массовая плотность темной энергии (вакуума) $\rho_\Lambda = 6.63 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$. Во-вторых и в третьих, масса шара с пылью радиусом $R_0 = c/H_0$ и величина, связанная с излучением и нейтрино:

$$M_d = \frac{4\pi}{3} \Omega_d^0 \rho_c^0 \frac{c^3}{H_0^3} = 2.49 \cdot 10^{55} \text{ г}, \quad W = 4\pi \Omega_{\text{rv}}^0 \rho_c^0 \frac{c^4}{H_0^4} = 4.22 \cdot 10^{80} \text{ г} \cdot \text{см}. \quad (50)$$

Величины, выражающиеся через эти три постоянные, принимают следующие значения:

$$H_\Lambda = 59.4 \frac{\text{км}}{\text{с Мпк}} = 1.925 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{с}}, \quad \beta = 265.69, \quad \eta_* = 10.381, \quad (51)$$

$$x_R = 6.6655 \cdot 10^{-28} \frac{1}{\text{см}}, \quad x_0 = x_R \frac{c}{H_0} = 8.8088. \quad (52)$$

Глава V. Физические процессы во Вселенной

§ 1. Состояние материи во Вселенной в разные эпохи

1. *Стадии истории горячей вселенной.* Приняв определенную космологическую модель, можно рассчитать, как протекали физические процессы в ходе эволюции Вселенной. В разных руководствах выделяют различное количество периодов, которые характеризуются своими процессами. Здесь выделено таких периодов (или стадий) для ровного счета 10.

Перечислим эти стадии в ретроспективном порядке.

1) Современная стадия. Она характеризуется низкой температурой основной составляющей излучения — реликтового — от нескольких градусов до $3 \div 4$ тысяч градусов. В этот период вещество нейтрально, прозрачно для РИ, и они расширяются независимо.

2) Стадия частичной ионизации.

3) Стадия полной ионизации. При температурах, превышающих $\sim 10^4$ К, водород почти полностью ионизован, а при $4 \cdot 10^3$ К — почти полностью нейтрален. Соответствующие значения красного смещения $z = 3600$ и $z = 1500$. Последнее значение z называется эпохой рекомбинации. При $T > 50000$ К ($z > 6000$) полностью ионизован гелий.

4) Эра радиационно доминированной плазмы (РДП). Границы этой стадии широки: она начинается с температур, соответствующих энергии покоя электрона, когда еще возможны рождения пар электрон-позитрон, а заканчивается перед эпохой рекомбинации.

5) Лептонная стадия (лептоны — частицы, не участвующие в сильном взаимодействии). Температура еще более высокая, вплоть до соответствующей массе покоя пи-мезонов.

6) Адронная стадия. Здесь происходят рождения и аннигиляции нуклонов, электронов и позитронов, мезонов, нейтрино и других частиц. При $z = 5 \cdot 10^{10}$ плотность вещества достигает ядерной $2.8 \cdot 10^{14}$ г/см³.

7) Эпоха квантовой хромодинамики (КХД). Доминирует сильное взаимодействие.

8) Эпоха электро-слабого объединения (эл.-сл.). Здесь энергии достаточны для того, чтобы не различать лептоны.

9) Эпоха великого объединения (вел. об.) — всех квантовых взаимодействий. Лептоны и другие частицы приобретают энергии, характерные для сильного взаимодействия.

10) Эпоха сверхобъединения (сврхоб.) Объединяются все четыре типа мировых взаимодействий: электромагнитное, слабое, сильное и гравитационное.

Названия эпох по видам объединений объясняется тем, что константы связи физических взаимодействий слабо, но зависят от энергий взаимодействующих частиц и при энергиях, характерных для указанных эпох, уравниваются.

2. *Характеристики стадий.* В табл. 8 приводятся величины, характеризующие перечисленные стадии эволюции Вселенной. Точнее, указаны границы, разделяющие соседние стадии. Не следует относиться слишком строго к численным значениям этих границ, но общую картину они демонстрируют.

Таблица 8: Эпохи эволюции горячей Вселенной

T (K)	$\rho_c \left(\frac{g}{cm^3} \right)$	$k_B T$	z	t (с)	№	Эпохи
2.7	$8.7 \cdot 10^{-30}$	$4 \cdot 10^{-16}$ эрг	0	$3 \cdot 10^{17}$	1.	Современная
$4 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{-20}$	$5.5 \cdot 10^{-13}$ эрг	1500	$5 \cdot 10^{12}$	2.	Частич. иониз.
$4 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-12}$ эрг	15000	$1.7 \cdot 10^{11}$	3.	Полная иониз.
$7 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^{-16}$	10^{-11} эрг	25000	$4.6 \cdot 10^{10}$	4.	РДП
$6 \cdot 10^9$	$1.1 \cdot 10^4$	511 кэВ	$2 \cdot 10^9$	10	5.	Лептонная
10^{12}	$8 \cdot 10^{13}$	0.1 ГэВ	$4 \cdot 10^{11}$	10^{-3}	6.	Адронная
$5 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{20}$	260 ГэВ	$2 \cdot 10^{13}$	10^{-7}	7.	КХД
$3 \cdot 10^{15}$	$5 \cdot 10^{27}$	10^3 ГэВ	$1 \cdot 10^{14}$	10^{-11}	8.	Электр.-слаб.
10^{29}	$5 \cdot 10^{79}$	10^{16} ГэВ	$4 \cdot 10^{27}$	10^{-37}	9.	Великое объедин.
10^{32}	$5 \cdot 10^{93}$	10^{19} ГэВ	$4 \cdot 10^{31}$	10^{-43}	10.	Сверхобъедин.

Границами между стадиями являются характерные значения температуры T (и энергии $k_B T$). Некоторые из них получаются как комбинации размерных величин, играющих существенную роль в каждой из стадий. Соответствующие значения t и z вычисляются по приведенным выше формулам. Ориентировочные их значения приведены в Табл. 8.

Граница между стадиями 4) и 5) определяется энергией покоя электрона $mc^2 = 0.511$ МэВ. Ей соответствует температура $6 \cdot 10^9$ К. Между 5) и 6) основная величина — энергия покоя пи-мезона, в 264 раз большая электронной у нейтрального и в 273 раза — у заряженных мезонов: 0.13 ГэВ = 10^{13} К. Далее, между 6) и 7) пограничная энергия составляет 5 ГэВ, а между 7) и 8) — 1000 ГэВ, соответствующие температуры — $5 \cdot 10^{13}$ и $3 \cdot 10^{15}$ К. Стадия 9) начинается на значительно больших энергиях — 10^{14} ГэВ. Наконец стадии 10) отвечают фантастические значения величин, называемые планковскими. Они получаются комбинациями трех физических постоянных: скорость света, постоянные Планка и тяготения. Подробное перечисление планковских величин мы пока отложим.

3. *Физические процессы в различные периоды.* Теория физических процессов в ранней Вселенной тесно связана с физикой элементарных частиц и физикой высоких энергий. Эти три ветви физической науки развивались и развиваются параллельно.

Во все периоды расширения от самого начала до 4) включительно совокупность частиц и излучения находилась в состоянии ТДР. В период 10) (теория сверхобъединения еще не создана), ближайший к Большому Взрыву, все частицы имеют настолько большие энергии, что фактически не различаются. Все они участвуют во взаимных превращениях, причем не существенно, гравитон это или фотон, фермион или бозон. Первоначально все они имеют массу покоя, равную нулю, и подчиняются высокой степени симметрии. Постепенно, для некоторых из них условие симметрии нарушается, происходит, как говорят, спонтанное нарушение симметрии. Частицы приобретают массу и обособляются.

Первыми отрываются от общего взаимодействия частицы, связанные с гравитацией (гравитоны), с переходом к стадии 9). Они перестают участвовать в общем обмене. Выжившая их часть отрывается от остальных и в дальнейшем распространяется свободно. Остаются все “квантовомеханические” частицы.

Большинство элементарных частиц существуют парами частица-античастица (в это число не входят фотон, нейтральный пи-мезон и некоторые другие). Кроме того, согласно теории должно существовать множество тяжелых (в обычных условиях, то есть с большой массой покоя) частиц: фотино, гравитино, нейтралино, хиггсино и др.

В частности, на этой стадии должны существовать монополи, то есть магнитные заряды, имеющие только один полюс. Однако попытки обнаружить остаток их сейчас пока к успеху не привели.

По-видимому, уже на этой стадии, при энергиях порядка 10^{15} ГэВ, проявляется некоторая положительная разность между числом протонов и антипротонов, что впоследствии приводит к асимметрии нашего мира относительно вещества и антивещества. Доля этой нескомпенсированной части может быть всего 10^{-9} от общего числа нуклонов в ту эпоху.

Характерная энергия эпохи квантовой хромодинамики $\approx 10^{14}$ ГэВ. Чтобы разогнать заряженную частицу до таких энергий, имея в виду, что на наибольшем современном ускорителе длиной в 2 мили получают энергии в 50 ГэВ, нужно было бы построить линейный ускоритель длиной в 2 пк, то есть в 6.5 световых лет. Это расстояние больше, чем до ближайшей звезды — 1.3 пк. Поэтому единственная лаборатория для исследования таких частиц — Вселенная в ее горячей стадии. Дело осложняется тем, что такие частицы в большом количестве были давно, а потом почти полностью исчезли, так что для их обнаружения сейчас нужно затрачивать очень большие средства. Тем не менее физики и астрофизики надеются найти их реликтовые количества.

В течение этой эпохи, согласно теории того же названия, кварки, имеющие дробный заряд ($1/3$ и $2/3$), объединяются в частицы с целым зарядом.

Постепенно, в течение стадий 8), 7) и 6), обособляются все новые частицы, сначала адроны, потом лептоны, обнаруживаются их характерные признаки. Многие из них перестают существовать в заметных количествах.

С понижением температуры вымирают и другие частицы. В течение стадии 6), адронной, сначала исчезают пи-мезоны, в конце аннигилируют протоны и антипротоны, нейтроны и антинейтроны. Если бы числа протонов и антипротонов, а также других частиц и античастиц были абсолютно одинаковы, то сейчас привычного для нас вещества не было бы совсем. Все частицы аннигилировали бы и создали мощное поле излучения.

Лептонная эпоха 5) содержит события, связанные с легкими частицами. При энергии 10^{-2} ГэВ аннигилируют мю-мезоны, при 10^{-3} ГэВ от вещества отрываются нейтрино и антинейтрино, которые в дальнейшем летят свободно, не взаимодействуя ни с чем. Зарегистрировать их очень трудно и пока не удается. К исходу стадии 5) аннигилируют электроны и позитроны, их энергия превращается в энергию фотонов, как и энергия аннигилировавших ранее протонов и антипротонов. Термодинамические соображения показывают, что температура реликтового излучения за счет произошедшей аннигиляции частиц и античастиц должна быть выше, чем температура реликтовых нейтрино, оторвавшихся от остального вещества раньше (сейчас примерно 2 К). На этой же стадии, при температурах $T = 10^{11} \div 10^9$ К, происходит первичный нуклеосинтез, который обсудим в следующем пункте.

В конце стадии 4) излучение также отрывается от вещества, и плотность его становится ниже плотности вещества. А с эпохи рекомбинации излучение распространяется свободно, так как вещество прозрачно для этого излучения. Наступает время, когда излученные фотоны становятся доступны наблюдениям в неизменном виде, подвергаясь только красному смещению. До этого все они испытывали взаимодействие с веществом посредством, в основном, томсоновского рассеяния, а также тормозных процессов. Фотоны изменяли свои импульсы, а значит направление и (в меньшей степени) энергию, так что информация, которую они несли, в значительной мере замыкалась. Этим взаимодействием определяется тот физический горизонт, о котором упоминалось в связи с геометрическим горизонтом. Сфера радиусом, равным расстоянию до физического горизонта, называется также сферой последнего рассеяния.

Все же некоторые сведения о Вселенной до эпохи рекомбинации могут быть получены из данных о первичном нуклеосинтезе, из флуктуаций РИ, из реликтовых нейтрино и гравитационных волн. Первые два источника уже дали такие сведения (см. ниже), на два последних ассигнуются значительные суммы и возлагаются большие надежды.

Тогда же начинают образовываться атомы водорода. Незадолго до этого развиваются неоднородности, приводящие в дальнейшем к образованию галактик и их скоплений.

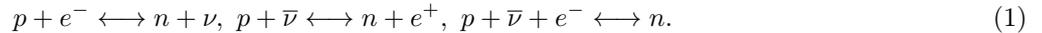
Многие вопросы этой теории разработаны еще недостаточно. Но ряд недостатков удалось преодолеть в рамках теории инфляции, о которой скажем отдельно.

§ 2. Образование химических элементов

Химические элементы с порядковыми номерами, большими 2, образуются, в основном, в звездах в ходе ядерных и термоядерных реакций. Процесс же образования самых распространенных в природе элементов — водорода и гелия — начинается до возникновения звезд.

После аннигиляции протонов и антипротонов вещество становится обычным по ассортименту частиц. Однако состояние его еще очень специфично. Не только нейтральные атомы, но даже ядра при температурах, превышающих десять миллиардов кельвинов, не могут существовать, они разбиваются окружающими частицами. Основными частицами в таком веществе являются электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино и антинейтрино.

Равновесие между протонами и нейтронами устанавливается за счет реакций слабого взаимодействия



При температуре $T \gg 10^{10}$ К ($E \gg 0.8$ МэВ) числа протонов и нейтронов приблизительно равны. При меньших температурах доля протонов возрастает, так как отношение их равновесных концентраций $n/p = \exp(-Q/k_B T)$, где $Q = 1.293$ МэВ, а Q/c^2 — разность масс нейтрона и протона. По мере расширения и охлаждения Вселенной активность реакций (1) падает, равновесие нарушается, и отношение n/p стабилизируется, немного уменьшившись за счет распада нейтронов. Доля нейтронов остается на уровне 0.15.

При уменьшении температуры ниже десяти миллиардов кельвинов ($E < 0.8$ МэВ) начинают образовываться простейшие ядра. В дальнейшем все нейтроны соединяются с протонами. В результате образуются ядра ${}^4\text{He}$, небольшие доли ${}^3\text{He}$, дейтерия и лития. Некоторые более сложные ядра также образуются, но в количествах, меньших на несколько порядков. Эти процессы заканчиваются через ≈ 300 с после начала расширения. После этого температура уже недостаточна для протекания ядерных реакций.

Так как почти все нейтроны попали в ядра изотопа гелия ${}^4\text{He}$, причем каждый нейтрон там соединился с протоном, то на гелий пошла доля $2 \cdot 0.15 = 0.3$ от всего остального вещества. Точнее говоря, эта доля заключена между 0.26 и 0.32. Остальное, в основном, протоны и небольшая добавка дейтерия.

Впоследствии дейтерий идет на образование гелия, так что остается его очень мало. Количество оставшегося дейтерия зависит от плотности и, следовательно, жестко связано с плотностью в современную эпоху.

Описание хода первичного нуклеосинтеза сильно зависит от скоростей ядерных реакций при высоких температурах. Эти скорости все время уточняются, так что первичные содержания элементов приходится пересчитывать. Наблюдения современного содержания гелия и дейтерия также очень сложны. Необходимо уметь отделить первоначальные элементы от образовавшихся в звездах позднее. В старых звездах нашей Галактики содержание ${}^4\text{He}$ очень близко к 0.3. Дейтерий составляет долю 10^{-5} от водорода, чем отвергаются многие модели Вселенной и подтверждается ее стандартная модель. Определенные из наблюдений содержания ${}^7\text{Li}$ и ${}^3\text{He}$ также находятся в хорошем согласии со стандартной моделью и служат ее подтверждением.

На рис. 11, построенном по данным статьи [25], представлены относительные (по отношению к водороду) содержания первичных гелия ${}^4\text{He}/\text{H}$, дейтерия вместе с более легким изотопом гелия ($\text{D}+{}^3\text{He}$)/H и лития ${}^7\text{Li}/\text{H}$, рассчитанные в зависимости от современных значений плотности вещества и отношения чисел нуклонов и фотонов, умноженного на 10^{10} , η_{10} (точнее, от $\lg \eta_{10}$). Все величины даны с указанием доверительных интервалов в два стандартных отклонения. Две вертикальные прямые показывают границы допустимых значений аргумента η_{10} , согласующихся с данными наблюдений. Результаты статьи [25] воспроизведены и уточнены в обзоре [26].

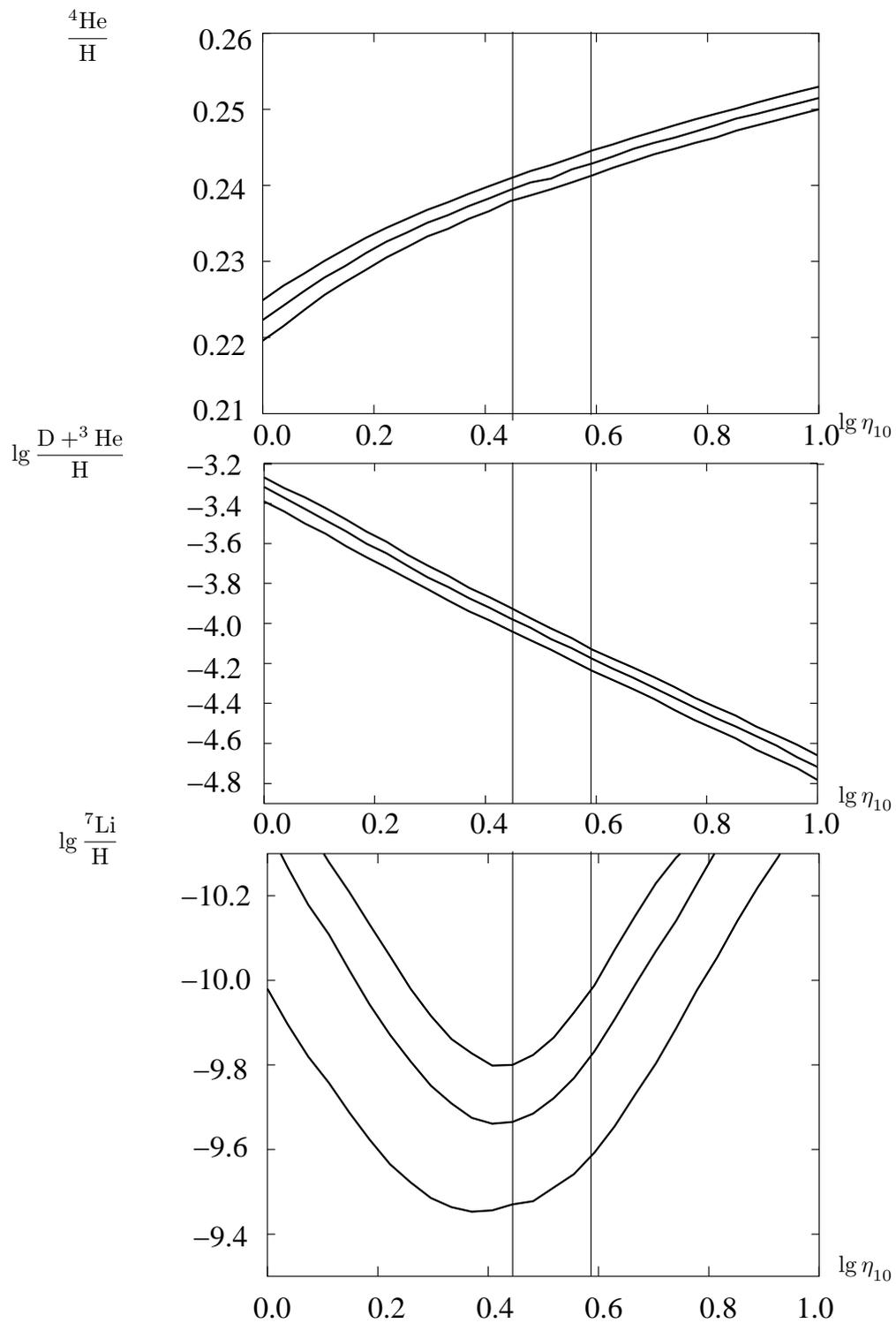


Рис. 11: Содержания первичных гелия, дейтерия и лития в зависимости от значения η_{10} .

