

А.А. КИСЕЛЕВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВАНИЯ
ФОТОГРАФИЧЕСКОЙ
АСТРОМЕТРИИ



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1989

ББК 22.61
К44
УДК 521.9

Киселев А.А. Теоретические основания фотографической астрометрии. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 264 с.
ISBN 5-02-014066-X

Систематическое углубленное изложение теоретических основ фотографической астрометрии, включающее теорию центральной проекции, небесной сферы, теорию тангенциальных координат, вопросы редуцированных вычислений сферической астрономии, методы обработки фотографических наблюдений для определения положений и собственных движений звезд, теорию редукации измерений астронегативов без опорных звезд, метод параметров видимого движения в применении к определению орбит визуально-двойных звезд. В изложении широко применяется векторно-метрический аппарат.

Для научных работников, специализирующихся в области астрометрии, небесной механики, геодезии и звездной астрономии.

Рецензент

доктор физико-математических наук *В.В. Подобед*

К $\frac{1605030000 - 058}{053 (02) - 89}$ 116-89

ISBN 5-02-014066-X

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической литературы,
1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. ФОТОГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕБЕСНОЙ СФЕРЫ И ЕЕ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ	13
§ 1. Основные понятия центральной проекции, используемые в фотографической астрометрии	13
§ 2. Фокусное расстояние и масштаб	16
§ 3. Центральная проекция сферических углов	21
§ 4. Расчет координатной сетки для фотографических карт неба	24
§ 5. Систематические ошибки фотографической проекции	28
5.1. Оптические aberrации	29
5.2. Дисторсия фотографической проекции	30
5.3. Искривление изображений дуг больших кругов вследствие дисторсии	31
5.4. Влияние дисторсии на масштаб фотографической проекции	34
5.5. Дисторсия, зависящая от децентрировки	35
Глава 2. ВЕКТОРНАЯ ФОРМУЛА БОЛЬШОГО КРУГА НА НЕБЕСНОЙ СФЕРЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ	37
§ 1. Векторная формула большого круга	37
§ 2. Векторные формулы учета рефракции	40
§ 3. Векторные формулы учета годичной aberrации	42
§ 4. Векторные формулы учета геоцентрического параллакса	46
4.1. Прямая задача	47
4.2. Обратная задача	48
4.3. Геодезическая задача	49
4.4. О точности решений задач с геоцентрическим параллаксом	50
§ 5. Векторные формулы учета годичного параллакса	51
§ 6. Дифференциальная форма векторной формулы большого круга	53
Глава 3. ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ	55
§ 1. Основные формулы тангенциальных координат	55
1.1. Определение тангенциальных координат	55
1.2. Тангенциальный триэдр осей	56
1.3. Векторные формулы тангенциальных координат	59
1.4. Тригонометрические формулы тангенциальных координат	61
§ 2. Преобразование тангенциальных координат при переходе к другой плоскости	63
2.1. Общий случай сравнения тангенциальных координат двух пластинок	63
2.2. Сравнение тангенциальных координат двух близких пластинок	65

§ 3. Изменение тангенциальных координат звезд вследствие прецессии	68
3.1. Преобразование единичного вектора звезды вследствие прецессии	68
3.2. Вычисление тангенциальных координат звезд в системе экватора и равноденствия произвольной эпохи	70
3.3. Поворот тангенциальных координат вследствие прецессии	72
§ 4. Видимые тангенциальные координаты	74
4.1. Полные формулы видимых тангенциальных координат	75
4.2. Дифференциальные формулы видимых тангенциальных координат	78
Глава 4. АСТРОФОТОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ	83
§ 1. Основные понятия фотографической астрометрии в связи с задачей определения координат небесных объектов	83
1.1. Опорные звезды	84
1.2. Измеренные координаты	85
1.3. Стандартные координаты	86
§ 2. Общая постановка задачи об определении сферических координат небесных объектов методами астрофотографии	88
2.1. О корректности применения метода наименьших квадратов для определения постоянных пластинки	90
§ 3. Обзор наиболее употребительных моделей для преобразования измеренных координат в тангенциальные	92
3.1. Линейная модель (метод шести постоянных, или метод Тернера)	92
3.2. Модель с неполными квадратичными членами (метод десяти постоянных)	93
3.3. Модель с полной квадратичной формой (метод двенадцати постоянных)	94
3.4. Модель с учетом членов наклонности и дисторсии	95
3.5. Проективная модель. Коллинеарный метод и метод восьми постоянных	95
§ 4. Линейные методы	97
4.1. Метод шести постоянных и определение масштаба астрофотографий	97
4.2. Метод депенденсов	99
4.3. О традиционной ошибке в изложении метода депенденсов	104
4.4. Интерполяционный метод	106
4.5. Интерполяционный метод и метод депенденсов — общность и различия	112
4.6. Векторная интерпретация метода депенденсов Шлезингера и интерполяционного метода	114
§ 5. Применение депенденсов Шлезингера к исследованию остаточных ошибок астрометрической редукции линейными методами	116
5.1. Выражение ошибки результата редукции через депенденсы Шлезингера	116
5.2. Оценка точности астрометрической редукции линейными методами в случайном отношении	119
5.3. Систематические ошибки результата редукции линейными методами, зависящие от наклонности, дисторсии и рефракции	120
5.3а. Остаточная ошибка наклонности	121
5.3б. Остаточная ошибка дисторсии	126
5.3в. Остаточная ошибка рефракции	128
5.3г. Сводная таблица остаточных ошибок	131
§ 6. Проективные методы	132
6.1. Метод гомографических координат для определения положения небесного объекта	133
6.2. Метод гомографических координат для сравнения пластинок	140
6.3. Геометрический метод	143

6.4. Применение геометрического метода для калибровки широкоугольных камер.	149
§ 7. Метод астрометрической редукции с двумя системами опорных звезд	160
7.1. Постановка задачи	160
7.2. Алгоритм метода двухступенчатой редукции	162
7.3. Среднеквадратичная ошибка редукции.	166
Глава 5. ОШИБКИ АСТРОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ ФОТОГРАФИЙ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ.	169
§ 1. Постановка задачи	169
1.1. Ошибки астрометрической редукции в общем случае.	169
§ 2. Обобщение метода депенденсов для общего случая астрометрической редукции	175
§ 3. Численные оценки ошибки астрометрической редукции при применении различных моделей редукции в идеализированных условиях	180
3.1. Линейная модель $3L \times 2$	181
3.2. Модель с неполной квадратичной формой (десять постоянных), $(3L + 2Q) \times 2$ случай редукции по ξ	183
3.3. Модель с полной квадратичной формой (двенадцать постоянных), $(3L + 3Q) \times 2$	184
3.4. Проективная модель (восемь постоянных), $(6L + 2Q)$	185
3.5. Модель с членами наклонности и дисторсии $(3L + 2Q + D) \times 2$	187
3.6. Эффективность редукции с различными моделями	188
Глава 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД.	193
§ 1. Фотографические собственные движения звезд.	193
1.1. Постановка и решение задачи.	193
1.2. Ошибки фотографических собственных движений звезд.	196
1.3. Точность фотографических собственных движений звезд в случайном отношении	199
1.4. Точность фотографических собственных движений звезд в систематическом отношении	203
§ 2. Определение системы фотографических собственных движений звезд. Абсолютизация собственных движений.	207
2.1. Прямой способ с постоянными перехода.	207
2.2. Прямой способ с депенденсами.	209
2.3. Косвенный способ.	212
2.4. Абсолютизация	216
Глава 7. АСТРОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАНДАРТИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ АСТРОФОТОГРАФИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ДЛИННОФОКУСНЫХ ТЕЛЕСКОПАХ	223
§ 1. Постановка задачи	223
§ 2. Начальная ориентировка астрофотографий при наблюдениях и измерениях	225
§ 3. Формулы первого порядка для учета дифференциальной рефракции при стандартизации измерений астрофотографий.	228
§ 4. Искажения координатной сетки вследствие дифференциальной рефракции.	231

Глава 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДЫ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ КОРОТКОЙ ДУГИ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРОВ ВИДИМОГО ДВИЖЕНИЯ (МЕТОДОМ ПВД)	236
§ 1. Пулковская программа астрометрических исследований визуально-двойных звезд	236
§ 2. Постановка задачи об определении орбиты визуально-двойной звезды .	237
2.1. Уравнения метода параметров видимого движения в задаче определения орбиты визуально-двойной звезды	239
2.2. Решение системы уравнений метода ПВД	245
2.3. Результаты применения метода ПВД для определения орбит трех визуально-двойных звезд	249
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	255

ВВЕДЕНИЕ

Фотографическая астрометрия как самостоятельная область астрометрии существует уже около ста лет. В настоящее время фотографическая астрометрия переживает период бурного роста как вширь, так и вглубь. Под ростом вширь мы понимаем освоение новых областей применения, например, фотографические наблюдения искусственных спутников Земли, позиционные наблюдения больших планет и их спутников, наблюдения квазаров и галактик для улучшения фундаментальной системы координат. Под ростом вглубь мы понимаем изменения, связанные с совершенствованием технической базы наблюдений и измерений, с повышением точности и информативности наблюдений и, наконец, с применением новых, более строгих и сложных современных методов обработки наблюдений, ориентированных на вычисления с помощью ЭВМ.

Наиболее существенными из происходящих изменений безусловно являются те, которые вызваны внедрением ЭВМ в практику обработки наблюдений. Имеется ввиду не столько количественная сторона дела (сокращение времени обработки), сколько его качественная сторона, т.е. возможность применения более строгих современных статистических методов обработки наблюдений и создание новых, лучше обоснованных методов редукции и анализа результатов. Большое значение имеет также постепенный переход от трудоемких визуальных измерений астронегативов к автоматическим измерениям с помощью измерительных комплексов, управляемых ЭВМ (Киселев и др., 1984). Автоматические измерения, целесообразно программируемые, могут стать основой для создания методов редукции, учитывающих такие сложные систематические ошибки фотографической астрометрии, как уравнения блеска и цвета, с использованием для этой цели анализа элементов изображений. Потребность в переосмысливании и перестройке традиционных методов астрометрической редукции фотографических наблюдений и в создании новых методов ощущается в фотографической астрометрии уже давно, со времени запусков первых искусственных спутников Земли, т.е. уже по крайней мере третье десятилетие. Эту потребность отражают некоторые пока еще немногочисленные работы зарубежных и советских астрономов (см., например, работы Г. Эйхгорна (Эйхгорн и др., 1963; Гудж и др., 1970), П. Лакрута и А. Вальбускье (Лакрут и др., 1974), Хр. де Вегта (Вегт де,

1975), Ю.А. Шокина (Шокин и др., 1983; Шокин, 1974), В.В. Подобеда (Зинченко и др., 1977), А.И. Курьяновой и Л.Н. Кизюй (Курьянова и др., 1985), Я.С. Яцкива и А.И. Курьяновой (Яцкив и др., 1985)). Главное внимание в работах зарубежных авторов уделено методу редукции перекрывающихся пластинок, который рассматривается как основа для создания алгоритма, подавляющего влияние систематических ошибок фотографического метода. Наиболее полно эта идея выражена в работе Г. Эйхгорна (Эйхгорн, 1967).

Метод перекрывающихся пластинок применен для создания новой версии каталога АГК-3 посредством переработки старых наблюдений и измерений, однако, как показал Хр. де Вегт (Вегт де, 1975), новый каталог не оказался лучше в систематическом отношении. В работах советских авторов большое внимание уделено некоторым частным вопросам фотографической астрометрии, хотя задача создания каталога на основе перекрывающихся пластинок также рассматривается (Фролова, 1974; Шокин и др., 1983). Для новых работ в области методов фотографической астрометрии характерен формальный подход, отражающий убежденность авторов в том, что усложнение математической модели связи измеренных и тангенциальных координат и расширение области редукции за счет перекрывающихся пластинок при применении современных методов редукции обеспечивает повышение точности координат определяемых объектов как в случайном, так и в систематическом отношении.

На наш взгляд, такая точка зрения недостаточно обоснована. Всякое усложнение математической модели редукции должно быть обосновано тщательным исследованием реальных систематических ошибок фотографической проекции. Нельзя расширять модель редукции за счет новых параметров только потому, что новая модель якобы сможет лучше скомпенсировать ("учесть") систематические ошибки фотографической проекции (которых на самом деле может и не быть), так как при этом, как следует из теории способа наименьших квадратов, происходит общая потеря точности редукции в случайном отношении и, кроме того, создаются условия для возникновения других систематических ошибок за счет эффекта "перекачки" случайных ошибок в систему (подробнее об этом см. гл. 6, § 1.4). То же можно сказать и о расширении области редукции за счет перекрывающихся пластинок. В этом случае условия для "перекачки" случайных и систематических ошибок плохо измеряемых изображений звезд в краевых зонах в систему положений всех звезд особенно благоприятны, так как измеренные положения краевых звезд несут главную информацию, служащую для определения "постоянных пластинок".

Таким образом, современное развитие новых методов фотографической астрометрии, по нашему мнению, происходит несколько односторонне — в сторону формального усложнения задач. Новые методы могут и должны развиваться в тесной связи с совершенствованием традиционных методов, при этом особое внимание должно быть обращено на изучение систематических ошибок, свойственных фотографическому методу вообще.

Большую роль в этих исследованиях могут оказать автоматические измерительные машины второго поколения, способные анализировать

распределение плотности фотографического изображения звезд по его элементам. Автоматическими измерительными машинами второго поколения мы называем новые машины, в которых реализуется следующий принцип измерений: во-первых, изображение раскладывается на малые элементы, для каждого из которых определяются координаты и плотность почернения в условной шкале, во-вторых, вычисляется путем интегрирования условный центр изображения по заданной программе. Примером таких машин могут служить советская автоматическая измерительная машина "Зенит-2" (Киселев и др., 1984) и американская машина PDC (Арло, 1980).

С другой стороны, традиционные методы могут помочь в исследовании суммарного влияния систематических ошибок изображений через посредничество "постоянных пластинок", освобожденных от других мешающих факторов. Особенно эффективным инструментом в этих исследованиях может стать линейный метод (метод шести постоянных), поскольку постоянные пластинок в этом методе практически свободны от сложных корреляционных связей, возникающих при применении нелинейных моделей.

Вообще традиционные методы фотографической астрометрии еще далеко не исчерпали своих ресурсов и их обобщение и развитие, как нам представляется, может только способствовать делу создания новых современных методов астрометрической редукции фотографических наблюдений повышенной точности. Возможности совершенствования традиционных методов фотографической астрометрии мы видим на следующих путях:

1. Переход от математического аппарата сферической тригонометрии к векторно-матричному. Этот переход предполагает также замену большинства приближенных формул точными.

2. Применение "видимых" тангенциальных координат в задачах позиционной астрометрии. Видимые тангенциальные координаты освобождают алгоритм редукции от сложностей, связанных с учетом нелинейных эффектов дифференциальной рефракции и аберрации. (Подробнее о видимых тангенциальных координатах см. гл. 3, § 4.)

3. Строгий анализ точности результатов астрометрической редукции на основе современной теории способа наименьших квадратов.

4. Критический анализ сложившихся в основном эмпирических представлений в связи с применением традиционных методов и приемов обработки фотографических наблюдений. Такой анализ особенно необходим в задаче выбора подходящей модели редукции при оценивании точности фотографических собственных движений звезд и при редукции наблюдений, полученных на длиннофокусных астрографах.

5. Применение линейных методов для исследования систематических ошибок фотографического метода, зависящих от блеска и цвета звезд и положения их изображений на пластинке.

6. Создание астрометрических стандартов и их применение для астрометрической калибровки широкоугольных телескопов, например, с помощью геометрического метода (Киселев и др., 1976).

Здесь уместно отметить, что хотя традиционные (классические) методы фотографической астрометрии широко применяются на практике уже

более 50 лет, до сих пор отсутствует систематическое изложение этих методов, сопровождаемое строгим анализом ошибок. Существующие руководства по фотографической астрометрии (Кёниг, 1933; Костинский, 1934; Бугославская, 1947; Дейч, 1973) отражают состояние этой области астрометрии в докомпьютерную эпоху и не удовлетворяют современным требованиям к обработке наблюдений. Более современные изложения предмета (Подобед и др., 1975; Эйхгорн, 1974) отличаются строгой постановкой задач, однако носят фрагментарный характер.

Цель настоящей монографии – сформулировать, исходя из строгих геометрических и астрономических положений, теоретические основы фотографической астрометрии и на этой базе критически рассмотреть и систематизировать существующие традиционные методы и приемы этой области астрометрии. Учитывая потребности развития фотографической астрометрии и огромные возможности, которые предоставляет исследователям ЭВМ, мы широко применяем в нашем изложении векторно-матричный аппарат, что позволило нам получить строгие оценки точности традиционных методов и предложить ряд новых формул и алгоритмов.

Теоретическую основу фотографической астрометрии составляют следующие элементы.

1. Теория центральной проекции небесной сферы на плоскость, включающая некоторые вопросы картографии.

2. Теория фотографической проекции небесной сферы, учитывающая отличие этой проекции от центральной.

3. Теория искажений видимых относительных положений звезды основных кругов на небесной сфере вследствие рефракции, аберрации и прецессии.

4. Теория тангенциальных координат как основного инструмента астрометрической редукции фотографических наблюдений.

5. Теория астрометрической редукции фотографических наблюдений с опорными звездами. Эта теория предполагает решение следующих задач: а) определение сферических координат небесных объектов в системе известного каталога, б) определение относительных собственных движений звезд и их абсолютизацию, в) определение тригонометрических параллаксов близких звезд.

6. Оценка случайных и систематических ошибок фотографических положений звезд и планет и собственных движений звезд на основе современной теории способа наименьших квадратов.

7. Теория астрометрической редукции фотографических наблюдений без опорных звезд. Эта теория применяется для определения относительных положений и движений компонент кратных звезд и в системах спутников больших планет.

Главное внимание в нашем исследовании мы уделяем математически строгим формулировкам и выкладкам при постановке и решении задач. При таком подходе все задачи обеспечиваются формально точными решениями, а ошибки полученных результатов строго оцениваются согласно теории способа наименьших квадратов. Во многих случаях удается получить также априорные оценки точности результатов для заданной модели редукции при идеализированных начальных условиях задачи.

В соответствии с установкой и целью исследования мы рассматриваем здесь ряд задач, относящихся к редуцированным вычислениям сферической астрономии. Решение этих задач имеет вспомогательное, но важное значение для фотографической астрометрии, особенно для определения видимых тангенциальных координат. Из прямых задач фотографической астрометрии особенно подробно мы останавливаемся на основной задаче фотографической астрометрии — на задаче определения координат небесных объектов; на примере этой задачи удобнее проследить и проверить эффективность рассмотренных в этой монографии методов редукиции и анализа. Так же подробно мы рассматриваем задачу определения фотографических собственных движений и задачу редукиции фотографических наблюдений без опорных звезд, поскольку традиционные полуэмпирические представления об этих задачах заслуживают, по нашему мнению, серьезной критики. В заключение мы рассматриваем задачу определения орбиты визуально-двойной звезды на основе фотографических наблюдений короткой дуги ее видимой орбиты. На примере этой задачи проверяется эффективность предложенного нами метода параметров видимого движения (метода ПВД) для определения орбит небесных тел, движущихся под действием центральных сил (Киселев и др., 1973; Киселев и др., 1975; Киселев и др., 1980), а также формулируется стратегия наблюдений визуально-двойных звезд с целью определения их орбит.

В этом исследовании мы не рассматриваем некоторые специфические систематические ошибки, характерные для фотографического метода вообще, а именно, ошибки типа уравнения блеска, зависящие от свойств оптической системы телескопа, от качества изображений во время наблюдений, ошибки экспозиции, яркости и цвета звезд, а также ошибки, возникающие вследствие взаимодействия фотографических изображений близких звезд. Мы полагаем, что эти ошибки должны изучаться в индивидуальном порядке для каждого конкретного телескопа, установленного в определенном месте с известным астроклиматом. Например, при таких исследованиях удобно применить метод шести постоянных и воспользоваться свойством остаточных ошибок редукиции в линейных методах, подробно рассмотренных в гл. 4, § 5.

Коль скоро для этих ошибок будет установлена определенная закономерность распространения, их можно будет учесть в процессе измерений или при редукиции путем применения соответствующей модели, или после редукиции, если применен линейный метод. Мы не рассматриваем здесь подробно задачу определения тригонометрических параллаксов звезд, хотя и делаем замечание по поводу "традиционной" ошибки в применении метода депенденсов в этой задаче (см. гл. 4, § 4.2). Детальное рассмотрение этой задачи выходит за рамки этой монографии. Наконец, мы вовсе не касаемся здесь проблемы редукиции перекрывающихся пластинок, которая могла бы стать предметом специального исследования в связи с созданием астрографического каталога.

Данная монография отражает почти тридцатилетний опыт работы автора в области теории и практики фотографической астрометрии. Некоторые из рассмотренных здесь новых методов редукиции астрофотографий и сферической астрономии были разработаны в связи с развитием космической триангуляции, первоначально базировавшейся почти исключительно

но на фотографических наблюдениях искусственных спутников Земли (ИСЗ). Таковыми являются методы редуционного исчисления, использующие векторную формулу большого круга, интерполяционный метод, метод гомографических координат и геометрический метод, предложенные автором для обработки фотографических наблюдений ИСЗ и для калибровки спутниковых камер.

Автор надеется, что книга будет полезна не только астрономам-специалистам, но и инженерам-геодезистам и фотограмметристам, имеющим дело с массовыми вычислениями в связи с астрономическими наблюдениями. Кроме того, книга может быть использована в учебном процессе для обучения студентов астрономической и геодезической специальностей.

ФОТОГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕБЕСНОЙ СФЕРЫ И ЕЕ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ

§ 1. Основные понятия центральной проекции, использующиеся в фотографической астрометрии

Всякий астрономический телескоп создает изображение некоторой области звездного неба, которое с хорошим приближением можно рассматривать как центральную проекцию сферы на плоскость. Соответствующее геометрическое построение происходит так, как если бы точки небесной сферы (звезды) проектировались на фокальную плоскость телескопа с помощью лучей, проходящих через вторую главную (гауссову) точку объектива параллельно видимым направлениям на звезды. Ход лучей в объективе при этом не имеет значения. В этой схеме звезды являются бесконечно удаленными точками в пространстве предметов, вторая главная точка объектива является центром проекции, а фотографическая пластинка, помещенная в фокальной плоскости оптической системы телескопа, служит картинной плоскостью.

Такое представление хорошо соответствовало положению дел в астрономии приблизительно до начала 30-х годов нашего столетия, пока фотографические наблюдения в целях астрометрии производились в основном и почти исключительно с помощью телескопов — астрографов классического типа с небольшим полем, для которых основные положения гауссовой оптики остаются справедливыми. Однако позднее, особенно в послевоенное время, когда арсенал астрономических телескопов пополнился камерами Шмидта, менисковыми телескопами Максудова и телескопами с концентрической менисковой и зеркальной оптикой, положение изменилось. Понятия гауссовой оптики для этих сверхширокоугольных и сверхсветосильных оптических систем, строго говоря, потеряли смысл. Тем не менее, если иметь в виду применение этих новейших телескопов и фотокамер для целей астрометрии (например, в спутниковой астрометрии), мы неизбежно обратимся к центральной проекции небесной сферы на плоскость как к наиболее близкой и удобной математической модели реальной астрофотографии, с помощью которой можно сравнительно простыми методами решать любые астрометрические задачи. Поэтому изучение методов фотографической астрометрии естественно начать с изложения свойств центральной проекции, имеющих значение для астрометрии.

Оптический центр. Рассмотрим схему построения проекции небесной сферы в каком-либо астрографе с идеальной оптикой (рис. 1). Можно считать, что такой телескоп строит центральную проекцию небесной сферы

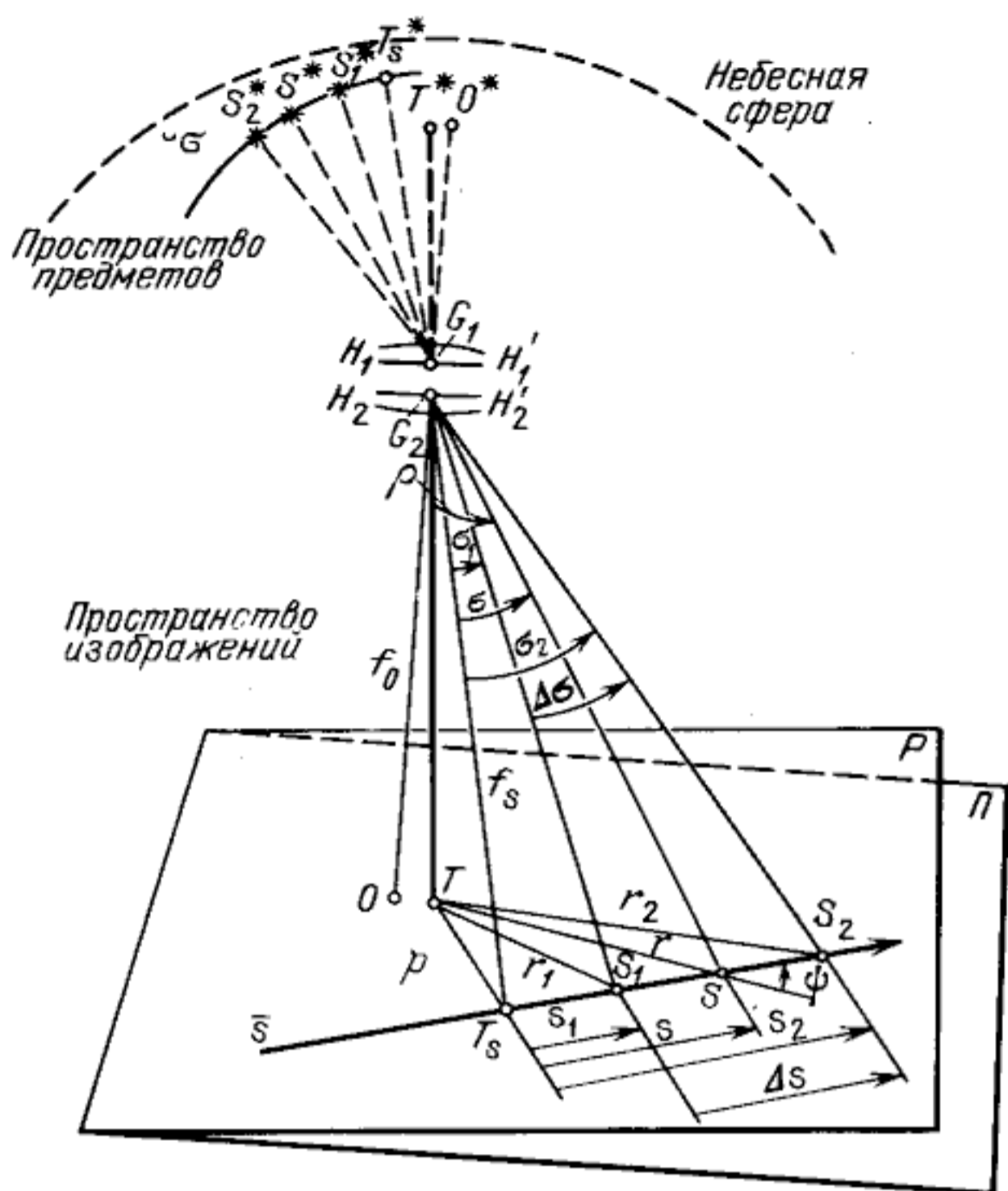


Рис. 1. Изображение небесной сферы идеальным телескопом. Определение масштаба астрофотографии:

$G_1 G_2$ — главные, или гауссовы точки объектива идеального телескопа, Π — картинная плоскость центральной проекции, P — плоскость реальной пластинки (астрофотографии), T — оптический центр астрофотографии, O — осевая точка астрофотографии, f_0 — заднее главное фокусное расстояние, f_s — фокусное расстояние точки T_S , $G_1 S_1^*$, $G_1 S_2^*$ — направления на реальные звезды, S_1, S, S_2 — изображения звезд в плоскости P , $H_1 H_1'$ — передняя, и $H_2 H_2'$ — задняя главные плоскости объектива

в своей фокальной плоскости. Проведем прямую через центры кривизны всех оптических поверхностей объектива — это оптическая ось телескопа. Перпендикулярно оптической оси расположены главные плоскости оптической системы $H_1 H_1'$ и $H_2 H_2'$. Главные (гауссовы) точки системы G_1 и G_2 находятся на пересечении оптической оси с плоскостями $H_1 H_1'$ и $H_2 H_2'$. На оптической оси отметим также точку O — точку пересечения лучей от бесконечно удаленной точки (например, некоторой фиктивной звезды S_0), видимой в направлении оптической оси; это главный задний фокус оптической системы. Плоскость, проходящая через O и перпендикулярная оптической оси, есть фокальная плоскость оптической системы телескопа — она же картинная плоскость Π , причем длина отрезка $G_2 O$ определяет фокусное расстояние системы f_0 . Небесную сферу в этой схеме следует считать описанной вокруг точки G_1 , а ее изображение в картинной плоскости строится проекцией из точки G_2 , построенной лучами, параллельными видимым направлениям на звезды в пространстве предметов. Все приведенные определения принадлежат гауссовой оптике. Теперь обратим-

ся к соответствующим понятиям фотографической астрометрии и фотограмметрии.

К сожалению, смежная фотографической астрометрии область науки — фотограмметрия, развивавшаяся несколько позднее и независимо, силами, главным образом, инженеров-геодезистов, пользуется собственным словарем терминов для понятий, известных в фотографической астрометрии под другим названием. Это обстоятельство затрудняет знакомство астрономов с литературой по фотограмметрии и, наоборот, знакомство геодезистов с литературой по фотографической астрометрии, хотя подчас обсуждаются одинаковые проблемы. Лишь в последнее время в связи с развитием спутниковой астрометрии наметилось сближение между этими специализациями науки, что, безусловно, идет на пользу им обоим.

В фотографической астрометрии картинной плоскостью служит плоскость P , соответствующая светочувствительному слою (эмульсии) фотографической пластинки, помещенной в кассете приблизительно перпендикулярно оптической оси. Плоскость P , вообще говоря, может не совпадать с фокальной плоскостью оптической системы телескопа и даже не быть ей параллельной. Это может происходить, например, вследствие недостаточно точной оптической и механической юстировки астрографа, а также вследствие гнущейся трубы телескопа. Ввиду непараллельности плоскости P фокальной плоскости Π перпендикуляр, опущенный из точки G_2 (рис. 1) на плоскость P , не совпадает с оптической осью телескопа, и соответственно точки T и O , в которых перпендикуляр и ось встречают плоскость P , тоже не совпадут. В фотографической астрометрии точку T называют *оптическим центром* пластинки, или точкой касания. В фотограмметрии точку T называют *главной точкой фотографии*. Для точки O установившегося специального названия не существует. Чаще всего эту точку просто не отличают от оптического центра, с которым она в идеальных условиях должна совмещаться, а в тех случаях, когда точки T и O необходимо различать, делают оговорку. В данной работе точку O условимся называть *осевым центром фотографии*. Главное значение этой точки для фотографической астрометрии состоит в том, что она служит центром симметрии тех искажений реальной фотографической проекции, которые связаны с внеосевыми аберрациями объектива, такими, например, как дисторсия.

Но вернемся к понятию оптического центра. По построению оптический центр является проекцией той точки небесной сферы (в направлении T^*), в которой касательная к сфере плоскость параллельна плоскости P , т.е. фотографической пластинке в момент наблюдений. В соответствии с этим определением мы можем говорить о сферическом положении, например, об экваториальных координатах оптического центра данной пластинки, подразумевая под этим положение на небесной сфере точки T^* как фиктивной звезды. Приписав в этом смысле оптическому центру T пластинки P экваториальные координаты A и D , мы тем самым определим в пространстве изображений множество параллельных пластинок, на которых изображения звездных конфигураций образуют подобные фигуры, а центром подобия служит оптический центр. Знание координат оптического центра необходимо для построения математической модели астрофотогра-

фии в большинстве методов астрометрической обработки фотографических наблюдений. Таким образом, понятие оптического центра является в фотографической астрометрии фундаментальным.

§ 2. Фокусное расстояние и масштаб

Фокусное расстояние и масштаб являются важнейшими характеристиками астрофотографии, определяющими ее свойства с точки зрения измерений и проективных искажений. В гауссовой оптике, как уже упоминалось, фокусным расстоянием называется длина отрезка оптической оси между задней главной точкой и фокальной плоскостью. Однако в реальном телескопе положение точки G_2 на оптической оси известно лишь приближенно и, как правило, недоступно для прямых измерений. Фокусное расстояние телескопа, сообщаемое заводом-изготовителем, неудовлетворительно по точности. Поэтому необходимо дать астрометрическое определение этих параметров.

Строгое рассмотрение вопросов о фокусном расстоянии телескопов и масштабе астрофотографий тем более необходимо, что в существующей учебной литературе (Бугославская, 1947; Дейч, 1973) этим вопросам уделено недостаточно внимания. Это связано, в первую очередь, с тем обстоятельством, что во многих задачах фотографической астрометрии обходятся так называемыми "постоянными пластинок" (см. гл. 4), в которых масштаб астрофотографии учитывается автоматически при наличии опорных звезд. Однако такой эмпирический масштаб искажен влиянием дифференциальной рефракции, ошибками координат опорных звезд и ошибками измерений и, следовательно, может существенно отличаться от истинного (или геометрического) масштаба астрофотографии, который определяется специальными исследованиями. Геометрический масштаб телескопа совершенно необходимо знать в некоторых важных фундаментальных исследованиях, проводимых на длиннофокусных телескопах ($f \geq 10$ м), а именно при определении относительных положений и движений звезд — компонент двойных или кратных систем, а также при исследовании движений спутников в системах Юпитера, Сатурна и Урана. Причем если при исследованиях двойных звезд достаточно знать масштаб с точностью до $\pm 10^{-4}$ ($\pm 0,02'' \text{ мм}^{-1}$), то при исследовании планетных систем необходимо знание масштаба на порядок точнее ($\pm 0,001'' \text{ мм}^{-1}$). Важное значение для длиннофокусной астрометрии имеет также вопрос об искажении углов в фотографической проекции. Эта задача, как будет показано ниже, решается на основе свойств масштаба.

Фокусное расстояние телескопа в фотографической астрометрии определяют в связи с законом тангенса, которому удовлетворяет центральная проекция. Этот закон выражается следующей формулой:

$$r = f_0 \operatorname{tg} \rho. \quad (1.1)$$

Здесь r — расстояние на пластинке изображения некоторой звезды S от оптического центра T ; ρ — видимое сферическое расстояние соответствующей звезды S^* от фиктивной звезды T^* на небесной сфере; f_0 — главное фокусное расстояние телескопа. В соответствии с этим определением фокусное расстояние телескопа равно радиусу некоторой воображаемой сферы Σ

в пространстве изображений с центром в центре проекции (в точке G_2), которой рабочая пластинка P касается в точке T . Различные радиусы этой сферы, продолженные в направлении изображений звезд на пластинке P , параллельны соответствующим направлениям на действительные звезды. Если радиус сферы Σ принять равным единице (соответственно, положить $f_0 = 1$), то длина любого отрезка в плоскости пластинки может быть выражена через тригонометрические функции сферических координат рассматриваемых звезд и оптического центра. Таким образом, фокусное расстояние является естественной единицей измерения отрезков в поле астрофотографии, так же как радиан служит единицей измерения дуг на небесной сфере.

Масштабом в фотографической астрометрии называют число, показывающее, какой дуге на небесной сфере соответствует линейная единица измерений на астрофотографии. Вследствие искажений проекции в фотографической астрометрии, так же как и в картографии, масштаб может зависеть от места и направления измерений на пластинке, т.е. может быть функцией положения точки и направления. Поэтому масштаб астрофотографии следует определять в связи с измерениями отрезков.