После синтеза гелия расширение проходит почти без изменений состава вещества. Так продолжается миллион лет, пока температура не упадет до значения 4000 К. К тому времени протоны захватывают электроны и образуются атомы. Основной элемент Вселенной — водород — становится нейтральным (впоследствии межгалактический газ ионизуется образующимися звездами, галактиками и квазарами). Тогда, во-первых, возникает возможность образования структур Вселенной, а во-вторых, возможность для нас изучать протекавшие процессы через наблюдения свечения объектов, расположенных ближе физического горизонта, так как излучение именно с этого места перестает взаимодействовать с веществом.

Глава VI. Образование крупномасштабной структуры Вселенной

§ 1. Теория Джинса

1. *Основные уравнения теории Джинса.* Впервые вопрос о поведении возмущений стационарного однородного вещества в создаваемом им гравитационном поле (самогравитация) рассмотрел Джинс в 1902 году. Он исходил из системы уравнений нерелятивистской газодинамики, а именно, уравнений неразрывности, движения и Пуассона. Добавим к этим уравнениям условие сохранения энтропии и напишем получившуюся систему в форме, приведенной в книге Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) S = 0. \quad (4)$$

Здесь использованы обычные обозначения: ρ — плотность вещества, \vec{v} — его скорость, P — давление, φ — гравитационный потенциал, G — постоянная тяготения, Δ — оператор Лапласа, S — энтропия единицы массы. Градиенты и дивергенции берутся по координатам, составляющим радиус-вектор \vec{r} , t — время. Вакуум Джинс учитывать не мог.

Стационарными (невозмущенными) решениями уравнений (1)–(4) принимались

$$\rho = \rho_o = \text{const}, \quad S = S_o = \text{const}, \quad \vec{v} = 0, \quad \varphi = \varphi_o = \text{const}, \quad P = P_o = P(\rho_o, S_o). \quad (5)$$

Здесь и далее индекс o относится к невозмущенным величинам.

Сразу же отметим притворение в рассуждениях Джинса. Он считал, что гравитационный потенциал φ_o постоянен, то есть не зависит от координат, что может быть принято в уравнении движения (2), но не согласуется с уравнением Пуассона (3).

Примем, что возмущения всех величин имеют гармонический характер, то есть

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_o + \rho_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (6)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (7)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_o + \varphi_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (8)$$

$$S(\vec{r}, t) = S_o + S_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (9)$$

Такое представление равносильно разложению произвольных возмущений в интегралы Фурье и выбору моды с одним волновым числом. Волновой вектор будем считать закрепленным.

Комплексный вид возмущений не приводит ни к каким трудностям. Можно считать, что физический смысл имеют вещественные части решений, как это делается в электродинамике при рассмотрении распространения монохроматических или плоских волн.

Поскольку давление является функцией плотности и энтропии, разложим его согласно формуле Тейлора первого порядка:

$$P = P_o + \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho - \rho_o) + \frac{\partial P}{\partial S}(S - S_o) = P_o + [c_s^2 \rho_1(t) + b^2 S_1(t)] e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (10)$$

Здесь $c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$ — скорость звука. Присутствие обозначения S у знака частной производной указывает на то, что эта производная вычисляется при постоянной энтропии. Какие переменные закреплены в равенстве (10), очевидно.

2. *Линейное приближение.* Подставим равенства (6)–(10) в уравнения (1)–(4) и ограничимся слагаемыми только первого порядка по возмущениям. Уравнения для возмущений получаются, конечно, линейными, точкой обозначается производная по времени:

$$\dot{\rho}_1 + i\rho_o \vec{v}_1 \vec{k} = 0, \quad (11)$$

$$\dot{\vec{v}}_1 + i\vec{k} \left(\varphi_1 + c_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_o} + b^2 \frac{S_1}{\rho_o} \right) = 0, \quad (12)$$

$$-k^2 \varphi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad (13)$$

$$\dot{S}_1 = 0. \quad (14)$$

Наиболее просто интегрируется последнее уравнение: $S_1 = S_1^* = \text{const}$.

Предположим далее, что возмущения всех величин от времени зависят одинаково, а именно — экспоненциально:

$$\rho_1(t) = \rho_1^* e^{\omega t}, \quad \vec{v}_1(t) = \vec{v}_1^* e^{\omega t}, \quad \varphi_1(t) = \varphi_1^* e^{\omega t}, \quad S_1(t) = S_1^* e^{\omega t}. \quad (15)$$

При подстановке этих формул в уравнения (11)–(14) производные по времени заменяются на ω , экспоненциальный множитель сокращается и уравнения принимают форму:

$$\omega \rho_1^* + i \vec{k} \vec{v}_1^* \rho_o = 0, \quad (16)$$

$$\omega \vec{v}_1^* + i \vec{k} \left(\varphi_1^* + c_s^2 \frac{\rho_1^*}{\rho_o} + b^2 \frac{S_1^*}{\rho_o} \right) = 0, \quad (17)$$

$$-k^2 \varphi_1^* = 4\pi G \rho_1^*, \quad (18)$$

$$\omega S_1^* = 0. \quad (19)$$

Последнее уравнение написано в общей форме, хотя его решение уже известно. Однако, такая запись позволяет разграничить случаи, когда S_1^* равно и не равно нулю. Рассмотрим эти случаи отдельно.

3. *Случай* $S_1^* = 0$. Возмущения являются адиабатическими, так как энтропия не изменяется. Все остальные возмущения могут зависеть от времени, то есть $\omega \neq 0$. Из уравнения (17) следует, что амплитуда возмущения скорости параллельна волновому вектору, так что можно положить

$$\vec{v}_1^* = v_1^* \frac{\vec{k}}{k}. \quad (20)$$

Обозначим для краткости $\delta = \frac{\rho_1^*}{\rho_o}$. Система (16)–(18) перейдет в

$$\omega \delta + i k v_1^* = 0, \quad (21)$$

$$i k c_s^2 \delta + \omega v_1^* + i k \varphi_1^* = 0, \quad (22)$$

$$4\pi G \rho_o \delta + k^2 \varphi_1^* = 0. \quad (23)$$

Это система трех линейных алгебраических уравнений. Так как она однородна, для существования ее нетривиального (ненулевого) решения необходимо обращение в нуль определителя системы, то есть

$$\det \begin{vmatrix} \omega & i k & 0 \\ i k c_s^2 & \omega & i k \\ 4\pi G \rho_o & 0 & k^2 \end{vmatrix} = \omega^2 k^2 - 4\pi G \rho_o k^2 + c_s^2 k^4 = 0. \quad (24)$$

Сокращая на k^2 , находим, что решение существует при выполнении равенства

$$\omega^2 = 4\pi G \rho_o - k^2 c_s^2. \quad (25)$$

Характер решения зависит от знака правой части. Рассмотрим два случая.

1) $4\pi G \rho_o > k^2 c_s^2$. Это может быть, когда $k < k_J$, где

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_o}}{c_s}. \quad (26)$$

Тогда показатель ω вещественен и имеет два значения

$$\omega = \pm \sqrt{4\pi G \rho_o - k^2 c_s^2}. \quad (27)$$

Отрицательный показатель означает экспоненциальное убывание возмущений, а положительный — экспоненциальный рост со временем до тех пор, пока возмущения становятся не малыми и теория, следовательно, неприменимой. При отрицательности показателя его модуль называется декрементом, положительный показатель называют инкрементом.

При заданном значении вещественного показателя ω амплитуды возмущений могут быть комплексными. Физический смысл имеют вещественные части этих комплексных выражений:

$$\rho_1 = \Re \left(\rho_1^* e^{\omega t + i \vec{k} \vec{r}} \right) = |\rho_1^*| \cos(\vec{k} \vec{r} + \arg(\rho_1^*)) e^{\omega t}, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1, \quad (28)$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\omega \vec{k}}{k} |\delta| \cos \left(\vec{k} \vec{r} + \arg(\rho_1^*) + \frac{\pi}{2} \right) e^{\omega t} = -\frac{\omega \vec{k}}{k} |\delta| \sin \left(\vec{k} \vec{r} + \arg(\rho_1^*) \right) e^{\omega t}. \quad (29)$$

Амплитуда $|\rho_1^*|$ и фаза $\arg(\rho_1^*)$ могут быть произвольными, так что при каждом ω существует два решения, а всего — с отрицательным и положительным ω — четыре. Все такие возмущения имеют характер стоячих волн. Возмущения потенциала имеют ту же фазу, что и возмущения плотности, а фаза возмущений скорости отличается на $\pi/2$.

2) $4\pi G\rho_0 < k^2 c_s^2$. Этот случай осуществляется при $k > k_J$. Показатель ω — чисто мнимое число, обозначим его в соответствии с принятым в электродинамике соглашением

$$\omega = -i\omega_*, \quad \omega_* = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_0} > 0. \quad (30)$$

Тогда возмущения примут вид плоских волн:

$$\rho_1 = \rho_1^* e^{-i\omega_* t + i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{v}_1 = \frac{\omega_*}{k} \frac{\vec{k}}{k} \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1. \quad (31)$$

Здесь амплитуда ρ_1^* может быть комплексной, что обеспечивает наличие двух линейно независимых решений уравнений. Для их выявления необходимо взять вещественную часть решений (31):

$$\rho_1 = |\rho_1^*| \cos\left(i\omega_* t - i\vec{k}\vec{r} - \arg(\rho_1^*)\right), \quad \vec{v}_1 = \frac{\omega_*}{k} \frac{\vec{k}}{k} \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1. \quad (32)$$

Изменение знака ω_* равносильно изменению направления вектора \vec{k} и фазы волны на противоположные.

В пределе больших волновых чисел $k \gg k_J$ (малых длин волн) оказывается $\omega_* = c_s k$. Возмущения (32) обращаются в звуковые волны с фазовой скоростью c_s .

Таким образом, в первом случае, при волновых числах $k < k_J$, происходит либо сжатие, либо рост возмущений, а во втором, когда эти числа больше k_J возмущения колеблются.

Заметим, что фазу $\arg(\rho_1^*)$ при фиксированном \vec{k} можно устранить изменением начала отсчета времени, однако этого нельзя сделать для всех \vec{k} сразу.

4. *Случай энтропийных возмущений.* Если $S_1^* \neq 0$, то $\omega = 0$, то есть все возмущения не зависят от времени. Уравнения (17)–(18) переходят в

$$\vec{v}_1^* \vec{k} = 0, \quad \varphi_1^* + c_s^2 \delta + b^2 \frac{S_1^*}{\rho_0} = 0, \quad \varphi_1^* = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1^* = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_0 \delta. \quad (33)$$

Здесь опять возможны два подслучая.

1) $v_1^* = 0$. Тогда

$$\delta = -\frac{S_1^*}{\rho_0} \frac{b^2}{c_s^2 - 4\pi G\rho_0/k^2}, \quad \rho_1^* = S_1^* \frac{b^2}{c_s^2} \frac{1}{k_J^2/k^2 - 1}. \quad (34)$$

Если при этом $k \gg k_J$, то

$$c_s^2 \rho_1^* + b^2 S_1^* = 0 \quad \text{или} \quad \rho_1^* = -S_1^* \frac{b^2}{c_s^2}. \quad (35)$$

Как видно из формулы (10), при выполнении такого условия давление остается постоянным: $P = P_0$.

2) $v_1^* \neq 0$. Тогда вектор скорости $\vec{v}_1 = \vec{v}_1^* e^{i\vec{k}\vec{r}}$ перпендикулярен волновому вектору: $\vec{v}_1 \perp \vec{k}$. Дивергенция скорости

$$\vec{\nabla} \vec{v}_1 = i\vec{k}\vec{v}_1 = 0, \quad (36)$$

в то же время ее ротор нулю не равен:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_1 = i\vec{v}_1 \times \vec{k} \neq 0, \quad (37)$$

поэтому такие возмущения называются вихревыми. Так как имеется две перпендикулярных вектору \vec{k} компоненты скорости, существует два линейно независимых вихревых возмущения.

5. *Типы возмущений и критерий Джинса.* Итак, существуют следующие типы возмущений и их развития: по два набора линейно независимых растущих и убывающих со временем возмущений, а также два колеблющихся, всего шесть адиабатических возмущений, одно энтропийное возмущение с неизменяющейся скоростью и два вихревых — всего три типа. Общее число — девять независимых возмущений пяти типов.

Граничное значение k_J , определяемое формулой (26) и разделяющее два подслучая, рассмотренных в пункте 3, называется волновым числом Джинса. Ему соответствуют длина волны Джинса

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \quad (38)$$

и джинсовская масса

$$M_J = \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \rho_0 = \left(\frac{c_s}{2}\right)^3 \left(\frac{\pi}{G}\right)^{3/2} \rho_0^{-1/2} = \mathcal{B} \frac{c_s^3}{\sqrt{\rho_0}}, \quad \mathcal{B} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{G}\right)^{3/2} = 4.0368 \cdot 10^{10} \text{ э}^{3/2} c^3 / \text{см}^9/2. \quad (39)$$

Длина волны характеризует тот размер области, который является критичным по отношению к характеру поведения возмущений. Критерий Джинса по отношению к массе звучит так: если масса больше джинсовской, возмущения растут или схлопываются, при массе, меньшей джинсовской, — колеблются.

Нерассмотренный случай $k = k_J$ выделяется во всех пунктах. При таком значении волнового числа обращается в нуль частота ω и обращаются в бесконечность амплитуды возмущений при тождественном обращении ω в нуль. Рассмотрим поэтому отдельно случай $k = k_J$, когда $4\pi G \rho_0 = c_s^2 k^2$. Начнем с исходных уравнений для возмущений (11)–(14) при этом условии и заменим в третьем из них $4\pi G$ на $c_s^2 k^2 / \rho_0$. Тогда $\varphi_1 = -c_s^2 \rho_1 / \rho_0$, второе уравнение после подстановки в него φ_1 упрощается (согласно четвертому $S_1 = S_1^*$) и уравнения интегрируются:

$$\dot{v}_1 = -i k \vec{b}^2 \frac{S_1^*}{\rho_0}, \quad \vec{v}_1 = -i k \vec{b}^2 \frac{S_1^*}{\rho_0} t, \quad \rho_1 = -k^2 b^2 S_1^* \frac{t^2}{2} = -4\pi G \rho_0 \frac{b^2}{c_s^2} S_1^* \frac{t^2}{2}. \quad (40)$$

Таким образом, в этом предельном случае волнового числа возмущения энтропийные и растут неограниченно при $t \rightarrow \infty$ (конечно, до тех пор, пока возмущения остаются малыми), но не экспоненциально, а степенным образом: возмущение скорости линейно, а плотности квадратично.

6. *Критические массы Джинса.* Оценим величины критической массы Джинса в различные эпохи расширения Вселенной. В этом пункте снова ноликом отмечаются значения величин в современную эпоху, в частности, $T = T_0(1+z)$, $\rho = \rho_0(1+z)^3$, где z — космологическое красное смещение.

1) Эра радиационно доминированной плазмы (РДП). Основные величины, в частности давление $P = P_r$ и плотность $\rho_0 = \rho_r$, определяются излучением. Скорость звука при этом

$$c_s^2 = \frac{\partial P_r}{\partial \rho_r} = \frac{\partial}{\partial \rho_r} \frac{1}{3} c^2 \rho_r = \frac{c^2}{3}, \quad c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (41)$$

Плотность массы излучения определяется формулой $\rho_0 = (a_{\text{SB}}/c^2)T^4$, так что

$$M_J = \mathcal{B} \frac{c_s^3}{\sqrt{\rho_0}} = \mathcal{B} \frac{c^3}{3\sqrt{3}\sqrt{a_{\text{SB}}T_0^2(1+z)^2}} = \frac{9.6976 \cdot 10^{57}}{(1+z)^2} \approx \frac{10^{58}}{(1+z)^2} = \frac{5 \cdot 10^{24}}{(1+z)^2} M_\odot, \quad (42)$$

где $M_\odot = 2 \cdot 10^{33} \text{ э}$ — масса Солнца. Красное смещение в течение эры РДП изменяется от ≈ 25000 до $2 \cdot 10^9$, так что $M_J = 8 \cdot 10^{15} M_\odot \div 1.25 \cdot 10^6 M_\odot$. Верхняя граница соответствует массе богатого скопления галактик, нижняя — ядру нашей Галактики.

2) Эпоха пылевидного вещества. Как отмечалось в первом разделе, давление вещества не вносит вклада в плотность энергии и массы, однако в эпохи, близкие к эре РДП, давление существенно в других вопросах. Вещество можно считать идеальным газом с давлением, плотностью массы и энтропией на единицу массы

$$P = \frac{N}{V} k_B T, \quad \rho = m_H \frac{N}{V}, \quad S = \frac{k_B}{m_H} \left[\frac{5}{2} - \ln \left(\frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m_H k_B T)^{3/2}} \right) \right]. \quad (43)$$

Здесь N — полное число частиц в объеме V , m_H — масса атома водорода (протона). Поскольку процесс космологического расширения адиабатический, энтропия должна быть постоянной, то есть постоянны (числитель и знаменатель дроби под знаком логарифма в (43)) N и произведение $s = VT^{3/2} = s(S)$, являющееся функцией от энтропии. Выражение давления через плотность и s представляет уравнение адиабаты

$$P = \frac{\rho}{m_H} k_B \left(\frac{s}{V} \right)^{2/3} = \frac{\rho}{m_H} k_B \left(\frac{s\rho}{m_H N} \right)^{2/3} = \mathcal{A}(S) \rho^{5/3}, \quad \mathcal{A}(S) = \frac{k_B}{m_H^{5/3}} \left(\frac{s(S)}{N} \right)^{2/3}. \quad (44)$$

Коэффициент $\mathcal{A}(S)$ называется энтропийной константой.