Проведем следующее рассуждение. Пусть на пластинке P с оптическим центром в точке T имеются изображения звезд S_1^* и S_2^* . Проведем через эти звезды на небесной сфере дугу большого круга σ , а на пластинке — соответствующую ему прямую \bar{s} (рис. 1). Пусть длина дуги большого круга между звездами S_1^* и S_2^* равна $\Delta\sigma$, а длина соответствующего отрезка на пластинке — Δs . Составим отношение

$$\mathcal{M}(S_1, S_2) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}. \quad (1.2)$$

Величину $\mathcal{M}(S_1, S_2)$ назовем *средним масштабом* астрофотографии на отрезке $S_1 S_2$. Отметим теперь на отрезке $S_1 S_2$ какую-нибудь внутреннюю точку S и будем стягивать отрезок $S_1 S_2$ к этой точке, сохраняя его направление. Тогда, рассматривая дугу $\Delta\sigma$ как функцию аргумента Δs , в пределе получим некоторую величину, зависящую от положения точки S и направления прямой \bar{s} . Численное значение этой величины назовем *масштабом астрофотографии в точке S в направлении \bar{s}*

$$\mathcal{M}(S, \bar{s}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}. \quad (1.3)$$

Размерность масштаба согласно определениям (1.2) или (1.3) должна быть "дуга/длина" в соответствии с принятой системой единиц. Наиболее употребительными на практике являются следующие размерности: "секунда дуги/миллиметр" — для длиннофокусных телескопов и "минута дуги/миллиметр" — для короткофокусных камер. Однако в теории предпочтительнее пользоваться естественными единицами измерений, т.е. радианами для $\Delta\sigma$ и фокусным расстоянием для Δs . Применение этих единиц позволяет изучать свойства проекции вне связи с конкретными телескопами. Масштаб, который в этой системе единиц есть величина безразмерная, равен единице в оптическом центре и служит мерой искажений проекции в других точках астрофотографии.

Воспользуемся определением (1.2) для вывода аналитических формул масштаба. Сделаем следующее построение (рис. 1). Из оптического центра пластинки T опустим перпендикуляр TT_s на прямую \bar{s} . Основание перпендикуляра — точку T_s — соединим с центром проекции G_2 . Убедимся, что $G_2T \perp \bar{s}$. Отметим соответственные точки T_s, S_1, S_2 на прямой \bar{s} и T_s^*, S_1^*, S_2^* на дуге большого круга $\cup\sigma$. Положения точек на прямой \bar{s} определим с помощью прямолинейной координаты s , отсчитываемой от точки T_s в направлении от S_1 к S_2 , а положения звезд на дуге большого круга $\cup\sigma$ определим дугой σ , отсчитываемой от точки T_s^* . В силу условия $G_2T \perp \bar{s}$ координаты s и σ удовлетворяют закону тангенса с фокусным расстоянием f_s , равным G_2T_s . Поэтому можно записать:

$$s_1 = f_s \operatorname{tg} \sigma_1, \quad s_2 = f_s \operatorname{tg} \sigma_2. \quad (1.4)$$

Результат (1.4) показывает, что для произвольной прямой \bar{s} на пластинке P выполняется закон тангенса так, как если бы эта прямая проходила через оптический центр в точке T_s и фокусное расстояние проекции равнялось бы f_s . Поэтому точку T_s и расстояние f_s мы вправе рассматривать как частный оптический центр и частное фокусное расстояние, свойственные данной прямой \bar{s} . И вообще, для каждой прямой l на пластинке P , не проходящей через оптический центр пластинки, существуют точка T_l и расстояние f_l , обладающие свойством оптического центра и фокусного расстояния.

Исходя из формул (1.4), составим выражение для среднего масштаба согласно (1.2)

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \sigma_2 - \sigma_1 = \operatorname{arctg} \frac{s_2}{f_s} - \operatorname{arctg} \frac{s_1}{f_s} = \\ &= \frac{s_2 - s_1}{f_s} - \frac{1}{3} \frac{s_2^3 - s_1^3}{f_s^3} + \frac{1}{5} \frac{s_2^5 - s_1^5}{f_s^5} - \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) преобразуем, учтя отсчет координаты s для точки S середины отрезка S_1S_2 . Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta s^* &= \frac{1}{f_s} (s_2 - s_1) = \frac{1}{f_s} \Delta s, \\ s^* &= \frac{1}{f_s} \left(s_1 + \frac{1}{2} \Delta s \right) = \frac{1}{f_s} \left(s_2 - \frac{1}{2} \Delta s \right). \end{aligned}$$

Преобразования приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \Delta s^* \left[(1 - s^{*2} + s^{*4} - s^{*6} \dots) - \frac{1}{12} \Delta s^{*2} + \frac{1}{2} s^{*2} \Delta s^{*2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{80} \Delta s^{*4} - \dots \right] = \Delta s^* \left[\frac{1}{1 + s^{*2}} - \frac{1}{12} \Delta s^{*2} + \frac{1}{2} s^{*2} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{80} \Delta s^{*4} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Пренебрегая здесь членами четвертого и более высоких порядков относительно Δs^* и s^* (которые мы считаем величинами одного порядка малости), получим следующее выражение для среднего масштаба на отрезке:

$$\mathcal{M}(S, \Delta \bar{s}) = \frac{1}{f_s} \frac{1 - \frac{1}{12} \Delta s^{*2}}{1 + s^{*2}}. \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6) посредством перехода к пределу при $\Delta s \rightarrow 0$ получим выражение для масштаба в точке на прямой:

$$\mathcal{M}(S, \bar{s}) = \frac{1}{f_s} \frac{1}{1 + s^{*2}}. \quad (1.7)$$

Следует отметить, что хотя формула (1.6) дает приближенное значение среднего масштаба, формула (1.7) является точной, так как все отброшенные при выводе члены разложения содержали множитель Δs^{*2} .

Окончательные общие формулы масштаба получим из (1.6, 1.7), введя в рассмотрение следующие параметры, характеризующие условия проекции: p — расстояние оптического центра пластинки от прямой \bar{s} (длина перпендикуляра TT_s); ψ — угол между радиусом-вектором r и прямой \bar{s} в точке S ; \mathcal{M}_0 — масштаб астрофотографии в ее оптическом центре. Другие обозначения (f_0, r, ρ) были объяснены в связи с формулировкой закона тангенса (1.1). Условимся также величины r, p и s , выраженные в единицах фокусного расстояния f_0 , выделять штрихами.

Перечисленные выше величины и параметры формул (1.6, 1.7) связаны следующими простыми соотношениями

$$f_s^2 = f_0^2 + p^2 = f_0^2 (1 + p'^2),$$

$$1 + s^{*2} = \frac{f_0^2 + p^2 + s^2}{f_0^2 + p^2} = \frac{f_0^2 + r^2}{f_0^2 + p^2} = \frac{1 + r'^2}{1 + p'^2}, \quad (1.8)$$

$$r' = \operatorname{tg} \rho; \quad 1 + r'^2 = \sec^2 \rho; \quad p = r \sin \psi. \quad (1.9)$$

Учитывая (1.8) и (1.9), получим следующие формулы масштаба для центральной проекции:

$$\mathcal{M}(S, \bar{s}) = \frac{1}{f_0} \frac{\sqrt{1 + p'^2}}{1 + r'^2}, \quad \mathcal{M}_0 = \frac{1}{f_0}; \quad (1.10)$$

$$\mathcal{M}(S, \bar{s}) = \mathcal{M}_0 \cos^2 \rho \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho \sin^2 \psi}, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{M}(S, \Delta \bar{s}) = \mathcal{M}_0 \frac{\sqrt{1 + p'^2}}{1 + r'^2} \left(1 - \frac{1}{12} \Delta s'^2 + \dots \right). \quad (1.12)$$

Формулы (1.10) — (1.12) позволяют сделать следующие выводы:

1. Масштаб в оптическом центре астрофотографии не зависит от направления измерений и достигает своего максимального значения, равного $1:f_0$.

2. Оптический центр астрофотографии является центром радиальной симметрии масштаба. Это означает, что масштаб одинаков в каждой точке

пластинки на равном расстоянии от оптического центра, если измерения производить под одинаковым углом к радиусу-вектору этой точки.

3. Средний масштаб на отрезке всегда меньше, чем масштаб в середине отрезка.

4. В данной точке астрофотографии минимальный масштаб

$$\mathcal{M}_r = \frac{1}{f_0} \cos^2 \rho = \mathcal{M}_0 \cos^2 \rho, \quad (1.13)$$

\mathcal{M}_r — радиальный масштаб, характеризующий измерения вдоль радиуса-вектора; максимальный масштаб \mathcal{M}_t в этой же точке есть

$$\mathcal{M}_t = \frac{1}{f_0} \cos \rho = \mathcal{M}_0 \cos \rho, \quad (1.14)$$

\mathcal{M}_t — трансверсальный масштаб, характеризующий измерения в перпендикулярном радиусу-вектору направлении; в промежуточных направлениях изменение масштаба следует формуле (1.11);

5. Если на небесной сфере вблизи какой-нибудь звезды S^* описать элементарную окружность радиусом $d\sigma$, то в картинной плоскости получим эллипс радиуса $ds = d\sigma / \mathcal{M}$, у которого большая полуось

$$ds_r = \frac{d\sigma}{\mathcal{M}_r} = d\sigma \sec^2 \rho \quad (1.13a)$$

вытянута вдоль направления TS , а малая полуось

$$ds_t = \frac{d\sigma}{\mathcal{M}_t} = d\sigma \sec \rho \quad (1.14a)$$

перпендикулярна направлению TS . Учитывая, что масштаб в оптическом центре равен 1 и полагая $d\sigma = \text{const} = 1$, определим оси эллипса m и n равными соответственно $\sec^2 \rho$ и $\sec \rho$. Величины m и n , очевидно, характеризуют искажения длин в картинной плоскости в радиальном и трансверсальном направлениях.

Таким образом, из элементарных геометрических построений мы подошли к фундаментальному понятию общей теории изображений — понятию об эллипсе искажений, или индикатрисе Тиссо (Ющенко, 1941). Согласно этой теории, радиальное и трансверсальное направления в центральной проекции являются линиями главных искажений длин и главными направлениями, т.е. такими направлениями, которые сохраняют ортогональность проектируемых кривых. Таких направлений в каждой точке картинной плоскости может быть только два, они совпадают с главными осями эллипса искажений. Другие ортогональные направления на небесной сфере не сохраняют перпендикулярность в картинной плоскости, они проектируются прямыми, совпадающими с сопряженными диаметрами эллипса искажений, построенного около точки пересечения прямых. Свойствами эллипса искажений мы воспользуемся для решения некоторых задач, связанных с искажениями углов в центральной проекции.

§ 3. Центральная проекция сферических углов

В некоторых задачах фотографической астрометрии существенно знать, в какой мере измеренные на астрофотографии позиционные углы искажены вследствие проекции по сравнению с соответствующими углами на небесной сфере. Такая задача возникает, например, при обработке измерений фотографий двойных звезд, снятых со следом, в тех случаях, когда изображения объектов получены на некотором расстоянии от оптического центра. В этом случае необходимо знать, как далеко от оптического центра допустимо определять позиционные углы непосредственно из измерений, пренебрегая искажением проекции. Решение этой задачи представляет интерес также для установления области применимости некоторых приближенных методов определения сферических координат небесных объектов (Дейч, 1948; Кайзер, 1921). Эти методы исходят из двух допущений: во-первых, ортогональным направлением на небесной сфере соответствуют ортогональные прямые на астрофотографии, и, во-вторых, масштаб на астрофотографии не зависит от направления измерений.

Решим следующую задачу. Пусть на небесной сфере некоторый большой круг σ , проходящий через звезду S^* , пересекает другой большой круг $T^*S^* = \rho$ под позиционным углом ψ . Надо найти соответствующий позиционный угол ψ' в картинной плоскости. Решение этой задачи найдем исходя из основного свойства эллипса искажений, который построим вокруг точки S (изображение звезды S^*). Согласно этому свойству имеем

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{n}{m} \operatorname{tg} \psi = \cos \rho \operatorname{tg} \psi, \quad (1.15)$$

где m и n — большая и малая полуоси эллипса искажений.

Теперь решим более общую задачу. Пусть на небесной сфере имеется два больших круга σ_1 и σ_2 (рис. 2), пересекающихся в точке S^* , не совпадающей с T^* , под углом θ . Надо найти угол θ' между соответствующими прямыми \bar{s}_1 и \bar{s}_2 в картинной плоскости. По условию задачи имеем

$$\theta = \psi_2 - \psi_1; \quad \theta' = \psi'_2 - \psi'_1; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \psi'_2 - \operatorname{tg} \psi'_1}{1 + \operatorname{tg} \psi'_2 \operatorname{tg} \psi'_1}. \quad (1.16)$$

Подставляя сюда $\operatorname{tg} \psi'$ согласно (1.15) и вводя обозначения ρ_1 и ρ_2 для

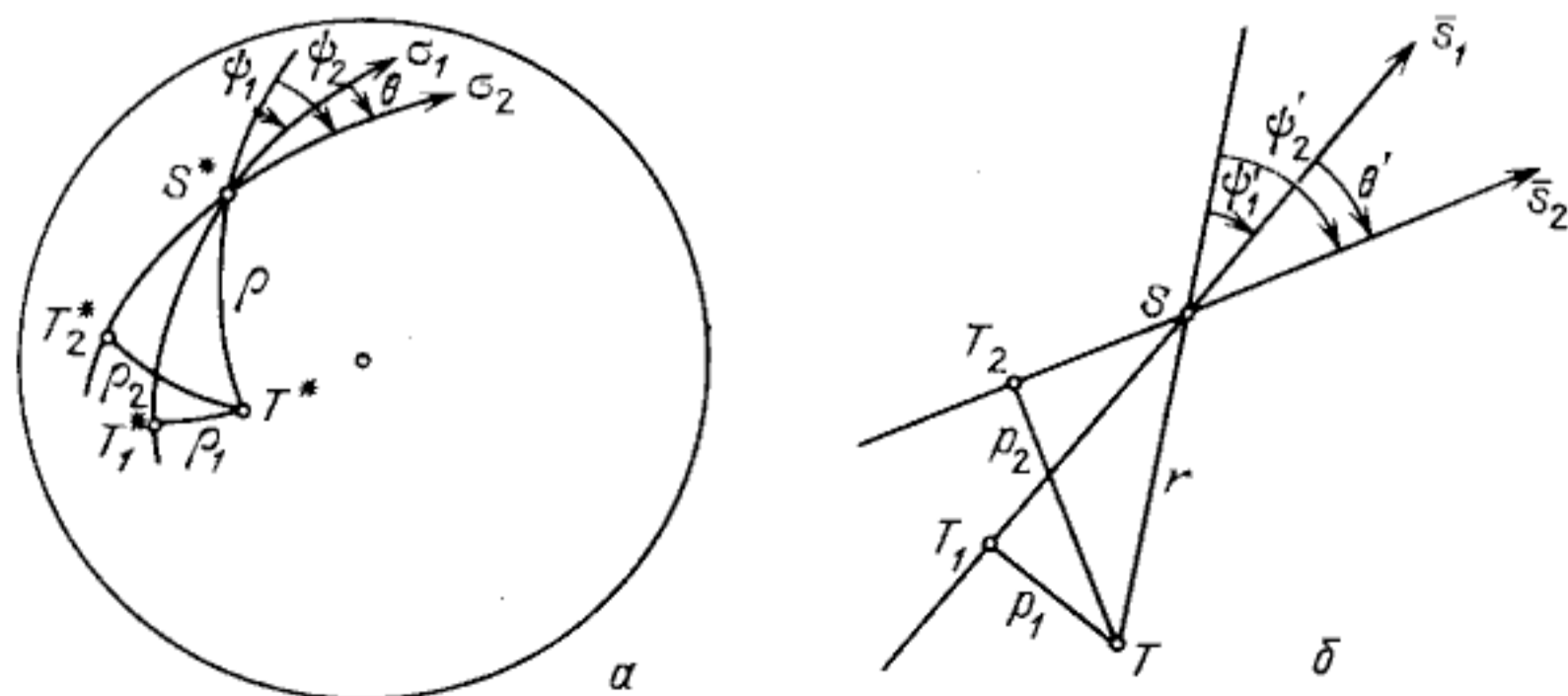


Рис. 2. Центральная проекция сферических углов:

a — расположение дуг больших кругов и углов на небесной сфере; b — изображения больших кругов и углов в картинной плоскости

сферических расстояний дуг больших кругов σ_1 и σ_2 от точки T^* , получим после несложных преобразований

$$\operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta \frac{\cos \rho}{1 - \sin \rho_1 \sin \rho_2 \sec \theta}, \quad (1.17)$$

причем $\sin \rho_1 = \pm \sin \rho \sin \psi_1$; $\sin \rho_2 = \pm \sin \rho \sin \psi_2$. Двойной знак в правых частях связан с тем обстоятельством, что в условиях нашей задачи ρ , ρ_1 , ρ_2 всегда меньше 90° , а позиционные углы ψ могут изменяться от 0 до 360° .

Формулу (1.17) можно применять и непосредственно к данным измерений какой-нибудь конкретной астрофотографии. Воспользовавшись обозначениями отрезков согласно (1.9), получим с хорошим приближением

$$\operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta \frac{\cos \rho}{1 - p'_1 p'_2 \sec \theta}. \quad (1.18)$$

Здесь p'_1 и p'_2 — нормированные расстояния прямых \bar{s}_1 и \bar{s}_2 от оптического центра.

Решим теперь две экстремальные задачи.

Задача первая: найти наибольшее искажение изображения прямого угла в центральной проекции.

Решение этой задачи непосредственно следует из общей теории изображений, согласно которой ортогональные направления в некоторой точке поверхности I (в нашем случае — на небесной сфере у звезды S^*) изображаются на поверхности II (в нашем случае — на астрофотографии) сопряженными диаметрами эллипса искажений, построенного около изображения точки поверхности I (звезды S). Теперь вспомним, что наименьший угол образуют те сопряженные диаметры эллипса, которые составляют с его главным диаметром углы

$$\psi' = \pm \operatorname{arctg} \frac{n}{m} = \pm \operatorname{arctg} \cos \rho. \quad (1.19)$$

Следовательно, наибольшее искажение в центральной проекции, равной $90^\circ - 2\psi'$, свойственно тем ортогональным направлениям на небесной сфере, которые расположены симметрично главному направлению TS для данной астрофотографии. Величина этого искажения может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{tg} 2\omega_0 = \operatorname{tg}(90^\circ - 2\psi') = \frac{m^2 - n^2}{2mn} = \frac{1}{2} \sin \rho \operatorname{tg} \rho = \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{1}{12} \rho^4 + \dots \quad (1.20)$$

Задача вторая: найти наибольшее искажение изображения произвольного угла.

Эту задачу решим по аналогии со случаем прямого угла. Наибольшее искажение, очевидно, испытывает угол 2ψ , расположенный симметрично главному направлению TS . Исходя из формулы (1.15), имеем:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \psi'}{\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \psi'} = \frac{m - n}{m + n}, \quad (1.21)$$

или

$$\frac{\sin(\psi - \psi')}{\sin(\psi + \psi')} = \frac{m - n}{m + n}.$$

Максимум величины искажения $\omega = \psi - \psi'$ согласно (1.21) достигается при $\sin(\psi + \psi') = 1$. (1.22)

Поэтому $\sin \omega = \frac{m - n}{m + n}$, $\cos \omega = \frac{2\sqrt{mn}}{m + n}$, откуда следует

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{m - n}{2\sqrt{mn}} = \frac{\sin^2 \frac{\rho}{2}}{\sqrt{\cos \rho}}. \quad (1.23)$$

Таким образом, максимальное искажение угла ψ , равное 2ω , найдется из формулы

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 \sin^2 \frac{\rho}{2} \sqrt{\cos \rho}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\rho}{2} - \sin^4 \frac{\rho}{2}} = \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{1}{12} \rho^4 + \dots \quad (1.24)$$

Сравнивая (1.20) и (1.24), замечаем, что максимальное искажение угла практически не отличается от искажения прямого угла, ориентированного симметрично главному направлению.

Результаты, полученные в §§ 1 и 2 настоящей главы, позволяют вычислить максимальные величины искажений длин и углов в любой точке астрофотографии, если известно расстояние этой точки от оптического центра. Эти данные мы приводим в табл. 1, где аргумент ρ выбран с таким

Т а б л и ц а 1

Искажение длин и углов небесной сферы в центральной проекции на данном расстоянии ρ от оптического центра

ρ	m	n	$2\omega_0$	$2\omega_{\max}$	Примечание
0'	1,000000	1,000000	0,000°	0,000°	Длиннофокусные астрографы
10	1,000008	1,000004	0,000	0,000	
20	1,000034	1,000017	0,001	0,001	
30	1,000076	1,000038	0,002	0,002	
40	1,000135	1,000068	0,004	0,004	
1°00'	1,000305	1,000152	0,009	0,009	Среднефокусные астрографы
1 30	1,000686	1,000343	0,020	0,020	
2 00	1,001220	1,000609	0,035	0,035	
2 30	1,001906	1,000952	0,055	0,055	
3 00	1,002747	1,001373	0,079	0,079	Широкоугольные фотокамеры
4 00	1,004889	1,002441	0,140	0,140	
5 00	1,007654	1,003819	0,218	0,218	
10 00	1,031091	1,017633	3,561	3,563	

расчетом, чтобы, не загромождая таблицы, можно было получить интересные нас характеристики изображений как для длиннофокусных астрографов с малым полем, так и для широкоугольных камер. Во втором и третьем столбцах таблицы приведены величины полуосей эллипса искажений, а в четвертом и пятом столбцах – величины искажений $2\omega_0$ и $2\omega_{\max}$ прямого ($2\psi = 90^\circ$) и произвольного угла 2ψ , удовлетворяющего условию (1.22).

Данные в таблице показывают, что относительные искажения длин, так же как и искажения углов, полученных на длиннофокусных телескопах ($\rho < 30'$), малы по сравнению с соответствующими случайными ошибками измерений двойных звезд

$\left(\frac{\epsilon(\Delta x)}{\Delta x} > 10^{-4}, \epsilon_\theta > 0,01^\circ; \right.$ здесь $\epsilon(\Delta x)$ –

ошибка измеренного отрезка на астрофотографии, а ϵ_θ – ошибка измеренного позиционного угла) и, следовательно, ими можно пренебречь в большинстве исследований, выполняемых с помощью этих телескопов.

Однако уже для среднефокусных инструментов относительные искажения длин становятся сравнимыми с дифференциальным эффектом рефракции

$\left(\frac{\delta \Delta x}{\Delta x} \approx 2,9 \cdot 10^{-4} \sec^2 z \right)$ и превосходят этот эффект во много раз при

$\rho \geq 2^\circ$. Таким образом, измерения, например, двойных звезд на фотографиях, полученных со среднефокусными телескопами, могут производиться классическим методом только вблизи оптического центра; в противном случае необходимо учитывать искажение проекции. Это же касается и применения некоторых приближенных способов определения фотографических положений небесных объектов, использующих масштаб, найденный по двум опорным звездам, для определения координат объекта, не лежащего на прямой, проведенной между этими звездами. Например, в способе А.Н. Дейча (Дейч, 1948) (схема с двумя опорными звездами), если объект находится на расстоянии $p = 1000''$ от радиальной прямой, соединяющей опорные звезды, и на расстоянии 2° от оптического центра, ошибка вычисленного положения объекта в связи с допущением $m = n$ будет равна $(m - n)p = 0,61''$, т.е. несколько больше, чем допускается в подобного рода задачах.

§ 4. Расчет координатной сетки для фотографических карт неба

В фотографической астрометрии часто приходится иметь дело с фотографическими картами неба или с широкоугольными фотографиями, которые, по существу, тоже являются картами неба. Узкая задача, которую при этом решают, обычно сводится к определению грубо приближенных экваториальных координат звезд или других объектов. Проще всего такая задача решается с помощью прозрачной палетки с нанесенной на ней сеткой небесных координат в масштабе фотографии. К сожалению, многие полезные звездные фотографические карты неба (например, Паломарский атлас; Росс, 1936) не снабжены координатными сетками. Особенно досадно, что отсутствуют координатные сетки у известных карт Паломарской обсерватории, являющихся весьма ценным пособием для звездной и внегалактической астрономии. Построение координатных сеток для этих карт до сего времени представляется весьма актуальной задачей.

направим вдоль изображения центрального меридиана к полюсу P , а ось $T\xi$ — по касательной к изображению параллели, так чтобы оси $T\xi$ и $T\eta$ образовывали левую систему координат. Перпендикулярность осей $T\xi$ и $T\eta$ обеспечивается отсутствием искажений в оптическом центре астрофотографии. Если выбрана экваториальная система сферических координат, то систему координат $T\xi\eta$ называют *тангенциальной экваториальной системой*. Ось $T\eta$ в этом случае направлена к Северному полюсу мира, а ось $T\xi$ — к востоку. Тангенциальные координаты (которые иногда называют также идеальными или стандартными) играют фундаментальную роль в методах фотографической астрометрии и будут подробно рассмотрены нами в гл. 3. В этом параграфе мы воспользуемся тангенциальными координатами для аналитического описания свойств координатной сетки. В качестве единицы измерений используем фокусное расстояние астрофотографии.

Несложные тригонометрические выкладки приводят к следующим уравнениям меридианов и параллелей:

Уравнение для меридиана ($\alpha = \text{const}$):

$$\frac{\xi}{\text{tg}(\alpha - A) \cos D} + \frac{\eta}{\text{ctg} D} = 1. \quad (1.25)$$

Уравнение для параллели ($\delta = \text{const}$):

$$\xi^2 \text{cosec}^2 D + \eta^2 (1 - \text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta) + 2\eta \text{ctg} D \text{cosec}^2 \delta + \text{ctg}^2 D - \text{ctg}^2 \delta = 0. \quad (1.26)$$

Здесь A и D — экваториальные координаты оптического центра астрофотографии, ξ и η — текущие координаты линий, изображающих сетку.

Выражение (1.25) представляет собой уравнение прямой в отрезках. Величина $\text{tg}(\alpha - A) \cos D$ есть абсцисса точки пересечения меридиана ($\alpha = \text{const}$) с осью $T\xi$, а величина $\text{ctg} D$ есть ордината полюса мира в картинной плоскости. В случае $D = 0$ полюс удаляется в бесконечность, меридианы становятся параллельными прямыми. Угловым коэффициентом прямых (1.25) относительно центрального меридиана,

$$k_\alpha = \text{tg}(\alpha - A) \sin D, \quad (1.27)$$

характеризует искажение углов в полюсе мира.

Выражение (1.26) представляет собой уравнение конического сечения, конкретный вид которого определяется знаком (или равенством нулю) коэффициента при η^2 . Таким образом, параллели изображаются

эллипсами, если $\text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta < 1$,

параболами, если $\text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta = 1$,

гиперболами, если $\text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta > 1$.

Для фотографической карты неба с фиксированным $D > 0$ эти условия означают, что все параллели, для которых $\delta > 90^\circ - D$, изображаются эллипсами, параллели, для которых $\delta < 90^\circ - D$, изображаются гиперболами, и только одна параллель, для которой $\delta = 90^\circ - D$, изображается параболой.

Каноническое уравнение эллипса (гиперболы), соответствующее условию $\text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta \neq 1$, имеет следующий вид:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{\text{cosec } D \text{ctg } \delta}{\sqrt{1 - \text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta}}\right)^2} + \frac{\left(\eta - \frac{\text{ctg } D \text{cosec}^2 \delta}{1 - \text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta}\right)^2}{\left(\frac{\text{cosec}^2 D \text{ctg } \delta}{1 - \text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta}\right)^2} = 1. \quad (1.28)$$

Из этой формулы непосредственно следует, что кривые, изображающие параллели, располагаются симметрично относительно оси $T\eta$ и вытянуты в направлении этой оси. Большая полуось кривой a совпадает с осью $T\eta$, а малая полуось b параллельна оси $T\xi$. Посредством простых преобразований находим следующие величины, характеризующие изображение параллели:

$$\text{эксцентриситет } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \cos D \text{cosec } \delta, \quad (1.29)$$

$$\text{параметр } p = \frac{b^2}{a} = \text{ctg } \delta, \quad (1.30)$$

ординаты вершин кривых, изображающих параллели,

$$\eta_0 = \text{tg}(\delta - D). \quad (1.31)$$

Каноническое уравнение параболы выводится из (1.26) при условии $\text{ctg}^2 D \text{ctg}^2 \delta = 1$, если начало координат перенести в вершину параболы, т.е. в точку с координатами $\xi = 0$, $\eta = \text{tg}(\delta - D)$

$$\xi^2 - 2[\eta - \text{tg}(\delta - D)] \text{ctg } \delta = 0. \quad (1.32)$$

Из (1.32) непосредственно следует, что параметр параболы равен $\text{ctg } \delta$ в полном согласии с результатом (1.30).

Среди приведенных в этом параграфе результатов особый интерес представляет вывод (1.30), согласно которому параметр конического сечения, изображающего параллель, равен тангенсу ее сферического радиуса и не зависит от сферических координат оптического центра астрофотографии. Этот результат распространяется также и на радиус кривизны в вершине соответствующего конического сечения, который, как известно, равен параметру сечения. Таким образом можно утверждать, что радиус кривизны изображений параллели вблизи центрального меридиана астрофотографии равен $\text{ctg } \delta$ и не зависит от склонения оптического центра фотографии. Этот вывод, насколько нам известно, в фотографической астрометрии формулируется впервые и дает основание при построении координатной сетки аппроксимировать небольшие дуги параллелей проведением окружностей подходящего радиуса. Ниже, в главе 7, мы воспользуемся этим результатом для учета влияния кривизны суточного следа звезд при разработке методики редукации измерений фотографий двойных звезд.

Завершая раздел о задаче построения координатной сетки для астрофотографии, дадим некоторые практические указания. Меридианы вычерчиваются прямыми линиями с учетом (1.25), (1.27). Параллели про-

водятся дугами окружностей согласно (1.30), (1.31); погрешность, которую мы при этом допускаем на краях фотографии, имеет порядок $(\alpha - A)^4$, поэтому в околополярной области следует обратиться к обычным чертежным приемам проведения дуг эллипсов с учетом (1.28), (1.29), (1.31).

§ 5. Систематические ошибки фотографической проекции

До сих пор мы рассматривали астрофотографию как реализацию центральной проекции небесной сферы. Такой взгляд, как правило, оправдывается при построении теории астрометрической редукции измерений фотографий. Однако на практике каждой астрофотографии, полученной с помощью какого-либо конкретного телескопа, свойственна своя фотографическая проекция, которая в большей или меньшей степени отклоняется от центральной проекции. Эти отклонения могут быть в первую очередь типовыми, т.е. свойственными всем телескопам данного оптико-механического типа, но также и индивидуальными, поскольку не бывает абсолютно одинаковых телескопов. Типовые и индивидуальные особенности фотографической проекции всегда нужно иметь в виду при астрометрических работах, так как зависящие от них погрешности имеют систематический характер. Поэтому существенно характеризовать фотографическую проекцию степенью ее отклонения от центральной проекции, т.е. рассмотреть ее характерные ошибки, происходящие вследствие аберраций оптической системы телескопа.

Этот вопрос требует разъяснения. В астрометрии фотографическая проекция всегда выявляется посредством измерений относительных положений звездных изображений на пластинке. Уклонения фотографической проекции от центральной обнаруживаются путем сравнения каких-либо параметров, полученных из измерений и вычисленных на основе свойств центральной проекции. Таким образом, мы не можем ни определить фотографическую проекцию, ни исследовать ее свойства вне связи с измерениями астрофотографий. Поэтому, характеризуя какую-либо данную фотографическую проекцию, мы вынуждены рассматривать в качестве ошибок проекции любые систематические ошибки измерений звезд, зависящие от расположения, формы и плотности звездных изображений на фотографии, если только эти ошибки не являются результатом погрешностей измерительной машины или личной ошибки измерителя, а возникают внутри оптической системы телескопа. Утверждая эту точку зрения, мы исходим из того, что современная техника измерений фотографий позволяет объективно и однозначно измерять фотографические изображения звезд, даже если они деформированы аберрациями. С другой стороны, эта точка зрения открывает нам возможность подойти формально аналитически к вопросам определения и учета различных систематических ошибок фотографической проекции, прямо или косвенно зависящих от аберраций оптики телескопа, например ошибок, зависящих от дисторсии и комы, наряду с ошибками типа уравнений блеска и цвета. Имея в виду сделанное замечание, определим понятие ошибок фотографической проекции следующим образом.

Ошибками фотографической проекции данного телескопа назовем всякие систематические отклонения измеренных положений звезд на фотографиях, полученных с данным телескопом, относительно их положений на

подходящей центральной проекции. Подходящей центральной проекцией условимся называть такую проекцию, картинная плоскость которой и масштаб вблизи оптического центра совпадают с плоскостью и масштабом исследуемой фотографии.

5.1. Оптические aberrации. Абerrации в оптике, как известно, связывают со свойством всякой оптической системы нарушать гомоцентричность преломленных (отраженных) пучков лучей и исказить подобие между предметом и его изображением (закон тангенса). Вследствие aberrаций вместо точечных изображений звезд, соответствующих гауссовой оптике, мы имеем в фокальной плоскости телескопа более или менее размазанные кружки рассеяния лучей разной формы и величины, расположенные с нарушением законов центральной проекции. Абerrационные искажения в различных телескопах могут быть существенно различными в зависимости от степени корректировки их оптики, но в конечном итоге они всегда отражают остаточный эффект основных aberrаций, свойственных одиночным линзам и зеркалам. Этим основным aberrациям различают в оптике семь, из них пять видов геометрических aberrаций, свойственных в одинаковой мере линзам и зеркалам, и два вида хроматических aberrаций, характерных только для линз. Перечислим эти aberrации вместе с их основными характеристиками, следуя схеме Д.Д. Максудова (Максудов, 1946):

- 1) сферическая aberrация $\rho_1 \approx A^3$,
- 2) кома $\rho_2 \approx A^2 \omega$, $d_r = 3\rho_2$,
- 3) астигматизм $2a - 2b \approx A\omega^2$,
- 4) кривизна поля $\rho_4 \approx A\omega^2$,
- 5) дисторсия $\Delta r_5 \approx \omega^3$,
- 6) хроматизм положения $\rho_6 \approx A$,
- 7) хроматизм увеличения $\Delta r_7 \approx \omega$.

Здесь применены следующие обозначения: ρ_j — радиус кружка рассеяния в фокальной плоскости, характерный для данного (j) вида aberrации; d_r — длина (в радиальном направлении) изображения звезды, деформированного комой; $2a$ и $2b$ — оси эллипса астигматического изображения звезды; Δr — радиальное смещение изображения звезды относительно ожидаемого в гауссовой оптике (считая проекцию центральной, а масштаб — соответствующим фокусному расстоянию параксиальных лучей); A — светосила линзы (зеркала); ω — угол наклона параллельного пучка лучей от звезды к оптической оси линзы; \approx — знак пропорциональности.

Приведенных характеристик достаточно, чтобы заметить, что из всех aberrаций только одна, а именно дисторсия, непосредственно определяет характерную ошибку проекции; участие других aberrаций в ошибках проекции опосредовано измерениями. Из этих aberrаций особенно опасна кома и обе aberrации, связанные с хроматизмом объектива, так как вследствие этих aberrаций происходит несимметричное расширение звездных изображений, сопровождаемое перераспределением лучистой энергии внутри светового пучка, которое зависит от блеска и цвета звезды. Это приводит к систематическим ошибкам измерений и, следовательно, к ошибкам проекции, зависящим от блеска и цвета звезд. Другие aberrации — астигматизм и кривизна поля — менее опасны, поскольку связанное с этими

абберациями расширение звездных изображений сохраняет симметрию относительно центрального луча.

Важное общее свойство перечисленных aberrаций состоит в том, что все связанные с ними смещения и деформации звездных изображений осесимметричны. Это значит, что любая ошибка фотографической проекции, зависящая от aberrаций, может выразиться лишь в радиальном смещении точек проекции, происходящем симметрично осевой точке без поворота радиусов-векторов точек. Такое свойство весьма существенно для астрометрии, так как позволяет рассматривать общий эффект различных aberrаций в телескопе как некоторую обобщенную дисторсию проекции, обладающую осевой симметрией. К сожалению, на практике это не всегда так, потому что в сложной оптической системе иногда случаются более или менее значительные дефекты центрировки. Эти погрешности могут происходить или в результате неудачной сборки оптики телескопа, или вследствие непредусмотренных температурных или механических деформаций инструмента. В любом случае недостатки центрировки оптической системы нарушают осевую симметрию фотографической проекции, причем может возникнуть так называемая асимметричная дисторсия, для которой характерны дополнительные радиальные и тангенциальные ошибки. Особенно чувствительны к центрировке катадиоптрические системы больших телескопов, например системы Максудова и Шмидта. Плохая центрировка оптики телескопа очень затрудняет исследование ошибки проекции и может служить основанием для отказа использовать инструмент в целях астрометрии. Учитывая сделанное замечание, следует дополнить список aberrаций восьмым пунктом, а именно — aberrацией, вызванной нарушением центрировки оптической системы.

5.2. Дисторсия фотографической проекции. Из обзора aberrаций следует, что в хорошо центрированном телескопе суммарный эффект различных остаточных aberrаций приводит к некоторой ошибке фотографической проекции, похожей на дисторсию. Условимся называть эту ошибку общей дисторсией фотографической проекции. Как следует из определения, общая дисторсия проекции должна быть функцией расстояния r точки от осевого центра O и может зависеть от величины, формы и плотности звездных изображений, т.е. иметь характер уравнения блеска и цвета. Последнее обстоятельство затрудняет исследование этой ошибки в общем случае. Однако если ограничиться рассмотрением на фотографии однородных групп звезд, одинаковых по блеску и цвету, то мы будем иметь дело с дисторсией проекции, зависящей только от одной переменной — r ; такую дисторсию условимся называть простой дисторсией. Тогда исследование упрощается, но выводы сохраняют свое значение и для общего случая. Действительно, любую фотографию звездного поля мы всегда можем рассматривать как суперпозицию фотографий нескольких звездных полей с однородным звездным населением и соответственно дисторсию исследовать только для крайних (по характеристикам звезд) случаев или для наиболее типичного случая. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением влияния дисторсии на фотографическую проекцию в простом случае.

Рассмотрим две типичные ошибки, зависящие от дисторсии:

1) искривление изображений дуг больших кругов на фотографии,

2) нарушение функции масштаба и соответственно характеристик эллипса искажений.

Анализ влияния дисторсии выполним, исходя из следующего представления. Рассмотрим наряду с данной исследуемой фотографической проекцией (рабочая пластинка P') подходящую центральную проекцию той же области неба (пластинка сравнения P). Пусть в осевой точке пластинки P' проектируется некоторая звезда O^* . Совместим пластинки P и P' так, чтобы изображения звезды O^* на обеих пластинках совпали в точке O . Примем эту точку за начало полярных координат в общей картинной плоскости обеих проекций и установим аналитическую связь между координатами r', θ' изображений звезд на пластинке P' и координатами r, θ на пластинке P . Из обзора aberrаций следует, что если центрировка оптической системы телескопа не нарушена, то такая связь может быть выражена следующим преобразованием:

$$\begin{cases} r' = r + \mathcal{D}(r), \\ \theta' = \theta, \end{cases} \quad (1.33)$$

где $\mathcal{D}(r)$ — обобщенная функция дисторсии, определяющая приращение радиуса-вектора точки (r, θ) вследствие суммарного эффекта дисторсии. В общем случае функция дисторсии может иметь следующий вид:

$$\mathcal{D}(r) = D_1 r + D_2 r^2 + D_3 r^3. \quad (1.34)$$

Дальнейшие выкладки проведем в предположении, что $\mathcal{D}(r)$ — малая величина, такая, что при учете влияния дисторсии достаточно принять во внимание лишь первые степени величины $\mathcal{D}(r)/r$, пренебрегая вторыми и высшими степенями. Таким образом, мы будем рассматривать фотографическую проекцию как результат малого преобразования (симметричного сжатия или расширения) подходящей центральной проекции.

5.3. Искривление изображений дуг больших кругов вследствие дисторсии. Особенно наглядно влияние дисторсии фотографической проекции проявляется в искривлении изображений дуг больших кругов небесной сферы, не проходящих через центр симметрии дисторсии. Количественная оценка этого явления представляет несомненный интерес для фотографической астрометрии. Решим эту задачу при следующих условиях (рис. 4). Пусть на пластинке сравнения P через изображения звезд S_1 и S_2 проведена прямая \bar{s} , которую мы можем считать изображением дуги большого круга $\sphericalangle S_1^* S_2^*$. На прямой \bar{s} отметим текущую точку S , положение которой на прямой \bar{s} определим параметром m/n , равным отношению длин направленных отрезков $S_1 S$ и $S S_2$. Из осевой точки O проведем радиусы r_1, r, r_2 точек S_1, S и S_2 . К точкам прямой \bar{s} применим преобразование дисторсии (1.33). В результате преобразования точки S_1, S и S_2 сместятся вдоль своих радиусов на величины $\Delta r_1 = \mathcal{D}(r_1)$, $\Delta r = \mathcal{D}(r)$ и $\Delta r_2 = \mathcal{D}(r_2)$ и займут положения S'_1, S' и S'_2 , соответствующие положениям этих звезд на рабочей фотографии P' . При изменении параметра m/n от 0 до ∞ текущая точка на фотографии P' опишет некоторую кривую $\sphericalangle s'$, которую мы вправе считать изображением большого круга. Проведем хорду $S'_1 S'_2$ и продолжим радиус точки S до пересечения с хордой в точке S'_r . Направленный

помощью формулы Стюарта (Балк, 1959)

$$r^2 = \frac{n}{m+n} r_1^2 + \frac{m}{m+n} r_2^2 - mn \quad (1.38)$$

приводят к следующему результату:

$$\delta_3 r_s = D_3 mnr. \quad (1.39)$$

В случае квадратичного закона дисторсии

$$\mathcal{D}(r) = D_1 r + D_2 r^2 \quad (1.40)$$

выражение для стрелки получается несколько сложнее:

$$\delta_2 r_s = D_2 r^2 \left[\frac{\cos(\theta - \bar{\theta})}{\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}} - 1 \right] = 2D_2 r^2 \frac{\sin(\theta - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta)}{\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}. \quad (1.41)$$

Здесь позиционный угол θ текущей точки связан с полярными координатами узловых точек S_1 и S_2 соотношением

$$\operatorname{tg}(\theta - \bar{\theta}) = \frac{k-1}{k+1} \operatorname{tg} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \quad (1.42)$$

где $k = \frac{m}{n} \frac{r_2}{r_1}$, $\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

В связи с формулами (1.39)–(1.41) сделаем некоторые замечания: 1) наличие линейного члена в обобщенной формуле дисторсии никак не влияет на стрелку дисторсии. Таким образом, подходящая пластинка сравнения не обязательно должна иметь масштаб, одинаковый с рабочей пластинкой; однако результат согласно (1.36) всегда получается в масштабе пластинки сравнения; 2) в случае кубического закона дисторсии при заданном r стрелка дисторсии достигает максимума на середине отрезка. Величина стрелки не зависит от ориентировки отрезка относительно радиуса r ; 3) в случае квадратичного закона дисторсии при заданном r стрелка дисторсии достигает максимума, когда точка S расположена на биссектрисе угла S_1OS_2 . Величина стрелки зависит от ориентировки отрезка относительно радиуса r ; 4) если для каких-либо данных точек $S_1(r)$ и $S_2(r)$, находящихся на одинаковом расстоянии от центра, кубический и квадратичный законы дисторсии выражаются одинаковыми смещениями, т.е. имеет место соотношение

$$\Delta r_1 = \Delta r_2 = D_2 r^2 = D_3 r^3,$$

то максимальная стрелка дисторсии на отрезке S_1S_2 вдвое больше в случае квадратичного закона, причем

$$\delta_3 r_s = D_3 r \left(\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) m^2 = D_2 m^2 \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}, \quad (1.43)$$

$$\delta_2 r_s = 2D_2 m^2 \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}.$$

Этот результат проверяется прямыми вычислениями по формулам (1.39), (1.41) с учетом условия $\Delta r_1 = \Delta r_2$. Таким образом, квадратичному закону

дисторсии, вообще говоря, свойственны более сильные искривления изображений дуг больших кругов, чем кубическому. Этот вывод полезно иметь в виду при подборе эмпирического закона дисторсии в исследованиях проекций, искаженных чрезмерной дисторсией.

5.4. Влияние дисторсии на масштаб фотографической проекции. Дисторсия фотографической проекции естественно должна быть принята во внимание при определении масштаба фотографии. Рассмотрим простейший, но характерный случай, когда центр симметрии дисторсии — точка O — совпадает с оптическим центром фотографии — точкой T . Определим радиальный масштаб в точке $S(r)$ с учетом дисторсии. По определению масштаба имеем

$$\mathcal{M}'_r = \frac{d\rho}{dr'} = \frac{d\rho}{dr} \frac{dr}{dr'} = \frac{d\rho/dr}{dr'/dr}, \quad (1.44)$$

где производную dr'/dr определяем согласно (1.33):

$$\frac{dr'}{dr} = 1 + \frac{d\mathcal{D}(r)}{dr} = 1 + D_1 + 2D_2r + 3D_3r^2 + \dots$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}'_r = \frac{\mathcal{M}_r}{1 + \frac{d\mathcal{D}(r)}{dr}}, \quad (1.45)$$

или, учитывая (1.13),

$$\mathcal{M}'_r = \mathcal{M}_0 \frac{\cos^2 \rho}{1 + \frac{d\mathcal{D}(r)}{dr}} = \frac{1}{f_0} \frac{\cos^2 \rho}{1 + \frac{d\mathcal{D}(r)}{dr}}. \quad (1.46)$$

Этот результат показывает, что вследствие дисторсии радиальный масштаб изменился так, как если бы фокусное расстояние астрографа увеличилось на $f_0 \frac{d\mathcal{D}(r)}{dr}$.

Аналогично определяем трансверсальный масштаб фотографии с учетом дисторсии

$$\mathcal{M}'_t = \frac{d\tau}{dt'} = \frac{d\tau/dt}{dt'/dt}. \quad (1.47)$$

Здесь производная dt'/dt должна удовлетворять следующей пропорции:

$$\frac{dt' - dt}{\mathcal{D}(r)} = \frac{dt}{r}, \quad (1.48)$$

отвечающей условию симметричного относительно O расширения (сжатия) изображений вследствие дисторсии. Учитывая (1.14) и (1.48), формулу

(1.47) перепишем в следующем виде:

$$M'_t = M_t = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{D}(r)}{r}} = \frac{1}{f_0} \frac{\cos \rho}{1 + \frac{\mathcal{D}(r)}{r}}. \quad (1.49)$$

Таким образом, вследствие дисторсии трансверсальный масштаб изменился так, как если бы фокусное расстояние астрографа увеличилось на $f_0 \frac{\mathcal{D}(r)}{r}$. Сравнивая (1.46) и (1.49), заключаем, что вследствие дисторсии радиальный и трансверсальный масштабы фотографии соответствуют различным эффективным фокусным расстояниям. Этот факт следует учитывать при определении масштаба фотографии посредством измерений звездных пар.

В соответствии с результатами (1.46) и (1.49) несложно получить также выражения для полуосей эллипса искажений, характерного для фотографической проекции с дисторсией $D(r)$,

$$m' = \sec^2 \rho \left[1 + \frac{d\mathcal{D}(r)}{dr} \right] = \sec^2 \rho (1 + 3D_3 r^2), \quad (1.50)$$

$$n' = \sec \rho \left[1 + \frac{\mathcal{D}(r)}{r} \right] = \sec \rho (1 + D_3 r^2); \quad (1.51)$$

здесь в правых частях приведены значения m' и n' для случая кубического закона дисторсии. Эти выражения можно, как и в общем случае, использовать для оценки искажений углов в реальной фотографической проекции, дисторсия которой известна.

5.5. Дисторсия, зависящая от децентрировки. Как уже упоминалось, вследствие неточной центрировки оптической системы может возникнуть характерная асимметрическая дисторсия проекции, которую иногда называют децентрической дисторсией. Исследования этой дисторсии (Браун, 1966) показывают, что в случае слабой децентрировки похожий оптический эффект можно воспроизвести, поместив впереди хорошо центрированного объектива тонкую призму. Такая модель приводит к следующим аналитическим выражениям, описывающим децентрическую дисторсию в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \Delta r &= P_2(r) \cos(\theta - \theta_0), \\ \Delta t &= P_2(r) \sin(\theta - \theta_0). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Здесь Δr и Δt — радиальная и трансверсальная составляющие смещения проекции в точке пластинки сравнения $r; \theta$; $P_2(r)$ — некоторый полином четной степени

$$P_2(r) = D'_2 r^2 + D'_4 r^4 + \dots, \quad (1.53)$$

θ_0 — позиционный угол некоторого направления на фотографии, где радиальный эффект децентрической дисторсии максимален, а тангенциальный эффект равен нулю. Из модели тонкой призмы следует также, что искажения проекции вследствие децентрической дисторсии можно приближенно компенсировать, сместив надлежащим образом положение оптичес-

кого центра, т.е. наклонив пластинку к оптической оси. В нашем исследовании (Киселев и др., 1976) трех широкоугольных астрографов асимметрическую дисторсию типа (1.52) обнаружить не удалось. Однако была выявлена децентрическая дисторсия с двойной волной как в радиальной, так и в тангенциальной составляющих,

$$\begin{aligned} \Delta r &= D_2' r^2 \cos 2(\theta - \theta_0), \\ \Delta t &= D_2' r^2 \sin 2(\theta - \theta_0). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Таким образом, вопрос об аналитическом выражении для децентрической дисторсии не решается однозначно.

* *
*

В этой главе мы рассмотрели некоторые особенности центральной проекции, существенные для астрономии, которые обычно не рассматриваются в руководствах по фотографической астрометрии. Таковыми являются задачи, связанные с масштабом астрофотографии, искажением углов и построением координатной сетки для фотографических карт неба. Особное внимание обращено на различие проекций — центральной и фотографической. Введено понятие обобщенной дисторсии фотографической проекции. Выведены формулы, определяющие искривление изображений дуг больших кругов вследствие дисторсии, а также формулы, учитывающие влияние дисторсии на масштаб астрофотографии.

Наиболее существенными моментами, на наш взгляд, являются:

Вывод формул среднего масштаба на отрезке, позволяющих определять масштаб астрофотографии, не обращаясь к аппарату тангенциальных координат;

Метод оценки искажений позиционных сферических углов в поле различных астрографов в зависимости от расстояния вершин этих углов от оптического центра астрофотографии;

Доказательство свойства изображений малых кругов небесной сферы на фотографической карте неба, согласно которому радиус кривизны изображений параллелей вблизи центрального меридиана астрофотографии равен $\operatorname{ctg} \delta$ и не зависит от склонения оптического центра.

ВЕКТОРНАЯ ФОРМУЛА БОЛЬШОГО КРУГА НА НЕБЕСНОЙ СФЕРЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

§ 1. Векторная формула большого круга

Рассмотрим некоторые вопросы сферической астрономии, касающиеся редуцированных вычислений, которые связаны с учетом дифференциального влияния прецессии, абберации и рефракции, а также для точного определения системы относительных положений при измерениях изображений визуально-двойных звезд и спутников больших планет. Некоторые из полученных результатов (учет годичной абберации, преобразование координат в связи с учетом геоцентрического параллакса) имеют самостоятельное значение и могут применяться в смежных с астрометрией областях, например, в космической геодезии и небесной механике.

Все полученные нами решения редуцированных задач выведены из векторной формулы большого круга, обоснованной в этой главе. Решения получены в векторной форме и, следовательно, удобны для вычислений в прямоугольных координатах. Применение векторной формулы большого круга для решения некоторых задач сферической астрономии связано с выполнением определенной последовательности математических операций, поэтому можно говорить о специфической операции — интерполировании вдоль большого круга. Эта операция будет неоднократно применяться нами в ходе дальнейшего изложения методов фотографической астрометрии. В частности, интерполирование вдоль большого круга будет применено нами при разработке двух новых методов определения фотографических положений небесных объектов. Поэтому настоящую главу следует рассматривать как теоретическое введение к гл. 3 и 4.

Рассмотрим на небесной сфере три звезды S_1 , S , S_2 , лежащие на одном большом круге. Условимся о положительном направлении на этом круге: от S_1 к S_2 . Обозначим длины дуг $\sphericalangle S_1S$ и $\sphericalangle SS_2$ символами μ и ν соответственно. Требуется определить сферические координаты звезды S , считая положения звезд S_1 и S_2 заданными посредством единичных векторов r_1 и r_2 , а положение звезды S — отношением синусов дуг $\sphericalangle S_1S$ и $\sphericalangle SS_2$ (рис. 5):

$$k = \frac{\sin \mu}{\sin \nu} \quad (2.1)$$

Величину k впредь условимся называть параметром интерполяции, а звезды

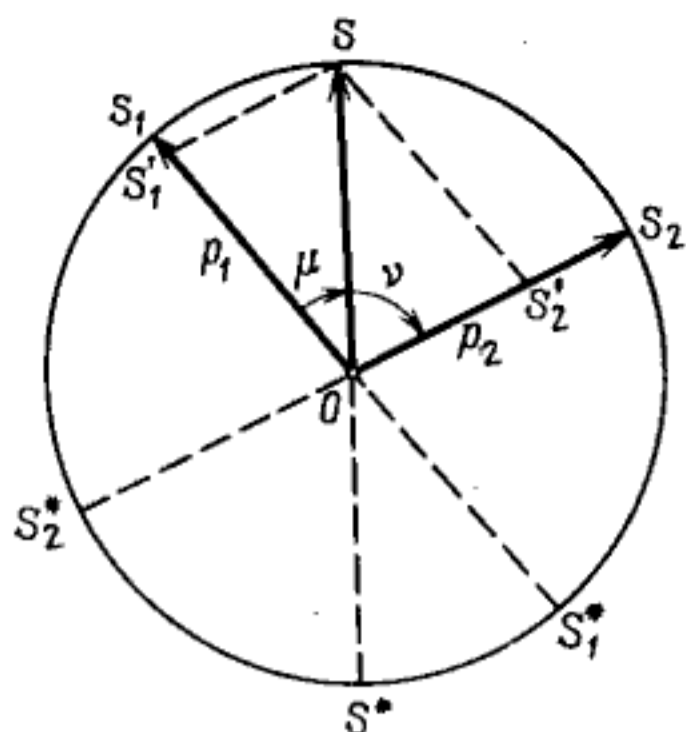


Рис. 5. Векторная диаграмма интерполяционной формулы большого круга

S_1 и S_2 — узловыми точками. Искомый единичный вектор звезды S обозначим r .

Решение. По условию задачи векторы r_1, r и r_2 компланарны, следовательно,

$$r = p_1 r_1 + p_2 r_2. \quad (2.2)$$

Коэффициенты p_1 и p_2 найдем из тригонометрических соотношений для параллелограмма $OS_1'S_2'$, где $S_1'S \parallel OS_2$, а $S_2'S \parallel OS_1$,

$$p_1 = \frac{\sin \nu}{\sin(\mu + \nu)}, \quad p_2 = \frac{\sin \mu}{\sin(\mu + \nu)}. \quad (2.3)$$

Формулу (2.2) теперь перепишем в следующем виде:

$$r = \frac{1}{m} (r_1 + \kappa r_2). \quad (2.4)$$

Здесь $\kappa = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\sin \mu}{\sin \nu}$; $m = \frac{1}{p_1} = \frac{\sin(\mu + \nu)}{\sin \nu}$. Множитель $1/m$ определим из условия единичности вектора r ,

$$1 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos(\mu + \nu),$$

откуда следует

$$m = \sqrt{1 + 2\kappa(r_1 r_2) + \kappa^2}. \quad (2.5)$$

Формула (2.4) в принципе решает задачу. Остается вычислить искомые сферические координаты объекта

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y_1 + \kappa Y_2}{X_1 + \kappa X_2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{Z_1 + \kappa Z_2}{\sqrt{(X_1 + \kappa X_2)^2 + (Y_1 + \kappa Y_2)^2}}, \quad (2.6)$$

где $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ — составляющие единичных векторов r_1 и r_2 , которые предполагаются заданными в форме (3.1). Для контроля вычислений удобно воспользоваться формулой

$$m^2 = (X_1 + \kappa X_2)^2 + (Y_1 + \kappa Y_2)^2 + (Z_1 + \kappa Z_2)^2. \quad (2.7)$$

В качестве сферико-тригонометрического эквивалента интерполяционной формулы (2.4) укажем формулы, решающие ту же задачу:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \bar{\alpha}) = \frac{k - 1}{k + 1} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos(\alpha - \bar{\alpha})}{\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}} \left(\frac{1}{1 + k} \operatorname{tg} \delta_1 + \frac{k}{1 + k} \operatorname{tg} \delta_2 \right), \quad (2.9)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad k = \frac{\sin \mu \cos \delta_2}{\sin \nu \cos \delta_1} = k \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1}.$$

Формулы (2.8) и (2.9) положены в основу интерполяционного метода астрометрической редукции измерений фотографий (Киселев, 1959).

Формула (2.4) имеет характерную интерполяционную структуру с параметром интерполяции k . По смыслу нашей задачи параметр k следует считать известным, причем он может принимать как положительные значения в области $[0, +\infty]$, так и отрицательные значения в интервале $[0, -\infty]$ в зависимости от того, совпадают ли направления дуг $\overset{\frown}{S_1S}$ и $\overset{\frown}{SS_2}$, или эти направления противоположны; последний случай соответствует внешнему положению точки S относительно дуги $\overset{\frown}{S_1S_2}$. Неопределенность, возникающая при вычислениях с параметром k , близким к $\pm \infty$ (когда S находится вблизи второго узла), легко снимается посредством изменения направления интерполяции, т.е. переменной индексов узлов.

Формулу (2.4) можно рассматривать также как параметрическое уравнение большого круга на небесной сфере, проведенного через две заданные точки (звезды S_1 и S_2). Действительно, при изменении параметра k от 0 до $+\infty$ вектор r перемещается вдоль заданного большого круга от S_1 к S_2 , а при изменении k от 0 до $-\infty$ перемещение происходит в обратном направлении от S_1 к S_2^* , диаметрально противоположной точке S_2 . Точки большого круга по другую сторону диаметра $S_2S_2^*$ описываются вектором $-r$ при тех же значениях параметра k . Таким образом, всякому значению параметра k от $-\infty$ до $+\infty$ соответствует единственное положение диаметра заданного большого круга, определяющего точку S и диаметрально противоположную ей точку S^* . Задача становится неопределенной при $S_2 \rightarrow S_1$ или $S_2 \rightarrow S_1^*$, так как в этих случаях большой круг $\overset{\frown}{S_1S_2}$ становится не определенным.

Выведенная здесь векторная интерполяционная формула большого круга может служить для решения в прямоугольных координатах некоторых типичных задач сферической астрономии, связанных с определением положения небесного объекта, смещенного относительно своего теоретического или среднего положения в некотором заданном направлении. Таковы, например, задачи учета рефракции, годичной и суточной абберации, геоцентрического и годичного параллакса и некоторые задачи космической геодезии. Предлагаемый формулой (2.4) алгоритм для решения этих задач ясен в теоретическом плане, геометрически нагляден, а в вычислительном отношении прост и обеспечивает строгое решение в отличие от классических решений, использующих разложения в ряды. Здесь мы рассмотрим применения интерполяционной формулы большого круга для учета дифференциальной рефракции (Киселев и др., 1966) и годичной абберации (Киселев, 1975), а также годичного и геоцентрического параллаксов (Киселев, 1975; Киселев, 1969), т.е. задач, имеющих значение для фотографической астрометрии и, в частности, для спутниковой астрометрии.

§ 2. Векторные формулы учета рефракции

Вследствие рефракции, как известно, наблюдаемые положения звезд оказываются смещенными относительно своих "истинных" положений *) по направлению к зениту. Величина рефракционного смещения звезды может быть вычислена на основании теории рефракции (см., например, (Блажко, 1954)) по формуле

$$\Delta\zeta = \zeta - \zeta' = \beta_{\zeta} \operatorname{tg} \zeta. \quad (2.10)$$

Здесь $\Delta\zeta$ — рефракционное смещение звезды, ζ — истинное зенитное расстояние звезды, ζ' — видимое (в смысле рефракции) зенитное расстояние звезды, β_{ζ} — коэффициент, являющийся функцией зенитного расстояния. Не умаляя общности, можно считать β_{ζ} заданным в следующем виде:

$$\beta_{\zeta} = \beta - \beta' \operatorname{tg}^2 \zeta, \quad (2.11)$$

где β и β' — коэффициенты рефракции, зависящие от условий наблюдений и от эффективной длины волны λ_{ef} . Например, если наблюдения производились в фотографических лучах ($\lambda_{ef} = 4320 \text{ \AA}$) при нормальных условиях ($t = 0^{\circ} \text{C}$, $B = 1013 \text{ мб}$), то следует положить

$$\beta = \beta_{0, \text{pg}} = 29594 \cdot 10^{-8} \text{ или } 61,05'', \quad (2.12)$$

$$\beta' = 42 \cdot 10^{-8} \text{ или } 0,087''.$$

В общем случае необходимо учитывать температуру, давление в момент наблюдений и эффективную длину волны системы: звезда + атмосфера + телескоп + фотопластинка (Мельников, 1957). Изложенная схема вычисления рефракционного смещения $\Delta\zeta$ хотя и не претендует на полноту, но тем не менее удовлетворяет требованиям фотографической астрометрии, поскольку здесь нас интересует в конечном итоге только лишь дифференциальный эффект рефракции в относительных положениях звезд и объектов. Этот эффект выражается в том, что измеренные расстояния между изображениями звезд на фотографии систематически не соответствуют вычисленным расстояниям между ними по известным сферическим координатам, даже если оптический центр и фокусное расстояние астрографа точно известны. Возникающая систематическая ошибка зависит от зенитного расстояния звезд и ориентации отрезков относительно местного вертикала на небесной сфере.

Итак, как следует из теории рефракции, три точки небесной сферы S , S' и Z , соответствующие истинному направлению на звезду в момент наблюдений r , смещенному рефракцией направлению на нее r' и направлению на астрономический зенит Z , лежат на одном большом круге и, следовательно, должны удовлетворять интерполяционной формуле типа

*) Под "истинными" положениями звезд в этой задаче будем понимать такие положения, которые наблюдались бы в данном месте на Земле, если бы не существовало атмосферы.

(2.4), поэтому можно записать

$$r' = \frac{1}{m} (r + \kappa Z), \quad (2.13)$$

$$r = \frac{1}{m'} (r' + \kappa' Z). \quad (2.13')$$

Здесь первая формула служит для определения смещенного положения звезды по истинному (прямое рефракционное преобразование), а вторая — для определения истинного положения звезды по ее данному смещенному положению (обратное рефракционное преобразование). Единичный вектор зенита предполагается известным, а параметры κ , m и κ' , m' вычисляются согласно определению с учетом условия (2.10):

$$\kappa = \frac{\sin \Delta \zeta}{\sin(\zeta - \Delta \zeta)}, \quad \kappa' = -\frac{\sin \Delta \zeta}{\sin(\zeta' + \Delta \zeta)} = -\frac{\sin \Delta \zeta}{\sin \zeta},$$

$$m = \sqrt{1 + \kappa^2 + 2\kappa(rZ)}, \quad m' = \sqrt{1 + \kappa'^2 + 2\kappa'(r'Z)}. \quad (2.14)$$

Вычисленные согласно (2.14) параметры должны удовлетворять условию замкнутости

$$mm' = 1; \quad \kappa + m\kappa' = 0, \quad (2.15)$$

в котором воплощается естественное требование к решениям по формулам (2.13) и (2.13'), а именно — чтобы в результате последовательного применения этих формул к любому данному вектору r при заданном Z мы вернулись бы к исходному вектору r . Условие замкнутости (2.15) удобно использовать для контроля вычислений параметров κ , m и κ' , m' .

Чтобы применять формулы (2.13) или (2.13'), необходимо иметь в виду, что два вектора r и Z или r' и Z должны быть выражены в одной и той же системе осей. Если при решении задачи используются видимые или истинные экваториальные координаты звезд на момент наблюдений, то вектор Z имеет следующее выражение:

$$Z = [\cos s \cos \varphi, \sin s \cos \varphi, \sin \varphi]^T, \quad (2.16)$$

где s — местное звездное время наблюдений, φ — астрономическая широта места наблюдений. Если же используются средние координаты звезд рабочего каталога для экватора и равноденствия определенной эпохи (например, эпохи 1950.0), то вектор Z , заданный согласно (2.16), необходимо привести к системе координат каталога. Эту операцию в большинстве случаев достаточно выполнить приближенно, поскольку нас интересует лишь дифференциальный эффект рефракции. Например, достаточно учесть прецессию в экваториальных координатах зенита (s , φ), который в этом случае мы рассматриваем как фиктивную звезду с координатами, приведенными в систему экватора и равноденствия 1950.0.

Коль скоро векторы r и Z или r' и Z определены, остается вычислить параметры κ или κ' согласно формулам (2.10), (2.14). Для удобства этих вычислений указанные формулы преобразуем так, чтобы в первом случае аргументом служила величина $\cos \zeta$, а во втором $\cos \zeta'$; это

удобно, поскольку в обоих случаях аргумент вычисляется непосредственно по известным величинам

$$\cos \zeta = (rZ) \text{ и } \cos \zeta' = (r'Z). \quad (2.17)$$

В результате простых выкладок с точностью до членов с β^2 и β' включительно получим

$$\begin{aligned} \kappa &= \beta \sec \zeta - (\beta' \operatorname{tg}^2 \zeta - \beta^2) \sec \zeta, \\ \kappa' &= -\beta \sec \zeta' + (\beta' - \beta^2) \sec \zeta' \operatorname{tg}^2 \zeta'. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Вычисления по формулам (2.18) должны удовлетворять условию замкнутости с принятой здесь точностью $\approx 10^{-7}$, если $\zeta < 70^\circ$.

Итак, выведенные нами формулы (2.13) с параметрами интерполяции (2.18) позволяют производить операции прямого и обратного рефракционного преобразования единичных векторов звезд с достаточной для фотографической астрометрии точностью и в удобной для вычислений форме. Ниже они будут использованы при вычислении видимых тангенциальных координат.

§ 3. Векторные формулы учета годичной аберрации

Явление аберрации света в классической интерпретации выражается в том, что для движущегося наблюдателя видимые положения светил на небесной сфере смещаются по сравнению с их истинными положениями, которые регистрирует условно неподвижный наблюдатель в выбранной системе осей. Это смещение светил происходит в направлении апекса скорости движения наблюдателя и пропорционально величине скорости. Векторная диаграмма на рис. 6 поясняет изложенное. Отрезок OM пропорционален скорости v наблюдателя в выбранной системе отсчета, отрезок OK пропорционален скорости света c . Точки S , S' на небесной сфере соответствуют истинному и видимому положениям звезды, точка A — апексу скорости наблюдателя. Отрезки OK , OL и OA компланарны, поэтому точки S , S' и A лежат на дуге одного большого круга и к ним можно применить интерполяционную формулу (2.4). Аберрационное смещение на нашей диаграмме измеряется дугой $\overset{\frown}{SS'}$, соответствующей углу μ . Угол μ , как следует

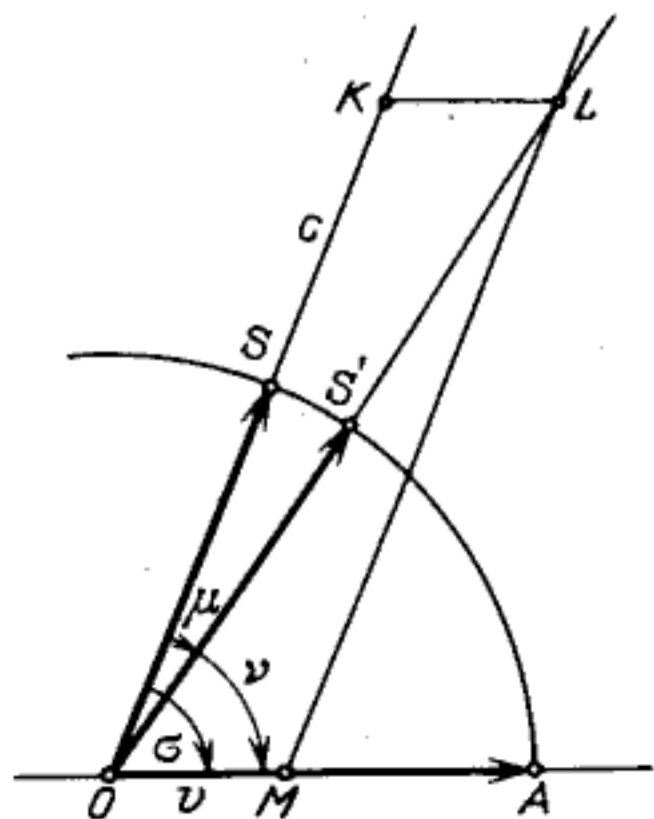


Рис. 6. Векторная диаграмма в задаче учета аберрации:

A — апекс скорости наблюдателя, S — истинное положение звезды, S' — видимое положение звезды

из параллелограмма $OKLM$, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\sin \mu}{\sin \nu} = \frac{\sin \sphericalangle SS'}{\sin \sphericalangle S'A} = \frac{v}{c} = k, \quad (2.19)$$

где k — постоянная аберрации.

Теперь введем единичные векторы r , r' и r_A , соответствующие направлениям OS , OS' и OA , и применим формулу (2.4), во-первых, для определения видимого положения звезды по заданному истинному (прямое аберрационное преобразование), во-вторых, для определения истинного положения звезды по данному видимому (обратное аберрационное преобразование); направление на апекс скорости наблюдателя r_A в обеих задачах предполагается известным. Искомые формулы, как и в случае учета рефракции, сохраняют вид формул (2.13):

$$r' = \frac{1}{m} (r + \kappa r_A), \quad (2.20)$$

$$r = \frac{1}{m'} (r' + \kappa' r_A), \quad (2.20')$$

причем должно выполняться условие замкнутости (2.15). Параметры κ , m и κ' , m' необходимо вычислить с соблюдением условия (2.19):

$$\kappa = \frac{\sin \sphericalangle SS'}{\sin \sphericalangle S'A} = \frac{\sin \mu}{\sin \nu} = k, \quad (2.21)$$

$$m = \sqrt{1 + \kappa^2 + 2\kappa(r r_A)},$$

$$\kappa' = \frac{\sin \sphericalangle S'S}{\sin \sphericalangle SA} = -\frac{\sin \mu}{\sin(\mu + \nu)} = -\frac{k}{k \cos \nu + \cos \mu},$$

$$m' = \sqrt{1 + \kappa'^2 + 2\kappa'(r' r_A)},$$

или, учитывая, что $\cos \nu = r' r_A$, а $\cos \mu \approx 1$, и пренебрегая членами порядка k^3 , получим

$$\begin{aligned} \kappa' &= -k + k^2(r' r_A), \\ m' &= \sqrt{1 + \kappa'^2 + 2\kappa'(r' r_A)}. \end{aligned} \quad (2.21')$$

Формулы (2.20), (2.21) решают задачу учета аберрации в общем виде. В конкретных случаях необходимо знать величину скорости v на момент наблюдений и вектор r_A в той же системе осей, в которой задан вектор r (или r' в обратной задаче). При обработке астрономических наблюдений, выполненных на поверхности Земли, "условно неподвижный наблюдатель" предполагается находящимся в барицентре Солнечной системы (до 1960 г. — в центре Солнца), поэтому астроному приходится иметь дело с годичной аберрацией, возникающей вследствие обращения Земли вокруг Солнца (максимальный эффект $20,5''$), и суточной аберрацией (максимальный эффект $0,32''$), возникающей вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси. Для фотографической астрометрии интерес представляет дифференциальный эффект аберрации, искажающий относительные положения звезд и объектов на пластинке. Этот эффект достигает заметной ве-

личины в задаче учета годичной аберрации, поэтому мы остановимся здесь на применении интерполяционных формул (2.20) – (2.21) только в этой задаче.