Скорость звука согласно формуле после равенства (10) получается

$$c_s^2 = \frac{5}{3} \mathcal{A}(S) \rho^{2/3} = \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} = \frac{5}{3} \frac{k_B T}{m_H}, \quad c_s = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{k_B T}{m_H}}. \quad (45)$$

Таким образом, масса Джинса

$$M_J = \frac{1}{8} \left(\frac{5\pi}{3} \frac{k_B T}{G m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho^{1/2}} = \frac{1}{8} \left(\frac{5\pi}{3} \frac{k_B T_0}{G m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho_0^{1/2}}, \quad (46)$$

где ρ_0 — современная плотность пылевидного вещества. Согласно наиболее адекватной космологической модели $\Omega_d^0 = 0.23$, $\rho_0 = \Omega_d^0 \rho_c^0 = 0.23 \cdot 8 \cdot 10^{-30} = 1.84 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$, так что

$$M_J = 2 \cdot 10^{38} \text{ г} = 10^5 M_\odot. \quad (47)$$

Это характерная масса шарового скопления звезд.

В теории образования крупномасштабной структуры задается спектр начальных возмущений плотности и тем самым спектр масс отдельных объектов.

§ 2. Возмущения космологического вещества

1. *Невозмущенное состояние при космологическом расширении.* Откажемся от постоянства невозмущенных решений и примем, что плотность, скорость, потенциал и давление в невозмущенном состоянии зависят от времени, подчиняясь космологическому расширению. Возьмем эти величины в форме

$$\rho = \rho_o(t), \quad \vec{v}_o = H(t)\vec{r}, \quad \varphi_o = \frac{2\pi G}{3} \rho_g^o(t)r^2, \quad P = P_o = 0, \quad \rho_g^o = \rho_o - \frac{c^2}{4\pi G}\Lambda. \quad (48)$$

Равенство нулю давления означает, что излучение во внимание не принимается, а вещество считается пылевидным (индекс d не пишем). В то же время космологическое слагаемое учитывается. Без космологического слагаемого теория была развита В. Боннором [27].

Убедимся, что так выбранные величины действительно соответствуют космологическим решениям. Для этого подставим (48) в уравнения вида (1)–(2), переписав их с учетом вакуума:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad (50)$$

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho_g, \quad \rho_g = \rho + 3 \frac{P}{c^2} - \frac{c^2}{4\pi G} \Lambda. \quad (51)$$

Здесь принято, что энтропия не изменяется. Из (49) и (50) получим соответственно

$$\dot{\rho}_o + \vec{\nabla}(\rho_o H \vec{r}) = \dot{\rho}_o + \rho_o H \vec{\nabla}(\vec{r}) = \dot{\rho}_o + \rho_o H 3 = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\rho}_o = -3\rho_o H, \quad (52)$$

$$\dot{\vec{v}}_o + H^2(\vec{r} \vec{\nabla})\vec{r} + \frac{1}{\rho_o} 0 + \frac{2\pi G}{3} \rho_g^o 2\vec{r} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho_g^o. \quad (53)$$

Уравнение (52) совпадает с соотношением (48) при $P = 0$. Равенство (53) следует из уравнения (51).

Проверим уравнение Пуассона:

$$\Delta \varphi_o = \frac{2\pi G}{3} \rho_g^o(t) \Delta r^2 = 4\pi G \rho_g^o(t). \quad (54)$$

При преобразовании уравнений (53) и (54) были использованы тождества $(\vec{r} \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{r}$ и $\Delta r^2 = 6$.

Проделанные выкладки показывают, что космологическую модель можно было бы построить, исходя из ньютоновской гидродинамики и уравнения Пуассона.

2. *Возмущения в эйлеровых и лагранжевых координатах.* Возмущения плотности, скорости и потенциала возьмем в том же виде, что и в теории Джинса (6)–(8), но будем считать, что пространственный масштаб со временем меняется: все расстояния пропорциональны радиусу кривизны:

$$\vec{r} = R(t)\vec{x}. \quad (55)$$

Поэтому производные по координатам надо вычислять с учетом изменения их со временем. Строго говоря, для искривленного пространства это не такая простая процедура. В ньютоновском приближении \vec{r} — это эйлеровы, а \vec{x} — лагранжевы координаты. Следовало бы пересчитать величины (48) и производные в уравнениях (49)–(51) к лагранжевым координатам, что сделать очень просто. Закон стационарного расширения от этого не изменится.

Далее представим снова возмущения в гармоническом виде через лагранжевы координаты, то есть будем их считать пропорциональными экспоненте от $i\vec{x}\vec{x}$. Однако вместо использования лагранжевых координат, ограничиваясь ньютоновским приближением, оставим реальные (измеряемые) расстояния \vec{r} как бы неизменными, а зависимость от времени перенесем на волновой вектор, считая, что его длина обратно пропорциональна $R(t)$, то есть положим

$$\vec{k}(t) = \frac{\vec{x}}{R(t)}, \quad \vec{x} = \text{const}, \quad \dot{\vec{k}} = -\vec{k}H, \quad \vec{x}\vec{x} = \vec{k}\vec{r}, \quad \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{x}}{x}. \quad (56)$$

Нетрудно убедиться, что такой прием в данном случае равносильно использованию лагранжевых координат, но позволяет не пересчитывать производные в уравнениях.

Итак, распишем наши возмущенные величины, для простоты приняв, что возмущение скорости параллельно волновому вектору, то есть это продольные волны:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(t) + \rho_1(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (57)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(t) + v_1(t)\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (58)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (59)$$

Подчеркнем еще раз, что хотя экспонента написана в виде $e^{i\vec{k}\vec{r}}$, однако надо не забывать, что \vec{k} зависит от времени.

Несмотря на то, что в невозмущенном состоянии пылевое вещество не оказывает давления, возмущение давления вслед за изложенным в книге [1] примем во внимание. При этом изменениями энтропии пренебрежем, так что давление возьмем в виде $P = c_s^2 \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}$. Введем еще обозначение для отношения $\delta(t) = \frac{\rho_1(t)}{\rho_0(t)}$, несколько отличающееся от прежнего, так как здесь и числитель и знаменатель зависят от времени.

3. *Уравнения для возмущений.* Подстановка разложений (57)–(59) в уравнения (1)–(3) приводит к уравнениям для возмущений. Получим их, приведя выкладки. Для слагаемых уравнения неразрывности получаем

$$\dot{\rho} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}) = \dot{\rho}_0 + \dot{\rho}_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} - \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}\vec{r}H, \quad \rho_1 = \rho_0 \delta, \quad \dot{\rho}_1 = \dot{\rho}_0 \delta + \rho_0 \dot{\delta}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) &= \vec{\nabla} \left(\rho_0 \vec{v}_0 + \rho_1 \vec{v}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} + \rho_0 v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = \vec{\nabla} \left(\rho_0 H \vec{r} + \rho_1 H \vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \rho_0 v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = \\ &= 3\rho_0 H + 3\rho_1 H e^{i\vec{k}\vec{r}} + \left(\rho_1 H \vec{r} + \rho_0 v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \right) e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}. \end{aligned} \quad (61)$$

Учитывая уравнение для невозмущенной плотности, находим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) &= -3\rho_0 H + (-3\rho_0 H \delta + \rho_0 \dot{\delta}) e^{i\vec{k}\vec{r}} - \rho_0 \delta e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}\vec{r}H + 3\rho_0 H + 3\rho_0 \delta H e^{i\vec{k}\vec{r}} + \\ &+ \left(\rho_0 \delta H \vec{r} + \rho_0 v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \right) e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k} = 0, \quad \text{так что } \dot{\delta} = -ikv_1. \end{aligned} \quad (62)$$

Уравнение для возмущения скорости из уравнения движения выводится аналогично. Его слагаемые

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{v}_0 + v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = - \left(H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_g^0 \right) \vec{r} + \dot{v}_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r})H, \quad (63)$$

$$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{v}_0 \vec{\nabla})\vec{v}_0 + v_1 \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} \left(\frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \vec{\nabla} \right) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) \right] = H^2 \vec{r} + v_1 H e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} + H v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r}), \quad (64)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla} \left(\varphi_0 + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = \frac{2\pi G}{3} \rho_g^0 2\vec{r} + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}, \quad \vec{\nabla}P = \vec{\nabla} \left(P_0 + c_s^2 \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = c_s^2 \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}. \quad (65)$$

Подстановка всего этого в левую часть уравнения (2) дает

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\varphi &= - \left(H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_g^0 \right) \vec{r} + \dot{v}_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r})H + H^2 \vec{r} + v_1 H e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} + \\ &+ H v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r}) + c_s^2 \delta e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k} + \frac{4\pi G}{3} \rho_g^0 \vec{r} + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} (\dot{v}_1 + v_1 H + c_s^2 ik\delta + \varphi_1 ik) = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Из уравнения Пуассона находим

$$\Delta\varphi = \Delta(\varphi_0 + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}) = 4\pi G \rho_g^0 - \varphi_1 k^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} = 4\pi G \rho_g^0 + e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{P_1}{c^2} + 4\pi G \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (67)$$

$$\varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \left(\rho_1 + 3\frac{c_s^2}{c^2} \rho_1 \right) = -\frac{4\pi G \rho_0}{k^2} \delta \left(1 + 3\frac{c_s^2}{c^2} \right). \quad (68)$$

Отношением скорости звука к скорости света можно пренебречь. Окончательно, уравнение движения сводится к

$$\dot{v}_1 + v_1 H = \frac{i}{k} (4\pi G \rho_0 - c_s^2 k^2) \delta. \quad (69)$$

Из двух уравнений (62) и (69) исключим скорость

$$v_1 = \frac{i}{k} \delta = \frac{i}{\varepsilon} R(t) \delta, \quad \dot{v}_1 = \frac{i}{k} \dot{\delta} + \frac{i}{\varepsilon} \dot{R} \delta = \frac{i}{k} \dot{\delta} + \frac{i}{k} H \delta \quad (70)$$

и получим одно уравнение второго порядка для δ :

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - (4\pi G\rho_o - c_s^2 k^2)\delta = 0. \quad (71)$$

Коэффициенты уравнения содержат ρ_o , H и c_s , то есть зависят от выбранной космологической модели и от уравнения состояния вещества.

4. *Критерий устойчивости в частном случае.* Для прояснения принципиального вопроса, насколько близки критерии устойчивости Джинса и рассматриваемый в этом разделе, в книге [1] предложены два упрощения. Во-первых, принято уравнение состояния вида $P \propto \rho^{4/3}$. Тогда скорость звука $c_s = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2} \propto \rho^{1/6}$. Во-вторых, принята плоская модель пылевидного вещества, при которой выполняются зависимости

$$\rho_o = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}, \quad R = R_* t^{2/3}, \quad k = k_* t^{-2/3}, \quad H = \frac{2}{3} \frac{1}{t}, \quad c_s = c_* t^{-1/3}. \quad (72)$$

Тогда уравнение (71) приводится к виду уравнения Эйлера

$$t^2 \ddot{\delta} + \frac{4}{3} t \dot{\delta} - \left(\frac{2}{3} - c_*^2 k_*^2\right) \delta = 0, \quad (73)$$

которое подстановкой $t = e^u$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Решением уравнения (73) являются степенные функции:

$$\delta = \delta_* t^n, \quad v_1 = v_1^0 t^{n-1/3}, \quad n = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - c_*^2 k_*^2}. \quad (74)$$

Вещественным показатель n является при $k_* < k_{\text{cr}}^*$ и $k < k_{\text{cr}}$, где

$$k_{\text{cr}}^* = \frac{5}{6} \frac{1}{c_*}, \quad k_{\text{cr}} = k_{\text{cr}}^* t^{-2/3} = \frac{5}{6} \frac{1}{c_*} t^{-2/3}. \quad (75)$$

Соответствующая критическая длина волны

$$\lambda_{\text{cr}} = \frac{2\pi}{k_{\text{cr}}} = \frac{6}{5} 2\pi c_* t^{2/3} = \frac{6}{5} 2\pi c_s t. \quad (76)$$

Длина волны Джинса в рассматриваемом случае согласно формуле (38)

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_o}} = c_* t^{-1/3} \sqrt{\frac{\pi 6\pi G t^2}{G}} = c_* t^{-1/3} t \pi \sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2\pi c_* t^{2/3} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2\pi c_s t. \quad (77)$$

Величины λ_{cr} и λ_J различаются только численными коэффициентами, причем эти коэффициенты очень близки: $\frac{6}{5} = 1.2$, а $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.224745$. Таким образом, неточная теория Джинса дает в рассмотренном случае почти то же, что и точная теория: относительное различие критических размеров составляет 2%.

5. *Большие λ .* Заметим, что в пределе больших длин волн, то есть малых волновых чисел k , уравнение (71) переходит в

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_o \delta = 0. \quad (78)$$

Его решения могут быть найдены в аналитической форме, а именно в квадратурах. Действительно, одним из его решений является $\delta = H$. Это следует из соотношения (51), дифференцируя которое по времени, находим

$$\ddot{H} = -\frac{4\pi G}{3} \dot{\rho}_o - 2H\dot{H} = 4\pi G\rho_o H - 2H\dot{H}. \quad (79)$$

Второе решение, линейно не зависящее от первого, находим методом вариации постоянной и получаем

$$\delta \propto H \int_0^t \frac{dt}{\dot{R}^2} = H \int_0^{R(t)} \frac{dR}{R^3}. \quad (80)$$

Входящая сюда производная от радиуса кривизны находится из уравнения (34). Она же определяет неявную зависимость радиуса кривизны от времени.

Функции $\delta = H$ и (80) представляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (78), поведение которой обсудим ниже.

§ 3. Теория блинов Зельдовича

1. *Способ описания возмущений.* В линейной теории возмущений предполагается, что возмущенные величины мало отличаются от невозмущенных и уравнения (1)–(3) линеаризуются по возмущениям. Однако, плотность в возмущенных областях, каковыми являются объемы, занимаемые галактиками и скоплениями галактик, во много раз превосходит среднюю плотность вещества во вселенной. Поэтому линейная теория недостаточна. В то же время нелинейные уравнения долго с трудом поддавались решению, тем более аналитическими методами.

Я. Б. Зельдович предложил подход, позволивший получить качественные результаты аналитически, не накладывая ограничений на величину возмущений. Он предположил, что возмущения происходят в координатах частиц вещества, то есть возмущенные декартовы координаты следует искать в виде

$$x = R(t)x_1 + \delta_x(t, x_1), \quad y = R(t)x_2, \quad z = R(t)x_3, \quad (81)$$

где $R(t)$ — невозмущенный радиус кривизны, зависящий от времени, δ_x — возмущение абсциссы, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор новых пространственных координат, которых при возмущении необходимо три, в то время как в однородном пространстве достаточно было одной. Напомним: в стандартной модели обычно полагают $r = R(t)a_k(\chi)$, что возможно, так как расширение пространства происходит во всех направлениях одинаково и угловые переменные не меняются. Три координаты x_1, x_2, x_3 могут принимать любые значения, положительные и отрицательные.

Физический смысл координат \vec{x} в том, что они стоят множителями при определяющей ход расширения величине $R(t)$, то есть в данный момент времени фиксированные их значения связываются с определенной точкой пространства и при отсутствии возмущений декартовы координаты точки пропорциональны $R(t)$, а координаты \vec{x} не меняются. Их можно считать лагранжевыми координатами в отличие от эйлеровых декартовых координат \vec{r} .

Возмущение координат приводит к возмущениям других величин. Теория основана на тех же ньютоновских уравнениях гидродинамики (49)–(51), но давление не учитывается совсем, то есть возмущается пылевидное вещество. Прежде чем пытаться решать уравнения, сделаем замену переменных, а именно, вместо эйлеровых декартовых координат используем лагранжевы координаты.

2. *Преобразование координат.* Время при замене координат (81) не изменяется. Однако производные по времени при эйлеровых и лагранжевых координатах различаются. Действительно, закрепление эйлеровых координат означает, что закреплена определенная точка в пространстве и время относится к ней. Точка же с закрепленными лагранжевыми координатами движется, ее эйлеровы координаты изменяются согласно уравнениям (81). Поэтому удобно ввести два времени, совпадающие между собой, но относящиеся к разным наборам координат и имеющие разные обозначения.

Таким образом, для выполнения преобразования координат к уравнениям, связывающим эйлеровы \vec{r} и лагранжевы \vec{x} координаты, добавим еще одно уравнение, связывающее времена, соответствующие старым t и новым t' координатам. Таким образом, полная замена переменных выглядит так:

$$x = R(t')x_1 + \delta_x(t', x_1), \quad y = R(t')x_2, \quad z = R(t')x_3, \quad t = t'. \quad (82)$$

Здесь координаты \vec{r} не зависят от времени t , но зависят от времени t' , а координаты \vec{x} не изменяются со временем t' , как будто прикрепленные к “частице”, вовлеченной в расширение пространства, но зависят от времени t .

Пересчитаем производные от старых переменных к новым. Для краткости производную по времени отмечаем по-прежнему точкой, а производную по координате x_1 — штрихом.

Сначала продифференцируем равенства (82) по времени t :

$$0 = R(t') \frac{\partial x_1}{\partial t} + x_1 \dot{R}(t') + \dot{\delta}_x(t', x_1) + \delta'_x(t', x_1) \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad 0 = R(t') \frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2 \dot{R}(t'), \quad 0 = R(t') \frac{\partial x_3}{\partial t} + x_3 \dot{R}(t'). \quad (83)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = -\frac{\dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1)}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = -H(t')x_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = -H(t')x_3. \quad (84)$$

С помощью этих равенств выражаем производную по старому времени через новые (лагранжевы) координаты и время

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1)}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} - H(t')x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - H(t')x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (85)$$

Производные по координатам связаны проще. Дифференцируя равенства (82) соответственно по x, y и z , находим

$$1 = [R(t') + \delta'_x(t', x_1)] \frac{\partial x_1}{\partial x}, \quad 1 = R(t') \frac{\partial x_2}{\partial y}, \quad 1 = R(t') \frac{\partial x_3}{\partial z}, \quad (86)$$

и таким образом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (87)$$

Производные от эйлеровых координат по времени t' являются компонентами скорости:

$$v_1 = \frac{dx}{dt'} = \dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}'_x(t', x_1), \quad v_2 = \frac{dy}{dt'} = \dot{R}(t')x_2, \quad v_3 = \frac{dz}{dt'} = \dot{R}(t')x_3. \quad (88)$$

3. *Преобразование уравнений.* Хотя производные по времени в двух системах различаются, само время в обеих системах, как уже говорилось, течет одинаково. Поэтому после пересчета производных для времени сохраним прежнее обозначение.