В задаче учета годичной аберрации прежде всего необходимо для заданной даты наблюдений найти вектор скорости геоцентрического наблюдателя V в его годичном обращении относительно барицентра Солнечной системы. Воспользуемся средней экваториальной системой координат для эпохи 1950.0, т.е. системой координат рабочего каталога, как это обычно принято в фотографической астрометрии. Составляющие единичных векторов звезд в этом случае вычисляются непосредственно по данным каталога

$$r = [\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta]^T \quad (2.22)$$

с учетом собственных движений звезд за время от эпохи наблюдений рабочего каталога до даты получения фотопластины. Теперь определим величину v и направление r_A скорости наблюдателя. Наиболее точно эту задачу можно решить, если воспользоваться данными Астрономического Ежегодника СССР (АЕ СССР), публикующего для каждой даты года так называемые аберрационные редуцированные величины C , D и i , связанные с вектором барицентрической скорости V Земли следующими соотношениями:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \frac{1}{c \sin 1''} = 1191,303'' \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ C \\ i \end{bmatrix} + 20,496'' e \begin{bmatrix} + \sin \Gamma \\ - \cos \Gamma \cos \epsilon \\ - \cos \Gamma \sin \epsilon \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Здесь V_x/c , V_y/c , V_z/c – составляющие барицентрической скорости Земли, выраженные в единицах скорости света, \dot{X} , \dot{Y} , \dot{Z} – те же составляющие, полученные численным дифференцированием барицентрических координат Земли, выраженные в единицах а.е./сут., e , Γ и ϵ – эксцентриситет, средняя долгота перигея и наклон эклиптики к экватору. Приведенные в (2.23) численные коэффициенты согласованы с астрономическими постоянными: экваториальный радиус Земли $a_e = 6378,160$ км, параллакс Солнца $\pi_\odot = 8,79405''$, скорость света $c = 299792,5$ км/с, постоянная аберрации $k_0 = 20,4958''$, рекомендованными Международным Астрономическим Союзом (МАС) в 1964 г.

Второе слагаемое в правой части (2.23) представляет собой так называемые эллиптические члены (E -члены), характеризующие влияние эксцентриситета земной орбиты. Соответствующие этому слагаемому аберрационные смещения видимых положений звезд малы (не превосходят $0,343''$) и практически не изменяются для неподвижных звезд с течением времени, поэтому они включены в средние координаты звезд, зарегистрированные в современных каталогах. Астроному при обработке наблюдений звезд достаточно учитывать аберрацию, зависящую от первого слагаемого формулы (2.23); если же он сравнивает наблюдения с геометрической теорией движущихся светил, например, планет, Луны или ИСЗ, эллиптическую аберрацию необходимо учитывать.

Таким образом, вектор скорости Земли, который нужно принимать во внимание в задаче учета годичной абберации, имеет следующий вид:

$$V_0 = \begin{bmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{bmatrix} = c \sin 1'' \begin{bmatrix} -D \\ C \\ i \end{bmatrix} \approx c \sin 1'' \begin{bmatrix} -D \\ C \\ C \operatorname{tg} \epsilon \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Величину этого вектора и его направление (единичный вектор апекса) можно вычислить по формулам

$$v_0 = c \sin 1'' \sqrt{D^2 + C^2 + i^2} \approx c \sin 1'' \sqrt{D^2 + C^2 \sec^2 \epsilon}, \quad (2.25)$$

$$r_A = \left[\frac{-D}{\sqrt{D^2 + C^2 \sec^2 \epsilon}}, \frac{C}{\sqrt{D^2 + C^2 \sec^2 \epsilon}}, \frac{C \operatorname{tg} \epsilon}{\sqrt{D^2 + C^2 \sec^2 \epsilon}} \right]^T. \quad (2.26)$$

Полагая в правых частях формул (2.24) и (2.25) $i \approx C \operatorname{tg} \epsilon$, мы пренебрегаем небольшим широтным движением Земли. Вектор V_0 согласно (2.24), где величины C и D взяты из АЕ СССР, отнесен к осям системы среднего экватора и равноденствия начала года, ближайшего к дате наблюдений. Поэтому чтобы использовать его в вычислениях по формулам (2.20), необходимо привести его к системе осей 1950.0, т.е. учесть прецессию от года наблюдений T до 1950.0. При этом можно ограничиться преобразованием только больших букв по формулам (см., например, (Абалакин, 1979)):

$$\begin{aligned} C_{1950.0} &= C_T + 0,0002235 (T - 1950.0), \\ D_{1950.0} &= D_T - 0,0002656 (T - 1950.0), \end{aligned} \quad (2.27)$$

причем $(T - 1950.0)$ следует выразить в годах.

Теперь, чтобы применить в нашей задаче формулы (2.20), остается вычислить параметры k и k' по формулам (2.21), где

$$k = \frac{v}{c} = \sin 1'' \sqrt{D^2 + C^2 + i^2} \approx \sin 1'' \sqrt{D^2 + C^2 \sec^2 \epsilon}. \quad (2.28)$$

Изложенный здесь алгоритм учета годичной абберации удовлетворяет всем требованиям редуцированных вычислений в эфемеридной астрономии и может применяться для вычисления видимых мест небесных объектов по данным средним положениям и обратно. Однако в фотографической астрометрии при учете дифференциальной абберации вполне можно удовлетвориться упрощенным способом вычисления вектора V_0 на основе модели кругового движения Земли по неподвижной эклипике с фиксированным средним положением точки весеннего равноденствия для эпохи 1950.0. Долготу Солнца в этом случае следует принять равной его средней долготе L_\odot , отсчитываемой от точки весеннего равноденствия $\Upsilon_{1950.0}$,

$$L_\odot = 279^\circ 35' 18,22'' + 3548,19278''d, \quad (2.29)$$

а наклон ϵ можно считать равным

$$\epsilon = 23^\circ 26' 44,84'' - 0,001282546''d. \quad (2.30)$$

Здесь d должно быть выражено в юлианских днях, прошедших от момента 1950 янв.0, 12UT до момента наблюдений T . Вектор апекса r_A в этом слу-

чае определяется непосредственно в системе экватора и равноденствия 1950.0 по формуле

$$r_A = \begin{bmatrix} \sin L_\odot \\ -\cos L_\odot \cos \epsilon \\ -\cos L_\odot \sin \epsilon \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

а величина скорости считается постоянной и равной $k_0 c \sin 1''$, где k_0 — постоянная аберрации, равная $20,4958''$.

З а м е ч а н и е. Рассмотренные в этом параграфе алгоритмы учета годичной аберрации ориентированы на работу с меридианными и астрографическими каталогами типа AGK3R, SAO или AGK3, составленными на основе системы астрономических постоянных Ньюкома и в основном подтвержденных решениями МАС в 1963 и 1964 гг. Координаты звезд в этих каталогах отнесены к экватору и равноденствию эпохи $B 1950.0$. Соответственно использованы численные значения постоянных в формулах (2.23, 2.27, 2.29, 2.30). В настоящее время (1988 г.), согласно рекомендациям МАС, начиная с 1986 г. вступила в силу новая система астрономических постоянных, которую необходимо учитывать при редуцированных вычислениях с новыми каталогами. Координаты звезд в новых каталогах будут отнесены к эпохе $J2000.0$ и не будут более отягчены E -членами годичной аберрации. E -члены аберрации по новым правилам будут учитываться редуцированными величинами C и D , публикуемыми ежегодниками, в частности, АЕ СССР. Таким образом, определение (2.24) вектора скорости геоцентрического наблюдателя сохраняет силу.

§ 4. Векторные формулы учета геоцентрического параллакса

Хотя задача учета геоцентрического параллакса является традиционной для эфемеридной астрономии и решение ее приводится во многих классических и новых пособиях по сферической астрономии (Гаусс, 1919; Казаков, 1940; Субботин, 1968; Загребин, 1966), мы дадим здесь новое решение, основанное на векторной формуле большого круга. Это решение геометрически строго, наглядно, инвариантно к выбранной системе координат и обладает всеми преимуществами вычислений в прямоугольных координатах. Последние два обстоятельства делают его весьма удобным для применения в космической геодезии, в частности, в спутниковой астрометрии.

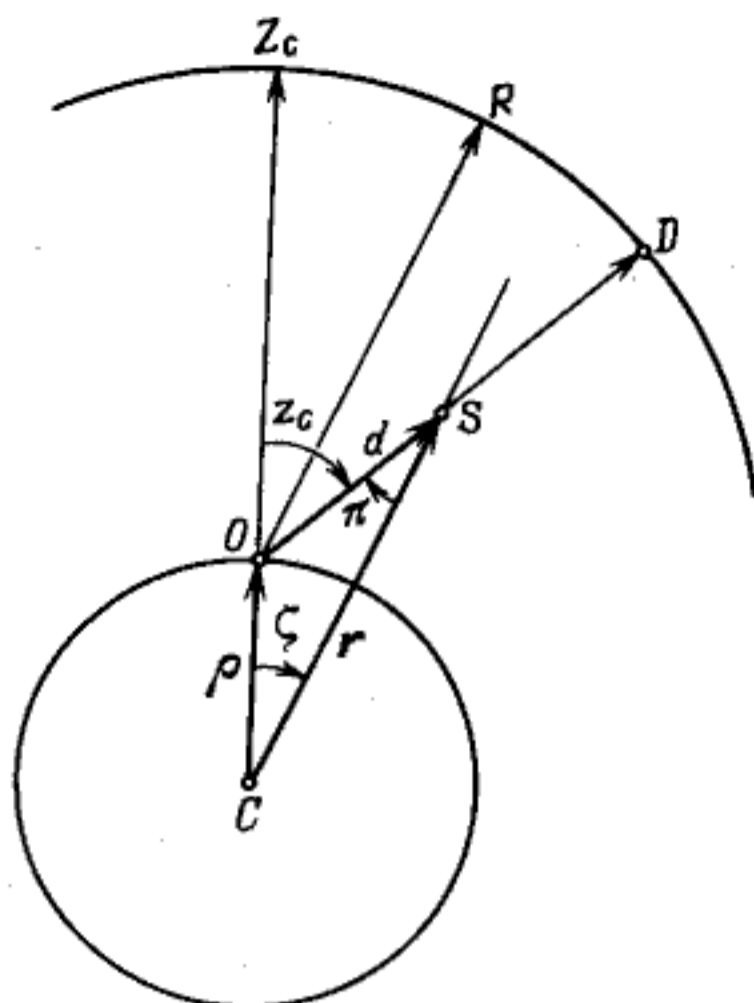
Условия задачи об учете геоцентрического параллакса определяются тремя векторами rR , ρZ_c , dD , удовлетворяющими так называемому основному уравнению космической геодезии (рис. 7)

$$rR = \rho Z_c + dD. \quad (2.32)$$

Здесь rR — геоцентрический вектор близкого небесного объекта S (например, Луны или ИСЗ), ρZ_c — геоцентрический вектор наблюдателя, dD — топоцентрический вектор наблюдаемого объекта; большими буквами обозначены единичные векторы, характеризующие направления перечисленных векторов, а малыми буквами — их длины. Векторы Z_c , R и D — компланарны, следовательно, к ним применима формула большого круга (2.4).

Рис. 7. Векторная диаграмма в задаче учета геоцентрического параллакса:

O — наблюдатель, ΔCOS — параллактический треугольник, \overline{CS} — геоцентрический вектор объекта, \overline{OS} — топоцентрический вектор объекта, \overline{CO} — геоцентрический вектор наблюдателя. $|CO| = \rho$; $|CS| = r$, $|OS| = d$



Небесную сферу мы мысленно опишем около наблюдателя, находящегося в точке O (рис. 7). Введем систему звездных экваториальных координат, соответствующую видимым местам звезд. В этой системе составляющие векторы Z_c , R и D равны:

$$Z_c = \begin{bmatrix} \cos s' \cos \varphi' \\ \sin s' \cos \varphi' \\ \sin \varphi' \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} \cos \alpha' \cos \delta' \\ \sin \alpha' \cos \delta' \\ \sin \delta' \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

в которых s' и φ' — геоцентрическое местное звездное время и геоцентрическая широта наблюдателя (геоцентрический зенит рассматривается нами как фиктивная звезда с координатами s' и φ'), α , δ и α' , δ' — геоцентрические и топоцентрические координаты объекта наблюдений. Введем также обозначения ζ и z_c для геоцентрического и топоцентрического зенитного расстояния объекта, π — для параллактического угла OSC , под которым виден геоцентрический радиус наблюдателя (рис. 7). И, наконец, заметим, что местным геоцентрическим звездным временем можно назвать звездное время на геоцентрическом меридиане наблюдателя; оно отличается от астрономического звездного времени на величину составляющей уклонения отвеса по долготе в месте наблюдений.

Рассмотрим три возможных задачи в связи с уравнением (2.32).

4.1. Прямая задача. Требуется определить топоцентрическое положение объекта для данной станции наблюдений, если геоцентрическое положение объекта известно.

Решение задачи запишем в форме (2.4):

$$D = \frac{1}{m} (R + \kappa Z_c). \quad (2.34)$$

$$\text{Здесь } \kappa = \frac{\sin \sphericalangle RD}{\sin \sphericalangle DZ_c} = \frac{\sin \pi}{\sin z_c} = \frac{\rho}{r}, \quad m = \frac{\sin \sphericalangle RZ_c}{\sin \sphericalangle DZ_c} = \frac{\sin \zeta}{\sin z_c} = \frac{d}{r}, \quad (2.35)$$

$$m = \sqrt{1 + \kappa^2 + 2\kappa(RZ)}, \quad d = rm. \quad (2.36)$$

Таким образом, решение с применением формулы большого круга позволяет разделить определить как единичный вектор D топоцентрического направления на объект, так и расстояние d до него.

4.2. Обратная задача. Требуется определить геоцентрическое положение объекта для данной станции наблюдений, если топоцентрическое положение объекта известно.

Решение в форме (2.4) имеет следующий вид

$$R = \frac{1}{m'} (D + \kappa' Z_c). \quad (2.37)$$

Здесь

$$\kappa' = \frac{\sin \sphericalangle DR}{\sin \sphericalangle RZ_c} = \frac{\sin \pi}{\sin \zeta} = \frac{\rho}{d}, \quad (2.38)$$

$$m' = \frac{\sin \sphericalangle DZ_c}{\sin \sphericalangle RZ_c} = \frac{\sin z_c}{\sin \zeta} = \frac{r}{d},$$

$$m' = \sqrt{1 + \kappa'^2 + 2\kappa'(DZ_c)}, \quad r = dm'. \quad (2.39)$$

Приведенное решение, очевидно, может иметь практическое значение, если синхронно с оптическими (фотографическими) наблюдениями объекта (например, спутника Земли) выполнены также и его дальномерные (лазерные) наблюдения, т.е. если из наблюдений найден вектор $OS = dD$. В большинстве случаев, однако, вектор OS бывает определен лишь по направлению, а геоцентрический вектор $CS = rR$ можно считать известным только по величине r . Например, значение r можно определить по параллаксу (случай наблюдений Луны) или по периоду геоцентрического обращения (случай почти кругового ИСЗ). Таким образом, известными величинами в этой задаче, кроме положения наблюдателя (вектор ρZ_c), являются единичный вектор D и скаляр r . Покажем, что решение (2.37) в этом случае сохраняет силу.

Действительно, из треугольника COS (рис. 7) имеем

$$r^2 = \rho^2 + d^2 + 2\rho d \cos z_c,$$

откуда следует

$$\frac{1}{\kappa'} = \frac{d}{\rho} = -\cos z_c \pm \sqrt{\cos^2 z_c - 1 + (r/\rho)^2}, \quad (2.40)$$

или

$$\kappa' = \frac{1}{-\cos z_c \pm \sqrt{\cos^2 z_c - 1 + \kappa'^{-2}}}, \quad (2.41)$$

причем $\cos z_c = (DZ_c)$, $\kappa'^{-2} = (r/\rho)^2$, и перед корнем из геометрических соображений следует взять знак плюс. Таким образом, и обратная задача имеет строгое решение, если r можно считать известным. Нетрудно проверить, что параметры κ , m и κ' , m' в прямой и обратной задачах строго удовлетворяют условиям замкнутости (2.15):

$$mm' = \frac{d}{r} \frac{r}{d} = 1, \quad \kappa + m\kappa' = -\frac{\rho}{r} + \frac{d}{r} \frac{\rho}{d} = 0.$$

Эти условия удобно использовать для контроля вычислений параметров.

Классическое решение этой задачи для Луны предусматривает вычисление сложных тригонометрических выражений с вспомогательным углом (Жонголович, 1961), либо вычисления с последовательными приближениями (в последнем случае используются прямоугольные координаты (Абалакин, 1979)).

4.3. Геодезическая задача. Требуется определить геоцентрическое положение наблюдателя, если известны геоцентрическое и топоцентрическое положения близкого небесного объекта. Такая задача типична для космической геодезии, если объектом наблюдений служит искусственный спутник Земли, надежно обеспеченный теорией движения.

Решение найдем по формуле (2.4):

$$Z_c = \frac{1}{m_0} (R + \kappa_0 D), \quad (2.42)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{\sin \sphericalangle RZ_c}{\sin \sphericalangle Z_c D} = -\frac{\sin \zeta}{\sin z_c} = -\frac{d}{r},$$

$$m_0 = \frac{\sin \sphericalangle RD}{\sin \sphericalangle ZD} = \frac{\sin \pi}{\sin z_c} = \frac{\rho}{r}, \quad (2.43)$$

$$m_0 = \sqrt{1 + \kappa_0^2 + 2\kappa_0(RD)}, \quad \rho = m_0 r. \quad (2.44)$$

Таким образом, задача имеет строгое решение, если одновременно с определением топоцентрического направления на объект (единичный вектор D) измерено также и расстояние до него (d). В практике спутниковой астрономии такой случай может иметь место, если на определяемой станции синхронно с фотографическими наблюдениями ИСЗ проводятся также и лазерные дальномерные наблюдения. Если, однако, наблюдатель располагает только результатами оптических наблюдений и знает достаточно хорошо величину своего геоцентрического радиуса-вектора ρ , то решение (2.42) сохраняет силу, поскольку параметр κ_0 можно вычислить с помощью отношения ρ/r . Необходимое выражение получим из параллактического треугольника COS :

$$\rho^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \pi, \quad (2.45)$$

$$\kappa_0 = -\frac{d}{r} = -(\cos \pi \pm \sqrt{(\rho/r)^2 + \cos^2 \pi - 1}),$$

где $\cos \pi = (RD)$, и перед корнем из геометрических соображений следует взять знак минус.

Характерная особенность рассмотренных здесь решений трех задач на геоцентрический параллакс заключается в том, что в них явно вскрывается интерполяционная связь единичных векторов Z_c , R и D . Параметром интерполяции служит величина κ , выражаемая через отношения сторон параллактического треугольника COS , а узлами интерполяции служат два из трех единичных векторов, определяемых только сферическими координатами начальных данных.

З а м е ч а н и е. Наиболее удобной координатной системой для решения рассмотренных задач, безусловно, является система экваториальных

координат, соответствующая видимым местам звезд, в которой выражены векторы Z_c , R , D согласно (2.33). Однако можно воспользоваться и любыми другими астрономическими координатами, с помощью которых перечисленные векторы могут быть выражены в единой системе на момент времени наблюдений. Например, для векторов R и D иногда бывает удобно сохранить систему средних экватора и равноденствия эпохи 1950.0. В этом случае, рассматривая геоцентрический зенит Z_c как фиктивную звезду, необходимо преобразовать его координаты, данные согласно (2.33) от эпохи наблюдений на эпоху 1950.0 с учетом прецессии и нутации.

4.4. О точности решений задач с геоцентрическим параллаксом. Решения в задачах 4.1 и 4.3 соответствуют случаю экстраполяции начальных данных, а решение в задаче 4.2 — случаю интерполяции. Поэтому в первом случае можно ожидать преувеличения влияния погрешностей начальных данных, а во втором — сглаживания. Более точно этот очевидный вывод можно характеризовать следующими формулами:

$$\epsilon_D^2 = \epsilon_Z^2 \left(\frac{\rho}{d}\right)^2 + \epsilon_R^2 \left(\frac{r}{d}\right)^2, \quad (2.46)$$

$$\epsilon_R^2 = \epsilon_Z^2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + \epsilon_D^2 \left(\frac{d}{r}\right)^2, \quad (2.47)$$

$$\epsilon_Z^2 = \epsilon_R^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \epsilon_D^2 \left(\frac{d}{\rho}\right)^2. \quad (2.48)$$

Вывод соотношений (2.46) — (2.48) следует из рассмотрения элементарных узких сферических треугольников, образованных близ большого круга, проходящего через три точки Z_c , R и D . Короткие стороны этих треугольников вблизи узлов интерполяции равны соответствующим погрешностям. Отношения синусов дуг заменяются отношениями сторон параллактического треугольника, как и при выводе величины параметра интерполяции k . Величины ϵ_D , ϵ_R и ϵ_Z являются среднеквадратическими ошибками единичных векторов D , R , Z , отнесенными к небесной сфере. Эти ошибки характеризуют точность сферических координат начальных данных (в уравнениях (2.46) — (2.48) — справа) и точность результата интерполяции (слева). Погрешности скалярных величин d , r и ρ в формулах (2.46) — (2.48) не учитываются; эти погрешности искажают параметр k и, следовательно, могут привести лишь к смещению вычисленного положения объекта вдоль большого круга, проведенного между узлами интерполяции. Это смещение в общем случае определяется формулой

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta k}{k} \sigma_{AB}, \quad (2.49)$$

где σ — длина дуги большого круга между узлами интерполяции A и B , $\Delta\sigma$ — смещение положения объекта, зависящее от ошибки параметра k . Согласно (2.49) ошибка положения зенита наблюдателя в направлении \widehat{RD} , зависящая от ошибок r и d , оценивается так:

$$\epsilon_Z^2 = \left[\left(\frac{\epsilon_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_r}{r}\right)^2 \right] \sigma_{RD}^2. \quad (2.50)$$

Формулы (2.46) – (2.48) позволяют сделать принципиальные выводы о преимуществах наблюдений ИСЗ в некоторых важных задачах астрометрии и геодезии. Например, из соотношения (2.47) следует, что в задаче определения (хранения) эфемеридного времени оптические наблюдения ИСЗ на невысокой орбите ($d = 1000$ км) могут оказаться значительно выгоднее, чем наблюдения Луны, так как влияние ошибок наблюдений (ϵ_D) такого спутника на определяемое геоцентрическое положение (R) будет по крайней мере в шесть раз меньше ($d/r \approx 1/6$), чем в случае наблюдений Луны ($d/r \approx 1$). Делая это замечание, мы, естественно, предполагаем, что теория движения упомянутого невысокого спутника разработана с такой же точностью, как и теория движения Луны.

Из формулы (2.48) следует, что наблюдения низких ИСЗ ($d < \rho$) в геодезических целях с использованием динамической теории их движения могут обеспечить такую же точность координат (Z_C) наземной станции, как и точность теории движения спутника ($r/\rho \approx 1$), влияние погрешностей оптических наблюдений ИСЗ будет существенно уменьшено ($d/\rho \ll 1$). Напротив, оптические наблюдения Луны в геодезических целях бесперспективны, так как влияние ошибок наблюдений и ошибок эфемеридных положений Луны при пересчете на положение земного наблюдателя возрастет почти в 60 раз (r/ρ и $d/\rho \approx 60$). Это заключение совпадает с выводами других авторов (Поттер, 1958).

§ 5. Векторные формулы учета годичного параллакса

Векторная диаграмма, описывающая явление годичного параллакса, представлена на рис. 8. Вследствие конечности расстояния от земного наблюдателя до звезды S^* геоцентрическое направление на звезду TS' смещено относительно гелиоцентрического направления $TS \parallel \odot S^*$ на угол π , характеризующий эффект годичного параллакса. Направления TS , TS' и TS_{\odot} располагаются в одной плоскости и, следовательно, удовлетворяют условию применения интерполяционной формулы большого круга. Естественная задача, которая здесь возникает: во-первых, вычисление смещенного (геоцентрического) положения звезды по данному гелиоцентрическому положению и, во-вторых, вычисление несмещенного (гелиоцентрического)

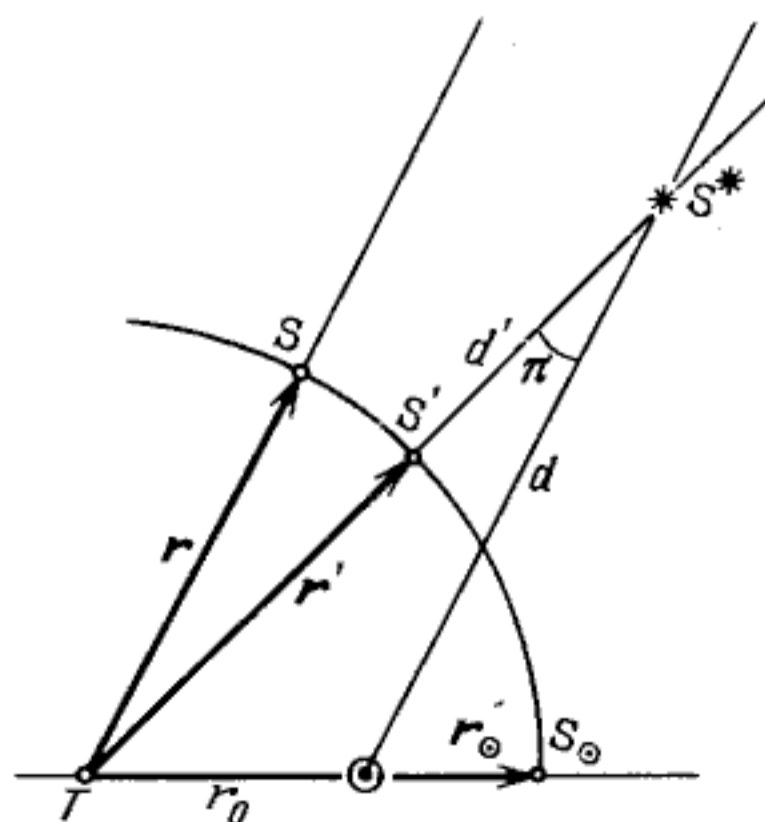


Рис. 8. Векторная диаграмма в задаче учета годичного параллакса:

$T\odot$ – геоцентрический вектор Солнца, $\odot S^*$ и TS^* – гелиоцентрический и геоцентрический векторы звезды, r_{\odot} , r и r' – соответствующие этим векторам единичные векторы, r_0 , d и d' – их длины

положения звезды по данному геоцентрическому. Первую операцию назовем прямым параллактическим преобразованием, вторую — обратным параллактическим преобразованием. Напомним, что звездные каталоги содержат гелиоцентрические координаты звезд, поэтому астроному-наблюдателю необходимо познакомиться с обеими операциями. В фотографической астрометрии задача учета годичного параллакса звезд тесно смыкается с задачей определения тригонометрических параллаксов звезд.

Итак, введем единичные векторы r , r' и r_{\odot} , соответствующие направлениям TS , TS' и TS_{\odot} ; обозначим геоцентрическое и гелиоцентрическое расстояния до звезды d' и d , а радиус земной орбиты r_0 (в этой задаче r_0 можно считать постоянным и равным астрономической единице). По определению годичный параллакс звезды есть

$$\pi = \frac{r_0}{d} \quad \left(\text{или} \quad \pi'' = 206265'' \frac{r_0}{d} \right). \quad (2.51)$$

Теперь применим формулу (2.4) для определения смещенного положения звезды:

$$r' = \frac{1}{m} (r + \kappa r_{\odot}). \quad (2.52)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sin \sphericalangle SS'}{\sin \sphericalangle S'S_{\odot}} = \frac{r_0}{d} = \pi, \\ m &= \sqrt{1 + \kappa^2 + 2\kappa(r r_{\odot})} \approx 1 + \pi(r r_{\odot}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Параллаксы звезд (даже ближайших) меньше $1''$, поэтому, сохраняя первый порядок относительно π , формулу (2.52) перепишем в следующем виде:

$$r' = r + \pi [r_{\odot} - (r r_{\odot}) r]. \quad (2.54)$$

Эта формула является формулой для прямого параллактического преобразования единичного вектора звезды. Обратное параллактическое преобразование, сохраняя точность до первого порядка относительно π , имеет следующий вид:

$$r = r' - \pi [r_{\odot} - (r' r_{\odot}) r]. \quad (2.55)$$

Участвующие в формулах (2.54), (2.55) единичные векторы должны быть выражены в какой-нибудь одной координатной системе. Можно воспользоваться видимыми координатами звезд и Солнца на момент наблюдений, но проще сохранить средние экваториальные координаты звезд на эпоху 1950.0, а координаты Солнца в системе экватора 1950.0 взять из ежегодника или вычислить согласно формулам (2.29), (2.56) (см. замечание в конце § 3 этой главы):

$$r_{\odot} = \begin{bmatrix} \cos L_{\odot} \\ \sin L_{\odot} \cos \epsilon \\ \sin L_{\odot} \sin \epsilon \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

§ 6. Дифференциальная форма векторной формулы большого круга

Формулы (2.54), (2.55) можно рассматривать как частный случай дифференциальной формы векторной формулы большого круга, которая в общем случае имеет следующий вид:

$$r' - r = k(r_A - \cos \sigma_A r). \quad (2.57)$$

Здесь r_A — единичный вектор апекса смещения, σ_A — длина дуги большого круга на небесной сфере между векторами r (или r') и r_A , причем

$$\cos \sigma = (rr_A). \quad (2.58)$$

Формула (2.57) точна, если можно пренебречь влиянием членов второго порядка относительно k , и, следовательно, она может применяться как в прямой, так и в обратной задаче.

Исходя из формулы (2.57), можно получить проекции смещения $r' - r$ на оси тангенциальных координат, имеющих начало в исследуемой звезде (см. гл. 3, § 1).

Действительно,

$$\begin{aligned} (r' - r)\vec{\xi}^0 &= \xi' - \xi = k r_A \vec{\xi}^0, \\ (r' - r)\vec{\eta}^0 &= \eta' - \eta = k r_A \vec{\eta}^0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $\vec{\xi}^0$ и $\vec{\eta}^0$ — единичные векторы (направляющие косинусы) осей тангенциальных координат. В случае учета годичного параллакса формулы (2.59) приводят к следующим простым выражениям:

$$\begin{aligned} (\alpha' - \alpha) \cos \delta &= \pi(r_{\odot} \vec{\xi}^0) = \pi(-X_{\odot} \sin \alpha + Y_{\odot} \cos \alpha), \\ (\delta' - \delta) &= \pi(r_{\odot} \vec{\eta}^0) = \pi(-X_{\odot} \cos \alpha \sin \delta - Y_{\odot} \sin \alpha \sin \delta + Z_{\odot} \cos \delta), \end{aligned} \quad (2.60)$$

которые легко преобразуются в известные тригонометрические формулы для учета годичного параллакса.

То же можно сказать и об учете годичной aberrации, если ограничиться точностью до первого порядка относительно постоянной aberrации k . Имея в виду вектор скорости Земли, определяемый формулой (2.24), а k равным k по (2.19), с использованием (2.59) получим

$$\begin{aligned} (\alpha' - \alpha) \cos \delta &= k(r_A \vec{\xi}^0) = +D \sin \alpha + C \cos \alpha, \\ (\delta' - \delta) &= k(r_A \vec{\eta}^0) = +D \cos \alpha \sin \delta - C \sin \alpha \sin \delta + C \operatorname{tg} \epsilon \cos \delta. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Последние выражения преобразуются к классической формуле Бесселя посредством введения обозначений, называемых малыми бесселевыми буквами c, d, c', d' .

* * *

В последнее время прямоугольные координаты все шире применяются в сферической астрономии. Тонкий, изящный, а порою изощренный аппарат сферической тригонометрии постепенно заменяется простым, максимально формализованным аппаратом матричной алгебры. На смену тригонометрическим решениям с разложениями в ряды приходят точные решения в прямоугольных координатах, преобразования сферических координат заменяются ортогональными преобразованиями единичных векторов. Пионерами применения прямоугольных координат в астрономии являются Т. Ба-

наевич (Банаевич, 1927), Н.И. Идельсон (Идельсон, 1940); П. Кустанхеймо (Кустанхеймо, 1959, 1960), Д.К. Куликов (Куликов, 1947).

Векторно-матричный аппарат теперь часто используется в современных монографиях (см., например, (Абалакин, 1979)) при изложении многих вопросов сферической астрономии, фотографической астрометрии и небесной механики. Отмеченная тенденция отражает особенности современного развития астрономической науки, происходящего в значительной мере под влиянием прогресса вычислительной техники. Внедрение нового математического аппарата в практику сферической астрономии расширяет область применимости решений, повышает точность вычислений и благоприятствует применению ЭВМ. Однако привлечение нового аппарата происходит все еще как-то случайно, несистематически и отражает лишь стремление авторов к упрощению программирования и всего вычислительного процесса. Во многих случаях роль нового аппарата ограничивается более или менее свободным переводом готовых классических решений на новый математический язык. Новых идей в связи с новым аппаратом не возникает. Рассмотренные в этой главе алгоритмы, основанные на векторной формуле большого круга, полностью соответствуют тенденции применения прямоугольных координат в сферической астрономии. Однако идея связи единичных векторов точек, принадлежащих одному большому кругу, посредством точной интерполяционной формулы, насколько нам известно, не применялась в практике сферической астрономии. Это обстоятельство позволило нам вывести ряд новых формул редукционного исчисления, в частности, установить понятие прямых и обратных преобразований единичных векторов, удовлетворяющих строгому условию замкнутости. Все эти преобразования инвариантны выбранной системе координат и поэтому могут применяться при решении многих задач сферической астрономии и космической геодезии. В этом отношении операция интерполяции вдоль дуги большого круга аналогична так называемой "основной операции" Д.К. Куликова (Куликов, 1947), однако последняя имеет только дифференциальную форму (т.е. точна до первого порядка относительно малого смещения Δr), в то время как векторная формула остается точной при любой конечной разности $r' - r$.

Интерполяционная связь точек большого круга имеет прямое отношение к фотографической астрометрии, поскольку отношения синусов дуг большого круга на небесной сфере и соответствующих отрезков на астрофотографии обладают простыми проективными свойствами. На базе интерполяционной формулы большого круга нам удалось получить два новых метода определения координат небесных объектов посредством фотографии: так называемый "интерполяционный метод" (Киселев, 1959), интерпретирующий классические линейные методы, и "метод гомографических координат" (Киселев, 1965), являющийся частным случаем проективного метода. Таким образом, идея интерполяционной формулы большого круга оказалась весьма продуктивной.

ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Основные формулы тангенциальных координат

1.1. **Определение тангенциальных координат.** *Тангенциальными* или *стандартными координатами* в фотографической астрометрии называют прямоугольные координаты изображений звезд в плоскости идеальной астрофотографии с заданным оптическим центром. Тангенциальные координаты звезд вычисляются по формулам центральной проекции на основе данных сферических координат этих звезд в рабочем каталоге. За начало тангенциальных координат принимают оптический центр пластинки T , а оси координат выбирают в направлении возрастающих прямых восхождений и склонений так, что ось $T\eta$ совпадает с изображением небесного меридиана, проходящего через точку T , а ось $T\xi$ перпендикулярна ему. Тангенциальные координаты уже использовались нами в гл. 1 при расчете координатной сетки для фотографических карт неба. В этой главе мы рассмотрим тангенциальные координаты и связанные с ними вопросы, возникающие при астрометрической редукции фотографических наблюдений.