Запишем в новых переменных уравнение неразрывности (49). Его составляющие будут следующими.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{\rho} - \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - Hx_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} - Hx_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3}, \quad \rho \vec{\nabla} \vec{v} = \rho \left(\frac{\dot{R} + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} + 2H \right), \quad (89)$$

$$(\vec{\nabla} \rho) \vec{v} = \left(\frac{1}{R + \delta'_x} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial x_2}, \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) (\dot{R}x_1 + \dot{\delta}'_x, \dot{R}x_2, \dot{R}x_3) = \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + Hx_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + Hx_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3}. \quad (90)$$

В результате уравнение неразрывности примет простой вид:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{R} + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} + 2H = 0. \quad (91)$$

Уравнение (91) легко проинтегрировать и получить связь плотности с радиусом кривизны и возмущением

$$\rho = \frac{R_1^3}{R^2} \frac{\rho_1}{R + \delta'_x}. \quad (92)$$

Здесь R_1 и ρ_1 — значения радиуса кривизны и плотности в момент, когда $\delta'_x = 0$. Если возмущения нет, то невозмущенная плотность

$$\rho_0 = \frac{R_1^3}{R^3} \rho_1, \quad (93)$$

так что

$$\delta \rho = \rho - \rho_0 = -\frac{R_1^3}{R^3} \frac{\delta'_x}{R + \delta'_x} \rho_1, \quad \delta = \frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\delta'_x}{R}. \quad (94)$$

Займемся уравнением движения (50). Выпишем его слагаемые.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\ddot{R}x_1 + \ddot{\delta}'_x, \ddot{R}x_2, \ddot{R}x_3) - \left((\dot{R} + \dot{\delta}'_x) \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x}, \dot{R} \frac{\dot{R}}{R}, \dot{R} \frac{\dot{R}}{R} \right), \quad (95)$$

$$(\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(\frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} \frac{\partial}{\partial x_1} + H \frac{\partial}{\partial x_2} + H \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (\dot{R}x_1 + \dot{\delta}'_x, \dot{R}x_2, \dot{R}x_3) = \left((\dot{R} + \dot{\delta}'_x) \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x}, H \dot{R}, H \dot{R} \right). \quad (96)$$

После подстановки получим

$$\vec{\nabla} \varphi = -\dot{\vec{v}} = -\ddot{R} \vec{x} - \ddot{\delta}'_x (1, 0, 0). \quad (97)$$

Подставим полученное соотношение (97) в уравнение Пуассона (51). Получится

$$\Delta \varphi = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \varphi) = - \left(\frac{1}{R + \delta'_x} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (\ddot{R}x_1 + \ddot{\delta}'_x, \ddot{R}x_2, \ddot{R}x_3) = - \frac{\ddot{R} + \ddot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} - 2 \frac{\ddot{R}}{R} = 4\pi G(\rho - 2\rho_\Lambda). \quad (98)$$

4. *Уравнение для относительного возмущения плотности.* Умножим уравнение (98) на знаменатель $R + \delta'_x$. Получится

$$-3\ddot{R} - \ddot{\delta}'_x - 2 \frac{\ddot{R}}{R} \delta'_x = 4\pi G \rho (R + \delta'_x) - 8\pi G \rho_\Lambda (R + \delta'_x). \quad (99)$$

Теперь воспользуемся уравнением стандартной космологической модели (I.33) (при $P = 0$ и с заменой ρ на ρ_0)

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_0 - 2\rho_\Lambda) R, \quad \rho_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda, \quad (100)$$

и соотношениями (92) и (93). Тогда найдем, что

$$4\pi GR \left(\frac{R_1^3}{R^3} \rho_1 - 2\rho_\Lambda \right) - \ddot{\delta}'_x + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{R_1^3}{R^3} \rho_1 - 2\rho_\Lambda \right) \delta'_x = 4\pi G \frac{R_1^3}{R^2} \rho_1 - 8\pi G \rho_\Lambda (R + \delta'_x). \quad (101)$$

После сокращений получится сравнительно простое линейное соотношение

$$\ddot{\delta}'_x = \frac{8\pi G}{3} (\rho_o + \rho_\Lambda) \delta'_x. \quad (102)$$

Сделаем замену искомой функции согласно второму соотношению в (94):

$$-\ddot{R}\delta - 2\dot{R}\dot{\delta} - R\ddot{\delta} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_o + \rho_\Lambda) R\delta. \quad (103)$$

Снова воспользовавшись уравнением (100) и поделив на R , найдем

$$\frac{4\pi G}{3} (\rho_o - 2\rho_\Lambda) \delta - 2H\dot{\delta} - \ddot{\delta} = -\frac{8\pi G}{3} (\rho_o + \rho_\Lambda) \delta \quad (104)$$

или после сокращений

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G \rho_o \delta. \quad (105)$$

Уравнение совпадает по виду с уравнением (78).

Таким образом, нелинейная теория Зельдовича приводит точно к такому же уравнению для возмущения плотности, что и линейная теория при отсутствии давления. Воспользуемся решениями этого уравнения, полученными в пункте 5 § 2.

5. *Исследование решений.* Решение полученного уравнения было приведено в (80). Легко проверить, что это решение, а также решение $H(t)$ с точностью до множителя можно записать в следующем виде:

$$\delta_1(t) = \delta_2(t) J_{3/2}(y, A), \quad \delta_2(t) = \frac{Y^{1/2}(y, A)}{y^{3/2}}, \quad t = \frac{1}{\alpha} J_{1/2}(y, A). \quad (106)$$

Здесь использованы обозначения

$$J_\nu(y, A) = \int_0^y \left(\frac{y'}{Y(y', A)} \right)^\nu dy', \quad Y(y, A) = 1 + Ay + y^3. \quad (107)$$

Действительно, из общего уравнения

$$H^2 = \frac{H_0^2}{a^4} (\Omega_{\text{rv}}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda^0 a^4), \quad (108)$$

для рассматриваемого случая, когда $\Omega_{\text{rv}}^0 = 0$, после замен

$$y = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_{\text{d}}^0} \right)^{1/3} a, \quad A = \frac{\Omega_k^0}{(\Omega_{\text{d}}^0)^{2/3} (\Omega_\Lambda^0)^{1/3}}, \quad (109)$$

получается

$$H^2 = \frac{H_0^2}{a^3} (\Omega_{\text{d}}^0 + \Omega_k^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^2) = H_0^2 \Omega_\Lambda^0 \left(\frac{1}{y^3} + \frac{A}{y^2} + 1 \right), \quad H = H_\Lambda \frac{\sqrt{1 + Ay + y^3}}{y^{3/2}}. \quad (110)$$

Таким образом, решения получены в параметрической форме, причем возмущения и время выражаются через элементарные функции и семейство безразмерных интегралов, зависящих от одного безразмерного аргумента и одного параметра. Вообще говоря, приведенные интегралы J выражаются через неполные эллиптические интегралы, однако эти выражения довольно сложны и не помогают при вычислениях. Посмотрим, каков характер решений и как он зависит от параметра.

Из определений (107) видно, что если $y \rightarrow 0$, то $J_\nu(y, A) \sim y^{\nu+1}/(\nu+1)$. Из этого и из (106) следует, что при $t \rightarrow 0$ аргумент $y \sim (3\alpha t/2)^{2/3} \rightarrow 0$, а решения $\delta_1 \sim 2y/5 \sim 2(3\alpha t/2)^{2/3}/5 \rightarrow 0$, $\delta_2 \sim y^{-3/2} \sim 2/(3\alpha t) \rightarrow \infty$. В теории без учета вакуума первая, растущая со временем, мода была найдена Я.Б. Зельдовичем [28], а вторая, убывающая от бесконечности, А.С. Зенцовой и А.Д. Черниным [32]. На малых временах вакуум роли не играет.

Если $A > 0$, что отвечает замкнутой модели с $k = 1$, то многочлен третьей степени $Y(y, A)$ может иметь положительный корень. Действительно, корень возникает тогда, когда прямая $z = -Ay$ пересекает кривую $z = 1 + y^3$. На Рис. 12а представлены кривая и пучок прямых (значения A указаны около прямых). Граничное

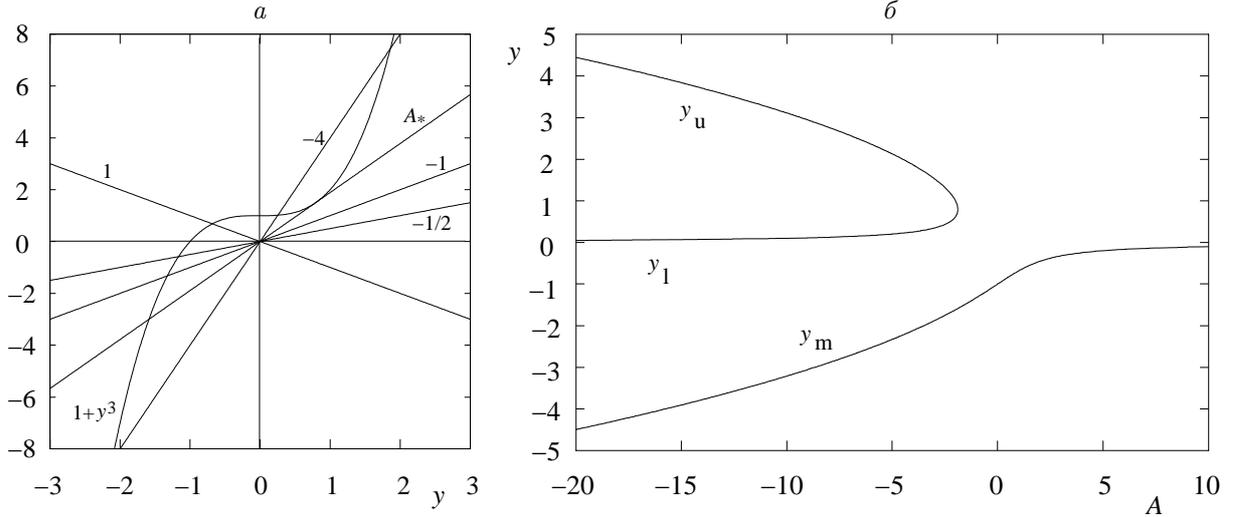


Рис. 12: *а*: Кривая $1 + y^3$ и прямые Ay . *б*: Зависимость корней от параметра A при некоторых его значениях.

значение параметра A_* , при котором корень y_* кратный, находится из условия, что прямая касается кривой, то есть

$$1 + A_* y_* + y_*^3 = 0, \quad A_* + 3y_*^2 = 0, \quad 1 - 2y_*^3 = 0, \quad y_* = 2^{-1/3}, \quad A_* = -3 \cdot 2^{-2/3}. \quad (111)$$

При $A < A_*$ существует два положительных корня, один y_l меньший y_* , а другой y_u — больший этого значения. На Рис. 12б показана зависимость корней от величины A . При $A < A_*$ имеется два положительных корня, отрицательный корень y_m существует при всех A .

Когда $A < A_*$, радиус кривизны R ограничен сверху или снизу. Если расширение начинается с сингулярности, то оно продолжается до конечного радиуса ($0 \leq y \leq y_l$), который достигается за конечное время $t_1 = (1/\alpha)J_{1/2}(y_l, A)$. Напротив, если расширение начинается с конечного значения радиуса, то продолжается до бесконечности ($y_u \leq y \leq \infty$). Таким образом, при учете влияния вакуума оказываются возможными модели без сингулярности. При $A > A_*$ расширение продолжается до бесконечности и бесконечное время.

Граничное значение параметра A связано с соотношением между параметрами Ω_d вещества и вакуума Ω_Λ , которые согласно их определениям

$$\Omega_d^0 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda^0 = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k^0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} = 1 - \Omega_d^0 - \Omega_\Lambda^0. \quad (112)$$

Последнее соотношение является следствием уравнения (1.34), записанного для современной эпохи:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (113)$$

Исключив из выражения для A величины ρ_0 , Λ и k , найдем, что

$$\frac{1 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_d^0}{(\Omega_\Lambda^0)^{1/3} (\Omega_d^0)^{2/3}} = A. \quad (114)$$

Поведение решений на больших временах зависит от того, ограничен или нет радиус кривизны. Решение δ_2 стремится к 1, когда $R(\infty) = \infty$, и к 0, когда R стремится к своему конечному пределу (тогда $Y(y_l, A) = 0$). Решение δ_1 стремится к $J_{1/2}(\infty, A)$ в случае бесконечного расширения и к $2y_l/(2y_l^3 - 1)$ — в случае конечного. Если $A = A_* = -3 \cdot 2^{-2/3}$ точно, то $\delta_2 \rightarrow \infty$, когда $y \rightarrow y_* = 2^{-1/3}$.

Если $A > A_*$, то интеграл $J_{3/2}(\infty, A)$ сходится и существует решение

$$\delta_3(t) = \delta_2(t)[J_{3/2}(\infty, A) - J_{3/2}(y, A)]. \quad (115)$$

Это решение пропорционально δ_2 при $y \rightarrow 0$ и $\delta_3(t) \sim 1/(2y^2)$ при $y \rightarrow \infty$. При $A \leq A_*$ такое решение не существует.

6. Явное аналитическое решение. Для важного случая плоской модели, когда $A = 0$ ($k = 0$), оказывается возможным найти явное решение и выразить его через стандартные специальные функции. Неявную зависимость времени от R можно обратить и найти явное выражение

$$y = \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \alpha t \right), \quad R(t) = R_0 \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3\alpha^2} \right)^{1/3} y. \quad (116)$$

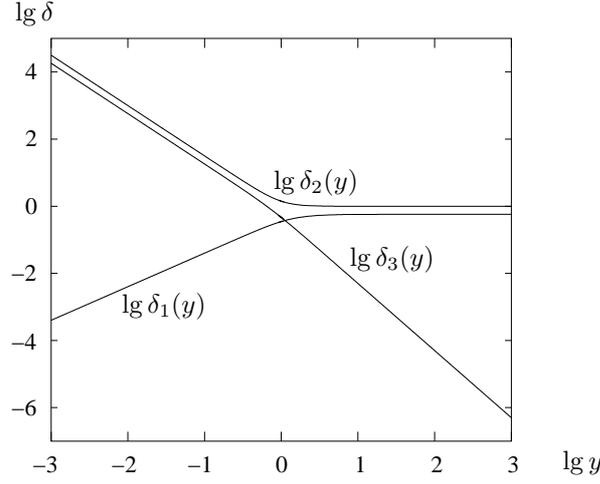


Рис. 13: Возмущения $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ и $\delta_3(t)$ в зависимости от y .

Для возмущений получается

$$\delta_2(t) = \frac{\sqrt{1+y^3}}{y^{3/2}}, \quad \delta_1(t) = \delta_2(t)J_{3/2}(y, 0). \quad (117)$$

Первая мода $\delta_1(t)$ представляется через гипергеометрические функции:

$$\delta_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}yF\left(1, \frac{1}{3}, \frac{11}{6}; -y^3\right) & \text{при } 0 \leq y < 1, \\ \frac{2}{5}\frac{y}{1+y^3}F\left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}; \frac{y^3}{1+y^3}\right) & \text{при } y \sim 1, \\ c_0\delta_2(t) - \delta_3(t) & \text{при } y > 1, \end{cases} \quad (118)$$

где $c_0 = \Gamma(5/6)\Gamma(5/3)/\sqrt{\pi}$ и

$$\delta_3(t) = \frac{1}{2y^2}F\left(1, \frac{1}{6}, \frac{5}{3}; -\frac{1}{y^3}\right) = c_0\delta_2(t) - \delta_1(t). \quad (119)$$

Все гипергеометрические функции представлены так, что их можно вычислить по гипергеометрическому ряду

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c+1} \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (120)$$

Рис. 13 демонстрирует поведение δ_1 , δ_2 и δ_3 как функций $R(t)$, точнее пропорциональной ему величины y .

Зависимость трех мод от времени такова, что δ_1 и δ_2 практически постоянны после $y = 1$. Перед этой точкой они могут быть аппроксимированы степенными законами $\delta_1 \propto y$, $\delta_2 \propto y^{-3/2}$, которые отражают их поведение при малых t . Частная мода δ_3 близка к δ_2 при $y < 1$ и убывает при $y > 1$ пропорционально y^{-2} .

Полученное решение описывает эволюцию слабых линейных возмущений произвольной пространственной формы:

$$\delta(\vec{x}, t) = f_1(\vec{x})\delta_1(t) + f_2(\vec{x})\delta_2(t), \quad (121)$$

где $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ — произвольные функции (не слишком большие) трех лагранжевых координат. Частный случай $f_3(\vec{x})\delta_3(t)$ соответствует специальному соотношению двух мод $c_0f_1 = -f_2 = -c_0f_3$.

То же решение справедливо и для эволюции нелинейного плоского возмущения в приближении Зельдовича

$$\delta_x(t, x_1) = R(t)[F_1(x_1)\delta_1(t) + F_2(x_1)\delta_2(t)]. \quad (122)$$

Здесь $F'_i(x_1) = -f_i(x_1)$, $i = 1, 2, 3$, так как в нелинейном случае функции f_i могут зависеть только от одной лагранжевой координаты. Третья мода соответствует $c_0F_1 = -F_2 = -c_0F_3$.

Интересно проследить зависимость скорости изменения координат. Невозмущенная скорость расширения $\vec{v} = \dot{R}(t)\vec{x}$. Возмущение скорости координаты x_1 , а только эта координата возмущается, согласно моде i равна $\delta v_1^{(i)} = F_i(\chi_1)[\dot{a}(t)\delta_i(t) + a(t)\dot{\delta}_i(t)]$. Относительное возмущение скорости

$$\frac{\delta v_1^{(i)}}{v_1} = \frac{\delta v_1^{(i)}}{\dot{a}(t)\chi_1} = \frac{F_i(\chi_1)}{\chi_1} \delta_i(t) \left[1 + \frac{d \ln \delta_i}{d \ln y} \right]. \quad (123)$$

Таблица 9: Асимптотическое поведение $\delta_i(t) \left[1 + \frac{d \ln \delta_i}{d \ln y} \right]$.

Мода	$t \rightarrow 0$	$t \rightarrow +\infty$
		$y \sim (3\alpha t/2)^{2/3} \times \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2 t^2 \right)$
1	$\frac{4}{5}y \left(1 - \frac{5}{11}y^3 \right)$	$c_0 + \frac{1}{2}y^{-2}$
2	$-\frac{1}{2}y^{-3/2} \left(1 - \frac{5}{2}y^3 \right)$	$1 - y^{-3}$
3	$-\frac{c_0}{2}y^{-3/2} + \frac{6}{5}y$	$-\frac{1}{2}y^{-2} \left(1 - \frac{2}{5}y^{-3} \right)$

В Табл. 9 даны асимптотики $\frac{\delta v_1^{(i)}}{v_1} \frac{x_1}{F_i(x_1)}$ для трех мод возмущений на малых и больших временах расширения.

7. *Независимость переменных и констант.* Заметим здесь, что для введенных формулами (109) переменной и константы справедливы те же утверждения, что и по отношению к переменной x и связанным с ней постоянным. Постоянную A можно выразить через M_d и Λ :

$$A = \frac{\Omega_k^0}{(\Omega_d^0)^{2/3}(\Omega_\Lambda^0)^{1/3}} = -k \left(\frac{c^2}{2GM_d} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{\Lambda} \right)^{1/3}. \quad (124)$$

Переменная y связывается с радиусом кривизны:

$$y = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_d^0} \right)^{1/3} a = y_R R, \quad y_R = \left(\frac{\Lambda c^2}{6GM_d} \right)^{1/3}, \quad y_0 = y_R R_0 = \left(\frac{\Lambda c^2}{6GM_d} \right)^{1/3} R_0. \quad (125)$$

В рамках Стандартной модели $A = 0$, а

$$y_R = 1.0368 \cdot 10^{-28} \frac{1}{\text{см}}, \quad y_0 = y_R \frac{c}{H_0} = 1.3702. \quad (126)$$

И метрику можно выразить через эту переменную:

$$ds^2 = \frac{x^2}{x_R^2} [d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sn}_k^2 \chi d\omega^2] = \frac{y^2}{y_R^2} [d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sn}_k^2 \chi d\omega^2]. \quad (127)$$

8. *Современная теория.* Эта теория напоминает теорию блинов Зельдовича, но значительно сложнее. Возмущения вносятся в метрику пространства, то есть к метрике ФРУ добавляются малые возмущения. Возмущения подразделяются на скалярные, векторные и тензорные. Затем возмущения метрики связываются с возмущениями физических характеристик материи, таких, как плотность массы, скорость движения и другие.

§ 4. Анизотропия реликтового излучения

1. *Источники анизотропии РИ.* Считается, что анизотропия вызывается неоднородностями в распределении материи в раннюю эпоху расширения Вселенной, о которых говорилось в предыдущих параграфах. Все эти неоднородности малы на начальных этапах расширения. Некоторые из них растут, что приводит к образованию крупномасштабной структуры Вселенной и отражается на РИ, порождая его анизотропию и искажения спектра. Эти отклонения от среднего сильно замигаются в эпохи, когда Вселенная горячая. Однако при ее остывании до температур порядка $4000 \div 2700 \text{ K}$ (время от начала расширения $\sim 10^5$ лет), когда красное смещение $z \sim 1500 \div 1000$, происходит, как уже говорилось, рекомбинация вещества и образование атомов. После этого отделившееся от вещества излучение с ним уже не взаимодействует. От эпохи рекомбинации до нас доходит излучение почти свободно, и на нем остаются возмущения, существовавшие до и в течение эпохи рекомбинации.

Таким образом, эпоха рекомбинации — это последний период в истории горячей Вселенной, когда фотоны испытывали рассеяние на оставшихся свободными электронах. В конце этой эпохи, на красном смещении порядка $z \sim 10^3$ расположен сферический слой, который называют зоной последнего рассеяния. Именно с этой зоны

анизотропия РИ несет информацию о состоянии материи в ранние периоды истории Вселенной. Так как РИ сейчас наблюдается в радиодиапазоне, то его анизотропию выражают через отношение антенных температур возмущения и фона: $\delta_T = \Delta T/T$. Более подробное изложение можно найти в [29].

2. *Описание анизотропии.* Анизотропию РИ, то есть отклонения антенной температуры от средней, раскладывают по нормированным сферическим гармоникам:

$$\delta_T(\vec{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (128)$$

где θ и φ — зенитный угол и азимут единичного вектора направления \vec{n} в некоторой системе отсчета. Корреляционная функция этих отклонений

$$C(\mu) = \langle \delta_T(\vec{n}'_1) \delta_T(\vec{n}'_2) \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^2 n'_1 \int d^2 n'_2 \delta_T(\vec{n}'_1) \delta_T^*(\vec{n}'_2) 2\delta(\vec{n}'_1 \vec{n}'_2 - \mu), \quad (129)$$

где $\mu = \vec{n}'_1 \vec{n}'_2$, выражается через квадраты мультипольных моментов a_{lm} :

$$C(\mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_l a_l^2 P_l(\mu), \quad a_l^2 = \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2. \quad (130)$$

Результат не должен зависеть от выбора полярной системы. Поэтому надо произвести еще одно усреднение, то есть найти

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \langle |a_l|^2 \rangle. \quad (131)$$

Величины C_l могут служить характеристиками анизотропии РИ. Однако чаще используется другая величина, связанная с C_l , а именно спектр мощности

$$\mathcal{T}^2 = \frac{l(l+1)C_l}{2\pi}. \quad (132)$$

3. *Теория и наблюдения.* С принятой моделью Вселенной рассчитываются возмущения плотности и отражение их на РИ. Нарушаются чернотельность ее спектра и изотропия. Спектры в радиодиапазоне наблюдать нелегко, так как радиотелескопы настроены на одну или очень близкие длины волн. Поэтому наблюдатели сосредоточились на наблюдениях анизотропии.

Открыватели РИ оценили $\delta_T < 10\%$. Первые теоретические оценки оказались сильно завышенными: 10^{-2} и 10^{-3} . Наблюдатели давали только верхние оценки. После повышения чувствительности приемников теоретики сделали более аккуратные расчеты и оценили $\delta_T \sim 2 \cdot 10^{-5} \div 10^{-4}$.

Первая надежная регистрация анизотропии произошла в 1992 году прибором DMR (Differential Microwave Radiometer), установленным на спутнике COBE. Оказалось, что $\delta_T \sim 30$ мкК на углах $> 7^\circ$.

В конце двадцатого и начале двадцать первого веков была предпринята мощная атака по наблюдениям анизотропии. Ее измеряли на наземных радиотелескопах в миллиметровом диапазоне (проекты SP, Python, White Dish, Tenerife и др.) и методом интерферометрии с базами порядка размеров Земли (проекты DASI, CAT, VSA, Jodrel Bank). Еще один метод — запуск долгоживущих баллонов (проекты MAXIMA-1, TopHat и др.) На рис. 14 приведены теоретические кривые и данные наблюдений различными приборами величины \mathcal{T} (формула (132)) как функции l . Наблюдаемые точки даются с так называемыми усами, указывающими ошибки наблюдений.

И, конечно, наблюдения анизотропии РИ велись со специально запускаемых для этого спутников. Вышедшим на орбиту около точки Лагранжа L_2 между Землей и Солнцем таким спутником был WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, 30.06.2001–06.10.2010), который вел измерения в 5 частотах от 22 до 90 ГГц. Позже был запущен спутник Planck (14.05.2009–23ю10ю2013). Он производил измерения в 9 частотах от 20 до 800 ГГц, причем чувствительность его аппаратуры была в 1000 раз выше, чем у COBE, а угловое разрешение достигало ≈ 4 угловых минут.

Основное продвижение в исследовании анизотропии РИ было достигнуто миссией WMAP, Planck существенно уточнил его результаты, но кардинальных изменений не произвел. В результате были получены карты анизотропии и построены графики, подобные приведенным на Рис. 14, которые легко найти в Интернете.

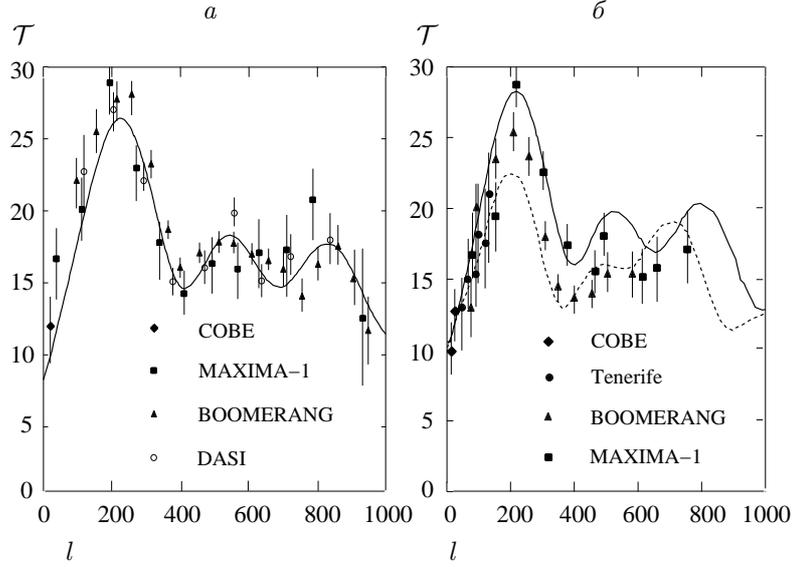


Рис. 14: Теоретические зависимости \mathcal{T} от l и данные наблюдений 2000–2001 годов согласно [30] (а) и [31] (б).

Глава VI. Космологическая инфляция

§ 1. Успехи и проблемы космологии

1. *Успехи моделей Фридмана-Леметра и теории горячей Вселенной.* Открытие реликтового излучения привело к тому, что модель горячей Вселенной является теперь общепризнанной. Последние данные наблюдений, ставшие возможными благодаря современному технологическому прогрессу, позволили выбрать наиболее адекватную модель, которую называют моделью Λ CDM, то есть модель с основной ролью космологического слагаемого и холодного темного вещества. Большая роль космологического слагаемого, то есть вакуума или темной энергии, в частности, проявляется в том, что гравитационное воздействие этой субстанции приводит к ускоряющемуся расширению пространства. На основе Стандартной модели были построены количественные теории первичного нуклеосинтеза и образования крупномасштабной структуры.

Космологи утверждают, что они хорошо представляют историю горячей Вселенной, начиная с момента в 10^{-3} секунды от начала расширения, и более или менее определенно, начиная с 10^{-11} с. Более ранние мгновения не столь определенны вследствие неясностей в теории элементарных частиц, так как выбрать наиболее адекватную теорию не позволяет невозможность достичь таких энергий, которые требуются для этого (см. табл. 8).

Однако, возникают вопросы по отношению к самым ранним этапам эволюции Вселенной, примыкающим к планковской эпохе. Неясности физических условий в эти этапы проявляются в виде проблем классических космологических моделей в современную эпоху.

2. *Проблемы моделей.* Укажем некоторые из них.

а) Проблема плоскостности. В настоящее время кривизна пространства Вселенной оценивается как очень малая. Неясна причина этого.

Оценим зависимость Ω_u от красного смещения. применим соотношение (63). Из него вытекает, что

$$\Omega_k = 1 - \Omega_u = 1 - \Omega_{r\nu} - \Omega_d - \Omega_\Lambda = -\frac{kc^2}{\dot{R}^2} = -\frac{kc^2}{H^2 R^2}, \quad (1)$$

в частности,

$$\Omega_k^0 = 1 - \Omega_u^0 = 1 - \Omega_{r\nu}^0 - \Omega_d^0 - \Omega_\Lambda^0 = -\frac{kc^2}{\dot{R}_0^2} = -\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2}. \quad (2)$$

Отношение

$$r = \frac{1 - \Omega_u}{1 - \Omega_u^0} = \frac{H_0^2 R_0^2}{H^2 R^2} = \frac{H_0^2}{H^2} \frac{1}{a^2} = \frac{H_0^2}{H^2} (1+z)^2, \quad (3)$$

а с учетом (72)

$$r = \frac{1 - \Omega_u}{1 - \Omega_u^0} = \frac{1}{1 + \Omega_{r\nu}^0 z(2+z) + \Omega_d^0 z - \Omega_\Lambda^0 \frac{z(2+z)}{(1+z)^2}}. \quad (4)$$

Вычисленные по этой формуле значения r для границ эпох Табл. 8 приведены в Табл. 10. Из этих чисел следует, что для того, чтобы современная кривизна была бы порядка единиц или даже десятков, ранняя Вселенная должна была быть плоской с фантастической точностью. Каким образом установились такие начальные значения, в рамках Стандартной модели совершенно непонятно.

Таблица 10: Отличия от плоскостности в различные эпохи.

z	r
0	1
1500	$1.4 \cdot 10^{-3}$
15000	$3.2 \cdot 10^{-5}$
25000	$1.2 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^9$	$2.1 \cdot 10^{-15}$
$4 \cdot 10^{11}$	$5.2 \cdot 10^{-20}$
$4 \cdot 10^{12}$	$1.25 \cdot 10^{-22}$
$4 \cdot 10^{14}$	$1.25 \cdot 10^{-26}$
$4 \cdot 10^{28}$	$5 \cdot 10^{-54}$
$4 \cdot 10^{31}$	$5 \cdot 10^{-60}$

б) Проблема горизонта. Было показано, что расстояние до геометрического горизонта определяется формулой

$$l_{\text{Hor}} = R(\eta)\eta = l_{\text{H}}^0 a(\eta)\eta. \quad (5)$$

В частности, для плоской модели пылевидного вещества получается $l_{\text{Hor}} = 3ct$, для плоской же модели ультрарелятивистской материи соответственно $l_{\text{Hor}} = 2ct$.

Расстояние до горизонта (или хаббловское расстояние, отличающееся на множитель) часто называют размером Вселенной. В планковскую эпоху, если считать, что осуществляется плоская модель излучения (ультрарелятивистского вещества), это расстояние было равно двум планковским $l_{\text{Hor}}^{\text{Pl}} = 2ct_{\text{Pl}} = 2l_{\text{Pl}} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-33}$ см. Современное расстояние по Стандартной модели $l_{\text{Hor}}^0 = l_{\text{H}}^0 \eta_0 = 3.32 l_{\text{H}}^0 = 4.4 \cdot 10^{28}$ см = 14.2 Гпк. Если исходить из этого значения, то современный размер Вселенной произошел из размера $l = l_{\text{Hor}}^0 / (1 + z_{\text{Pl}}) = 4.4 \cdot 10^{28} / (5 \cdot 10^{31}) = 10^{-3}$ см. Различие в 29 порядков необъяснимо.

в) Проблема однородности. Она связана с предыдущей. РИ, как показывают наблюдения, исключительно однородно, во всех направлениях температура его одинакова. При этом температура РИ в разные эпохи была разной, но однородность сохранялась всегда, так как ничто не могло ее нарушить. И распределения других компонент Вселенной тоже однородно в масштабах, меньших космологических. Какой-то процесс должен был изначально выравнять свойства различных объемов.

Области однородности столь велики, что отдельные их части причинно не связаны, то есть они никогда не обменивались энергией, импульсом и вообще информацией. Действительно, современное хаббловское расстояние $l_{\text{H}}^0 = 3 \cdot 10^{10} / (2.27 \cdot 10^{-17}) = 1.3 \cdot 10^{28}$ см. В планковскую эпоху это расстояние было $l_{\text{H}}^0 / z_{\text{Pl}} = 1.3 \cdot 10^{28} / 4 \cdot 10^{31} = 0.32 \cdot 10^{-3}$ см. Планковское же расстояние, на котором возможен был обмен информацией, так как планковскую длину свет проходит за планковское время, составляет $l_{\text{Pl}} = ct_{\text{Pl}} = 1.6 \cdot 10^{-33}$ см. Если не предположить одинаковых начальных условий для каждой из несвязанных частей всего пространства, такая однородность непонятна.

г) Зарядовая асимметрия. Наш мир, как говорят, зарядово асимметричен. Действительно, вещество состоит из протонов, нейтронов и электронов, позитроны образуются в некоторых объектах и даже в значительных количествах, однако, почти сразу же аннигилируют с электронами. Антипротоны наблюдаются только в реакторах и ускорителях.

Как отмечалось выше, в ранней Вселенной частиц и античастиц было почти поровну, преобладание частиц было незначительным, однако, оно как-то должно было образоваться.

д) Другие трудности. Имеются и некоторые другие неясности теории расширяющейся Вселенной. Например, массовая плотность в планковскую эпоху была равна $\rho_{\text{Pl}} = \frac{c^5}{G^2 \hbar} = 5.16 \cdot 10^{92}$ г/см³. Если бы ее эволюция происходила согласно модели излучения, то современное ее значение было бы $\rho_0 = \rho_{\text{Pl}} / z_{\text{Pl}}^3 = 7 \cdot 10^{-34}$, что примерно соответствует плотности РИ. Если же исходить из того, что сохраняется энергия, то получилось бы $\rho_0 = \rho_{\text{Pl}} (2l_{\text{Pl}} / (3.8 \cdot 10^{28}))^4 = 1.7 \cdot 10^{-152}$ (обе величины в г/см³).

Наконец, неясны причины появления малых возмущений плотности материи, приводящих впоследствии к образованию галактик и их скоплений, а также вообще причина расширения пространства.

§ 2. Теория инфляции

1. *Раздувание пространства.* В конце 70-х и начале 80-х годов была создана теория, устраняющая указанные недостатки. Различные ее варианты были разработаны А.А. Старобинским, а также В.Ф. Мухановым с Г.В. Чибисовым. Термин "инфляция" был введен Гутом (А. Guth) [33], качественно разрешившим основные проблемы. Усовершенствована теория была А. Линде [34]. Здесь излагается простой вариант теории.

Теория инфляции утверждает, что в самом начале расширения решающую роль играл вакуум: расширение происходило так, как это описывается космологическим слагаемым, то есть уравнением (IV.121). Его решение — экспоненциальное: $R = R_* \exp(\sqrt{\Lambda/3}ct) = R_* \exp(H_\Lambda t)$, $H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c$.

Инфляция, то есть экспоненциальное расширение пространства, начиналась от эпохи Сверхобъединения, когда все величины имели планковские значения. Поэтому приведем эти значения.

2. *Планковские величины.* Некоторые из них уже приводились в § 2 Главы III, здесь воспроизведем те значения и пополним их перечень (см. Табл. 11).

Планковские величины формируются из трех констант: скорости света, постоянной Планка и постоянной тяготения.

Таблица 11: Планковские величины.