Пусть имеется некоторый рабочий каталог положений звезд, в котором даны сферические координаты звезд α, δ , отнесенные к среднему экватору и равноденствию момента t_0 . Данный каталог можно рассматривать как математическую модель небесной сферы Σ , положения звезд на которой заданы координатами α, δ . Дополним нашу модель рассмотрением идеальной астрофотографии — пластинки Π , оптический центр которой задан в точке T с координатами A, D . Пластинку Π по определению оптического центра считаем касающейся в точке T единичной сферы Σ с центром в центре проекции O (рис. 9).

Положения проекций звезд S' на пластинке Π определим с помощью тангенциальных координат ξ, η , которые вычисляются по данным сферическим координатам звезд и оптического центра пластинки. Определенную таким образом идеальную астрофотографию — фиктивную пластинку Π — условимся называть пластинкой тангенциальных координат, или пластинкой сравнения. Главное назначение пластинки тангенциальных координат — служить посредником между фактически измеренной наблюдаемой пластинкой P и небесной сферой Σ , заданной в форме рабочего каталога положений звезд. Это посредничество выражается в том, что, с одной стороны, путем сравнения тангенциальных и непосредственно измеренных координат одинаковых звезд устанавливают взаимно однозначное соответствие

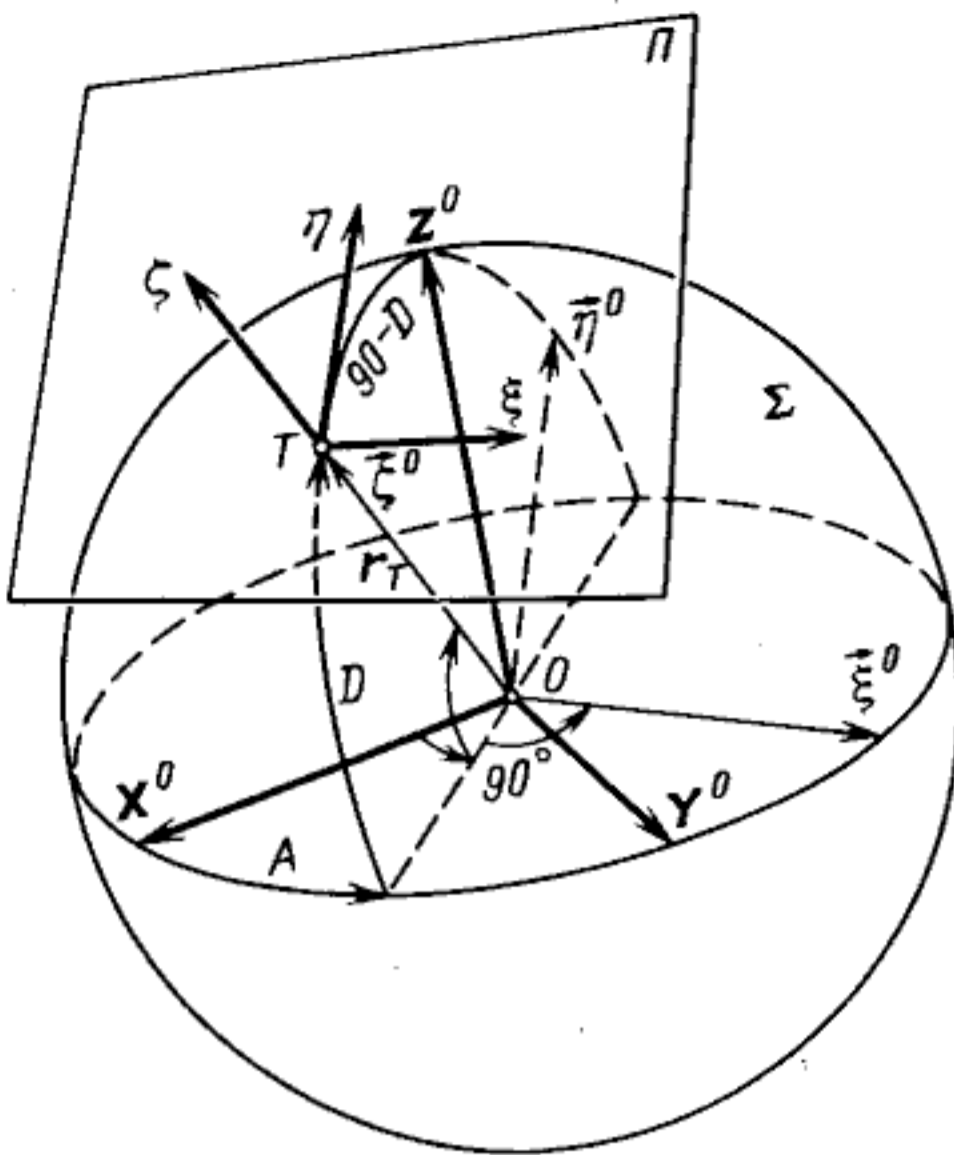


Рис. 9. Экваториальный и тангенциальный триэдры осей:

$OX^0Y^0Z^0$ — экваториальный триэдр; $T\xi\eta\zeta$ — тангенциальный триэдр; T — оптический центр пластинки сравнения; A, D — экваториальные координаты точки T ; ξ^0 — орт оси $T\xi$, направленный в точку небесной сферы с координатами $\alpha_\xi = A + 90^\circ, \delta_\xi = 0^\circ$; η^0 — орт оси $T\eta$, направленный в точку $\alpha_\eta = A + 180^\circ, \delta_\eta = 90^\circ - D$; или $\alpha_\eta = A, \delta_\eta = 90^\circ + D$, если $D < 0$; ζ^0 — орт оси $T\zeta$, направленный в точку $\alpha_\zeta = A, \delta_\zeta = D$; $r_T \equiv \zeta^0$

между точками на пластинках P и Π , с другой стороны, определяют точную аналитическую зависимость между тангенциальными координатами звезд на пластинке Π и их сферическими координатами на сфере Σ . Опираясь на эти установленные зависимости, по измеренным координатам объектов на пластинке P определяют их тангенциальные координаты на пластинке сравнения Π , а затем вычисляют экваториальные координаты объектов на сфере Σ .

В этой схеме тангенциальные координаты в фотографической астрометрии используются в качестве основного инструмента астрометрической редукции фотографических наблюдений. Чтобы эффективно использовать этот инструмент, необходимо иметь подходящий математический аппарат для вычисления тангенциальных координат звезд по заданным сферическим и обратно. Кроме того, необходимо получить решения ряда задач о преобразовании тангенциальных координат при изменении оптического центра и при переходе к другим системам сферических положений звезд. Все эти и некоторые другие вопросы рассматриваются в следующих разделах настоящей главы. Основные формулы этой главы мы выведем на основе векторно-матричной интерпретации соотношений сферической тригонометрии, включая и некоторые соотношения сферической астрономии. Такой подход к проблеме является и более общим, и естественным, так как все возникающие здесь задачи о координатах звезд на сфере и плоскости решаются на основе простых соображений о проектировании и преобразовании векторов. Развитый для этой цели аппарат прямоугольных координат мы применим для вывода важнейших известных и некоторых новых формул, полезных при работе с тангенциальными координатами. Простой, симметричный вид этих формул в прямоугольных координатах делает их удобными для вычислений на ЭВМ.

1.2. Тангенциальный триэдр осей. Обратимся к нашей модели небесной сферы Σ и идеальной астрофотографии Π . Положения звезд на сфере Σ зада-

дим с помощью единичных векторов r , составляющие которых в экваториальной системе координат вычислим по данным α, δ этих звезд в рабочем каталоге согласно формулам

$$r = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} X &= \cos \alpha \cos \delta, \\ Y &= \sin \alpha \cos \delta, \\ Z &= \sin \delta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь мы использовали представление вектора r в виде одностолбцовой матрицы. Форму записи (3.1) условимся понимать в смысле

$$r = XX^0 + YY^0 + ZZ^0, \quad (3.2)$$

где X^0, Y^0, Z^0 — орты основного (базисного) триэдра осей, заданного системой экватора и равноденствия рабочего каталога. Пластинку сравнения Π определим как плоскость, касательную к сфере Σ в точке T , которая задана единичным вектором r_T :

$$r_T = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} X_T &= \cos A \cos D, \\ Y_T &= \sin A \cos D, \\ Z_T &= \sin D, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где A, D обозначают, как и прежде, сферические координаты оптического центра пластинки. Вместе с пластинкой Π определим тангенциальный триэдр осей $T\xi\eta\zeta$ с началом в оптическом центре пластинки. Ось $T\zeta$ направим вдоль вектора r_T , а оси $T\xi$ и $T\eta$ направим по касательным к координатным линиям сферы Σ (рис. 10). Орты $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ тангенциального триэдра осей $T\xi\eta\zeta$ определяются следующими формулами, принятыми для вычисления касательных к координатным линиям в дифференциальной

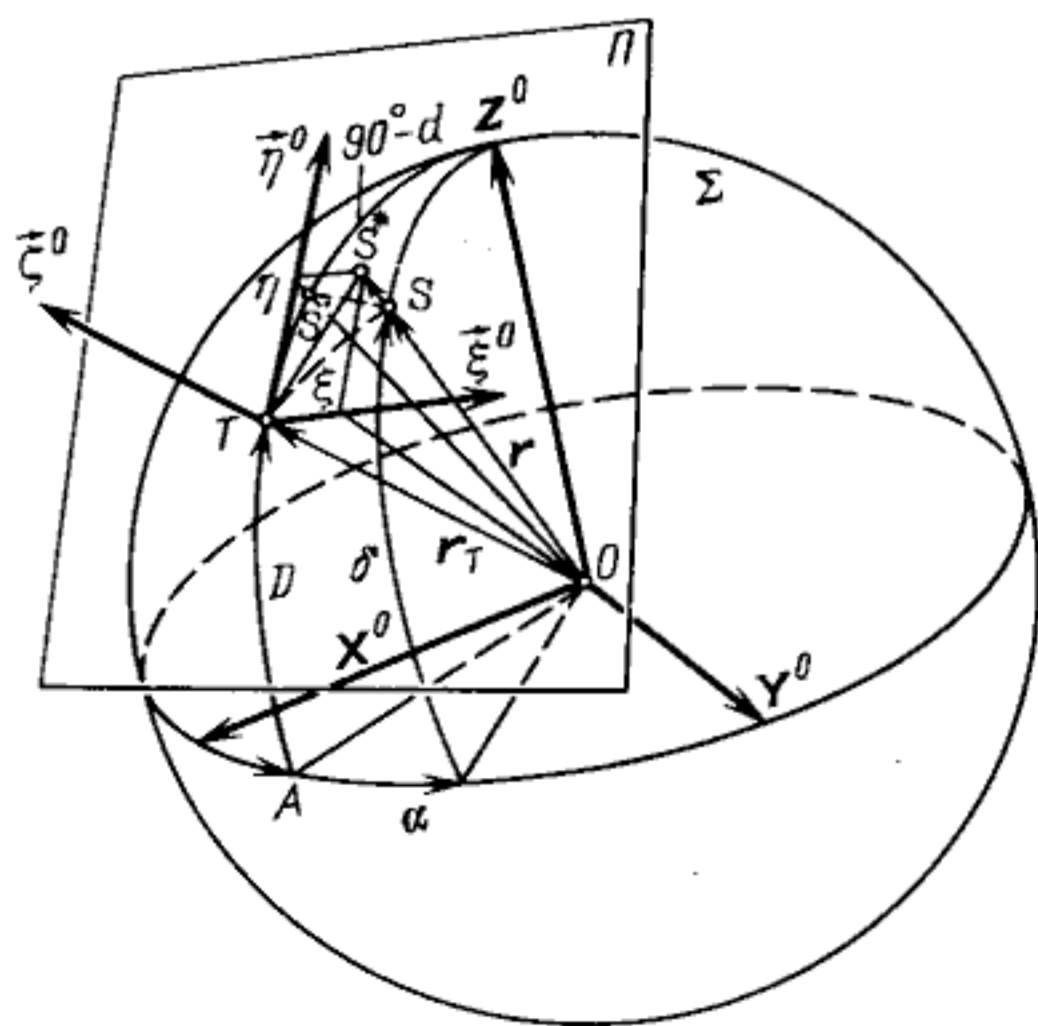


Рис. 10. Определение тангенциальных координат:

Σ — небесная сфера единичного радиуса; Π — пластинка сравнения, T — оптический центр пластинки, r_T — единичный вектор оптического центра; S — определяемая звезда, r — ее единичный вектор; S^* — изображение определяемой звезды на пластинке сравнения; $\tilde{S}S$ — сферический перпендикуляр из точки S к меридиану $\overset{\sim}{TZ}^0$; ξ, η — тангенциальные координаты звезды S

геометрии:

$$\begin{aligned}\vec{\xi}^0 &= \frac{dr_T}{d\alpha \cos \delta} \Big|_{A, D} = -(\sin A)X^0 + (\cos A)Y^0, \\ \vec{\eta}^0 &= \frac{dr_T}{d\delta} \Big|_{A, D} = -(\cos A \sin D)X^0 - (\sin A \sin D)Y^0 + (\cos D)Z^0, \\ \vec{\zeta}^0 &= \frac{dr_T}{dr} \Big|_{A, D} = (\cos A \cos D)X^0 + (\sin A \cos D)Y^0 + (\sin D)Z^0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Согласно данному определению орты тангенциального триэдра образуют пространственную систему осей той же ориентации, что и оси базисного экваториального триэдра осей, т.е. правую систему, если рассматривать сферу Σ извне, как на рис. 10. На астрофотографии, однако, если ее рассматривать эмульсией от себя, оси $T\xi\eta$ образуют левую систему, так же как и для наблюдателя внутри небесной сферы.

Формулы (3.4) позволяют заполнить таблицу девяти косинусов углов t_{ik} между осями тангенциального и базисного триэдров, которую условимся называть матрицей ортов тангенциального триэдра и обозначать символом $[t]$:

	X^0	Y^0	Z^0	
$\vec{\xi}^0$	$-\sin A$	$\cos A$	0	(3.5)
$\vec{\eta}^0$	$-\cos A \sin D$	$-\sin A \sin D$	$\cos D$	
$\vec{\zeta}^0$	$\cos A \cos D$	$\sin A \cos D$	$\sin D$	

Для вычисления элементов матрицы $[t]$ не обязательно использовать их выражения через тригонометрические функции A и D . На практике иногда бывает удобнее вычислять t_{ik} непосредственно по составляющим вектора оптического центра r_T с применением формул

$$\begin{aligned}t_{11} &= -\frac{Y_T}{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2}}; & t_{12} &= \frac{X_T}{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2}}; & t_{13} &= 0; \\ t_{21} &= -\frac{X_T Z_T}{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2}}; & t_{22} &= \frac{-Y_T Z_T}{\sqrt{X_T^2 + Y_T^2}}; & t_{23} &= \sqrt{X_T^2 + Y_T^2}; \\ t_{31} &= X_T; & t_{32} &= Y_T; & t_{33} &= Z_T.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Заметим, что матрица $[t]$ составлена из трех вектор-строк и трех вектор-столбцов ($\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ и X^0, Y^0, Z^0 соответственно), удовлетворяющих условиям нормировки и ортогональности

$$(\vec{\xi}^0 \vec{\xi}^0) = (\vec{\eta}^0 \vec{\eta}^0) = (\vec{\zeta}^0 \vec{\zeta}^0) = 1; \quad (X^0 X^0) = (Y^0 Y^0) = (Z^0 Z^0) = 1, \quad (3.7)$$

$$(\vec{\xi}^0 \vec{\eta}^0) = (\vec{\eta}^0 \vec{\xi}^0) = (\vec{\zeta}^0 \vec{\xi}^0) = 0; \quad (X^0 Y^0) = (Y^0 Z^0) = (Z^0 X^0) = 0, \quad (3.8)$$

а также условию

$$\vec{\xi}^0 \times \vec{\eta}^0 = \vec{\zeta}^0, \quad \vec{\eta}^0 \times \vec{\zeta}^0 = \vec{\xi}^0, \quad \vec{\zeta}^0 \times \vec{\xi}^0 = \vec{\eta}^0, \quad (3.9)$$

$$X^0 \times Y^0 = Z^0, \quad Y^0 \times Z^0 = X^0, \quad Z^0 \times X^0 = Y^0.$$

В силу (3.7) – (3.9) матрица $[t]$ является положительной ортогональной матрицей, соответствующей преобразованию координат вектора r (без переноса начала и при сохранении общего масштаба) при повороте триэдра осей из положения XYZ в положение $\xi\eta\zeta$. Это преобразование можно представить с помощью матриц вращения следующим образом:

$$r_{\xi\eta\zeta} = [t] r_{XYZ}, \quad (3.10)$$

причем

$$[t] = X(90^\circ - D)Z(90^\circ + A). \quad (3.11)$$

Здесь применены обозначения матриц вращения в соответствии с общим правилом

$$X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad Y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$Z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Равенство (3.11) можно принять за независимое определение матрицы тангенциальных координат. Вектор-строки $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ и вектор-столбцы X^0, Y^0, Z^0 матрицы $[t]$ будут использованы нами в дальнейшем. Операция умножения матрицы на вектор, как например в случае (3.10), здесь и всюду в дальнейшем выполняется по правилу "строка на столбец" ввиду представления вектора одностолбцовой матрицей.

1.3. Векторные формулы тангенциальных координат. Выведем теперь векторные формулы тангенциальных координат. Рассмотрим вектор r^* , определяющий положение проекции S^* звезды S на пластинке Π ($r^* = OS^*$ в дальнейшем будем называть его вектором изображения) в системе осей $X^0 Y^0 Z^0$ (рис. 10). В силу условий проекции вектор изображения r^* равен ее единичному вектору r , продолженному до пересечения с плоскостью пластинки Π . Следовательно, можем записать

$$r^* = r \sec \rho = \begin{bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \sec \rho \\ Y \sec \rho \\ Z \sec \rho \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Здесь $\rho = \sphericalangle TS$ – угол между векторами r и r_T ; величина $\sec \rho$ легко определяется из формулы

$$\cos \rho = (r r_T) = X t_{31} + Y t_{32} + Z t_{33}. \quad (3.14)$$

Для вектора изображения r^* справедливо также следующее разложение по осям тангенциального триэдра:

$$r^* = \xi \vec{\xi}^0 + \eta \vec{\eta}^0 + 1 \cdot \vec{\zeta}^0, \quad (3.15)$$

причем

$$|r^*| = \sec \rho = \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}, \quad (3.16)$$

где ξ и η — уже знакомые нам тангенциальные координаты звезды.

Таким образом, можно сформулировать следующее определение: тангенциальные координаты звезды S равны проекциям ее единичного вектора на оси $\vec{\xi}^0$, $\vec{\eta}^0$ тангенциального триэдра пластинки сравнения, умноженным на секанс углового расстояния звезды от оптического центра пластинки. В соответствии с этим определением можно записать следующее матричное уравнение для определения тангенциальных координат:

$$r^* = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{bmatrix} = [t_{ik}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \sec \rho. \quad (3.17)$$

Согласно (3.14) и (3.17) формулы для вычисления тангенциальных координат имеют вид:

$$\xi = (r^* \vec{\xi}^0) = \frac{r \vec{\xi}^0}{r \vec{\xi}^0} = \frac{Xt_{11} + Yt_{12} + Zt_{13}}{Xt_{31} + Yt_{32} + Zt_{33}},$$

$$\eta = (r^* \vec{\eta}^0) = \frac{r \vec{\eta}^0}{r \vec{\eta}^0} = \frac{Xt_{21} + Yt_{22} + Zt_{23}}{Xt_{31} + Yt_{32} + Zt_{33}}. \quad (3.18)$$

Контролем служит соотношение

$$\xi^2 + \eta^2 = \operatorname{tg}^2 \rho = \frac{1 - (r r_T)^2}{(r r_T)^2}. \quad (3.19)$$

Итак, если для некоторой пластинки P с известным оптическим центром T , имеющим координаты A, D , необходимо вычислить тангенциальные координаты для массива звезд S_j с координатами α_j, δ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, то поступаем следующим образом:

во-первых, по данным A и D вычисляем по формулам (3.5) матрицу ортов тангенциального триэдра $[t_{ik}]$;

во-вторых, для каждой из звезд S_j вычисляем составляющие ее единичного вектора r_j по формулам (3.1);

в-третьих, вычисляем искомые тангенциальные координаты ξ, η согласно (3.18).

Решим также и обратную задачу. Пусть требуется определить сферические координаты α, δ некоторого числа объектов S_k , $k = 1, 2, \dots, m$, на пластинке P , тангенциальные координаты ξ_k, η_k которых известны. Решение получаем, как и в предыдущем случае, на основе уравнения (3.17).

Умножая слева обе части этого уравнения на транспонированную матрицу $[t_{ik}]^T$, найдем:

$$[t_{ik}]^T r^* = r \sec \rho. \quad (3.20)$$

Здесь мы воспользовались общим свойством ортогональных матриц, согласно которому транспонированная матрица совпадает с обратной матрицей, т.е.

$$[t_{ik}]^T [t_{ik}] = 1. \quad (3.21)$$

Из (3.20) следует

$$r = \frac{[t_{ik}]^T r^*}{\sec \rho}. \quad (3.22)$$

Подставляя сюда выражения для r^* и $\sec \rho$ согласно (3.15) и (3.16), получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} X &= \frac{(r^* X^0)}{\sec \rho} = \frac{\xi t_{11} + \eta t_{21} + 1 \cdot t_{31}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}, \\ Y &= \frac{(r^* Y^0)}{\sec \rho} = \frac{\xi t_{12} + \eta t_{22} + 1 \cdot t_{32}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}, \\ Z &= \frac{(r^* Z^0)}{\sec \rho} = \frac{\xi t_{13} + \eta t_{23} + 1 \cdot t_{33}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

От этих формул нетрудно перейти непосредственно к тангенсам интересующих нас сферических координат

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{Y}{X} = \frac{\xi t_{12} + \eta t_{22} + 1 \cdot t_{32}}{\xi t_{11} + \eta t_{21} + 1 \cdot t_{31}}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{\xi t_{13} + \eta t_{23} + 1 \cdot t_{33}}{\sqrt{(\xi t_{11} + \eta t_{21} + t_{31})^2 + (\xi t_{12} + \eta t_{22} + t_{32})^2}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

1.4. Тригонометрические формулы тангенциальных координат. Формулы (3.5), (3.18), (3.23), (3.24) решают прямую и обратную задачи тангенциальных координат в самом общем виде. Начальные, промежуточные и конечные результаты в этих решениях представлены в форме прямоугольных пространственных координат, служащих элементами векторов и матриц. Все операции сводятся к вычислениям скалярных произведений векторов или произведений матриц. Это делает удобным применение изложенного здесь математического аппарата при массовых вычислениях на ЭВМ. Однако иногда желательно иметь формулы, в которых все исходные данные представлены сферическими координатами. Соответствующие чисто тригонометрические формулы тангенциальных координат давно широко применяются в фотографической астрометрии и по традиции их иног-

да называют классическими. В учебной литературе — см., например, (Кёниг, 1933; Бугославская, 1947; Дейч, 1951; Подобед и др., 1975) эти формулы выводятся на основе соотношений сферической тригонометрии. Нетрудно вывести их и из вышеприведенных формул в прямоугольных координатах. Так, в случае прямой задачи, заменив в формулах (3.18) значения X , Y , Z и t_{ik} их значениями согласно определениям (3.1), (3.5), придем к известным классическим формулам

$$\xi = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)},$$

$$\eta = \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)}.$$
(3.25)

Обратные формулы можно получить из (3.24) путем несложных преобразований:

$$\operatorname{tg}(\alpha - A) = \frac{\xi \sec D}{1 - \eta \operatorname{tg} D},$$

$$\operatorname{tg} \delta \sec(\alpha - A) = \frac{\eta + \operatorname{tg} D}{1 - \eta \operatorname{tg} D}.$$
(3.26)

Наряду с формулами (3.25), (3.26) в фотографической астрометрии до сих пор имеют применение так называемые логарифмические формулы тангенциальных координат, удобные для решения как прямой, так и обратной задач с помощью логарифмов. Эти формулы обычно получают из выражений (3.21) посредством введения вспомогательного угла $d = 90^\circ - \angle Z^0 OS'$, равного склонению фиктивной звезды S' , лежащей в основании сферического перпендикуляра (рис. 10), опущенного из определяемой звезды S на меридиан $\sphericalangle TZ^0$. Как следует из рассмотрения сферического прямоугольного треугольника $Z^0 S' S$, дуги d и δ связаны следующим соотношением:

$$\operatorname{tg} d = \operatorname{tg} \delta \sec(\alpha - A).$$
(3.27)

Дальнейший вывод логарифмических формул проведем с помощью масштабных соотношений гл. 1. По определению тангенциальных координат имеем

$$\xi = f' \operatorname{tg} \sphericalangle S'S,$$

$$\eta = f_0 \operatorname{tg} \sphericalangle TS',$$
(3.28)

где f_0 соответствует главному фокусному расстоянию астрофотографии, а f' — частное фокусное расстояние для прямой $\eta = \operatorname{const}$; следовательно, можем положить

$$f_0 = 1; \quad f' = \sqrt{1 + \eta^2} = \sec \sphericalangle TS',$$
(3.29)

где $\sphericalangle TS' = d - D$.

Остается определить $\operatorname{tg} \sphericalangle S'S$ из сферического прямоугольного треугольника $Z^0 S' S$:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle S'S = \operatorname{tg}(\alpha - A) \cos d.$$
(3.30)

Подставляя (3.29), (3.30) в (3.28), получим искомые формулы в виде

$$\begin{aligned}\xi &= \operatorname{tg}(\alpha - A) \cos d \sec(d - D), \\ \eta &= \operatorname{tg}(d - D),\end{aligned}\tag{3.31}$$

которые вместе с определением вспомогательного угла d (3.27) представляют собой логарифмический аналог формул (3.25), (3.26). Как видим, масштабные соотношения позволили получить классические формулы тангенциальных координат новым, особенно наглядным способом.

В заключение этого раздела отметим, что формулы тангенциальных координат (3.31) легко разлагаются в ряды по степеням $(\alpha - A)$ и $(\delta - D)$, что позволяет на этой основе получать различные приближенные формулы тангенциальных координат, сохраняющие значение при обработке астрофотографий с небольшим полем ($\rho < 1^\circ$) и при вычислениях вручную.

§ 2. Преобразование тангенциальных координат при переходе к другой плоскости

2.1. Общий случай сравнения тангенциальных координат двух пластинок.

В фотографической астрометрии иногда приходится сопоставлять тангенциальные координаты одних и тех же или различных звезд, отнесенных к двум пластинкам сравнения Π_1 и Π_2 . Проще всего такая задача решается путем прямого преобразования тангенциальных координат системы пластинки Π_1 на систему пластинки Π_2 . Оптические центры обеих пластинок предполагаются заданными, например, посредством единичных векторов r_{T1} и r_{T2} . Решение дадим в общем виде на основе формул (3.17) и (3.22). Начнем с того, что определим матрицы ортов обеих рассматриваемых систем тангенциальных координат $[t_1]$ и $[t_2]$. Это нетрудно сделать, например, по формулам (3.6), поскольку r_{T1} и r_{T2} известны. Теперь выберем какую-либо звезду S , тангенциальные координаты которой известны в обеих системах, и выразим ее единичный вектор r через тангенциальные координаты как первой, так и второй системы. Согласно формуле (3.22) будем иметь

$$r = [t_1]^T r_1^* \cos \rho_1 = [t_2]^T r_2^* \cos \rho_2.\tag{3.32}$$

Здесь r_1^* и r_2^* — векторы изображений звезды S на пластинках Π_1 и Π_2 , для которых справедливы матричные представления

$$r_1^* = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r_2^* = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ 1 \end{bmatrix}.\tag{3.33}$$

Величины $\cos \rho_1$ и $\cos \rho_2$ также должны быть выражены через соответствующие тангенциальные координаты:

$$\cos \rho_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}}, \quad \cos \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_2^2 + \eta_2^2}}.\tag{3.34}$$

Умножая уравнение (3.32) на матрицу $[t_2]$ слева, получим искомое выра-

жение для r_2^* :

$$r_2^* = [t_2] [t_1]^T r_1^* \frac{\cos \rho_1}{\cos \rho_2}. \quad (3.35)$$

Формула (3.35) решает задачу о преобразовании тангенциальных координат в самом общем виде. Действительно, вывод этой формулы никак не связан с конкретным видом матриц $[t_2]$ и $[t_1]$. С другой стороны, произведение двух ортогональных матриц есть тоже некоторая ортогональная матрица, характеризующая преобразование координат при вращении триэдра осей. Таким образом, имеем

$$r_2^* = [A_{12}] r_1^* \frac{\cos \rho_1}{\cos \rho_2}, \quad (3.36)$$

где

$$[A_{12}] = [t_2] [t_1]^T \quad (3.37)$$

является ортогональной матрицей, определяющей преобразование координат единичного вектора при вращении тангенциального триэдра осей из положения $T_1(\vec{\xi}_1^0 \vec{\eta}_1^0 \vec{\zeta}_1^0)$ в положение $T_2(\vec{\xi}_2^0 \vec{\eta}_2^0 \vec{\zeta}_2^0)$.

Воспользуемся формулой (3.35) для вывода некоторых известных в фотографической астрометрии формул. Для этого, во-первых, преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\cos \rho_1}{\cos \rho_2} &= \frac{\cos \rho_1}{(r \vec{\zeta}_2^0)} = \frac{\cos \rho_1}{(\xi_1 \vec{\xi}_1^0 + \eta_1 \vec{\eta}_1^0 + \zeta_1^0) \cos \rho_1 \vec{\zeta}_2^0} = \\ &= \frac{1}{\xi_1 (\vec{\xi}_1^0 \vec{\zeta}_2^0) + \eta_1 (\vec{\eta}_1^0 \vec{\zeta}_2^0) + (\vec{\zeta}_1^0 \vec{\zeta}_2^0)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

и, во-вторых, исходя из матрицы (3.37), найдем элементы матрицы

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\vec{\xi}_2^0 \vec{\xi}_1^0), & a_{12} &= (\vec{\xi}_2^0 \vec{\eta}_1^0), & a_{13} &= (\vec{\xi}_2^0 \vec{\zeta}_1^0); \\ a_{21} &= (\vec{\eta}_2^0 \vec{\xi}_1^0), & a_{22} &= (\vec{\eta}_2^0 \vec{\eta}_1^0), & a_{23} &= (\vec{\eta}_2^0 \vec{\zeta}_1^0); \\ a_{31} &= (\vec{\zeta}_2^0 \vec{\xi}_1^0), & a_{32} &= (\vec{\zeta}_2^0 \vec{\eta}_1^0), & a_{33} &= (\vec{\zeta}_2^0 \vec{\zeta}_1^0). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Здесь мы воспользовались представлением матрицы $[t_2]$ в виде трех вектор-строк, а матрицы $[t_1]^T$ — в виде трех вектор-столбцов. Объединяя теперь результаты (3.38) и (3.39) и учитывая выражения (3.33) для r_1^* и r_2^* , окончательно получаем

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{a_{11} \xi_1 + a_{12} \eta_1 + a_{13}}{a_{31} \xi_1 + a_{32} \eta_1 + a_{33}}, \\ \eta_2 &= \frac{a_{21} \xi_1 + a_{22} \eta_1 + a_{23}}{a_{31} \xi_1 + a_{32} \eta_1 + a_{33}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где a_{ik} — элементы матрицы A_{12} , равные косинусам девяти углов между

осями триэдров $\vec{\xi}_2^0 \vec{\eta}_2^0 \vec{\zeta}_2^0$ и $\vec{\xi}_1^0 \vec{\eta}_1^0 \vec{\zeta}_1^0$, как показано в табличке

	$\vec{\xi}_1^0$	$\vec{\eta}_1^0$	$\vec{\zeta}_1^0$
$\vec{\xi}_2^0$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\vec{\eta}_2^0$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\vec{\zeta}_2^0$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(3.41)

Тригонометрические выражения элементов a_{ik} можно вычислить по формуле (3.39) на основе (3.5).