Величина	Обозначение	Размерность	Выражение	Численное значение
Скорость света	c	$\frac{\text{см}}{\text{с}}$	c	$2.9979 \cdot 10^{10}$
Постоянная Планка	\hbar	$\frac{\text{г см}^2}{\text{с}}$	\hbar	$1.0544 \cdot 10^{-27}$
Постоянная тяготения	G	$\frac{\text{см}^3}{\text{г с}^2}$	G	$6.672 \cdot 10^{-8}$
Длина	l_{Pl}	см	$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	$1.6158 \cdot 10^{-33}$
Время	t_{Pl}	с	$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$	$5.3898 \cdot 10^{-44}$
Масса	m_{Pl}	г	$\sqrt{\frac{c\hbar}{G}}$	$2.1766 \cdot 10^{-5}$
Энергия	E_{Pl}	$\frac{\text{г см}^2}{\text{с}^2}$	$\sqrt{\frac{c^5\hbar}{G}}$	$1.9562 \cdot 10^{16}$
Плотность массы	ρ_{Pl}	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$\frac{G^2\hbar}{c^7}$	$5.1593 \cdot 10^{93}$
Плотность энергии	$c^2\rho_{\text{Pl}}$	$\frac{\text{г}}{\text{см с}^2}$	$\frac{G^2\hbar}{c^7}$	$4.6369 \cdot 10^{114}$
Температура	T_{Pl}	К	$\frac{1}{k_{\text{B}}} \sqrt{\frac{c^5\hbar}{G}}$	$1.4172 \cdot 10^{32}$

3. *Решение проблемы плоскостности.* Так как при таком расширении $H = \frac{\dot{R}}{R} = H_\Lambda$, то критическая плотность равна плотности вакуума, так как $\rho_c^{\text{Pl}} = \frac{3H_\Lambda^2}{8\pi G} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \rho_\Lambda$. Таким образом, в планковскую эпоху равенство вакуумной и критической плотностей выполнялось точно, что объясняет близость реальной Вселенной к плоской модели во все последующее время.

4. *Изменение плотности и размера при инфляции.* Начальная плотность — это планковская массовая плотность $\rho_{\text{Pl}} = m_{\text{Pl}}/l_{\text{Pl}}^3 = 2.177 \cdot 10^{-5}/(1.616 \cdot 10^{-33})^3 = 5.159 \cdot 10^{93}$ г/см³. Так как это вакуумная плотность, то получаются значения следующих величин:

$$\rho_{\text{Pl}} = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad \Lambda = 8\pi \frac{c^3}{G\hbar} = \frac{8\pi}{l_{\text{Pl}}^2} = 9.626 \cdot 10^{66} \text{ см}^{-2}, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{c}{l_{\text{Pl}}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{t_{\text{Pl}}} = 5.370 \cdot 10^{43} \text{ 1/с.} \quad (6)$$

В то время как плотность (вакуума) при инфляции оставалась практически неизменной, размеры Вселенной быстро увеличивались. Пусть в момент $t = t_{\text{Pl}}$ радиус $R = l_{\text{Pl}}$. Тогда в последующие моменты

$$R = l_{\text{Pl}} \exp(H_\Lambda(t - t_{\text{Pl}})) = l_{\text{Pl}} \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{t}{t_{\text{Pl}}} - 1\right)\right). \quad (7)$$

5. *Решение проблемы однородности.* Раздувание пространства происходит от “планковских” масштабов до “хаббловских”. При энергии частицы $E_{P1} = 1.956 \cdot 10^{16}$ эрг, температура должна быть $T_{P1} = E_{P1}/k_B = 1.417 \cdot 10^{32}$ К. Такая температура соответствует красному смещению $1 + z_{P1} = T_{P1}/T_0 = 5.195 \cdot 10^{31}$. При современном значении постоянной Хаббла $H_0 = 70$ (км/с)/Мпк = $2.268 \cdot 10^{-18}$ 1/с современное хаббловское расстояние $l_H^0 = c/H_0 = 1.322 \cdot 10^{28}$ см. Хаббловское расстояние планковской эпохи $l_H^{P1} = l_H^0/(1 + z_{P1}) = 1.322 \cdot 10^{28}/(5.195 \cdot 10^{31}) = 2.544 \cdot 10^{-4}$ см при таком расширении будет достигнуто в момент t_H^{P1} , определяемый соотношениями $R = l_{P1}$ при $t = t_{P1}$, $R = l_H^{P1}$ при $t = t_H^{P1}$, так что

$$l_H^{P1} = l_{P1} \exp \left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{t_H^{P1}}{t_{P1}} - 1 \right) \right), \quad \frac{t_H^{P1}}{t_{P1}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \ln \frac{l_H^{P1}}{l_{P1}} = 24.2, \quad t_H^{P1} = 1.3 \cdot 10^{-42} \text{ с.} \quad (8)$$

Можно сделать вывод, что для достижения хаббловского (фридмановского) размера Вселенной требуется примерно 25 планковских промежутков времени. Начав с планковского времени $6 \cdot 10^{-44}$ с и прибавив еще 25 таких же промежутков, Вселенная получит возраст $1.6 \cdot 10^{-42}$ и согласно Табл. 8 останется в эпохе великого объединения, так как не достигнет границы 10^{-37} эпохи электрослабого объединения.

Первоначальная однородность создавалась именно на планковском масштабе. При планковской температуре даже самые массивные частицы оказываются ультрарелятивистскими. Действительно, например, протон с массой покоя $m_P = 1.672 \cdot 10^{-24}$ г будет иметь в среднем массу с учетом движения, равную планковской, то есть $m_P \gamma = m_{P1}$. Лоренцевский множитель оказывается при этом равным $\gamma = m_{P1}/m_P = 1.302 \cdot 10^{19}$, так что все частицы движутся со скоростями, очень близкими к скорости света. Планковский объем такая частица пересечет за время $t_{P1} = 5.3898 \cdot 10^{-44}$ с.

Если все же остаются какие-то неоднородности в пределах планковского объема, то они растягиваются экспоненциальным расширением.

6. *Решение проблемы горизонта.* Раздувается и горизонт. Расстояние до горизонта в планковскую эпоху

$$l_{\text{Hor}} = \eta R = \frac{c}{R_* H_\Lambda} (1 - e^{-H_\Lambda t}) R_* e^{H_\Lambda t} = \frac{c}{H_\Lambda} (e^{H_\Lambda t} - 1) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} l_{P1} \left(\exp \left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{t}{t_{P1}} \right) - 1 \right) \quad (9)$$

за время, несущественно отличающееся от t_H^{P1} , также вырастет от планковского до хаббловского.

7. *Решение проблемы начальной толчка и неоднородностей.* В конце инфляционного периода вакуум распадается, а его энергия передается материи, которая тем самым приобретает очень высокую температуру. Распад вакуума является квантовым процессом, так что возникновение неоднородностей плотности и зарядовой асимметрии рассматриваются как проявление обычных квантовых флуктуаций.

Наконец, отрицательное давление вообще объясняет причину начала расширения.

§ 3. Вторая инфляция и второй горизонт

1. *Вторая инфляция.* Как уже отмечалось, в настоящее время мы живем в эпоху начала второй инфляции. Этот вывод был сделан на основании наблюдений, приведших к построению новой хаббловской диаграммы. Начиная с $z = 0.7260$, $t = 7.2$ млрд лет, происходит ускоренное расширение и, хотя вплоть до настоящего времени ускорение весьма мало, через несколько десятков миллиардов лет наступит экспоненциальное расширение, описываемое формулой (IV.34). Значения параметров этого расширения радикально отличаются от (6), что видно из Табл. 12.

При первой инфляции действовали планковские величины. Можно определить аналогичные величины и для второй инфляции. Для этого приравняем современную плотность массы темной энергии выражению планковской плотности через три физические постоянные, но заменим постоянную тяготения G подходящим значением, которое обозначим G_Λ :

$$\rho_\Lambda = \frac{c^5}{\hbar G_\Lambda^2}, \quad G_\Lambda = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar \rho_\Lambda}} = c \sqrt{\frac{8\pi G}{\hbar \Lambda}} = 1.8615 \cdot 10^{55} \frac{\text{см}^3}{\text{с}^2 \Gamma}. \quad (10)$$

Ее также поместим в таблицу. Остальные величины ни на что не похожи: длина $8.53 \cdot 10^{-3}$ см, время $2.85 \cdot 10^{-13}$ с, масса $4.12 \cdot 10^{-36}$ г, энергия $3.70 \cdot 10^{-15}$ эрг.

Посмотрим, к какой картине мира приведет экспоненциальное расширение. Проследим за движением излучения в будущем, отдаленные эпохи. Для краткости будем говорить о моментах η и местах χ .

2. *Второй горизонт.* Пусть фотон излучен в месте с координатой χ_e в момент $t = t(\eta_e)$, которому соответствует конформное время η_e , в сторону наблюдателя. Уравнение его движения $\chi = \chi_0 - \eta = \chi_e + \eta_e - \eta$. Найдем связанные с движением фотона расстояния.

Таблица 12: Сравнение двух инфляций.

Величина	Первая	Вторая
Λ	$9.6 \cdot 10^{66} \text{1/см}^2$	$1.24 \cdot 10^{-56} \text{1/см}^2$
H_Λ	$5.37 \cdot 10^{43} \text{1/с}$	$1.925 \cdot 10^{-18} \text{1/с}$
$1/H_\Lambda$	$1.862 \cdot 10^{-44} \text{с}$	$5.1950 \cdot 10^{17} \text{с}$
$1/H_\Lambda$	—	16.462Г лет
G	$6.6740831 \cdot 10^{-8}$	$1.8615 \cdot 10^{55}$

Расстояние от наблюдателя до места излучения фотона $l_e = l_H^0 a(\eta) \chi_e$, а от фотона до наблюдателя в произвольный момент $t = t(\eta)$ между моментами излучения и прихода к наблюдателю

$$l_{\text{rs}} = l_H^0 a(\eta) (\chi_e + \eta_e - \eta), \quad (11)$$

так что фотон удалился от места своего излучения на расстояние $l_{\text{mv}} = l_e - l_{\text{rs}} = l_H^0 a(\eta) (\eta_e - \eta)$. Вспомним еще расстояния в момент $t = t(\eta)$: до горизонта $l_{\text{Hor}} = R(\eta) \eta = l_H^0 a(\eta) \eta$, от фотона до горизонта $l_{\text{Hor}}^{\text{ph}} = l_H^0 a(\eta) (2\eta - \chi_e - \eta_e)$ и пройденный фотоном путь $l_{\text{ph}} = c(t - t_e)$.

Казалось бы, ничто не мешает фотону долететь до наблюдателя, когда бы и где бы он ни излучился. Однако, та модель, которая считается наиболее адекватной, приводит к другим заключениям.

Дело в том, что конформная временная координата η ограничена сверху, ее наибольшее значение

$$\eta_\infty = \eta_* I_0(\infty, \beta) = \frac{I_0(\infty, \beta)}{(\Omega_{\text{rv}}^0 \Omega_\Lambda^0)^{1/4}} = 4.45. \quad (12)$$

Обращение $l_{\text{rs}} = 0$ возможно лишь при $\chi_e + \eta_e < \eta_\infty$. Фотон все же дойдет до наблюдателя, пусть даже за очень большое, почти бесконечное, время, если сумма

$$\chi_e + \eta_e < \eta_\infty. \quad (13)$$

Граница, так сказать, видимости Вселенной определяется уравнением

$$\chi_e + \eta_e = \eta_\infty. \quad (14)$$

Вспомним, что согласно понятию геометрического горизонта должно выполняться условие $\chi_e \leq \eta_0$. Уравнение (14) задает сферу, которую назовем вторым или кинематическим горизонтом. Здесь демонстрируются их кинематические характеристики в рамках Стандартной модели.

В произвольную эпоху η первый и второй горизонты определяются соответственно уравнениями

$$\chi_{\text{Hor}} = \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad \chi_{\text{Hor}} = \eta_\infty - \eta = \eta_* [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (15)$$

3. *Видимая и невидимая части Вселенной.* На рис. 15 положения геометрического горизонта указаны на оси ординат. Соответствующие ему прямые, параллельные оси абсцисс, со временем поднимаются вверх, отражая его расширение. Второй, кинематический горизонт изображен прямой, соединяющей абсциссу и ординату, равные η_∞ , а его конкретное положение соответствует времени на оси абсцисс. Пути фотонов, идущих к нам, изображаются прямыми, параллельными этой прямой. Фотоны могут начать свой путь из любой точки траектории, их последующее перемещение идет одинаково. Фотоны, для которых $\eta_e + \chi_e < \eta_\infty$, то есть движущиеся по прямым, лежащим ниже указанной граничной прямой, рано или поздно дойдут до места, где расположен наш наблюдатель. Например, на рисунке помещены пути фотонов, которые дошли до нашего места в момент $\eta_* < \eta_0$ и в современную эпоху η_0 . Если же $\eta_e + \chi_e > \eta_\infty$, то фотоны с такими координатами не дойдут до нашего места никогда. При равенстве $\eta_e + \chi_e = \eta_\infty$, казалось бы, фотон все же должен дойти до наблюдателя за бесконечное время, однако, и это оказывается невозможным.

4. *Пути фотонов в разные эпохи.* Из-за первого горизонта излучение не успело дойти до наблюдателя. Второй горизонт отделяет область времени и точек, из которых излучение не может прийти к наблюдателю из-за того, что фотоны, идущие оттуда в сторону наблюдателя, на самом деле удаляются от него, так как пространство расширяется со скоростями выше световой и эти скорости все время увеличиваются.

Сейчас мы видим Вселенную вплоть до красных смещений $z \approx 10$, но это ее прошлое (все, что мы видим, уже прошлое, но для близких предметов это несущественно ввиду большой величины скорости света). Объекты, расположенные сейчас на красных смещениях $z \geq 1.725$, мы никогда не увидим, то есть их излучение никогда не дойдет до места, где мы находимся.

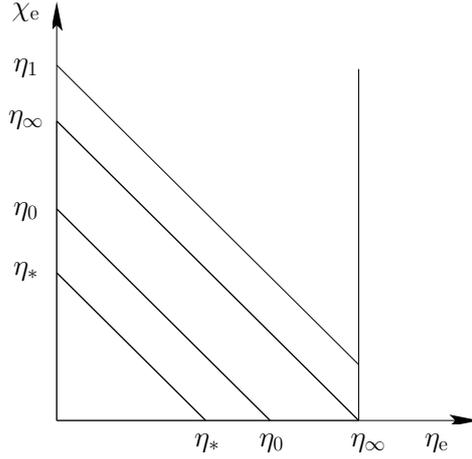


Рис. 15: Видимая и невидимая части Вселенной.

Действительно, если фотон испущен сейчас из места с координатой χ_0 в нашу сторону, то расстояние до него в момент η будет $l_{ph} = l_H^0 a(\eta)(\chi_0 + \eta_0 - \eta)$. Это расстояние может обратиться в нуль при $\eta = \chi_0 + \eta_0$, причем должно быть $\chi_0 + \eta_0 < \eta_\infty$. Границей координаты χ_0 для испущенных сейчас фотонов является $\chi_{lim}^0 = \eta_\infty - \eta_0 = 1.13$. Этой координате отвечают $x_{lim}^0 = 3.23$, $z_{lim}^0 = 1.725$, $l_{lim}^0 = 4.84$ Г пк = l_{Hor}^0 . Сфера такого радиуса и есть современный второй горизонт. Таким образом, излучение с мест, расположенных сейчас на 4.84 Г пк (и подавно с более далеких), никогда не дойдет до нас, то есть даже в бесконечно удаленном будущем.

На рис. 16 показаны расстояния l_{rs} до фотонов, приходивших к потенциальному наблюдателю в (прошлую) эпоху, когда было $\eta = 2$ (рис. 16 а), и в современную эпоху (рис. 16б). На рис. 17 эти расстояния даны для случаев, когда сумма координат времени и места выхода фотона равна η_∞ (17а) и больше (17б), также в зависимости от значений x . На рисунках, кроме того, приведены кривые, отражающие соотношения между временем η_e и местом χ_e выхода фотонов.

Вообще говоря, если фотон возник в точке, где скорость расширения от нас больше скорости света, это еще не означает, что он не дойдет до нас.

Как известно, космологическое расширение происходит одинаково по отношению ко всем точкам пространства и начинается оно после периода инфляции с очень большой скоростью (формально бесконечной, согласно формуле (11), что и определяет название Big Bang — Большой Взрыв), причем сначала идет с замедлением. Фотон, излученный в нашу сторону далеко, где скорость удаления от нас велика, но ближе горизонта, все же доходит до нас, так как он постепенно перемещается в слои пространства, расширяющиеся все с меньшей скоростью. В некоторой точке его траектории его скорость к нам обращается в нуль, а затем становится отрицательной, то есть он начинает приближаться. Когда фотон достигает нас, его скорость по отношению к нам отрицательна и равна скорости света. За преодоление своего первоначального удаления фотон расплачивается тем, что затрачивает на путь к нам очень большое время. Например, галактика, наблюдаемая нами сейчас на красном смещении $z = 3$, согласно Стандартной модели удаляется от нас со скоростью $1.51c$, а раньше ее скорость была больше. При этом ее излучение шло к нам 11.5 млрд лет, то есть мы видим эту галактику такой, какой она была в далеком прошлом, когда ни Земля, ни даже Солнце еще не существовали (но галактики и звезды предыдущих поколений уже были).

Из рис. 16 видно, что при достаточно раннем излучении фотона его расстояние от нас сначала увеличивается, что и означает расширение со скоростью, большей скорости фотона. С точки, где расстояние достигает максимума, фотон начинает приближаться и доходит до нас. Однако, это невозможно, как показывают рис. 17, если $\eta_e + \chi_e \geq \eta_\infty$, даже при равенстве. На рис. 17а видно, что фотон, который излучился на втором горизонте и идет вдоль него, как можно было бы предположить, пришел бы к наблюдателю в бесконечно удаленный момент, на самом деле только удаляется вместе с горизонтом. Через бесконечное время такой фотон окажется на расстоянии $l_\Lambda = c/H_\Lambda \approx 5.0$ Гпк (определение см. в конце § 2 Главы III). Фотон, вышедший при $\eta_e + \chi_e < \eta_\infty$, когда-нибудь, может быть, через очень большое время доберется до места, где сейчас находится наша цивилизация, а вышедший при $\eta_e + \chi_e > \eta_\infty$, от этого места будет только удаляться, причем начиная с некоторого времени экспоненциально быстро, причиной чего является ускоренное расширение. Таким образом, галактики, находящиеся на втором горизонте и за ним, навсегда исчезнут из нашего поля зрения.

Сделанные утверждения следуют из приведенных ниже формул.