2.2. Сравнение тангенциальных координат двух близких пластинок. Представляет интерес рассмотреть также случай сравнения тангенциальных координат двух пластинок Π_1 и Π_2 , для которых известно только относительное положение их оптических центров T_1 и T_2 на сфере или на одной из пластинок. Экваториальные координаты центров T_1 и T_2 при этом могут оставаться неизвестными. На практике такой случай имеет место, например, при сравнении результатов редукции двух близких частично перекрывающихся пластинок. Для определенности предположим, что известными величинами являются: сферическое расстояние τ между центрами пластинок T_1 и T_2 , а также позиционные углы ψ_1, ψ_2 дуги $\overset{\frown}{T_1 T_2}$ относительно осей $\vec{\eta}_1^0$ и $\vec{\eta}_2^0$ (рис. 11). Задача решается формулами (3.40). Остается определить элементы матрицы преобразования A_{12} , которые найдем, представив A_{12} в виде произведения трех матриц вращения

$$[A_{12}] = Z(\psi_2 - 180^\circ) X(\tau) Z(180^\circ - \psi_1). \quad (3.42)$$

Правильность представления (3.42) проверяется непосредственно выполнением последовательных вращений триэдра $\vec{\xi}_1^0 \vec{\eta}_1^0 \vec{\zeta}_1^0$ до его полного совпадения с триэдром $\vec{\xi}_2^0 \vec{\eta}_2^0 \vec{\zeta}_2^0$, т.е., во-первых, вращением первого триэдра

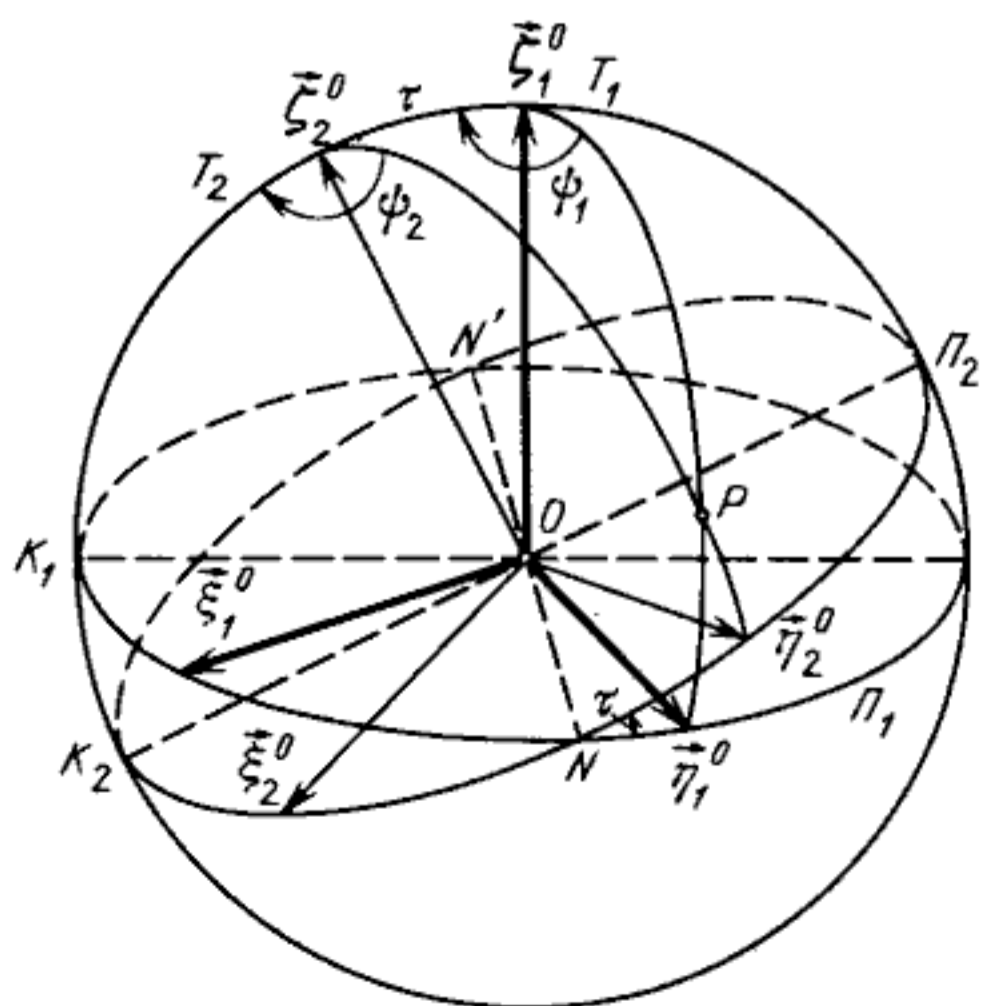


Рис. 11. Преобразование тангенциальных координат:

T_1 и T_2 — оптические центры пластинок Π_1 и Π_2 ; $\vec{\xi}_1^0, \vec{\eta}_1^0, \vec{\zeta}_1^0$ — орты тангенциальных осей пластинки Π_1 ; $\vec{\xi}_2^0, \vec{\eta}_2^0, \vec{\zeta}_2^0$ — орты тангенциальных осей пластинки Π_2 ; τ — угол наклона плоскости Π_2 относительно плоскости Π_1 ; P — полюс системы небесных координат, определяющий направление осей $\vec{\eta}_1^0$ и $\vec{\eta}_2^0$; ψ_1 — позиционный угол дуги $\overset{\frown}{T_1 T_2}$ в точке T_1 ; ψ_2 — позиционный угол дуги $\overset{\frown}{T_1 T_2}$ в точке T_2 ; NN' — линия узлов плоскостей Π_1 и Π_2 ; T_1, T_2, K_1, K_2 — колюр точки N ;
 $\overset{\frown}{\eta_1^0 K_1} = \psi_1; \overset{\frown}{\eta_2^0 K_2} = \psi_2$

вокруг оси Z на угол $(180^\circ - \psi_1)^*$, в результате чего ось $\vec{\xi}_1^0$ совместится с линией узлов $N'N$, во-вторых, вращением вокруг нового положения оси $\vec{\xi}_1^0$ на угол τ , после чего совместятся оси $\vec{\xi}_1^0$ и $\vec{\xi}_2^0$ и соответственно плоскости Π_1 и Π_2 , в-третьих, вращением вокруг нового положения оси $\vec{\xi}_1^0$ на угол $(\psi_2 - 180^\circ)$ до совмещения обоих триэдров. Теперь, выполняя умножение матриц вращения согласно (3.42), найдем искомые выражения элементов a_{ik} . Результаты запишем так:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \tau, \\ a_{12} &= -\sin \psi_1 \cos \psi_2 + \cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \tau, & a_{13} &= -\sin \psi_2 \sin \tau; \\ a_{21} &= -\cos \psi_1 \sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos \psi_2 \cos \tau, \\ a_{22} &= \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \tau, & a_{23} &= -\cos \psi_2 \sin \tau; \\ a_{31} &= \sin \psi_1 \sin \tau, & a_{32} &= \cos \psi_1 \sin \tau, & a_{33} &= \cos \tau. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Отметим следующую особенность преобразования тангенциальных координат с матрицей (3.43). Из трех аргументов этого преобразования ψ_1 , τ , ψ_2 только средний аргумент жестко определяется относительным положением центров T_1 и T_2 ; что касается позиционных углов ψ_2 и ψ_1 , то в условиях, когда полюс системы небесных координат не определен, эти углы могут характеризовать лишь направление прямой $T_1 T_2$ на пластинках Π_1 и Π_2 относительно заданных осей $T_1 \eta$ и $T_2 \eta$. Ничто не мешает выбрать направление осей произвольным образом. Следовательно, преобразование с матрицей (3.43) позволяет связать две системы произвольно ориентированных тангенциальных координат.

Теперь рассмотрим случай сравнения двух близких пластинок, представляющих практический интерес. Формулы преобразования (3.40) для этого случая запишем в явном виде, считая τ малой величиной,

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\xi_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) + \eta_1 \sin(\psi_2 - \psi_1) - \tau \sin \psi_2}{\xi_1 \tau \sin \psi_1 + \eta_1 \tau \cos \psi_1 + 1}, \\ \eta_2 &= \frac{-\xi_1 \sin(\psi_2 - \psi_1) + \eta_1 \cos(\psi_2 - \psi_2) - \tau \cos \psi_2}{\xi_1 \tau \sin \psi_1 + \eta_1 \tau \cos \psi_1 + 1}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Формулы (3.44) развернем в ряд по степеням ξ и η для членов второго порядка включительно. Получим

$$\begin{aligned} \xi_2 &= p_2 + \xi_1 \cos \Delta\psi + \eta_1 \sin \Delta\psi - p_1 \xi_1^2 \cos \Delta\psi - q_1 \eta_1^2 \sin \Delta\psi - \\ &- (p_1 \sin \Delta\psi + q_1 \cos \Delta\psi) \xi_1 \eta_1, \\ \eta_2 &= q_2 - \xi_1 \sin \Delta\psi + \eta_1 \cos \Delta\psi + p_1 \xi_1^2 \sin \Delta\psi - q_1 \eta_1^2 \cos \Delta\psi - \\ &- (p_1 \cos \Delta\psi - q_1 \sin \Delta\psi) \xi_1 \eta_1. \end{aligned} \quad (3.45)$$

*) Напомним, что позиционные углы в астрономии отсчитываются от направления на север к востоку, т.е. от оси η^0 к оси ξ^0 на астрофотографии. Это направление отсчета углов противоположно принятому при определении матриц вращения (3.12).

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tau \sin \psi_1 &= p_1, & -\tau \sin \psi_2 &= p_2, \\ \tau \cos \psi_1 &= q_1, & -\tau \cos \psi_2 &= q_2, & \psi_2 - \psi_1 &= \Delta\psi, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где p_1 и q_1 суть координаты проекции T_2 на плоскость Π_1 , а p_2, q_2 — координаты проекции T_1 на плоскость Π_2 , а $\Delta\psi$ равно разности ориентировок осей $\vec{\eta}_1^0$ и $\vec{\eta}_2^0$ относительно фиксированного направления T_1T_2 . Координаты p_1, q_1 и p_2, q_2 связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} -p_2 &= p_1 \cos \Delta\psi + q_1 \sin \Delta\psi, \\ -q_2 &= -p_1 \sin \Delta\psi + q_1 \cos \Delta\psi. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Формулы (3.45) показывают, что преобразование двух близких произвольно ориентированных систем тангенциальных координат должно учитывать перенос начала координат, поворот осей и квадратичные члены общего вида. Этот вывод справедлив, если ограничиться рассмотрением формул первого порядка относительно τ . Если же принять во внимание и члены с τ^2 , то обнаружим, что преобразование (3.45) должно учитывать также и изменение масштаба. Однако такие случаи удобнее анализировать на основе дробно-линейных формул типа (3.40) с коэффициентами из таблицы (3.43).

Практический интерес представляет также случай сравнения двух близких пластинок, тангенциальные координаты которых ориентированы стандартным образом. Оси $\vec{\eta}_1^0$ и $\vec{\eta}_2^0$ этих координат направлены к полюсу экваториальных координат, поэтому различие позиционных углов ψ_1 и ψ_2 невелико, если только пластинки Π_1 и Π_2 не выбраны слишком близко к полюсу. Нетрудно показать, что в таком случае имеют место следующие приближенные соотношения:

$$\begin{aligned} p_1 &= (A_2 - A_1) \cos D, & p_2 &= -p_1, \\ q_1 &= D_2 - D_1, & q_2 &= -q_1, \\ \Delta\psi &= p_1 \operatorname{tg} D, & D &= (D_1 + D_2)/2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Преобразование (3.45), если сохранить принятую точность, приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= -p_1 + \xi_1 + p_1 \operatorname{tg} D \eta_1 - p_1 \xi_1^2 - q_1 \xi_1 \eta_1, \\ \eta_2 &= -q_1 + \eta_1 - p_1 \operatorname{tg} D \xi_1 - p_1 \xi_1 \eta_1 - q_1 \eta_1^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Из формул (3.49) следует, что при сравнении близких одинаково ориентированных систем тангенциальных координат можно ограничиться преобразованием с линейными членами и неполными квадратичными членами вида

$$\begin{aligned} \Delta\xi_1 &= -p\xi^2 - q\xi\eta, \\ \Delta\eta_1 &= -p\xi\eta - q\eta^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Преобразования вида (3.45) и (3.50) широко используются в фотографической астрометрии при сопоставлении измеренных и тангенциальных координат звезд на широкоугольных пластинках P и Π , если оптический центр пластинки P не определен. Однако ни в учебной, ни в специальной

литературе нет четкого разграничения, когда нужно применять сокращенные формулы (3.49), а когда полные формулы (3.45). Квадратичные члены вида (3.50) называют членами наклонности. Создается ложное впечатление, что если между пластинками P и Π существует неопределенность в смысле наклонности, то переход от измеренных координат к тангенциальным достаточно искать в форме преобразования (3.49); если же необходимо учесть еще какие-то эффекты дифференциального характера, то необходимо применять преобразование (3.45) с квадратичным трехчленом. О роли начальной ориентировки сравниваемых систем не упоминается. В этом разделе ясно показано, что члены наклонности вида неполной квадратичной формы (3.50) только в том случае обеспечивают учет погрешности принятого положения оптического центра, когда ориентировки пластинок P и Π практически совпадают. В противном случае необходимо использовать преобразование координат с полной квадратичной формой.

Подробнее о применении формул преобразования типа (3.44) и (3.49) см. гл. 4, п. 6.3.

§ 3. Изменение тангенциальных координат звезд вследствие прецессии

3.1. Преобразование единичного вектора звезды вследствие прецессии. Как известно из сферической астрономии, явление прецессии выражается в том, что полюс мира медленно изменяет свое положение среди звезд, описывая в течение 26000 лет на небесной сфере малый круг радиусом в $23,5^\circ$ с центром в полюсе эклиптики. Вследствие прецессии экваториальные координаты звезд в каталогах, которые отнесены к различным равноденствиям, будут различными. Математически явление прецессии описывается как преобразование координат звезд, происходящее вследствие вращения экваториального (базисного) триэдра осей. Это преобразование, используя матрицы вращения, можно представить следующим образом:

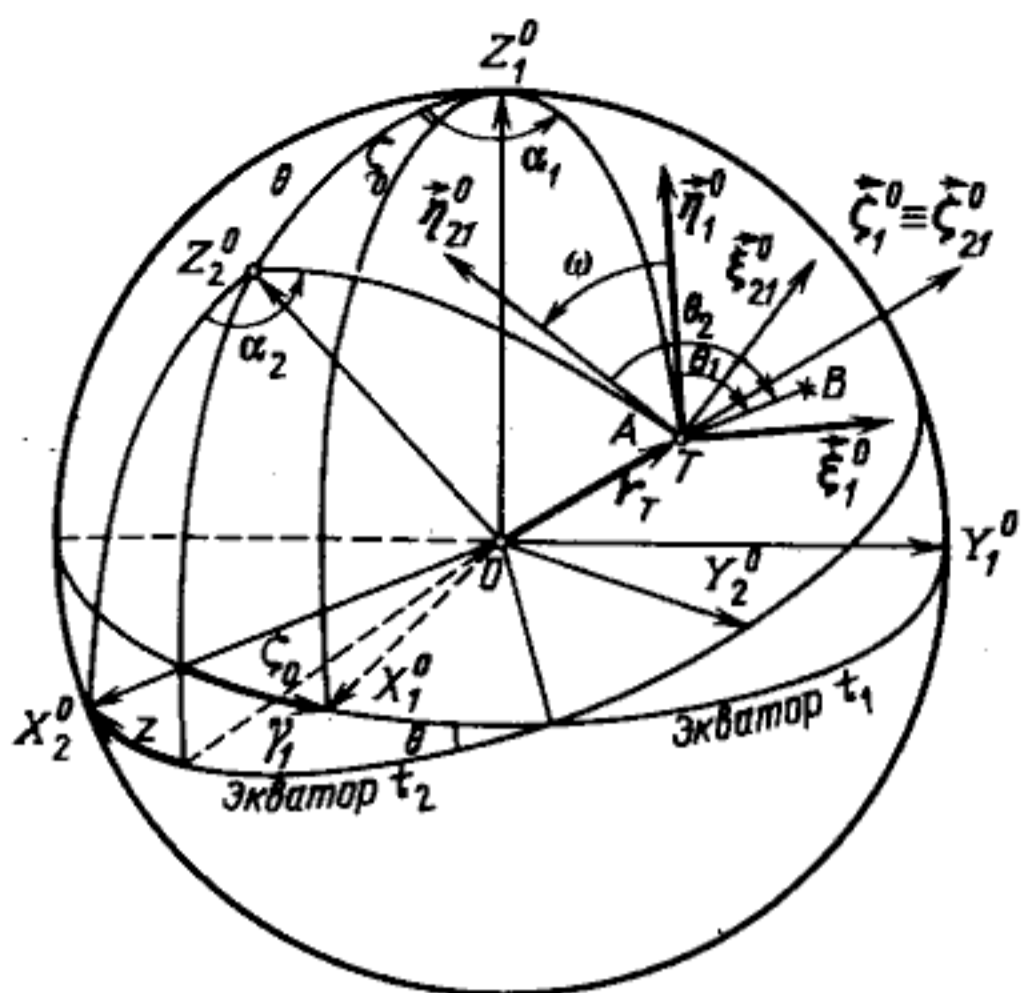
$$\begin{aligned} r_2 &= [P_{12}] r_1, \\ [P_{12}] &= Z(-z) Y(\theta) Z(-\xi_0). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Здесь r_1 и r_2 — единичные векторы какой-либо звезды, отнесенные к экваториальным осям двух эпох t_2 и t_1 ; $Z(\xi)$, $Y(\theta)$ — матрицы вращения типа (3.12), ξ_0 , θ , z — эйлеровы углы, служащие аргументами соответствующих поворотов базисного триэдра осей за время $t_2 - t_1$, для них использованы обозначения Ньюкома (см. рис. 12.). Если за начальное положение триэдра принять его положение, соответствующее среднему экватору и равноденствию эпохи 1950.0, то эйлеровы углы в функции времени выражаются следующими рядами (Субботин, 1968):

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 2304,952''\tau + 0,3022''\tau^2 + 0,0180''\tau^3, \\ \theta &= 2004,257''\tau - 0,4268''\tau^2 - 0,0418''\tau^3, \\ z &= 2304,952''\tau + 1,0951''\tau^2 + 0,0183''\tau^3, \\ \tau &= \frac{JD(t) - 2433282,4234}{36524,22}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

Рис. 12. Изменение ориентировки тангенциальных координат вследствие прецессии:

Z_1^0 и Z_2^0 — единичные векторы направлений на полюс экваториальной системы эпохи t_1 и t_2 ; ξ_1^0, η_1^0 и ξ_{21}^0, η_{21}^0 — орты осей тангенциальных координат в эпохи t_1 и t_2 ; ω — поворот осей тангенциальных координат вследствие прецессии; θ_1 и θ_2 — позиционный угол двойной звезды AB в эпохи t_1 и t_2 ($T \equiv A$); ζ_0, θ, z — ньюкомбовы обозначения углов поворота экваториального триэдра осей вследствие прецессии



где τ выражается в тропических столетиях, отсчитываемых от начала бесселева года 1950.0.

Таблица девяти косинусов, соответствующая матрице $[P_{12}]$, имеет следующий вид:

P_{ik}	X_1	Y_1	Z_1
X_2	P_{11}	P_{12}	P_{13}
Y_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}
Z_2	P_{31}	P_{32}	P_{33}

(3.53)

где

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= -\sin \zeta_0 \sin z + \cos \zeta_0 \cos z \cos \theta; \\
 p_{12} &= -\cos \zeta_0 \sin z - \sin \zeta_0 \cos z \cos \theta, & p_{13} &= -\cos z \sin \theta; \\
 p_{21} &= \sin \zeta_0 \cos z + \cos \zeta_0 \sin z \cos \theta; \\
 p_{22} &= \cos \zeta_0 \cos z - \sin \zeta_0 \sin z \cos \theta; & p_{23} &= -\sin z \sin \theta; \\
 p_{31} &= \cos \zeta_0 \sin \theta; & p_{32} &= -\sin \zeta_0 \sin \theta; & p_{33} &= \cos \theta.
 \end{aligned}$$

В фотографической астрометрии с учетом прецессии приходится иметь дело по крайней мере в двух случаях. Во-первых, когда эпоха экватора и равноденствия рабочего каталога не соответствует системе координат, к которой по условию задачи требуется получить положение объектов наблюдения; во-вторых, когда требуется сравнить тангенциальные координаты звезд одной и той же области, отнесенные к различным эпохам экватора и равноденствия. Первый из этих случаев типичен для задач спутниковой астрометрии, второй характерен для задач, связанных с учетом так называемой дифференциальной прецессии, например, при обработке рядов наблюдений двойных звезд. В общей формулировке задачу учета прецессии в фотографической астрометрии можно поставить так:

1) определить тангенциальные координаты звезд в системе экватора эпохи t_2 по данным координатам, отнесенным к экватору и равноденствию эпохи t_1 (система координат рабочего каталога);

2) получить формулы прецессионного преобразования тангенциальных координат звезд, заданных в системе экватора и равноденствия эпохи t_1 к системе эпохи t_2 ; оптический центр пластинки предполагается заданным (координаты A, D , эпоха t_1).

3.2. Вычисление тангенциальных координат звезд в системе экватора и равноденствия произвольной эпохи. Эта задача, как нетрудно видеть, может быть решена на основе формул прецессионного преобразования (3.51) и формул тангенциальных координат (3.18), причем на первом этапе вычислений по формулам (3.51) нужно определить составляющие векторов всех заданных звезд и ортов тангенциального триэдра в системе осей эпохи t_2 , а на втором этапе (формулы 3.18) вычислить тангенциальные координаты звезд обычным путем.

Укажем другое решение, не требующее прецессионного преобразования векторов звезд, но использующее формулы прецессионного преобразования ортов тангенциального триэдра в явном виде. Выведем эти формулы.

Воспользуемся следующим геометрическим определением ортов осей тангенциального триэдра:

$$\vec{\xi}_1^0 = r_{T1} = X_1 X_1^0 + Y_1 Y_1^0 + Z_1 Z_1^0,$$

$$\vec{\xi}_1^0 = \frac{Z_1^0 \times r_T}{|Z_1^0 \times r_T|} = \frac{1}{\cos D_1} (Z_1^0 \times r_T), \quad (3.54)$$

$$\vec{\eta}_1^0 = \vec{\xi}_1^0 \times \vec{\xi}_1^0 = \frac{1}{\cos D_1} [r_T \times (Z_1^0 \times r_T)].$$

Здесь r_T — единичный вектор точки небесной сферы $T(A, D)$, соответствующей оптическому центру пластинки, Z_1^0 — единичный вектор полюса экваториальной системы в эпоху t_1 ; $\vec{\xi}_1^0, \vec{\eta}_1^0, \vec{\xi}_1^0$ — орты тангенциального триэдра в точке T . Все векторы, участвующие в формулах (3.54), отнесены к осям экваториальной системы эпохи t_1 . В справедливости определения (3.54), т.е. в его эквивалентности определениям (3.5) или (3.6), легко убедиться, подставив в (3.54) разложение

$$Z_1^0 = 0 \cdot X_1^0 + 0 \cdot Y_1^0 + 1 \cdot Z_1^0 \quad (3.55)$$

и выполнив указанные в формулах действия.

Формулы (3.54) наглядно отражают то обстоятельство, что для определения системы тангенциальных координат в данной точке небесной сферы r_T достаточно задать положение этой точки и полюса в какой-либо одной системе. Имея в виду это свойство, определим орты тангенциального триэдра для эпохи t_2 , считая r_T заданным в системе экватора t_1 . Искомые орты обозначим $\vec{\xi}_{21}^0, \vec{\eta}_{21}^0$ и $\vec{\xi}_{21}^0$, причем по условию задачи имеем

$$\vec{\xi}_{21}^0 = \vec{\xi}_1^0 = r_T. \quad (3.56)$$

Для решения задачи, очевидно, достаточно определить направление на полюс экватора эпохи t_2 в системе экватора t_1 , т.е. найти единичный

вектор Z_{21}^0 и затем вычислить орты $\vec{\xi}_{21}^0$, $\vec{\eta}_{21}^0$, $\vec{\zeta}_{21}^0$ по формулам (3.54). Для Z_{21}^0 согласно (3.51) имеем

$$Z_{21}^0 = p_{31}X_1^0 + p_{32}Y_1^0 + p_{33}Z_1^0. \quad (3.57)$$

Заменяя теперь в формулах (3.54) Z_1^0 на Z_{21}^0 и выполняя указанные в этих формулах действия, получим

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_{21}^0 &= \frac{1}{\cos D_2} (Z_{21}^0 \times r_T) = \frac{1}{\cos D_2} \begin{vmatrix} X_1^0 & Y_1^0 & Z_1^0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ X_T & Y_T & Z_T \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(p_{32}Z_T - p_{33}Y)X_1^0 + (p_{33}X_T - p_{31}Z_T)Y_1^0 + (p_{31}Y_T - p_{32}X_T)Z_1^0}{\cos D_2}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \vec{\eta}_{21}^0 &= \frac{1}{\cos D_2} [r_T \times (Z_{21}^0 \times r_T)] = \frac{1}{\cos D_2} [Z_{21}^0 - (r_T Z_{21}^0) r_T] = \\ &= \frac{(p_{31} - \sin D_2 X_T)X_1^0 + (p_{32} - \sin D_2 Y_T)Y_1^0 + (p_{33} - \sin D_2 Z_T)Z_1^0}{\cos D_2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sin D_2 &= (r_T Z_{21}^0) = X_T p_{31} + Y_T p_{32} + Z_T p_{33}, \\ \cos D_2 &= +\sqrt{1 - \sin^2 D_2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

От формул (3.58) нетрудно перейти к рабочим формулам для вычисления тангенциальных координат звезд в системе экватора эпохи t_2

$$\begin{aligned} \xi_{21} &= \frac{(r \vec{\xi}_{21}^0)}{(rr_T)} = \frac{r(Z_{21}^0 \times r_T)}{\cos \rho \cos D_2} = \frac{1}{\cos \rho \cos D_2} \begin{vmatrix} p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ X_T & Y_T & Z_T \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{p_{31}(Y_T Z - Y Z_T) + p_{32}(Z_T X - Z X_T) + p_{33}(X_T Y - X Y_T)}{\cos \rho \cos D_2}, \\ \eta_{21} &= \frac{(r \vec{\eta}_{21}^0)}{(rr_T)} = \frac{(r Z_{21}^0) - (r_T Z_{21}^0)(rr_T)}{(rr_T) \cos D_2} = \frac{Z_{21}^0(r \sec \rho - r_T)}{\cos D_2} = \\ &= \frac{p_{31}(X \sec \rho - X_T) + p_{32}(Y \sec \rho - Y_T) + p_{33}(Z \sec \rho - Z_T)}{\cos D_2}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где

$$\cos \rho = rr_T = XX_T + YY_T + ZZ_T, \quad (3.61)$$

а $\cos D_2$ определяется согласно (3.59).

Формулы (3.60) можно рассматривать как обобщенное определение тангенциальных координат, согласно которому можно вычислить тангенциальные координаты звезд, ориентированные в любой системе небесных координат, если заданы, во-первых, направление на полюс выбранной системы координат — единичный вектор r_p и, во-вторых, направление на центр (начало) тангенциальных координат — единичный вектор r_T .

Чтобы обосновать это определение, достаточно заменить в формулах (3.60) вектор Z_{21}^0 на вектор r_P :

$$r_P = p_1 X^0 + p_2 Y^0 + p_3 Z^0. \quad (3.62)$$

Здесь p_1, p_2, p_3 — составляющие единичного вектора r_P , которые должны быть заданы в той же системе координат, что и координаты векторов r_T и r .

В качестве примера воспользуемся формулами (3.60) для вывода формул тангенциальных координат в горизонтальной системе осей на момент наблюдений t_2 , отличных от эпохи экватора и равноденствия рабочего каталога звезд $t_1 = 1950.0$. Для решения этой задачи достаточно взять в качестве вектора r_P единичный вектор зенита места наблюдений

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \cos s \cos \varphi \\ \sin s \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

и перевести его в систему экваториальных координат эпохи t_1 (преобразование прецессии "назад" от t_2 к t_1):

$$r_P = Z_{21} = [P_{12}]^T Z_2. \quad (3.64)$$

В формулах (3.63), (3.64) для местного звездного времени и широты места наблюдений использованы обозначения s и φ соответственно. Матрица прецессии $[P_{12}]$ вычисляется для интервала эпох $t_2 - t_1$ согласно (3.52); (3.53).

3.3. Поворот тангенциальных координат вследствие прецессии. Теперь остановимся на прецессионном преобразовании тангенциальных координат. Это преобразование, как нетрудно видеть, сводится к изменению координат при повороте осей в своей плоскости. Действительно, с точки зрения астронома, измеряющего данную пластинку Π с фиксированным оптическим центром (на сфере Σ точка T совпадает с неподвижной звездой), явление прецессии выражается в изменении направления осей тангенциальных координат $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0$, поворачивающихся вслед за полюсом экваториальных координат так, чтобы изображения меридиана $\sphericalangle TZ_2$ и оси $\vec{\eta}^0$ совпали. Соответствующее этому повороту преобразование координат должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_{21} &= \xi_1 \cos \omega + \eta_1 \sin \omega, \\ \eta_{21} &= -\xi_1 \sin \omega + \eta_1 \cos \omega, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где ω — угол поворота ортов тангенциального триэдра $\vec{\xi}_1^0$ и $\vec{\eta}_1^0$ вокруг неподвижного орта $\vec{\xi}_1^0$ за время $t_2 - t_1$. Этот угол, очевидно, равен позиционному углу большого круга $\sphericalangle TZ_2$, взятому с обратным знаком (рис. 12). Чтобы определить ω , воспользуемся выражениями ортов $\vec{\xi}_1^0$ и $\vec{\xi}_{21}^0$ согласно (3.58), положив в первом случае Z_1^0 равным $[0, 0, 1]^T$, а во втором случае равным $[p_{31}, p_{32}, p_{33}]^T$ в соответствии с (3.57).

Тогда получим

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_1^0 \sin \omega &= \vec{\xi}_1^0 \times \vec{\xi}_{21}^0 = r_T \frac{p_{31} Y_T - p_{32} X_T}{\cos D_1 \cos D_2}, \\ \cos \omega &= \frac{\vec{\xi}_1^0 \vec{\xi}_{21}^0}{\cos D_1 \cos D_2} = \frac{p_{33} - Z_{T1} Z_{T2}}{\cos D_1 \cos D_2} = \frac{p_{33} - Z_{T1} (p_{31} X_T + p_{32} Y_T + p_{33} Z_T)}{\cos D_1 \cos D_2}, \\ \operatorname{tg} \omega &= \frac{p_{31} Y_T - p_{32} X_T}{p_{33} - Z_T (p_{31} X_T + p_{32} Y_T + p_{33} Z_T)}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Формулы (3.65), (3.66) решают задачу. Как видим, прецессионное преобразование тангенциальных координат зависит только от изменения положения полюса, т.е. от элементов третьей строки матрицы прецессии (3.53).

Если воспользоваться тригонометрическими выражениями элементов последней строки матрицы прецессии согласно (3.53), формулу (3.66) можно преобразовать к виду

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \theta \sin(A + \zeta_0)}{\cos \theta \cos D - \sin \theta \sin D \cos(A + \zeta_0)}. \quad (3.67)$$

Формула (3.67) представляет собой сферо-тригонометрический аналог формулы (3.66). Формулы (3.66), (3.67) — точные, позволяющие учесть прецессию в наблюдаемых позиционных углах светил с любым склонением и при любой разности эпох, причем если t_1 не совпадает с эпохой 1950.0, то θ вычисляется согласно (3.52) по формуле

$$\theta = \theta_{t_2 - 1950} - \theta_{t_1 - 1950}. \quad (3.68)$$

Однако в практике фотографической астрометрии обычно используют другую формулу, которую можно вывести из (3.67), если ограничиться первым порядком малой величины θ , а именно

$$\omega^\circ = 0,00557^\circ \sin \alpha \sec \delta (t_2 - t_1). \quad (3.69)$$

Здесь коэффициент $0,00557^\circ$ является годовым изменением угла θ , т.е. величиной n , которое предполагается неизменным, а $t_2 - t_1$ есть разность эпох, выражаемая в годах. Формулу (3.69) применяют при обработке рядов наблюдений двойных звезд, когда появляется необходимость все определения позиционного угла в паре привести к какой-либо одной — стандартной, системе осей, например, к системе экватора эпохи 2000.0. Искомый позиционный угол θ_{2000} в этом случае определяют по формуле

$$\theta_{2000} = \theta_t + \omega_{2000 - t}, \quad (3.70)$$

где θ_t — наблюдаемый позиционный угол, отнесенный к экватору эпохи t , ω_t — прецессионная поправка нуля-пункта отсчетов позиционных углов, вычисляемая согласно (3.69). Ввиду приближенного характера формулы (3.69) применение ее в случае высоких склонений и большой разности эпох недопустимо.

§ 4. Видимые тангенциальные координаты

Тангенциальные координаты, с которыми мы до сих пор имели дело, вычисляются на основе средних координат звезд, приведенных в каком-либо каталоге или списке (рабочем каталоге). Эти тангенциальные координаты звезд по аналогии со сферическими координатами мы можем назвать средними. В процессе астрометрической редукции фотографий средние тангенциальные координаты опорных звезд сопоставляются с измеренными координатами их изображений на реальной пластинке. Измеренные координаты звезд характеризуют их видимые относительные положения на небе в момент наблюдений, т.е. положения, искаженные влиянием дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации. Вследствие этих искажений переход от измеренных координат звезд к их средним тангенциальным координатам может быть выполнен лишь приближенно. Исследование этого вопроса затруднено ввиду присущей измеренным координатам неопределенности в смысле ориентировки, косоугольности и масштаба*). Поэтому для исследования соотношений между средними тангенциальными и измеренными координатами звезд целесообразно рассмотреть некоторую вспомогательную систему тангенциальных координат, которые сохраняли бы свойства измеренных как видимых (в смысле рефракции и аберрации) и не обладали бы присущим измеренным координатам произволом.

В соответствии с этой установкой рассмотрим *видимые тангенциальные координаты* звезд, которые определим как тангенциальные координаты, вычисленные по общим правилам на основе искаженных рефракцией и аберрацией сферических положений звезд и оптического центра. Согласно этому определению видимые и средние координаты одинаковых звезд характеризуют положения проекций этих звезд в различных плоскостях, соответствующих различным пластинкам сравнения Π и Π' с оптическими центрами T и T' . Взаимный наклон этих пластинок, измеряемый сферическим расстоянием $\sphericalangle TT'$, очевидно, равен полному смещению точки T , рассматриваемой как звезда, вследствие аберрации и рефракции. Пластинку тангенциальных координат Π' условимся называть видимой (или смещенной) пластинкой сравнения, а пластинку Π — несмещенной (или истинной) пластинкой сравнения. Соответственно средние тангенциальные координаты в тех случаях, когда они противостоят видимым тангенциальным координатам, мы будем называть истинными тангенциальными координатами, не вкладывая, однако, в этот термин абсолютного значения.

Видимые и средние, или истинные, тангенциальные координаты звезд так же, как и их сферические координаты, как видимые**), так и средние, условимся относить к сфере единичного радиуса с фиксированным, т.е.

*) В соответствии с установившейся практикой обычно принимают, что измеренные координаты звезд могут быть произвольно ориентированы, могут не быть точно ортогональными и могут иметь разные масштабы по осям x и y .

**) Здесь и далее, говоря о видимых координатах звезд, мы имеем в виду только их видимые положения, искаженные рефракцией и аберрацией. Эти координаты могут быть отнесены к любой фиксированной системе осей. Определенные таким образом видимые координаты звезд не соответствуют видимым местам звезд в смысле определения сферической астрономии.

не смещенным ни рефракцией, ни аберрацией положением осей, соответствующих экватору и равноденствию рабочего каталога. Такое представление удобно, так как оно позволяет точно определить геометрическую модель, на основе которой можно изучать аналитические связи всех перечисленных систем координат. Чтобы определить видимые тангенциальные координаты опорных звезд для какой-нибудь пластинки сравнения Π' , нужно в соответствии с определением сперва вычислить с учетом обстоятельств наблюдений*) теоретические видимые сферические координаты этих звезд и оптического центра, а затем, исходя из найденных сферических координат, вычислить тангенциальные координаты звезд по общим правилам. За основу этих вычислений нужно, как и прежде, принять средние места звезд согласно рабочему каталогу.

Другой путь решения этой задачи, более привычный для фотографической астрометрии, состоит в том, что видимые тангенциальные координаты звезд определяются по их средним тангенциальным координатам путем специального преобразования или посредством прибавления к средним тангенциальным координатам поправок, характеризующих дифференциальный эффект рефракции и аберрации. Эти поправки обычно выражаются рядами по степеням тангенциальных координат и сравнительно легко вычисляются с небольшим числом знаков.

Первый из указанных способов, являясь общим методом, теоретически может применяться при редукции любых астрофотографий без ограничения ширины поля и зенитного расстояния. Применение второго способа, т.е. применение способа поправок, ограничено областью сравнительно умеренных условий редукции — для ширины поля не более 5° , для зенитного расстояния не более 65° . Здесь мы рассмотрим оба пути определения видимых тангенциальных координат, причем главные формулы обоих способов выведем на основе векторной интерполяционной формулы большого круга, с помощью которой, как было показано в гл. 2, многие традиционные задачи сферической астрономии сводятся к вычислениям с прямоугольными координатами.

4.1. Полные формулы видимых тангенциальных координат. Формулы рефракционного и аберрационного преобразований в сочетании с векторными формулами тангенциальных координат позволяют непосредственно вычислить видимые тангенциальные координаты звезд, минуя промежуточные операции с преобразованием сферических координат звезд на видимые положения. Кроме того, эти формулы удобны в качестве исходных для вывода дифференциальных формул видимых тангенциальных координат.

Рассмотрим эти вопросы в общем виде. Воспользуемся следующими уже знакомыми нам обозначениями. Пусть r и r' — единичные векторы, соответствующие истинному и смещенному положениям какой-либо звезды S , r_A — единичный вектор апекса A смещения положений звезд на сфере Σ . В случае аберрации этот вектор определяет в заданной системе осей положение апекса движения Земли (2.26) или (2.31), в случае рефракции — положения зенита (2.16); r_T и r'_T — единичные векторы, определяющие на сфере Σ положения оптических центров истинной и смещен-

*) Дата, местное звездное время, широта места наблюдений, температура воздуха и атмосферное давление в момент наблюдений.

ной пластинок; ρ и ρ_A — сферические расстояния точек S и A от оптического центра T ; $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ — орты тангенциального триэдра пластинки сравнения Π ; $\vec{\xi}'^0, \vec{\eta}'^0, \vec{\zeta}'^0$ — орты тангенциального триэдра смещенной пластинки сравнения Π' ; ξ, η и ξ', η' — истинные и видимые тангенциальные координаты звезды.

Остановимся на прямом способе вычисления видимых тангенциальных координат с помощью векторных формул. Известными величинами в этой задаче можно считать векторы r, r_T, r_A и параметры k и k_T , определяющие смещения точек S и T на сфере Σ в направлении апекса A . Параметры k и k_T согласно условиям задачи вычисляются по косинусам сферических расстояний $\sphericalangle SA$ и $\sphericalangle TA$ (см., например, формулы (2.18) и (2.21)). Искомые координаты ξ', η' вычислим согласно определению по формулам (3.18), в которых векторы $r, \vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ заменим векторами $r', \vec{\xi}'^0, \vec{\eta}'^0, \vec{\zeta}'^0$. Таким образом, имеем

$$\xi' = \frac{(r' \vec{\xi}'^0)}{(r' \vec{\zeta}'^0)}, \quad \eta' = \frac{(r' \vec{\eta}'^0)}{(r' \vec{\zeta}'^0)}. \quad (3.71)$$

Здесь

$$r' = \frac{1}{m} (r + k r_A), \quad m = \sqrt{1 + k^2 + 2k(r r_A)}, \quad (3.72)$$

а также

$$r'_T = \frac{1}{m_T} (r_T + k_T r_A), \quad m_T = \sqrt{1 + k_T^2 + 2k_T(r_T r_A)}$$

и орты $\vec{\xi}'^0, \vec{\eta}'^0$ вычисляются по формулам (3.6) с учетом (3.72).

Воспользуемся результатом (3.71), (3.72) для вывода строгих формул преобразования, непосредственно связывающих истинные и видимые тангенциальные координаты. Исходными данными в этой задаче являются следующие скалярные и векторные величины: $\xi, \eta, \vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ и r_A ; кроме того, известными следует считать параметры k и k_T , которые могут быть вычислены по начальным данным. Определению подлежат ξ', η' .

Задачу решим, исходя из выражений векторов r, r_T и r_A в системе осей тангенциального триэдра пластинки Π :

$$\begin{aligned} r &= \cos \rho (\xi \vec{\xi}^0 + \eta \vec{\eta}^0 + 1 \vec{\zeta}^0), \\ r_A &= \cos \rho_A (\xi_A \vec{\xi}^0 + \eta_A \vec{\eta}^0 + 1 \cdot \vec{\zeta}^0), \\ r_T &= \vec{\zeta}^0, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\cos \rho = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}, \quad \cos \rho_A = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_A^2 + \eta_A^2}}. \quad (3.74)$$

Здесь ξ_A и η_A — тангенциальные координаты "изображения" апекса смещений звезд на пластинке Π . Эти координаты могут быть вычислены так

же, как и для звезд, по формулам

$$\xi_A = \frac{(r_A \vec{\xi}^0)}{(r_A \vec{\zeta}^0)} = (\operatorname{tg} \rho_A \sin \psi_A); \quad \eta_A = \frac{(r_A \vec{\eta}^0)}{(r_A \vec{\zeta}^0)} = (\operatorname{tg} \rho_A \cos \psi_A), \quad (3.75)$$

причем в скобках даны тригонометрические эквиваленты векторных выражений. Дальнейшие выкладки проведем, исходя из формул (3.71) и (3.72), в которых векторы r и r_A заменим их выражениями согласно (3.73). Таким образом, для координаты ξ' найдем

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{(r' \vec{\xi}'^0)}{(r' \vec{\zeta}'^0)} = \frac{(r + \kappa r_A) \vec{\xi}'^0}{(r + \kappa r_A) \vec{\zeta}'^0} = \\ &= \frac{\left[\left(\xi + \kappa \frac{\cos \rho_A}{\cos \rho} \xi_A \right) \vec{\xi}^0 + \left(\eta + \kappa \frac{\cos \rho_A}{\cos \rho} \eta_A \right) \vec{\eta}^0 + \left(1 + \kappa \frac{\cos \rho_A}{\cos \rho} \right) \vec{\zeta}^0 \right] \vec{\xi}'^0}{\left[\left(\xi + \kappa \frac{\cos \rho_A}{\cos \rho} \xi_A \right) \vec{\xi}^0 + \left(\eta + \kappa \frac{\cos \rho_A}{\cos \rho} \eta_A \right) \vec{\eta}^0 + \left(1 + \kappa \frac{\cos \rho_A}{\cos \rho} \right) \vec{\zeta}^0 \right] \vec{\zeta}'^0} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Аналогичное выражение найдем для координаты η' . Выражение (3.76) перепишем, используя обозначения a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) для девяти направляющих косинусов, определяющих взаимную ориентировку тангенциальных триэдров пластинок Π и Π' соответственно таблице

a_{ik}	$\vec{\xi}^0$	$\vec{\eta}^0$	$\vec{\zeta}^0$
$\vec{\xi}'^0$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\vec{\eta}'^0$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\vec{\zeta}'^0$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}) + \kappa \sec \rho \cos \rho_A (a_{11}\xi_A + a_{12}\eta_A + a_{13})}{(a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}) + \kappa \sec \rho \cos \rho_A (a_{31}\xi_A + a_{32}\eta_A + a_{33})}, \\ \eta' &= \frac{(a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}) + \kappa \sec \rho \cos \rho_A (a_{21}\xi_A + a_{22}\eta_A + a_{23})}{(a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}) + \kappa \sec \rho \cos \rho_A (a_{31}\xi_A + a_{32}\eta_A + a_{33})}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Формулы (3.78) являются искомыми строгими общими формулами, выражающими аналитическую связь между истинными и видимыми тангенциальными координатами. Чтобы воспользоваться этими формулами для вычисления видимых тангенциальных координат в рабочем порядке, необходимо знать численные значения девяти направляющих косинусов a_{ik} , кроме того, для каждой звезды с заданными тангенциальными координатами ξ, η необходимо вычислить $\sec \rho$ (формула 3.16) и параметр κ (одна из формул (2.18) или (2.21)). Что касается косинусов a_{ik} , то они вычисляются или в соответствии с таблицей (3.41) непосредственно путем перемножения ортов соответствующих тангенциальных триэдров (3.39), или в соответствии с таблицей (3.43), если учесть выражения

углов τ и $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ согласно (3.79), (3.80) (см. ниже). Вторым способом вычисления косинусов a_{ik} естественным путем ведет к выводу дифференциальных формул видимых тангенциальных координат.

4.2. Дифференциальные формулы видимых тангенциальных координат. Воспользуемся формулами преобразования (3.78) для вывода дифференциальных формул видимых тангенциальных координат. Необходимые выкладки выполним, ограничиваясь разложениями первого порядка относительно параметра k .

Начнем с определения явных выражений девяти косинусов преобразования. Сделаем следующие замечания:

1) для пластинок Π и Π' сферическое расстояние между их оптическими центрами T и T' определяется величиной

$$\tau = k_T \sin \rho_A, \quad (3.79)$$

2) изменение позиционного угла большого круга $\sphericalangle TA$ при переходе от T к T' определяется величиной

$$\Delta\psi = \psi' - \psi = \tau \operatorname{tg} D \sin \psi, \quad (3.80)$$

3) величины $\tau \sin \psi$ и $\tau \cos \psi$, являющиеся тангенциальными координатами проекции центра T' на пластинке Π , выражаются через тангенциальные координаты апекса смещения ξ_A и η_A следующим образом:

$$\tau \sin \psi = k_T \xi_A \cos \rho_A, \quad (3.81)$$

$$\tau \cos \psi = k_T \eta_A \cos \rho_A.$$

Теперь, рассматривая пластинки Π и Π' как близкие, слабо наклоненные друг к другу, можем применить к ним результат (3.44) и вычислить девять косинусов преобразования. Учитывая только что сделанные замечания, соответствующую таблицу косинусов перепишем в виде

a_{ik}	$\vec{\xi}^0$	$\vec{\eta}^0$	$\vec{\xi}^0$
$\vec{\xi}'^0$	1	$k_T \xi_A \cos \rho_A \operatorname{tg} D$	$-k_T \xi_A \cos \rho_A$
$\vec{\eta}'^0$	$-k_T \xi_A \cos \rho_A \operatorname{tg} D$	1	$-k_T \eta_A \cos \rho_A$
$\vec{\xi}^0$	$k_T \xi_A \cos \rho_A$	$k_T \eta_A \cos \rho_A$	1

(3.82)

Данные этой таблицы используем для упрощения выражений (3.78). Отбрасывая в них слагаемые, имеющие множителем k^2 , получим следующий промежуточный результат:

$$\xi' = \frac{\xi + a_{12}\eta + a_{13} + k \sec \rho \cos \rho_A \xi_A}{a_{31}\xi + a_{32}\eta + 1 + k \sec \rho \cos \rho_A}, \quad (3.83)$$

$$\eta' = \frac{a_{21}\xi + \eta + a_{23} + k \sec \rho \cos \rho_A \eta_A}{a_{31}\xi + a_{32}\eta + 1 + k \sec \rho \cos \rho_A}.$$

Сохраняя принятую точность, формулы (3.83) преобразуем, разлагая знаменатель в ряд и заменяя косинусы их явными выражениями соглас-

но (3.82). В результате найдем

$$\xi' - \xi = \kappa_T \cos \rho_A \left\{ \xi_A \operatorname{tg} D \cdot \eta + \left[\frac{\kappa}{\kappa_T} \sec \rho (\xi_A - \xi) - \xi_A \right] - \right. \\ \left. - \xi_A \xi^2 - \eta_A \xi \eta \right\}, \quad (3.84)$$

$$\eta' - \eta = \kappa_T \cos \rho_A \left\{ -\xi_A \operatorname{tg} D \cdot \xi + \left[\frac{\kappa}{\kappa_T} \sec \rho (\eta_A - \eta) - \eta_A \right] - \right. \\ \left. - \xi_A \xi \eta - \eta_A \eta^2 \right\}.$$

Формулы (3.84) являются искомыми дифференциальными формулами общего вида. По поводу структуры этих формул сделаем следующие замечания.

З а м е ч а н и е 1. Если исключить из правых частей формул (3.84) члены, выделенные квадратными скобками, то оставшиеся сокращенные выражения совпадут с формулами преобразования тангенциальных координат близких пластинок (3.44), если в последних параметры p и q заменить выражениями (3.81) и отбросить постоянные, характеризующие параллельный перенос. Таким образом линейные члены формул (3.84) компенсируют поворот осей тангенциальных координат, а квадратичные члены — наклон плоскостей пластинок Π и Π' .

З а м е ч а н и е 2. Дифференциальный эффект смещения положений звезд на небесной сфере по закону типа (3.72) выражается в формулах (3.84) исключительно их "ядрами", т.е. членами, которые выделены квадратными скобками. Эти ядра хотя и несколько упрощенно характеризуют интересующий нас дифференциальный эффект, правильно выражая главный член этого эффекта, зависящий только от различия $\kappa \sec \rho$ и κ_T для каждой выбранной звезды в поле пластинки сравнения. Указанное свойство позволяет с успехом применить общие формулы (3.84) для вывода рабочих формул учета дифференциальной рефракции и дифференциальной абберации посредством разложения отношения $\kappa \sec \rho / \kappa_T$ в ряд по степеням ξ и η .

В соответствии со сделанными замечаниями выведем из формул (3.84) удобные выражения поправок тангенциальных координат, зависящих от абберации и рефракции.

Рассмотрим случай абберации. Согласно определению (2.21), сохраняя точность формулы (3.84), можем в этом случае положить

$$\kappa = \kappa_T = k, \quad (3.85)$$

$$\frac{\kappa \sec \rho}{\kappa_T} = \sec \rho = 1 + \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2).$$

Тангенциальные координаты апекса на пластинке сравнения обозначим

a_1 и a_2 . В соответствии с формулой (3.75) имеем:

$$a_1 = \xi_A = \frac{(r_A \vec{\xi}^0)}{(r_A \vec{\zeta}^0)} = (\operatorname{tg} \rho_A \sin \psi_A),$$

$$a_2 = \eta_A = \frac{(r_A \vec{\eta}^0)}{(r_A \vec{\zeta}^0)} = (\operatorname{tg} \rho_A \cos \psi_A).$$
(3.86)

Учитывая (3.85) и (3.86), выражения ядер для каждой из формул (3.84) преобразуем к виду

$$k \cos \rho_A \left[\frac{\kappa}{\kappa_T} \sec \rho (a_1 - \xi) - a_1 \right] = \frac{k \left[\frac{1}{2} a_1 (\xi^2 + \eta^2) - \xi \right]}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2}},$$

$$k \cos \rho_A \left[\frac{\kappa}{\kappa_T} \sec \rho (a_2 - \eta) - a_2 \right] = \frac{k \left[\frac{1}{2} a_2 (\xi^2 + \eta^2) - \eta \right]}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2}}.$$
(3.87)

Подставляя эти выражения в формулу (3.84), получим искомые формулы учета дифференциальной аберрации:

$$\xi' - \xi = k \cos \rho_A \left[-\xi + a_1 \operatorname{tg} D \eta - \frac{a_1}{2} (\xi^2 - \eta^2) - a_2 \xi \eta \right],$$

$$\eta' - \eta = k \cos \rho_A \left[-a_1 \operatorname{tg} D \xi - \eta + \frac{a_2}{2} (\xi^2 - \eta^2) - a_1 \xi \eta \right].$$
(3.88)

Здесь $\cos \rho_A = r_A r_T = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2}}$.

Рассмотрим теперь случай рефракции. Координаты зенита на пластинке сравнения в этой задаче обозначим k_1 и k_2 согласно установившейся традиции. Таким образом, имеем

$$k_1 = \xi_A = \frac{(Z \vec{\xi}^0)}{(Z \vec{\zeta}^0)} = (\operatorname{tg} \zeta_T \sin \chi_T),$$

$$k_2 = \eta_A = \frac{(Z \vec{\eta}^0)}{(Z \vec{\zeta}^0)} = (\operatorname{tg} \zeta_T \cos \chi_T).$$
(3.89)

Параметры κ_T , κ , $\kappa_T \cos \rho_A$ в рассматриваемом случае определим согласно (2.18) следующим образом:

$$\kappa_T = \beta \sec \zeta_T = \beta \sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2},$$

$$\kappa = \beta \sec \zeta = \beta \frac{1}{(rZ)} = \beta \frac{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2}}{1 + k_1 \xi + k_2 \eta},$$

$$\kappa_T \cos \rho_A = \kappa_T \cos \zeta_T = \beta.$$
(3.90)

Учитывая (3.90), найдем следующее выражение для отношения:

$$\frac{\kappa \sec \rho}{\kappa_T} = \frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + k_1 \xi + k_2 \eta} =$$

$$= 1 - k_1 \xi - k_2 \eta + (1 + k_1^2) \xi^2 + (1 + k_2^2) \eta^2 + 2k_1 k_2 \xi \eta. \quad (3.91)$$

Выпишем также соответствующие выражения для ядер формул (3.84):

$$\kappa_T \cos \rho_T \left[\frac{\kappa}{\kappa_T} \sec \rho (k_1 - \xi) - k_1 \right] =$$

$$= \beta [-(1 + k_1^2) \xi - k_1 k_2 \eta + k_1 (2 + k_1^2) \xi^2 + k_1 (1 + k_2^2) \eta^2 + k_2 (1 + 2k_1^2) \xi \eta],$$

$$(3.92)$$

$$\kappa_T \cos \rho_T \left[\frac{\kappa}{\kappa_T} \sec \rho (k_2 - \eta) - k_2 \right] =$$

$$= \beta [-k_1 k_2 \xi - (1 + k_2^2) \eta + k_2 (2 + k_2^2) \eta^2 + k_2 (1 + k_1^2) \xi^2 + k_1 (1 + 2k_2^2) \xi \eta].$$

Искомые дифференциальные формулы получим из (3.84), (3.91), (3.92) после формального объединения одинаковых степеней координат ξ , η :

$$\xi' - \xi = \beta \{ -(1 + k_1^2) \xi - (k_2 - \operatorname{tg} D) k_1 \eta +$$

$$+ k_1 [(1 + k_1^2) \xi^2 + 2k_1 k_2 \xi \eta + (1 + k_2^2) \eta^2] \},$$

$$\eta' - \eta = \beta \{ -(k_2 + \operatorname{tg} D) k_1 \xi - (1 + k_2^2) \eta +$$

$$+ k_2 [(1 + k_1^2) \xi^2 + 2k_1 k_2 \xi \eta + (1 + k_2^2) \eta^2] \}. \quad (3.93)$$

Формулы (3.93), так же как и формулы (3.88), совпадают с известными классическими формулами учета дифференциальной рефракции (Бугославская, 1947; Дейч, 1951; Кёниг, 1933), однако здесь изложен принципиально иной вывод, обоснованный векторными интерполяционными формулами и векторными формулами тангенциальных координат. Благодаря новому подходу мы смогли получить не только приближенный результат, но и точные формулы преобразования (3.78), а также ряд полезных промежуточных результатов (например, формулы (3.84)), имеющих методическое значение.

* * *

Тангенциальные координаты в настоящее время остаются основным инструментом астрометрической редукции фотографических позиционных наблюдений небесных объектов, т.е. наблюдений, которые производятся для определения их координат. В этой главе мы рассмотрели тангенциальные координаты в связи с понятием так называемой пластинки сравнения (пластинки П), которая введена как посредник между измеренными координатами рабочей пластинки (пластинки Р) и сферическими (астрономическими) координатами. Основное содержание главы посвящено созданию вычислительного аппарата в связи с операциями над тангенциальными координатами и применениям этого математического аппарата для решений традиционных и новых задач фотографической астрометрии. Разработанный нами аппарат использует новые понятия вектор-

ной алгебры и параметрическую векторную формулу большого круга, рассмотренную нами в гл. 2.

Много внимания в настоящей главе уделено обобщению задачи об определении тангенциальных координат и об их преобразованиях при переходе к другому началу или другому полюсу базисного триэдра.

Традиционные задачи в этой главе решены на основе простых векторных формул, в которых главную роль играет матрица ортов тангенциального триэдра осей $[t_{ik}]$. Среди новых задач, решенных в этой главе, отметим следующие: во-первых, задачу об определении тангенциальных координат звезд в системе экватора и равноденствия произвольной эпохи, во-вторых, задачу о прецессионном повороте тангенциальных координат в общем виде. Главный итог изложенного выше, как мы полагаем, состоит в определении понятия видимых тангенциальных координат и создании математического аппарата для астрометрической редукции фотографических наблюдений. Введение видимых тангенциальных координат существенно расширяет возможности применения всех методов редукции — особенно линейных, так как предохраняет от накопления систематических ошибок, связанных с дифференциальными эффектами рефракции и аберрации. Выведенные здесь полные формулы видимых тангенциальных координат общего вида позволяют, как следствие, получить известные дифференциальные формулы второго порядка рефракции и аберрации. Традиционный вывод этих формул в учебной литературе производится с помощью громоздких, на наш взгляд, тригонометрических выкладок.

АСТРОФОТОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Основные понятия фотографической астрометрии в связи с задачей определения координат небесных объектов

Исторически задача определения положений небесных объектов явилась первой астрометрической задачей, успешно решенной методами астрофотографии. С решения этой задачи Бондом (1857 г.) и Резерфордом (1864 г.) собственно и началась фотографическая астрометрия как самостоятельная область астрометрии. Позднее (после 1887 г.) большой опыт в области астрометрической редукации фотографий астрономами всего мира был накоплен в процессе создания каталога "Карта неба", причем были всесторонне изучены так называемые линейные методы редукации (методы четырех и шести постоянных). Еще позднее (после 1920 г.) в связи с вводом в строй ряда широкоугольных астрографов, в частности зонных астрографов Цейсса, стали применять более сложные методы редукации, учитывающие особенности широкоугольных фотографий (Барней и др., 1959; Шорр, 1951). Эти методы и связанные с ними приемы улучшения измеренных координат детально рассмотрены в статье А. Кёнига (Кёниг, 1933), которая до сих пор является наиболее полным учебным руководством по методам астрометрической редукации на немецком языке. Главное внимание в этой статье уделено вопросам учета дифференциальной рефракции и абберации, а также наклонности пластинки (погрешности принятого положения оптического центра). Эти задачи решаются посредством внесения в измеренные координаты объектов на пластинке специальных поправок типа тех, которые были вычислены нами в гл. 3 (см. формулы (3.50), (3.88), (3.93)).

Обращаясь в этом исследовании к проблеме определения положений небесных объектов на основе астрофотографии, мы ставим себе цель дать краткое, обобщенное изложение основных классических методов решения этой проблемы, делая основной упор на условия их применения и на оценках точности решения. Вопросы учета дифференциальной рефракции и абберации в нашем исследовании решаются посредством применения видимых (в нашем понимании) тангенциальных координат. Все преобразования, связанные с использованием данных сферической астрономии для обработки измерений астрофотографий, производятся на основе точных замкнутых векторных формул с применением прямоугольных координат. Оригинальными являются интерполяционный метод, обобщающий схему метода Шлезингера (Киселев, 1959; Киселев, 1965 (1)), метод гомографи-

ческих координат, использующий проективные инварианты для сравнения положений звезд на небесной сфере и их изображений на плоскости фотографической пластинки (Киселев, 1965 (2)), а также геометрический метод, представляющий геометрическую основу для исследования проекции (калибровки) широкоугольных камер (Киселев, 1970; Киселев и др., 1976).

Для обработки измерений пары перекрывающихся пластинок: P_1 — с малым полем и P_2 — широкоугольной, разработан метод астрометрической редукции с двумя системами опорных звезд (Бронникова и Киселев, 1973), позволяющий определить сферические координаты объекта на пластинке P_1 в системе опорных звезд пластинки P_2 . Метод применяет новую операцию: преобразование депенденсов при переходе к новой системе опорных звезд. Кроме того, в связи с изложением линейных методов, показывается, как метод депенденсов Шлезингера может быть использован для оценивания систематических ошибок редукции любой природы и для их учета. Другое применение депенденсов рассматривается в гл. 5 в связи с вычислением среднеквадратической ошибки редукции в общем случае.

Пусть для какой-нибудь области неба получена астрофотография — пластинка P , на которой наряду с изображениями объектов S_k ($k = 1, 2, \dots, k_0$) имеются также изображения звезд S_j ($j = 1, 2, \dots, n$), координаты которых α_j, δ_j на момент наблюдений известны. Требуется определить координаты α_k, δ_k объектов S_k .

В связи с этой задачей определим или уточним некоторые основные понятия фотографической астрометрии.

1.1. Опорные звезды. Назовем опорными звездами совокупность звезд, сферические координаты которых на момент наблюдений известны, а изображения их на пластинке P можно надежно измерить. Опорные звезды выбирают либо по всему рабочему полю пластинки, либо только вблизи объектов S_k . Сферические координаты опорных звезд — обычно это экваториальные координаты — α_j, δ_j — вычисляются на основе данных какого-либо каталога \mathcal{K} , где приводятся средние экваториальные координаты звезд в фиксированной системе осей (например, для экватора и равноденствия 1950.0 или 2000.0), эпоха наблюдений для каждой звезды t_0 и составляющие ее собственного движения μ_α и μ_δ . Ошибку координат опорной звезды на момент наблюдений пластинки P (эпоха t) можно оценить по следующей формуле

$$\epsilon_t^2 = \epsilon_{\alpha, \delta}^2 + \epsilon_\mu^2 (t - t_0)^2. \quad (4.1)$$

Здесь $\epsilon_{\alpha, \delta}$ и ϵ_μ — ошибки положения и годового собственного движения звезд в эпоху t_0 по какой-нибудь из координат α или δ согласно данным каталога, $t - t_0$ — разность эпох, выраженная в годах.

В настоящее время в фотографической астрометрии для определения положений звездных объектов, больших планет и их спутников, комет а также искусственных спутников Земли чаще всего применяют сводный каталог Смитсоновской астрофизической обсерватории (SAO) (Уиппл и др., 1966), содержащий положения и собственные движения около 300 000 звезд до 10-й звездной величины по всему небу, или каталог Бергедорфской обсерватории AGK3 (Дикфосс, 1975), содержащий данные для 180 000 звезд до 10-й величины, расположенных в северном небе ($\delta \geq -2^\circ$).

Каталог SAO, составленный на основе многих различных по возрасту и разнородных в систематическом отношении каталогов (главным образом, Йельских зонных каталогов), формально приведенных к фундаментальной системе FK4, позволяет вычислить положения звезд на современную эпоху (1980 г.) со средней ошибкой от $\pm 0,5''$ до $\pm 1,5''$. Более поздний и однородный каталог AGK3 обеспечивает положения звезд на современную эпоху со средней ошибкой порядка $\pm 0,3'' - 0,5''$ в системе FK4. Каталог *Ж*, используемый для астрометрической редукции серии пластинок, обычно называют рабочим каталогом. Выведенные фотографические положения объектов в результате обработки серии пластинок формально должны сохранять систему рабочего каталога, однако ошибки фотографического метода, взаимодействующие с данным конкретным телескопом, могут исказить эту систему (Подобед и др., 1975).

1.2. Измеренные координаты. Измеренными координатами звезд в фотографической астрометрии называют плоские прямоугольные или почти прямоугольные координаты, которые приписывают изображениям звезд на пластинке в результате измерений с помощью какой-нибудь визуальной или автоматической координатно-измерительной машины. Предполагается, что измеренные координаты звезд соответствуют геометрическим положениям точек фотографической проекции этих звезд в картинной плоскости данного телескопа. Это предположение есть **главное условие измерений**, на котором основываются все методы астрометрической редукции фотографических наблюдений.

Современные телескопы (астрографы и рефлекторы), как правило, строят четкие круглые изображения звезд диаметром 20–50 мкм в центре пластинки и на некотором известном расстоянии от центра, т.е. в области так называемого рабочего поля. В этой части пластинки главное условие измерений одинаково выполняется как при фотоэлектрических — автоматических методах наведения, так и при визуальных, поскольку центр симметрии изображений звезд, их фотометрический центр и положение их фотографической проекции практически совпадают. Нарушение главного условия измерений для какой-нибудь специальной группы звезд (например, отличающихся по блеску или цвету) вследствие аберраций телескопа, или неточного гидирования, или атмосферной дисперсии, или других причин неизбежно ведет к систематическим ошибкам типа уравнений блеска и цвета. Эти систематические ошибки составляют предмет специальных исследований, позволяющих выявить предел точности в астрометрическом отношении, который практически достижим на каждом данном телескопе.

По поводу измеренных координат обычно предполагают, что они удовлетворяют следующим условиям:

- 1) оси измеренных координат прямолинейны;
- 2) координатный угол ω между осями может произвольно, но незначительно отличаться от 90° ;
- 3) деления шкал измеренных координат равномерны, но цены делений шкал x и y могут быть различными;
- 4) устройство отсчета измеряемых координат допускает выполнение измерений с формальной погрешностью $\pm 0,1-0,3$ мкм.

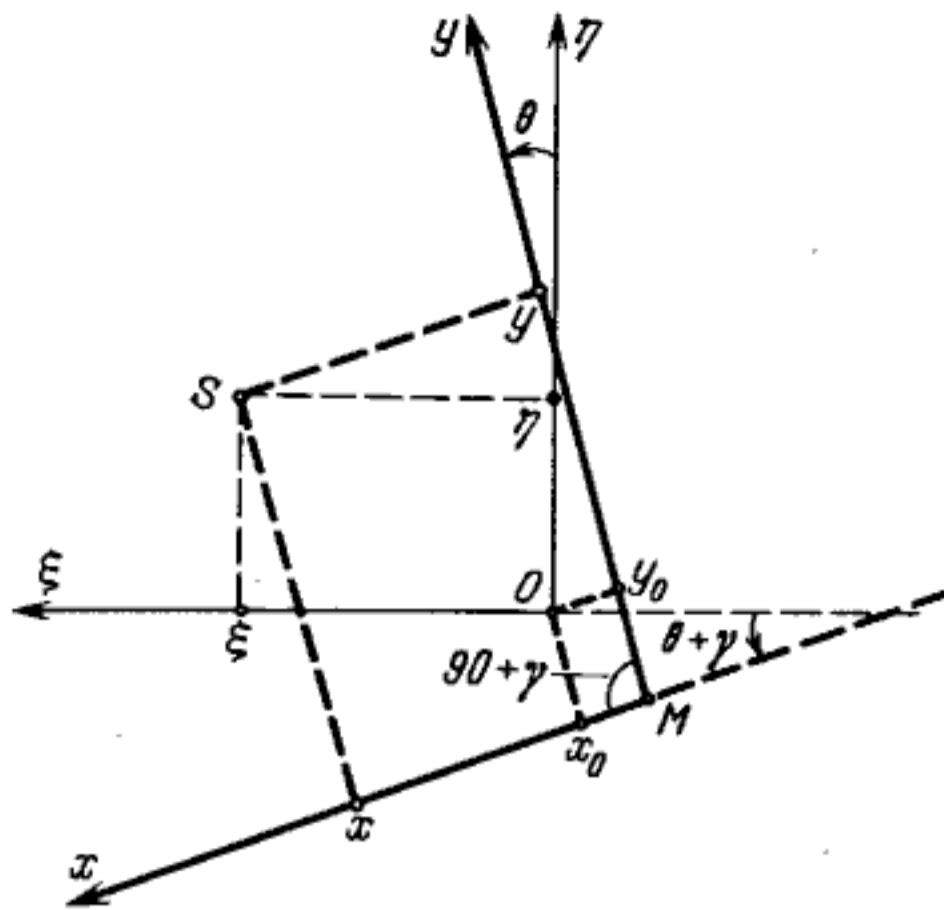


Рис. 13. Связь измеренных и стандартных координат:

Mxy — инструментальная система измеренных координат; $O\xi\eta$ — стандартная ортогональная система координат; $90^\circ + \gamma$ — координатный угол системы Mxy

Современные измерительные машины, как визуальные, так и автоматические, как правило, удовлетворяют этим требованиям. Небольшие нарушения их (чаще всего в п. 1 и п. 3) легко устраняются путем внесения в отсчеты x и y специальных поправок, редко превышающих 1 мкм. Чтобы установить эти поправки, необходимы тщательные специальные исследования, которые обычно выполняются заводом-изготовителем и, кроме того, дублируются астрономом непосредственно в лаборатории, предназначенной для измерения пластинок. В ходе таких исследований обычно определяют также величину небольшого угла γ , характеризующего отклонение от ортогональности осей измерительного прибора. Таким образом, с помощью современных координатно-измерительных машин можно определить относительные положения изображений звезд в плоскости фотографии в некоторой косоугольной системе координат с формальной погрешностью $\approx \pm (0,1-0,5)$ мкм.

1.3. Стандартные координаты. Инструментальные измеренные координаты x, y можно трансформировать путем линейного (аффинного) преобразования в систему стандартных ортогональных координат ξ_S, η_S , определенным образом ориентированных с началом в заданной точке фотографии $O(x_0, y_0)$ и с заданным масштабом M_0 (рис. 13). Соответствующие формулы преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_S &= M_x (x - x_0) \cos(\theta + \gamma) + M_y (y - y_0) \sin \theta, \\ \eta_S &= -M_x (x - x_0) \sin(\theta + \gamma) + M_y (y - y_0) \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь M_x и M_y — отношения инструментальных масштабов по осям x и y к масштабу стандартных координат M_0 ; x_0, y_0 — измеренные (инструментальные) координаты точки O , принятой за начало стандартных координат; θ — позиционный угол оси y относительно направления оси $O\eta_S$, отсчитываемый по направлению к оси $O\xi$; $90^\circ + \gamma$ — координатный угол инструментальной системы измеренных координат.

Приведем также обратное преобразование, позволяющее перейти от стандартных координат к измеренным в инструментальной системе:

$$x - x_0 = \frac{1}{M_x \cos \gamma} [\xi_S \cos \theta - \eta_S \sin \theta],$$

$$y - y_0 = \frac{1}{M_y \cos \gamma} [\xi_S \sin(\theta + \gamma) + \eta_S \cos(\theta + \gamma)].$$
(4.3)

Если за начало системы стандартных координат принять оптический центр фотографии, т.е. совместить точку O с изображением звезды, спроектированной в оптическом центре T астрофотографии, и направить ось $T\eta_S$ вдоль меридиана к северу, то такую систему стандартных координат в соответствии с определением (гл. 3, § 1) называют экваториальными тангенциальными координатами. Переход от инструментальных к тангенциальным координатам, определяемый формулами (4.2), в общем случае записывается в виде формул с шестью постоянными $c_1, a_1, b_1; c_2, a_2, b_2$:

$$\xi_S = c_1 + a_1 x + b_1 y,$$

$$\eta_S = c_2 + a_2 x + b_2 y.$$
(4.4)

Эти постоянные называются постоянными пластинки и имеют следующие значения:

$$c_1 = -M_x x_0 \cos(\theta + \gamma) - M_y y_0 \sin \theta,$$

$$a_1 = M_x \cos(\theta + \gamma),$$

$$b_1 = M_y \sin \theta,$$

$$c_2 = M_x x_0 \sin(\theta + \gamma) - M_y y_0 \cos \theta,$$

$$a_2 = -M_x \sin(\theta + \gamma),$$

$$b_2 = M_y \cos \theta,$$
(4.5)

причем точку на пластинке P с координатами x_0, y_0 следует считать совпадающей с оптическим центром T этой пластинки.

Определенные формулами (4.4) и (4.5) стандартные координаты звезд ξ_S, η_S естественно сопоставить с видимыми тангенциальными координатами этих звезд ξ', η' , которые можно вычислить для данной пластинки по сферическим координатам звезд согласно алгоритму определения видимых тангенциальных координат, приведенному в гл. 3, § 4. Несовпадение координат ξ_S, η_S и ξ', η' может зависеть как от причин случайного характера (например, погрешности каталожных положений звезд на эпоху наблюдений, погрешности измеренных координат звезд, рефракционные аномалии во время экспозиций), так и от причин систематического характера (например, погрешность принятого положения оптического центра рабочей пластинки, отличие фотографической проекции данного телескопа от центральной, несоответствие реальной рефракции и модели рефракции, использованной при вычислении видимых тангенциальных координат).

Однако, как показывает опыт, если воспользоваться хорошим неширокоугольным телескопом, преобладающее влияние в этих условиях имеют лишь вышеуказанные случайные ошибки, поэтому, заменив в уравнениях (4.4) ξ_S, η_S на ξ', η' , мы можем рассматривать эти уравнения как услов-

ные для определения постоянных пластинки и связанных с нею параметров измеренных координат. Соответствующие формулы (обратные по отношению к формулам (4.5)) имеют следующий вид:

$$M_x = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad M_y = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad (4.6)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b_1}{b_2}, \quad \operatorname{tg}(\theta + \gamma) = -\frac{a_2}{a_1}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (4.7)$$

$$x_0 = x_T = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y_0 = y_T = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (4.8)$$

причем размерности масштабов M_x и M_y имеют смысл

$$[M_x] = \frac{1''}{(\text{мм})_x}, \quad [M_y] = \frac{1''}{(\text{мм})_y}, \quad (4.9)$$

где $(\text{мм})_x$ и $(\text{мм})_y$ суть реальные длины миллиметровых интервалов на шкалах x и y измерительной машины; тангенциальные координаты звезд ξ, η мы предполагаем выраженными в секундах дуги.

З а м е ч а н и е. Формулы (4.4), (4.6) в принципе могли бы служить для калибровки измеренных координат, однако на практике такой способ калибровки не применяется ввиду малой точности видимых тангенциальных координат. Задачу калибровки измеренных инструментальных координат, т.е. определения параметров M_x, M_y и γ решают подходящими лабораторными методами (см., например, (Поттер и др., 1957)), обеспечивающими результат, почти на порядок более точный.

§ 2. Общая постановка задачи об определении сферических координат небесных объектов методами астрофотографии

Вернемся к задаче, сформулированной в начале этой главы: требуется определить сферические координаты небесных объектов S_k ($k = 1, 2, \dots, k_0$), изображения которых вместе со звездами фона получены на некоторой астрофотографии — рабочей пластинке P ; наблюдения выполнены в известном астропункте, эпоха наблюдений t , местное звездное время наблюдений s .