5. *Расстояния, скорости и ускорения горизонтов.* Расстояния до горизонтов в произвольную эпоху η со-

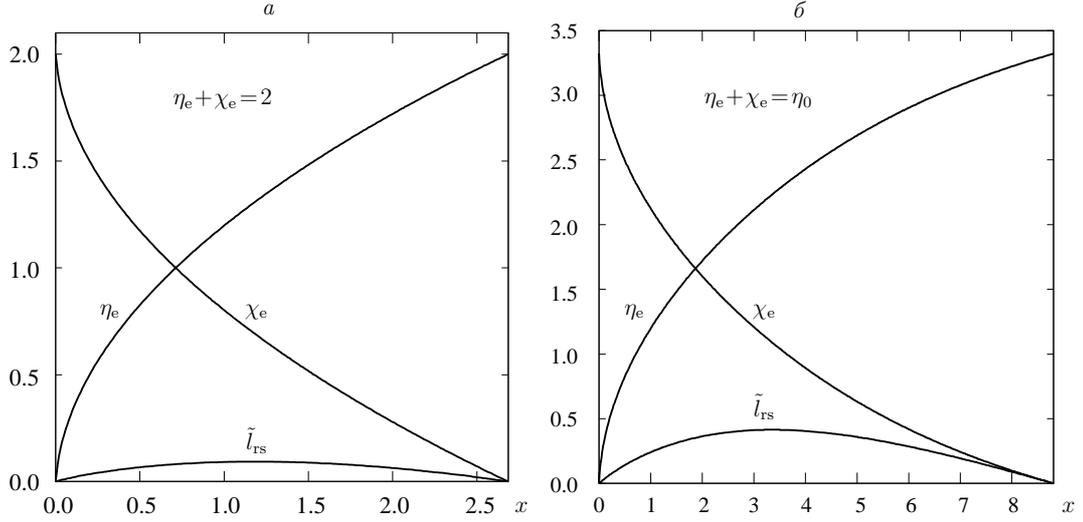


Рис. 16: Пути фотонов с приходом в эпохи: $\eta = 2$ (а) и $\eta_0 = 3.3224$ (б).

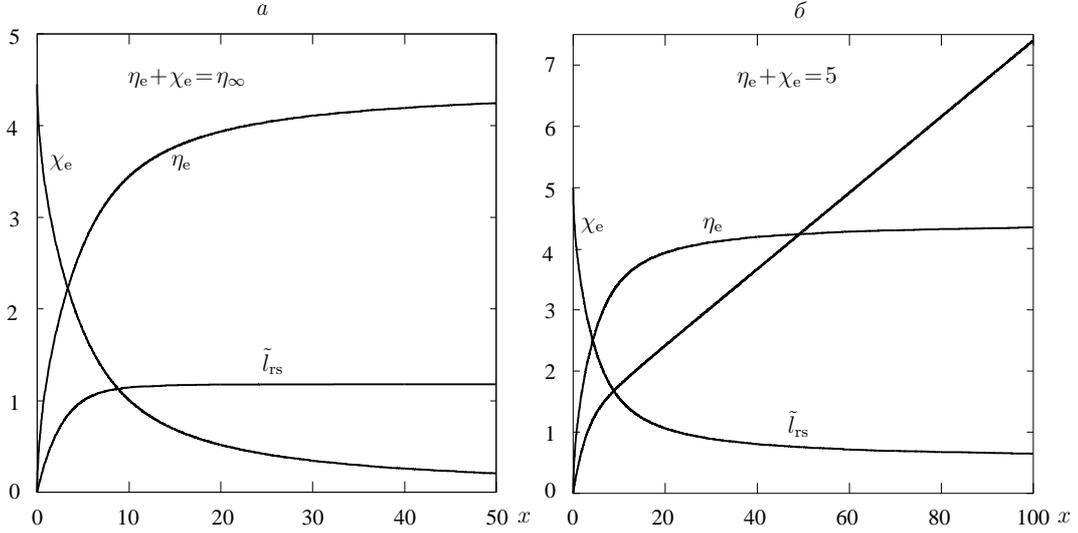


Рис. 17: Пути фотонов с “приходом” в эпохи: $\eta_\infty = 4.4514$ (а) и $\eta = 5$ (б).

гласно равенствам (15) определяются формулами ($l_\Lambda = c/H_\Lambda = l_H^0 \eta_* / x_0 = 1.5574 \cdot 10^{28}$ см = 5.0473 Гпк):

$$l_{\text{Hor}} = l_H^0 a(\eta) \eta = l_\Lambda x I_0(x, \beta), \quad (16)$$

$$l_{\text{Horr}} = l_H^0 a(\eta) (\eta_\infty - \eta) = l_\Lambda x [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (17)$$

Конечность расстояния, на котором окажется фотон, излучившийся на втором горизонте, следует из того, что множитель $\eta_\infty - \eta$ в формуле (17) при $\chi_e + \eta_e = \eta_\infty$ стремится к нулю, если $t \rightarrow \infty$, но множитель $a(\eta) \rightarrow \infty$, а их произведение остается конечным.

Оба горизонта расширяются. Скорость геометрического горизонта на скорость света больше, чем скорость того места, где горизонт в данный момент находится: $\dot{l}_{\text{Hor}} = l_H^0 \dot{a} \eta + l_H^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{Hor}} + c$. Он расширяется с ускорением. Напротив, скорость кинематического горизонта на скорость света меньше скорости места его расположения: $\dot{l}_{\text{Horr}} = l_H^0 \dot{a} (\eta_\infty - \eta) - l_H^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{Horr}} - c$, и его расширение замедляется.

Асимптотики расстояний до горизонтов и их скоростей при $t \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$, $z \rightarrow -1$, находятся с учетом того, что

$$I_0(\infty, \beta) = 0.42880, \quad I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta) \sim \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\beta}{x^3} \right), \quad (18)$$

и принимают вид

$$l_{\text{Hor}} \sim l_H^0 \eta_* I_0(\infty, \beta) a = 5.9 \cdot 10^{28} a \text{ см} \sim 2.7 \cdot 10^{28} e^{H_\Lambda t} \text{ см} \rightarrow \infty, \quad (19)$$

$$l_{\text{Horr}} \rightarrow \frac{c}{H_\Lambda} = 1.56 \cdot 10^{28} \text{ см} = 5.05 \text{ Гпк}. \quad (20)$$

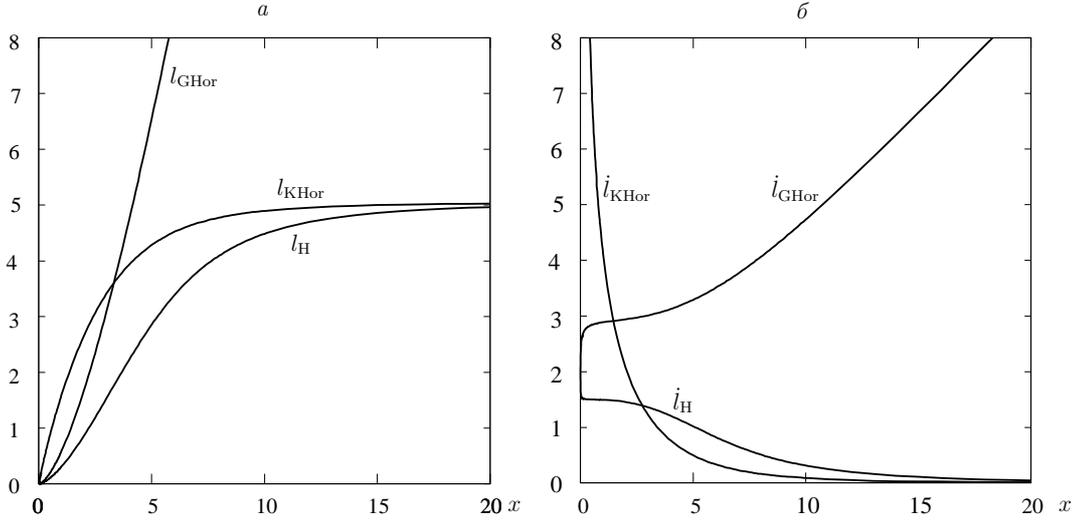


Рис. 18: *а*: Хаббловское расстояние и расстояния до горизонтов в Гпк.
б: Скорости изменения расстояний в скоростях света.

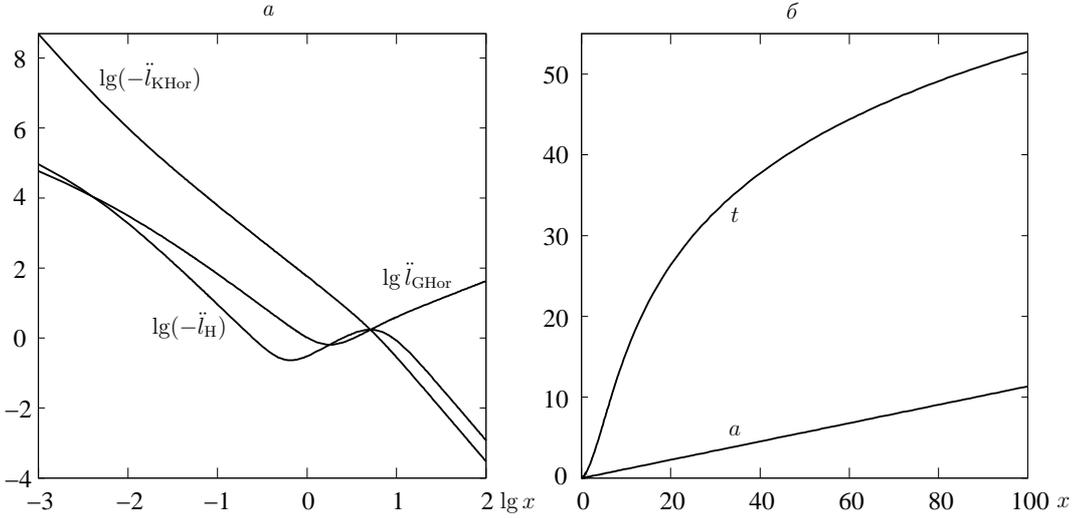


Рис. 19: *а*: Ускорения горизонтов и хаббловского расстояния. *б*: Связь a и t с x .

Современное расстояние до геометрического горизонта $l_{\text{Hor}}^0 = l_{\text{H}}^0 \eta_0 = 3.32 l_{\text{H}}^0 = 4.39 \cdot 10^{28}$ см = 14.2 Гпк. Скорость у горизонта $v_{\text{Hor}}^0 = c \eta_0 = 3.32c$, скорость расширения горизонта $\dot{l}_{\text{Hor}}^0 = 4.32c$. За год горизонт пройдет 4.32 св. года = 1.33 пк, так что к современным 14.2 Гпк добавится еще 1 Гпк через $0.755 \cdot 10^9$ лет, если считать его скорость равной современной, и через $0.741 \cdot 10^9$ лет, если учесть ее увеличение.

Современное расстояние до второго горизонта $l_{\text{Hor}}^0 = l_{\text{H}}^0 (\eta_{\infty} - \eta_0) = 1.49 \cdot 10^{28}$ см = 4.84 Гпк, предельное расстояние до него совпадает с пределом хаббловского: $l_{\text{Hor}} \rightarrow \frac{l_{\text{H}}^0}{\sqrt{\Omega_{\Lambda}^0}} = \frac{c}{H_{\Lambda}} = 5.05$ Гпк. Современная скорость расширения места этого горизонта $c(\eta_{\infty} - \eta_0) = 1.13c$, а скорость удаления кинематического горизонта от нас сейчас 0.13с.

Современные значения ускорений горизонтов: $\ddot{l}_{\text{Hor}}^0 = 3.45 H_{\Lambda} c = 19.9 \cdot 10^{-8}$ см/с², $\ddot{l}_{\text{Hor}}^0 = -1.95 H_{\Lambda} c = -11.3 \cdot 10^{-8}$ см/с².

Вначале, пока $\eta_{\infty} - \eta > \eta$, расстояние до второго горизонта больше, чем до первого. Горизонты пересеклись при $\eta_{\text{CRS}} = \eta_{\infty}/2 = 2.23$, $x_{\text{CRS}} = 4.08$, $z_{\text{CRS}} = 1.677$, в эпоху $t_{\text{CRS}} = 3.93$ млрд лет от начала, то есть $t_0 - t_{\text{CRS}} = 9.80$ млрд лет тому назад (раньше, чем началось ускорение — 6.5 млрд лет назад), когда расстояние до них было 3.58 Гпк. Первый горизонт (фактически не он, а физический горизонт) ограничивает сферическую область пространства, в которую можно смотреть и видеть прошлую историю Вселенной, а второй определяет те области, информация из которых никогда не придет к наблюдателю.

Если галактика находится за вторым горизонтом, ее излучение до нас дойти не сможет никогда, так как

она удаляется со все возрастающей скоростью. Все такие галактики в отдаленном будущем уйдут из нашего поля зрения. Мы не сможем никогда увидеть, как выглядят сейчас галактики, расположенные на красных смещениях, больших 0.72. Однако, информация об объектах, которые находятся ближе 5 Гпк, рано или поздно сможет до нас прийти.

§ 4. Связь с внеземными цивилизациями

Предположим, что в нашу эпоху ($t = t_0$, $\eta = \eta_0$) в некотором направлении испускается радиосигнал. Расстояние до него увеличивается и при значении конформного времени $\eta > \eta_0$ окажется $l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta - \eta_0)$. Его скорость составляется из скорости расширения и скорости света, ускорение положительно ($\rho_{\text{g}} < 0$ при $\eta \geq \eta_0$):

$$\dot{l}_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 \dot{a}(\eta - \eta_0) + l_{\text{H}}^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{ph}} + c, \quad \ddot{l}_{\text{ph}} = Hc - \frac{4\pi}{3} \rho_{\text{g}} l_{\text{ph}}. \quad (21)$$

Дальше для краткости опускаем множитель l_{H}^0 , то есть используем расстояния, измеряемые в хаббловских.

По пути сигнал встречает объекты с фиксированной пространственной координатой $\chi_{\text{O}} = \eta_0 - \eta_{\text{O}}$. Расстояния до них растут только за счет космологического расширения, то есть увеличения масштабного множителя: $\tilde{l}_{\text{O}} = a(\eta)(\eta_0 - \eta_{\text{O}})$. Сигнал догонит объект, когда их расстояния от нас станут равными, то есть в момент η_{mt} , когда $\eta_{\text{mt}} - \eta_0 = \eta_0 - \eta_{\text{O}}$, $\eta_{\text{mt}} = 2\eta_0 - \eta_{\text{O}}$. Тогда $\tilde{l}_{\text{ph}} = \tilde{l}_{\text{O}} = a(2\eta_0 - \eta_{\text{O}})(\eta_0 - \eta_{\text{O}})$. Так как η_{mt} не может превосходить η_{∞} , то сигнал может встретить за конечное (хотя, возможно, очень большое) время только те объекты, у которых координата $\chi_{\text{O}} < \eta_{\infty} - \eta_0 = 1.13$, то есть она имеет ту же границу, что и фотон, летящий к нам, — второй горизонт (см. выше), а $\eta_{\text{O}} > \eta_{\text{lim}} = 2\eta_0 - \eta_{\infty} = 2.19$.

Таблица 13: Объекты на пути сигнала.

η_{O}	χ_{O}	x_{O}	a_{O}	z_{O}	l_{O}^0 Гпк	t_{O}	η_{mt}
1.99	1.33	2.67	0.303	2.30	5.69	2.89	—
2.19	1.13	3.23	0.367	1.73	4.84	3.83	4.45
2.39	0.93	3.87	0.440	1.28	3.98	4.95	4.25
2.59	0.73	4.60	0.523	0.913	3.12	6.29	4.05
2.79	0.53	5.46	0.620	0.613	2.27	7.88	3.85
2.99	0.33	6.49	0.737	0.357	1.41	9.77	3.65

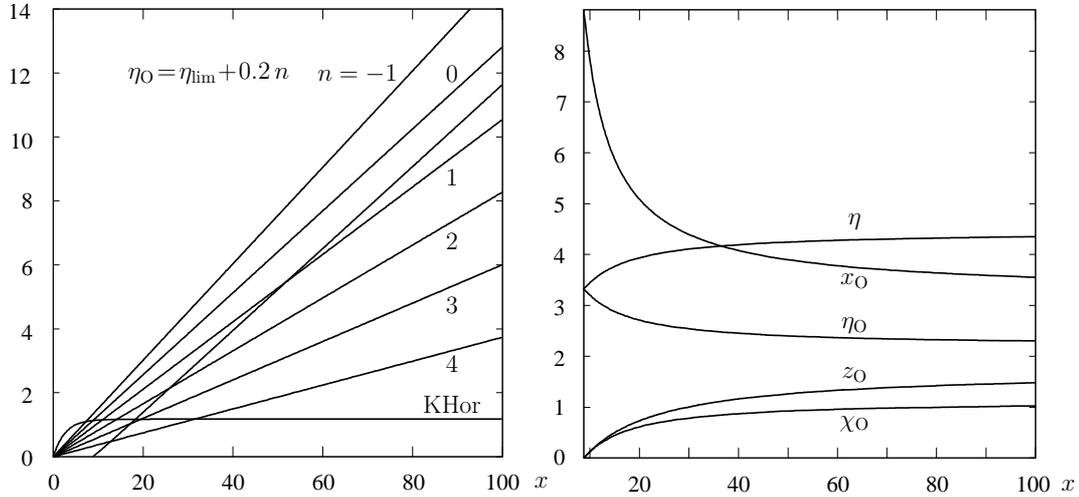


Рис. 20: а: Путь сигнала к объектам. б: Достижимые сигналом объекты.

На рис. 20а помещены прямые, отражающие зависимость расстояний l_{O} до шести объектов от координаты x , там же нанесены кривые, указывающие путь сигнала и положения кинематического горизонта. Объекты характеризуются значениями $\eta_{\text{O}} = \eta_{\text{lim}} + 0.2n$, $n = -1(1)4$. Соответствующие значения χ_{O} , x_{O} , масштабного множителя $a_{\text{O}} = a(\eta_{\text{O}})$ и красного смещения z_{O} этих объектов, а также современные расстояния до них l_{O}^0 приведены в Табл. 13. В восьмой колонке даны значения конформного времени моментов, когда сигнал догоняет объект. Из рисунка видно, что посланный сигнал доходит до объектов только при $n = 1, 2, 3, 4$. При $\eta_{\text{O}} = \eta_{\text{lim}} = 2.19$ сигнал идет почти параллельно объекту. Расстояние между ними остается конечным, так как для такого объекта

$$l_{\text{O}}(\eta) - l_{\text{ph}}(\eta) = a(\eta)(\eta_0 - \eta_{\text{lim}} - \eta + \eta_0) = a(\eta)(\eta_{\infty} - \eta) \sim \frac{x}{x_0} \frac{\eta_*}{x} = \frac{\eta_*}{x_0} = 1.1785. \quad (22)$$

Остаточное (размерное) расстояние немного больше хаббловского.

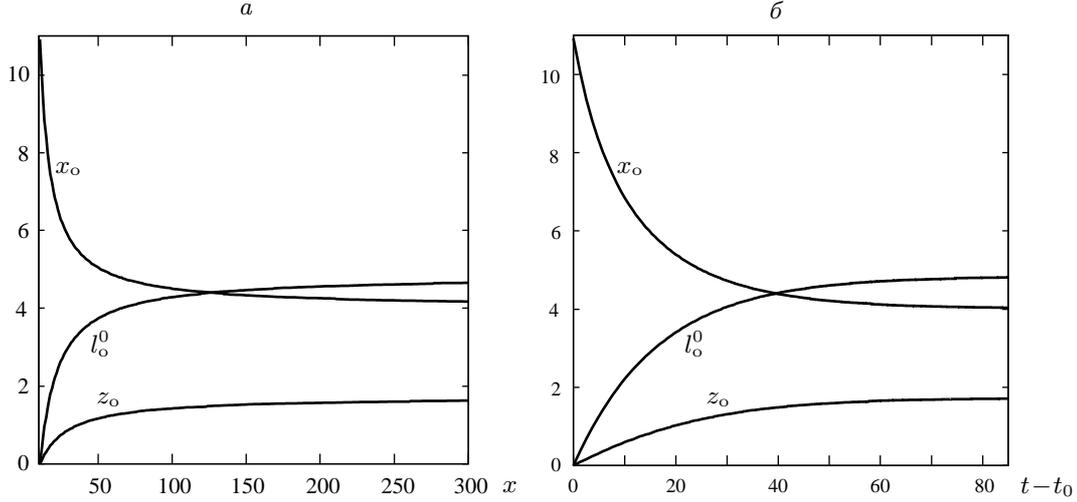


Рис. 21: Координата x_0 , расстояние l_0^0 и красное смещение z_0 объектов, достижимых сигналом, в зависимости от x (а) и времени полета (б).

При $\eta_0 = 1.99 < \eta_{\text{lim}}$ формально получается $\eta_{\text{mt}} = 4.65$, но такое значение невозможно, то есть сигнал до такого объекта не доходит, расстояние между ними только увеличивается.

Сигнал приходит раньше к объектам с большими η_0 , и тем самым, меньшими z_0 и l_0 , то есть расположенными в момент испускания сигнала ближе к месту и моменту его выхода.

Только объекты с $n = 3$ и 4 , у которого значения η_0 равны соответственно 2.79 и 2.99 , сигнал догоняет прежде, чем они пересекают второй горизонт. Условие этого $\eta_0 - \eta_0 < \eta_\infty - 2\eta_0 + \eta_0$, то есть $\eta_0 > \eta_h = \frac{3\eta_0 - \eta_\infty}{2} = 2.758$.

Расстояние между объектом, находящимся сейчас почти на втором горизонте (расстояние до него сейчас 4.84 Гпк, его красное смещение 1.72), то есть при $l_0^0 = \eta_\infty - \eta_0 - \varepsilon$, $\eta_0 = \eta_{\text{lim}} + \varepsilon$, и сигналом

$$l_0 - l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta_0 - \eta_{\text{lim}} - \varepsilon) - l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta - \eta_0) = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta_\infty - \varepsilon - \eta) \sim \frac{c}{H_\Lambda} \frac{\eta_\infty - \varepsilon - \eta}{\eta_\infty - \eta}, \quad (23)$$

так как согласно (18) $\eta \sim \eta_\infty - \eta_*/x$, $a(\eta) = x/x_0 \sim 1/[\sqrt{\Omega_\Lambda^0}(\eta_\infty - \eta)]$ при $x \rightarrow \infty$, $\eta_\infty - \eta \ll 1$. Разность (23) стремится к нулю при $\eta \rightarrow \eta_\infty - \varepsilon$, если $\varepsilon > 0$. Таким образом, в согласии с рис. 15а сигнал все же дойдет до любого объекта, если этот объект расположен хотя бы чуть-чуть ближе второго горизонта. Время до встречи сигнала с объектом $t \sim \ln(1/\varepsilon)$. При расположении объекта на горизонте ($\varepsilon = 0$) остается непреодолимое расстояние $c/H_\Lambda = 5.05$ Гпк. Между испущенным сейчас сигналом и объектами, которые сейчас располагаются за вторым горизонтом, расстояние со временем будет только увеличиваться, причем асимптотически по экспоненте. Эти объекты увлекаются именно экспоненциальным расширением, то есть отталкиванием темной энергии. В моделях без отталкивания второй горизонт не возникает. На рис. 20б нанесена зависимость от x временной координаты η .

На рис. 21 представлены зависимости координат x_0 , η_0 и $\chi_0 = \eta_0 - \eta_0$, а также красных смещений z_0 объектов, до которых дойдет сигнал в момент, соответствующий его координате x (а) и времени полета (б).

Сигнал, посланный сейчас, дойдет до второго горизонта, когда

$$l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta_h)(\eta_h - \eta_0) = l_{\text{Horr}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta_h)(\eta_\infty - \eta_h), \quad \eta_h = \frac{\eta_0 + \eta_\infty}{2} = 3.89. \quad (24)$$

Соответствующие значения $x_h = 18.3$, $l_{\text{ph}} = l_{\text{Horr}} = 5.02$ Гпк, $t_h = 24.9$ Г лет. В это время к горизонту подойдет объект с исходной координатой $x_0 = 5.30$, при которой $a_0 = 0.601$, $z_0 = 0.663$, и исходным расстоянием до нас $l_0^0 = l_{\text{H}}^0(\eta_0 - \eta_0) = 1.45$ Гпк, так как если $l_0 = l_{\text{ph}} = l_{\text{Horr}}$, то $\eta_0 - \eta_0 = \eta_h - \eta_0 = \eta_\infty - \eta_h$ и $\eta_0 = (3\eta_0 - \eta_\infty)/2 = 2.76$.

Только до расстояний ≈ 5 Гпк сможет дойти посланный нами сигнал с надеждой на ответ. Экспоненциальное расширение пространства увлекает излучение, как идущее от нас, так и направленное к нам. Тем не менее, 5 Гпк — это очень большое расстояние, в сфере такого радиуса находится много галактик и, конечно, еще больше экзопланет.

Если сигнал попадет на планету, населенную разумными существами, достигшими достаточно продвинутой цивилизации, они его примут, поймут, определяют, из какого направления он пришел, и ответят, то их сигнал будет приближаться к тому месту, где были мы — люди, пославшие первый сигнал. Тогда расстояние до нас будет изменяться по формуле $\tilde{l}_{\text{ret}} = a(\eta)(\eta_{\text{mt}} - \eta_0 - \eta) = a(\eta)(\eta_0 - \eta_0 - \eta) = a(\eta)(3\eta_0 - 2\eta_0 - \eta)$. Ответ дойдет

до нас в момент $\eta_{\text{ret}} = 3\eta_0 - 2\eta_0$. Если мы хотим, чтобы ответ пришел в момент $\eta_{\text{ret}}^0 > \eta_0$, но $\eta_{\text{ret}} < \eta_\infty$, то у такой цивилизации должно быть $\eta_0 > (3\eta_0 - \eta_{\text{ret}}^0)/2$, $\chi_0 < (\eta_{\text{ret}}^0 - \eta_0)/2$. В крайнем случае, если принять, что $\eta_{\text{ret}}^0 = \eta_\infty$, то условие $\eta_{\text{ret}} < \eta_\infty$ накладывает ограничение на координату η_0 : $\eta_0 > (3\eta_0 - \eta_\infty)/2$. Это ограничение совпадает с условием, что сигнал дойдет до объекта — цивилизации прежде, чем она достигнет второго горизонта. Ограничение на пространственную координату также прежнее: $\chi_0 = \eta_0 - \eta_0 < (\eta_\infty - \eta_0)/2$.

Ясно, что посылать сигнал имеет смысл к объектам, расположенным не дальше нескольких десятков световых лет, иначе ждать возможного ответа придется слишком долго. Несомненно, придется ограничиться нашей Галактикой и даже ближайшими окрестностями Солнечной системы. При всем при том сигналы либо надо посылать в очень узких телесных углах, либо придется сообщать им весьма большую энергию, чтобы они могли быть приняты на достаточно большом расстоянии.

Конечно, приведенные рассуждения носят чисто теоретический или даже академический характер, но они устанавливают принципиальные, предельные ограничения, накладываемые моделью. Они могут относиться либо к эпохам, когда нашей земной цивилизации еще не было или она не была способна осуществить связи с другими цивилизациями, либо к эпохам, когда Солнце и Земля прекратят свое существование в современном виде. Но эти же рассуждения относятся к произвольной точке Вселенной и к цивилизациям, которые могут возникнуть и процветать в любое время.

Литература

1. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Стрoение и эволюция Вселенной. М., 1975.
2. Гуревич Л. Э., Чернин А. Д. Введение в космогонию. М., 1978.
3. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б., Сажин М. В. Космология ранней Вселенной. М., 1988.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1988.
5. Нагурнер Д. И. Элементы космологии. СПб, 2001, 72 стр. (электронная версия по адресу www.astro.spbu.ru раздел www-ресурсы).
6. Э.Б.Глинер. Алгебраические свойства тензора энергии-импульса и вакуумо-подобные состояния вещества. ЖЭТФ 49, N 2 (8), 542–548, 1965.
7. Сапар А. Теория наблюдаемых космологических эффектов // Публикации Тартуской астрономической обсерватории. 1964. Т. XXXIV. N 6. С. 223–318.
8. Peebles P. J. E. Principles of Physical Cosmology. Prinston: Prinston university press, 1993. 718 p.
9. Вайнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной. Регулярная и хаотическая динамика. Москва–Ижевск. 2002. 268 с.
10. Ohm E. A. Project ECHO. Receiving system // Bell Syst. Techn. J. 1961. Vol. 40. N 4. P. 1065–1094.
11. Adams W. S. Some results with Coudé spectrograph of the Mount Wilson observatory // Astrophys. J. 1941. Vol. 93. N 1. P. 11–23.
12. McKellar A. Molecular lines from the lowest states of diatomic molecules composed of atoms probably present in interstellar space // Publ. Dominion Astrophys. Observ. Victoria. 1941. Vol. 7. N 15. P. 251–272.
13. Шмаонов Т. А. Методика абсолютных измерений эффективной температуры радиоизлучения с низкой эквивалентной температурой // Приборы и техника эксперимента. 1957. N 1. С. 83–86.
14. Дорошкевич А. Г., Новиков И. Д. Средняя плотность излучения в Метагалактике и некоторые вопросы релятивистской космологии // ДАН СССР. 1964. Т. 154. N 4. С. 809–811.
15. Corey B. E., Wilkinson D. T. A measurement of the cosmic microwave background anisotropy at 19 GHz // Bull. Amer. Astron. Soc. 1976. Vol. 8. P. 351.
16. Smoot G. F., Gorenstein M. V., Muller R. A. Detection of anisotropy in the cosmic blackbody radiation // Phys. Rev. Let. 1977. Vol. 39. N 14. P. 898–901.
17. IceCube. astro-ph 1401.4496.
18. R. Alpher, R. Herman. Ann. Rev. Nucl. Sci. 2, 1, 1953.
19. Hubble E. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1929. Vol. 15. P. 168.
20. Harrison E. // Astrophys. J. 1993. Vol. 403. N 1. P. 28–31.
21. Питьев Н. П., Питьева . 2013.
22. Riess A. S. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. Astron. J., **116**, 1009, 1998.
23. Perlmutter S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. Astrophysical J., **517**, 565, 1999.
24. А. Д. Чернин. Модель Вселенной, заполненной излучением и пылевидным веществом. Астрон. ж., **42**, 1124–1126, 1965.
25. Smith M. S., Kawano L. H., Malany R. A. // Astrophys. J. Suppl. 1993. Vol. 85. P. 219.
26. Крамаровский Я. М., Чечев В. П. // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169. С. 643.
27. W. Bonnor. MNRAS 117, 104, 1957.

28. *Я. Б. Зельдович.* Успехи физ. наук, **80**, 353, 1963.
29. *Д.И. Нагурнер.* Реликтовый фон и его искажения. Изд-во СПбГУ, 2003, 55 стр.
30. Durrer R. The theory of CMB anisotropies. astro-ph/0109522 v1 27 Sep 2001.
31. Romeo G., Ali S., Femenia B., Limon M. et al. Millimetric ground based observation of CMBR anisotropy at $\delta = +28^\circ$. astro-ph/0011226 v1 1 Nov 2000.
32. *А.С.Зенцова, А.Д.Чернин.* Астрофизика, 16, 108, 1980.
33. *A. Guth.* Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. Phys. Rev. Vol. D23. N 2, P. 347-356, 1981.
34. *А.Д.Линде.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., Наука, 1990, 276 с.

Приложение I. Альтернативные функции

1. *Определения функций.* Введем несколько общих обозначений для альтернативных функций, характеризующих космологические модели, при которых пространство имеет различную кривизну. Удобно ввести шесть таких обозначений.

Функции $\text{sn}_k(\eta)$ и $\text{cs}_k(\eta)$ являются соответственно альтернативными обозначениями тригонометрических и гиперболических синуса и косинуса:

$$\text{sn}_k \eta = \begin{cases} \sin \eta & \text{при } k = 1, \\ \eta & \text{при } k = 0, \\ \text{sh } \eta & \text{при } k = -1, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{cs}_k \eta = \text{sn}'_k(\eta) = \begin{cases} \cos \eta & \text{при } k = 1, \\ 1 & \text{при } k = 0, \\ \text{ch } \eta & \text{при } k = -1. \end{cases}, \quad \text{cs}'_k(\eta) = -k \text{sn}_k(\eta). \quad (2)$$

Следующие функции — интеграл от $\text{sn}_k(\eta)$ и интеграл от интеграла (точнее, это простейшие первообразные):

$$\text{sc}_k(\eta) = \begin{cases} 1 - \cos \eta & \text{при } k = 1, \\ \eta^2/2 & \text{при } k = 0, \\ \text{ch } \eta - 1 & \text{при } k = -1, \end{cases} \quad \text{sc}'_k(\eta) = \text{sn}_k(\eta), \quad (3)$$

$$\text{cn}_k(\eta) = \begin{cases} \eta - \sin \eta & \text{при } k = 1, \\ \eta^3/6 & \text{при } k = 0, \\ \text{sh } \eta - \eta & \text{при } k = -1, \end{cases} \quad \text{cn}'_k(\eta) = \text{sc}_k(\eta). \quad (4)$$

Понадобятся также отношения введенных функций и производные от них:

$$\text{tn}_k(\eta) = \frac{\text{sn}_k(\eta)}{\text{cs}_k(\eta)}, \quad \text{ctn}_k(\eta) = \frac{\text{cs}_k(\eta)}{\text{sn}_k(\eta)}, \quad \text{tn}'_k(\eta) = \frac{1}{\text{cs}_k^2(\eta)}, \quad \text{ctn}'_k(\eta) = -\frac{1}{\text{sn}_k^2(\eta)}. \quad (5)$$

2. *Обратные функции.* Введем также обозначения для функций, обратных по отношению к $\text{sn}_k(\eta)$ и $\text{cs}_k(\eta)$, а также их отношенияю. Для самих функций

$$\text{arsn}_k(y) = \begin{cases} \arcsin y, & k = 1, \\ y, & k = 0, \\ \text{arsh } y = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}), & k = -1, \end{cases} \quad \text{arsn}_k(\text{sn}_k(\eta)) = \eta, \quad \text{sn}_k(\text{arsn}_k(y)) = y. \quad (6)$$

$$\text{arcs}_k(y) = \begin{cases} \arccos y, & k = 1, \\ \text{arch } y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), & k = -1, \end{cases} \quad \text{arcs}_k(\text{cs}_k(\eta)) = \eta, \quad \text{cs}_k(\text{arcs}_k(y)) = y. \quad (7)$$

Последняя функция для $k = 0$ не вводится.

Для отношения синуса и косинуса

$$\text{artn}_k(y) = \begin{cases} \text{arctg } y, & k = 1, \\ y, & k = 0, \\ \text{arth } y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}, & k = -1, \end{cases} \quad \text{artn}_k(\text{tn}_k(\eta)) = \eta, \quad \text{tn}_k(\text{artn}_k(y)) = y. \quad (8)$$

Производные от обратных функций

$$\frac{d \text{arsn}_k(y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - ky^2}}, \quad \frac{d \text{arcs}_k(y)}{dy} = \frac{k}{\sqrt{k(1 - y^2)}}, \quad \frac{d \text{artn}_k(y)}{dy} = \frac{1}{1 + ky^2}. \quad (9)$$

3. *Общие соотношения между функциями.* Из формул плоской и гиперболической тригонометрии выводятся общие соотношения, справедливые для всех трех случаев кривизны пространства. Нетрудно проверить, что выполняются следующие соотношения между первыми тремя из введенных функций.

1) Основные соотношения.

$$\text{cs}_k^2(\eta) + k \text{sn}_k^2(\eta) = 1, \quad \text{sn}_k^2(\eta) + k \text{sc}_k^2(\eta) = 2 \text{sc}_k(\eta), \quad \text{cs}_k(\eta) + k \text{sc}_k(\eta) = 1. \quad (10)$$

2) Сумма аргументов.

$$\text{sn}_k(\eta_1 \pm \eta_2) = \text{sn}_k(\eta_1) \text{cs}_k(\eta_2) \pm \text{cs}_k(\eta_1) \text{sn}_k(\eta_2), \quad \text{cs}_k(\eta_1 \pm \eta_2) = \text{cs}_k(\eta_1) \text{cs}_k(\eta_2) - k \text{sn}_k(\eta_1) \text{sn}_k(\eta_2). \quad (11)$$

3) Двойной аргумент.

$$\operatorname{sn}_k(2\eta) = 2 \operatorname{sn}_k(\eta) \operatorname{cs}_k(\eta), \quad \operatorname{cs}_k(2\eta) = \operatorname{cs}_k^2(\eta) - k \operatorname{sn}_k^2(\eta), \quad \operatorname{sc}_k(2\eta) = 2 \operatorname{sn}_k^2(\eta). \quad (12)$$

4) Обратные функции.

$$\operatorname{arsn}_k(x) \pm \operatorname{arsn}_k(y) = \operatorname{arsn}_k\left(x\sqrt{1-ky^2} \pm y\sqrt{1-kx^2}\right), \quad \operatorname{artn}_k(y_1) \pm \operatorname{artn}_k(y_2) = \operatorname{artn}_k\left(\frac{y_1 \pm y_2}{1 \mp ky_1y_2}\right). \quad (13)$$