Эта задача, очевидно, может быть решена только с помощью опорных звезд, поэтому сделаем следующие предположения. Пусть среди звезд фона удалось отождествить с каталогом \mathcal{K} опорные звезды S_j ($j = 1, 2, \dots, n$), экваториальные координаты которых на момент наблюдений будем считать известными. Допустим также, что вблизи оптического центра T пластинки P имеется изображение звезд S_T с экваториальными координатами A и D . Традиционное решение состоит в следующем.

Данную пластинку P измеряем с помощью какой-нибудь координатно-измерительной машины. В результате определим измеренные координаты $\{x, y\}$ всех объектов и опорных звезд в некоторой произвольной инструментальной системе. Рассмотрим наряду с данной рабочей пластинкой P некоторую фиктивную пластинку сравнения Π с оптическим центром в направлении A и D , положения звезд на которой зададим с помощью танген-

циальных координат ξ и η . Для опорных звезд эти координаты вычислим по их сферическим экваториальным координатам α_j, δ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) согласно данным каталога \mathcal{K} . Поставим себе цель: установить с помощью опорных звезд точное однозначное соответствие между точками x, y измеренной пластинки P и точками ξ, η пластинки сравнения Π . Это соответствие естественно искать в форме преобразования координат, которое в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi &= g_1(x, y, a_1, b_1, c_1, \dots, p_1), \\ \eta &= g_2(x, y, a_2, b_2, c_2, \dots, p_2).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Пусть конкретный вид функций g_1 и g_2 нам известен, причем обе функции линейны относительно своих параметров. Тогда, подставляя известные координаты опорных звезд x, y на пластинке P и ξ, η на пластинке Π в уравнения (4.10) и рассматривая эти уравнения как условные для определения параметров a_1, b_1, c_1, \dots , и a_2, b_2, c_2, \dots , найдем перечисленные параметры по способу наименьших квадратов. При этом нам придется решить две системы из n условных уравнений с p неизвестными (n — число опорных звезд, p — число неизвестных параметров) или одну систему из $2n$ уравнений с $p^* < 2p$ неизвестными, если среди параметров, от которых зависят функции g_1 и g_2 , есть общие. Определив таким образом параметры преобразования (4.10), остается пересчитать координаты объектов от пластинки P на пластинку сравнения Π , т.е. вычислить тангенциальные координаты объектов ξ_k, η_k и от пластинки Π перейти к небесной сфере, т.е. вычислить экваториальные координаты объектов по их известным тангенциальным координатам при заданном оптическом центре. Таково вкратце традиционное строгое решение задачи об определении сферических координат небесных объектов в фотографической астрометрии.

Ответственным моментом намеченного решения является выбор конкретного вида формул преобразования (4.10), или, как принято говорить, выбор модели редукции. Этот выбор делается астрономом на основе многолетнего опыта работы с конкретным телескопом. При этом астроном исходит из цели поставленной наблюдательной задачи и учитывает условия наблюдений и условия редукции. Под условиями наблюдений мы понимаем обстоятельства наблюдений, которые астроном не может изменить в процессе редукции: область неба, зенитное расстояние и часовой угол наблюдений, тип телескопа, его оптическую систему, абберации, тип эмульсии фотографических пластинок, длину экспозиции и качество изображений. Под условиями редукции мы понимаем наличие и надежность данных калибровки астрографа, т.е. данных о положении оптического центра и величине дисторсии, количество опорных звезд и точность их положений на эпоху наблюдений, а также ожидаемую точность измеренных координат опорных звезд и объектов при использовании известной техники измерений.

При построении моделей функции g_1 и g_2 в фотографической астрометрии обычно исходят из возможности представления этих преобразований в виде суммы двух выражений, из которых первое представляет собой линейное преобразование типа (4.4), а именно

$$\begin{aligned}\xi' &= L_1(x, y) = c'_1 + a'_1 x + b'_1 y, \\ \eta' &= L_2(x, y) = c'_2 + a'_2 x + b'_2 y,\end{aligned}\tag{4.11}$$

с помощью которого можно вычислить тангенциальные координаты ξ' , η' опорных звезд, мало отличающиеся от заданных ξ , η , а второе выражение — компенсирующий многочлен степени не выше третьей, который можно рассматривать как разложение в ряд Тейлора разностей координат $\xi - \xi'$ и $\eta - \eta'$ по степеням x и y , отсчитанным от некоторой точки вблизи оптического центра астрофотографии. Компенсирующий многочлен по замыслу должен учитывать все нелинейные эффекты преобразования координат от пластинки P к пластинке Π , зависящие от условий наблюдений и условий редукции.

Таким образом, в общем случае в качестве моделей преобразований g_1 и g_2 принимают степенные ряды вида

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + a_1x + b_1y + d_1x^2 + e_1xy + f_1y^2 + k_1x^3 + l_1x^2y + \\ &+ m_1xy^2 + n_1y^3 = L_1(x, y) + Q_1(x, y) + D_1(x, y), \\ \eta &= c_2 + a_2x + b_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2 + k_2x^3 + l_2x^2y + \\ &+ m_2xy^2 + n_2y^3 = L_2(x, y) + Q_2(x, y) + D_2(x, y), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где приняты условные обозначения L , Q и D соответственно для линейных, квадратичных и кубических членов разложения. В дальнейшем эти обозначения будут использоваться для сокращенного описания вида какой-то конкретной модели. Например, запись

$$M = (3L + 2Q + 1D) \times 2 \quad (4.13)$$

следует понимать в том смысле, что рассматривается модель редукции с тремя линейными членами, двумя квадратичными и одним кубическим членом, различными для ξ и η . Такой модели соответствуют две системы из n условных уравнений с шестью неизвестными, решаемые порознь для ξ и η . Если имеет место обозначение

$$M = 3L \times 2 + 2Q, \quad (4.14)$$

то рассматривается модель с восемью постоянными, в которой коэффициенты при квадратичных членах являются общими в разложениях для ξ и η . Такой модели соответствует система из $2n$ условных уравнений с восемью неизвестными; все параметры определяются из общего для ξ и η решения.

Для дальнейшего разложения существенно, что все коэффициенты при нелинейных членах разложений (4.12) малы по сравнению с координатами, а коэффициенты при линейных членах приближенно сохраняют свой геометрический смысл, указанный в (4.5), так что, например, если тангенциальные координаты ξ и η заменить на $f_0\xi$ и $f_0\eta$, где f_0 — приближенное фокусное расстояние астрографа, и если измеренные координаты ориентированы по экватору рабочего каталога, то a_1 и b_2 приближенно равны единице, а a_2 и b_1 близки к нулю и противоположны по знаку.

2.1. О корректности применения метода наименьших квадратов для определения постоянных пластинки. В связи с применением в фотографической астрометрии моделей общего типа (4.12) встает вопрос о корректности применения метода наименьших квадратов для определения неизвестных параметров преобразований — так называемых постоянных пластинки, если условные уравнения в соответствии с выбранной моделью

составлены в форме

$$\begin{aligned}c_1 + a_1 x_j + b_1 y_j + Q_1(x_j, y) &= \xi_j, \\c_2 + a_2 x_j + b_2 y_j + Q_2(x_j, y) &= \eta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}\tag{4.15}$$

где наблюдаемыми величинами являются тангенциальные координаты опорных звезд, а их измеренные координаты считаются точными. Вопрос правомерен, так как применяя метод наименьших квадратов для решения системы (4.15), мы делаем предположение о независимости и нормальном распределении ошибок ξ и η , которые затем мы отождествляем с невязками условных уравнений. В действительности, однако, ошибочными являются и тангенциальные и измеренные координаты звезд, выбранных нами в качестве опорных, причем соотношение случайных ошибок тех и других координат при современном уровне точности каталогов и измерений приблизительно таково:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\xi, \eta} &\approx 0,3'' - 0,5'', \\ \epsilon_{x, y} &\approx 2-3 \text{ мкм или } (0,2 \div 0,3) \cdot \left(\frac{2,06''}{f_0 \text{ (м)}} \right).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Таким образом, при астрометрической редукции фотографических наблюдений, полученных на средне- и длиннофокусных телескопах ($f_0 > 2$ м), можно считать

$$\epsilon_{\xi, \eta} > \epsilon_{x, y}.\tag{4.17}$$

Напротив, при редукции наблюдений, полученных с помощью короткофокусных камер (например, спутниковых фотографических установок), у которых $f_0 < 1$ м

$$\epsilon_{\xi, \eta} < \epsilon_{x, y}.\tag{4.18}$$

Для камер промежуточного типа (f_0 от 1,0 до 1,5 м) погрешности измеренных и тангенциальных (сферических) координат опорных звезд можно считать приблизительно одинаковыми.

В этих условиях строгим решением задачи было бы такое, при котором постоянные пластинки находились бы из условия минимума выражений

$$\begin{aligned}[(\xi - g_1(x, y))^2] &= \min, \\ [(\eta - g_2(x, y))^2] &= \min,\end{aligned}\tag{4.19}$$

где наблюдаемыми величинами следует считать как ξ , η , так и x , y . Однако такой подход приводит к сложным алгоритмам (в тех случаях, когда g_1 и g_2 нелинейны относительно x , y) и практически не может привести к заметному выигрышу в точности. Действительно, в случаях применения линейных методов редукции в силу аддитивности погрешности измеренных и тангенциальных координат любой подход приводит к эквивалентным решениям, как это показано нами в § 5 настоящей главы. Так что если, например, при определении постоянной пластинки по способу наименьших квадратов вычислена некоторая ошибка единицы веса σ_1 , то можно утверждать, что σ_1 одинаково зависит как от погрешности измерений опорных звезд на пластинке (средняя квадратическая ошибка σ_m), так и от пог-

решности каталожных положений этих звезд на эпоху наблюдений (средняя квадратическая ошибка σ_*), т.е. имеет место следующее соотношение:

$$\sigma_1^2 = \sigma_m^2 + \sigma_*^2. \quad (4.20)$$

Что касается применения нелинейных методов, то можно ожидать некоторого различия в случайном и систематическом отношениях в результатах редукции, полученных при различных подходах к задаче, однако практически в силу малости коэффициентов при нелинейных членах (d , e , f и т.д.) по сравнению с координатами (x , y или ξ , η) свойство аддитивности ошибок координат нарушается лишь незначительно и традиционное решение (4.15) сохраняет силу, так же как и соотношение (4.20).

В интересах строгости теории, однако, можно рекомендовать при применении нелинейных моделей редукции наблюдений, полученных на широкоугольных камерах ($f_0 < 1$ м) применять "обращенные" модели преобразований, т.е. такие модели, в которых рассматриваются зависимости вида

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(\xi, \eta, a_1, b_1, c_1, \dots, p_1), \\ y &= \varphi_2(\xi, \eta, a_2, b_2, c_2, \dots, p_2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Окончательный результат редукции — тангенциальные координаты объектов — в этом случае должны вычисляться посредством обращения формул (4.21), что удобнее всего сделать путем последовательных приближений. Пример применения такого подхода к проблеме астрометрической редукции фотографий представляет рассматриваемый ниже так называемый "геометрический метод", который был применен для калибровки некоторых широкоугольных камер и астрографов (Киселев, 1970; Киселев и др., 1985).

§ 3. Обзор наиболее употребительных моделей для преобразования измеренных координат в тангенциальные

Следующие модели редукции являются наиболее употребительными в практике фотографической астрометрии: линейная модель, модель с неполными квадратичными членами, модель с полной квадратичной формой, модель с учетом членов наклонности и дисторсии, проективная модель. Рассмотрим каждую из этих моделей.

3.1. Линейная модель (метод шести постоянных, или метод Тернера). Сокращенное обозначение модели: $M = 3L \times 2$.

Этой модели соответствуют линейные формулы преобразования (4.11) с шестью параметрами (три для координаты ξ и три для η), описывающие так называемое аффинное преобразование координат, при котором взаимно однозначное соответствие между точками на пластинках P и Π устанавливается с помощью проектирования пучком параллельных лучей, причем плоскости P и Π могут быть произвольно наклоненными одна относительно другой. При аффинном преобразовании, как известно (см., например, (Глаголев, 1963)), сохраняется свойство коллинеарности проекции, т.е. прямые на плоскости P переходят в прямые на плоскости Π , кроме того, параллельные прямые переходят в параллельные прямые и сохраняются величины отношений отрезков соответствующих прямых,

однако значения масштабов по осям и величины углов не сохраняются, так что, например, ортогональная сетка на пластинке P может трансформироваться в косоугольную сетку на пластинке Π с отличающимися масштабами по ξ и η . Формулы линейного преобразования

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + a_1x + b_1y, \\ \eta &= c_2 + a_2x + b_2y.\end{aligned}\tag{4.22}$$

совпадают с формулами (4.4), из чего следует, что они являются простейшими строгими формулами, позволяющими перейти от произвольной косоугольной системы измеренных координат к стандартной прямоугольной системе, определенным образом ориентированной, т.е. к системе тангенциальных координат. Важным достоинством линейных формул общего вида является то обстоятельство, что в процессе редукции они позволяют учесть также и линейные эффекты дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации.

Линейная модель имеет несколько реализаций, использующих различный аналитический аппарат, но полностью эквивалентных с точки зрения геометрии. Соответствующие алгоритмы были разработаны и применены в фотографической астрометрии независимо от метода шести постоянных. За этими вычислительными схемами сохранены названия, данные их авторами. Таков, например, метод депенденсов Шлезингера (Киселев, 1965), использующий инварианты линейного преобразования, связанные с определением центра масс плоской конфигурации опорных звезд и объекта. Эти инварианты — так называемые депенденсы (или зависимости) Шлезингера — прочно вошли в практику фотографической астрометрии и, как оказалось, имеют фундаментальное значение в задаче оценки ошибки редукции линейными методами. Другой подобный метод — так называемый интерполяционный (Киселев, 1959) — использует инварианты линейного преобразования координат в форме отношений отрезков. Интерполяционный метод широко применялся при обработке фотографических наблюдений искусственных спутников Земли с небольшим числом опорных звезд. Наконец, следует упомянуть еще векторную интерпретацию метода Шлезингера и интерполяционного метода, где не применяется аппарат тангенциальных координат, но полностью используются основные геометрические свойства аффинного метода. Перечисленные реализации линейного метода рассматриваются ниже в § 4.

3.2. Модель с неполными квадратичными членами (метод десяти постоянных). Сокращенное обозначение модели — $M = (3L + 2Q) \times 2$.

В этой модели формулы связи между измеренными и тангенциальными координатами записывают в следующем виде

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + a_1x + b_1y + d_1x^2 + e_1xy, \\ \eta &= c_2 + a_2x + b_2y + d_2xy + e_2y^2.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Формулы (4.23) отличаются от (4.22) дополнительными слагаемыми второй степени, составляющими так называемую неполную квадратичную форму, неодинаковую для ξ и η . По идее эти квадратичные члены должны учитывать эффект небольшого относительного наклона пласти-

нок P и Π (см. гл. 3, § 1, формулы (3.48) – (3.50)), причем

$$d_1 \approx d_2 \approx -p_1; \quad e_2 \approx e_1 \approx -q_1, \quad (4.24)$$

где p_1 и q_1 характеризуют смещение истинного оптического центра пластинки P относительно принятого для пластинки Π центра T_0 , с которым вычислены тангенциальные координаты.

Формулы (4.23) справедливы, если первоначальная ориентировка измеренных координат на пластинке P близка к стандартной и если отсутствуют другие неучтенные эффекты второго порядка, нарушающие линейную связь координат x, y и ξ, η . Это второе условие редко бывает выполненным, поскольку влияние дифференциальной рефракции второго порядка выражается похожими формулами и по величине может быть не меньше эффекта наклонности (см. гл. 3, § 5). Поэтому применение модели десяти постоянных может быть оправдано только лишь в случае большой неопределенности положения оптического центра на рабочих пластинках. В противном случае применение этой модели будет иметь лишь формально интерполяционный смысл, причем коэффициенты d и e в (4.23) потеряют ясное геометрическое содержание.

3.3. Модель с полной квадратичной формой (метод двенадцати постоянных). Сокращенное обозначение модели $M = (3L + 3Q) \times 2$.

Формулы связи в этой модели имеют вид

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + a_1x + b_1y + d_1x^2 + e_1xy + f_1y^2, \\ \eta &= c_2 + a_2x + b_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

причем коэффициентам квадратичных форм в правых частях не придают заранее никакого особенного геометрического смысла. Таким образом, эту модель можно рассматривать как формально интерполяционную, которая по смыслу должна учитывать все дифференциальные эффекты перехода от измеренных координат к тангенциальным, имеющие характер линейного и квадратичного преобразований, и, в первую очередь, влияние дифференциальной рефракции и аберрации, а также влияние погрешности принятого положения оптического центра пластинки в ограниченных пределах. Указанная модель имеет применение при астрометрической редукции фотографий, полученных с помощью широкоугольных астрографов с хорошо исправленной дисторсией (например, при каталожных работах (Барней, 1959), а также при обработке фотографических наблюдений ИСЗ (Занегин, 1971).

В последнее время эту модель необоснованно применяют также в традиционной задаче фотографической астрометрии при определении относительных собственных движений звезд (Жуков, 1969; Кадла, 1966; Рахимов, 1976). Существенным недостатком указанной модели, на наш взгляд, является ее сугубо формальный статистический характер, вследствие чего могут нарушаться некоторые важные геометрические условия проектирования (например, условия коллинеарности или условие инвариантности сложных отношений отрезков), выполнения которых естественно требовать, если пластинку Π определять с помощью видимых тангенциальных координат. Другим недостатком следует признать то обстоятельство, что при решении условной системы типа (4.25)

по способу наименьших квадратов возникают тесные корреляционные связи между коэффициентами c , d и f , вследствие которых постоянные c_1 и c_2 вычисляются с заметными систематическими погрешностями, зависящими от распределения реальных ошибок координат опорных звезд, расположенных далеко от центра пластинки (например, из-за плохо учтенной дисторсии).

Таким образом, модель с двенадцатью постоянными, даже если она и обеспечивает хорошее выравнивание эмпирических функций $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ по всей площади широкоугольной фотографии, может служить источником досадных ошибок в центре пластинки, т.е. в области, где находятся главные объекты исследования. Вопрос о целесообразности применения этой модели для астрометрической редукции следует решать с учетом условий конкретной задачи на основе формул распространения ошибки (см. гл. 5, § 3).

3.4. Модель с учетом членов наклонности и дисторсии. Сокращенное обозначение модели $M = (3L + 2Q + 1D) \times 2$.

В этой модели используются следующие формулы связи:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + a_1x + b_1y + d_1x^2 + e_1xy + k_1x(x^2 + y^2), \\ \eta &= c_2 + a_2x + b_2y + d_2xy + e_2y^2 + k_2y(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Как видим, формулы (4.26) отличаются от (4.16) добавлением членов, учитывающих кубическую дисторсию (см. гл. 1, § 5). По смыслу формулы (4.26) должны учитывать погрешность принятого положения оптического центра рабочей пластинки (наклонность) и дисторсию, если ориентировка измеренных координат близка к стандартной и если координаты отнесены к осевому центру пластинки, совпадающему с ее оптическим центром или близким к нему.

Признаком корректности применения модели $(3L + 2Q + 1D) \times 2$ могут служить приближенные равенства определяемых параметров, аналогичные (4.17):

$$d_1 \approx d_2; \quad e_1 \approx e_2; \quad k_1 \approx k_2. \quad (4.27)$$

Эти оценки должны выполняться хотя бы в пределах влияния средних ошибок перечисленных параметров, что соответствует доверительной вероятности 0,7 при достаточно большом числе опорных звезд (число степеней свободы $n = 6$ должно быть не меньше 10). В противном случае применение этой модели так же, как и в случае моделей (4.23) и (4.25), может носить лишь формальный характер.

3.5. Проективная модель. Коллинеарный метод и метод восьми постоянных. Сокращенное обозначение модели $M = 3L \times 2 + 2Q$.

В этой модели за основу принимают дробно-линейные формулы, выражающие, как известно (Глаголев, 1963), проективное соответствие координат на двух плоскостях — в нашем случае на пластинках P и Π , произвольно наклоненных друг к другу. Эти формулы имеют вид

$$\xi = \frac{c_1 + a_1x + b_1y}{1 + a_3x + b_3y}; \quad \eta = \frac{c_2 + a_2x + b_2y}{1 + a_3x + b_3y}. \quad (4.28)$$

Преобразование (4.28) зависит от восьми параметров, среди которых два (a_3 и b_3) общих для ξ и η . Поэтому метод, использующий проективную модель, можно назвать методом восьми постоянных. Иногда этот метод называют коллинеарным (Вингисаар, 1970; Дейч, 1965), подчеркивая в названии важное свойство преобразований сохранять прямолинейность отрезков. Другое свойство проективных преобразований — инвариантность по отношению к двойным (ангармоническим отношениям) отрезков — в этом методе непосредственно не используется. Это свойство принято за основу другого проективного метода — метода гомографических координат (Киселев, 1965 (2)). Основным достоинством всех методов, использующих проективную модель, является их независимость по отношению к принятому положению оптического центра, с которым вычислены тангенциальные координаты опорных звезд. Недостатки этих методов связаны с повышенными требованиями к качеству проекции рабочего астрографа и необходимостью надежно учитывать все нелинейные эффекты дифференциальной рефракции и аберрации. Следовательно, большая дисторсия фотографической проекции может служить причиной отказа от применения проективных моделей.

Применение проективных соотношений (4.28) на практике связано с их линеаризацией. Применяются два варианта метода восьми постоянных. В первом случае используют малость коэффициентов a_3 , b_3 , b_1 , a_2 , т.е. предполагают, что измеренные и тангенциальные координаты ориентированы приблизительно одинаково и оптический центр пластинки Π выбран вблизи реального центра рабочей пластинки. В этих условиях после разложения в ряд общего знаменателя формул (4.28) получают соотношения, аналогичные (3.49):

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + a_1x + b_1y + px^2 + qxy, \\ \eta &= c_2 + a_2x + b_2y + pxy + qy^2,\end{aligned}\tag{4.29}$$

где принято $p \approx -a_1a_3 \approx -b_2a_3$; $q \approx -a_1b_3 \approx -b_2b_3$ причем p и q характеризуют положение оптического центра пластинки Π относительно центра пластинки P . Условная система, составленная на основе формул (4.29), содержит $2n$ уравнений с восемью неизвестными.

Во втором варианте соотношения (4.28) преобразуются к виду (4.30) формальной перегруппировкой членов

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + a_1x + b_1y - a_3\xi x - b_3\xi y, \\ \eta &= c_2 + a_2x + b_2y - a_3\eta x - b_3\eta y.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Полученные уравнения нельзя признать вполне корректными с точки зрения применения способа наименьших квадратов для отыскания неизвестных параметров, считая ξ и η наблюдаемыми величинами. Это связано с тем обстоятельством, что невязки наблюдаемых величин в этих условиях нельзя считать даже формально независимыми и нормально распределенными ввиду присутствия ξ и η как в левых, так и в правых частях условных уравнений. Положение облегчается благодаря тому, что на практике параметры a_3 и b_3 сами весьма малы по сравнению с ξ и η , так что их влияние на распределение невязок ничтожно. Следо-

вательно, этот второй вариант проективного метода, предложенный А.Н. Дейчем (Дейч, 1965), может применяться только в тех случаях, когда взаимная наклонность пластинок P и Π невелика. На практике это обстоятельство обычно не вызывает затруднений, и метод восьми постоянных в обоих вариантах широко применяется в настоящее время для астрометрической редукции фотографических наблюдений, полученных на широкоугольных астрографах с хорошо исправленным полем (Поттер, 1960; Фролова, 1974).

§ 4. Линейные методы

Остановимся несколько подробнее на линейных методах редукции, имеющих основополагающее значение для фотографической астрометрии как на практике, так и в теории. В числе линейных методов, кроме метода шести постоянных, рассмотрим метод депенденсов Шлезингера и интерполяционный метод; для этих последних приведем также новый вычислительный алгоритм, позволяющий получить результат путем интерполяции единичных векторов опорных звезд, не обращаясь к аппарату тангенциальных координат.

4.1. Метод шести постоянных и определение масштаба астрофотографий. Метод шести постоянных чаще всего применяется при астрометрической редукции фотографий, полученных на длинно- или среднефокусных телескопах с рабочим полем, не превосходящим 2° в диаметре. В этих условиях измеренные координаты опорных звезд обычно сравнивают непосредственно с их средними тангенциальными координатами (см. гл. 3, § 4), так как применение линейных формул уже само по себе обеспечивает учет линейного эффекта дифференциальной рефракции и аберрации, а эффекты второго и высших порядков ничтожно малы (см. § 6 этой главы).

Представляет интерес найти формулы, выражающие влияние геометрических и физических факторов на преобразование (4.22) в явном виде. Влияние геометрических факторов выражаются формулами (4.5). Остается выявить влияние дифференциальной рефракции, являющейся главным физическим фактором, нарушающим тождественность средних и видимых тангенциальных координат. Связь средних (ξ, η) и видимых (ξ', η') тангенциальных координат выражается формулами (3.93); пренебрегая в них членами второго порядка, перепишем эти формулы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' [1 + \beta(1 + k_1)^2] + \eta' \beta k_1 (k_2 - \operatorname{tg} D), \\ \eta &= \xi' \beta k_1 (k_2 + \operatorname{tg} D) + \eta' [1 + \beta(1 + k_2^2)]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

В формулах (4.31) перейдем от видимых тангенциальных координат звезд к измеренным координатам их изображений на пластинке P . Это преобразование задается формулами (4.4), которые справедливы, если видимые тангенциальные координаты ξ', η' отнесены к оптическому центру пластинки P . Комбинируя (4.31) и (4.4), получим формулы, выражающие связь между измеренными в произвольной системе координатами изображений звезд на пластинке P и их средними

тангенциальными координатами на пластинке сравнения П:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 [1 + \beta(1 + k_1^2)] + \beta c_2 k_1 (k_2 - \operatorname{tg} D) + x \{ a_1 [1 + \beta(1 + k_1^2)] + \\ &+ \beta a_2 k_1 (k_2 - \operatorname{tg} D) \} + y \{ b [1 + \beta(1 + k_1^2)] + \beta b_2 k_1 (k_2 - \operatorname{tg} D) \}, \\ \eta &= c_2 [1 + \beta(1 + k_2^2)] + \beta c_1 k_1 (k_2 + \operatorname{tg} D) + \\ &+ x \{ a_2 [1 + \beta(1 + k_2^2)] + \beta a_1 k_1 (k_2 + \operatorname{tg} D) \} + \\ &+ y \{ b_2 [1 + \beta(1 + k_2^2)] + \beta b_1 k_1 (k_2 + \operatorname{tg} D) \}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

В этих формулах в фигурных скобках заключены искомые выражения постоянных пластинки A_1, B_1, A_2, B_2 , которые зависят от дифференциальной рефракции (параметры β, k_1, k_2) и от геометрических условий (параметры a_1, b_1, a_2, b_2) явным образом. Найденные зависимости позволяют получить новые выражения для масштабов измеренных координат, аналогичные формулам (4.6), но учитывающие влияние дифференциальной рефракции

$$\begin{aligned} A_1^2 + A_2^2 &= \mathcal{M}_x^2 [1 + 2\beta(1 + \operatorname{tg}^2 \zeta \sin^2 (\chi - \theta - \gamma))], \\ B_1^2 + B_2^2 &= \mathcal{M}_y^2 [1 + 2\beta(1 + \operatorname{tg} \zeta \cos^2 (\chi - \theta))]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Последние формулы приобретают особенно простой вид, если можно пренебречь неортогональностью осей измеренных координат и различием ориентировок измеренных и тангенциальных координат, т.е. положить $\gamma = 0, \theta = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} [1 - \beta(1 + k_1^2)], \\ \mathcal{M}_y &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} [1 - \beta(1 + k_2^2)]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Кроме того, если считать $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y = \mathcal{M}_0$, то получим следующую рабочую формулу для определения геометрического масштаба астрографа по результатам редукции методом шести постоянных:

$$\mathcal{M}_0 = \sqrt{\frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + B_2^2 + B_1^2) \left[1 - \frac{1}{2} \beta (1 + \sec^2 \zeta) \right]}. \quad (4.34^*)$$

Формула (4.34*) удобна практически, так как она позволяет вычислить масштаб астрофотографии попутно с определением фотографического положения какого-либо объекта, не прибегая ни к специальным наблюдениям, ни к специальным методам редукции (см., например, § 6 этой гл.). Формальная ошибка определения масштаба согласно (4.34*) может быть легко оценена, если при определении постоянных пластинок определены ошибки единицы веса $\sigma_{1\xi}$ и $\sigma_{1\eta}$, а также веса p_A и p_B неизвестных A_1 и B_2 . Тогда, исходя из определения (4.34*), имеем

$$\epsilon_{\mathcal{M}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{1\xi}^2}{p_A} + \frac{\sigma_{1\eta}^2}{p_B} \right). \quad (4.35)$$

Простой смысл оценки (4.35) легко выявляется, если прибегнуть к естественной идеализации условий редукции, предположив, что мы измерили n опорных звезд, равномерно распределенных в круге радиуса R , и, кроме того, полагая $\sigma_{1\xi} = \sigma_{1\eta} = \sigma_1$. В этих условиях при редук-

ции линейными методами, как показано в гл. 5 (см. 5.49), имеем

$$p_A = p_B = \frac{1}{4} nR^2; \quad (4.36)$$

тогда оценка (4.35) упрощается до выражения

$$\epsilon_{\mathcal{M}} = \frac{2\sigma_1}{R\sqrt{n}}. \quad (4.37)$$

Остается ввести привычные размерности и перейти к относительной ошибке. Для этого воспользуемся определениями из гл. 1:

$$R = \frac{R^\circ}{\mathcal{M}} \cdot \frac{206265''}{57,296^\circ}. \quad (4.38)$$

Заменяя в (4.37) R его выражением из (4.38), получим

$$\frac{\epsilon_{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}} = 5,56 \cdot \frac{\sigma_1''}{R^\circ \sqrt{n}} \cdot 10^{-4}. \quad (4.39)$$

Здесь сохранены следующие размерности: $[\mathcal{M}] = 1''/\text{мм}$, $[R^\circ] = \text{градус}$, $[\sigma_1''] = 1''$. Таким образом, например, при астрометрической редукции фотографий звездных полей, полученных на нормальном астрографе ($\mathcal{M} = 60''/\text{мм}$, радиус рабочего поля $R^\circ = 0,7^\circ$, $n = 20$, $\sigma_1 = 0,3''$ (минимальная величина)), масштаб определяется со следующей оценкой точности:

$$\frac{\epsilon_{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}} = \pm 0,53 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon_{\mathcal{M}} = \pm 0,0032'' \text{ мм}^{-1}. \quad (4.40)$$

Аналогично в случае редукции фотографических наблюдений, полученных на 26-дюймовом рефракторе ($\mathcal{M} = 20''/\text{мм}$, $R = 0,3^\circ$, $n = 4$, $\sigma_1 = 0,3''$) масштаб определяется с ошибками

$$\frac{\epsilon_{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}} = \pm 2,78 \cdot 10^{-4}, \quad \epsilon_{\mathcal{M}} = \pm 0,0056'' \text{ мм}^{-1}. \quad (4.41)$$

Небольшое различие оценок (4.40) и (4.41) не случайно, так как главным фактором ошибки определения масштаба служит величина σ_1'' , которая при редукции наблюдений, полученных на средне- и длиннофокусных телескопах, зависит в основном от ошибок положений опорных звезд на эпоху наблюдений. Прочие же факторы \mathcal{M} , R , n в значительной мере друг друга компенсируют.

Из приведенного анализа следует, что если определение масштаба астрографа желательно выполнить с повышенной точностью ($\epsilon_{\mathcal{M}} < 0,002''$), то необходимо обращаться к специальным астрометрическим стандартам (Гекман, 1956; Эйхгорн, 1970; Шокин и др., 1983), в которых относительные координаты звезд имеют точность порядка $\pm 0,10''$ на современную эпоху.

4.2. Метод депенденсов. Высокая эффективность и широкое распространение метода шести постоянных в самых различных задачах фотографической астрометрии естественно вызвало появление ряда модификаций этого метода, удобных для решения специальных задач.

Главная цель, которую ставили себе авторы модификаций, неизменно заключалась в сокращении объема вычислений, связанных с применением способа наименьших квадратов для определения постоянных пластинок. Такой подход характерен для астрономии вообще и фотографической астрометрии, в особенности в "докомпьютерную" эпоху, т.е. до широкого внедрения в практику астрономических вычислений электронно-вычислительных машин в 60-х годах нашего столетия. Одной из весьма удачных модификаций метода шести постоянных следует признать метод депенденсов Шлезингера (Камп ван де, 1967), который был создан специально для обработки измерений серий пластинок, полученных для определения тригонометрических параллаксов звезд. Специфика этой задачи состоит в том, что необходимо индивидуальные результаты измерений каждой пластинки перевести в систему координат какой-либо одной пластинки, принятой за стандартную, т.е. налицо типичная для фотографической астрометрии ситуация с пластинками сравнения P и Π , где пластинка P повторяется много раз. Алгоритм решения этой задачи, предложенный Шлезингером, позволяет вычислить результат сравнения положений объекта на каждой k -й пластинке и на стандартной пластинке в одной системе, пользуясь набором некоторых величин $\{D_j\}$, так называемых депенденсов, или зависимостей, которые вычисляются для каждой опорной звезды по измеренным координатам объекта и всех опорных звезд на стандартной пластинке. Рабочие формулы операции сравнения пластинок, согласно Шлезингеру, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x_{0k} - x'_{0k} &= \sum_{j=1}^n D_j (x_{jk} - x'_j), \\ y_{0k} - y'_{0k} &= \sum_{j=1}^n D_j (y_{jk} - y'_j), \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.42}$$

В этих формулах $x_{jk} - x'_j$ и $y_{jk} - y'_j$ — разности измеренных координат опорных звезд на k -й пластинке и на стандартной, $x_{0k} - x'_{0k}$ и $y_{0k} - y'_{0k}$ — вычисленные разности координат объекта на k -й пластинке и на стандартной, D_j — уже упоминавшиеся депенденсы, n — число опорных звезд, N — число пластинок, конфигурация опорных звезд — одна и та же на всех пластинках серии.

Для успешной работы формул (4.42) необходимо, чтобы разности измеренных координат одинаковых звезд на сравниваемых пластинках были малыми величинами и чтобы ориентировка измерений всех пластинок серии была одинаковой и близкой к стандартной*). В этих условиях депенденсы D_j могут вычисляться с небольшим числом знаков, причем правомерными оказываются даже графические приемы. Схема вычислений депенденсов разработана Шлезингером на основе алгоритма вычислений постоянных пластинок по способу наименьших квадратов. Изложение метода депенденсов прочно вошло в справочную и учебную литературу по астрометрии (Кениг, 1933; Костинский, 1934; Бугославская, 1947; Дейч,

*) Впрочем, такая оговорка при изложении метода Шлезингера сделана только ван де Кампом (Камп ван де, 1967), у других авторов она отсутствует.

1951), причем повсеместно вывод основных формул метода приводится по Шлезингеру. Самостоятельная ценность метода, его геометрическая сущность при этом вообще теряется или затушевывается. Ниже дадим строгое изложение метода депенденсов с чисто геометрических позиций.

Итак, решается задача определения фотографических положений небесных объектов. Постановка задачи прежняя. Наряду с рабочей пластинкой P рассмотрим вспомогательную пластинку сравнения Π . Будем считать известными измеренные координаты x_j, y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) опорных звезд и координаты x_0, y_0 объекта на пластинке P , а также координаты опорных звезд ξ_j, η_j ($j = 1, 2, \dots, n$) на пластинке Π . В рассматриваемой задаче ξ, η — средние тангенциальные координаты звезд, вычисленные по данным рабочего каталога \mathcal{K} при заданном оптическом центре.

Пусть между пластинками P и Π имеет место аффинное соответствие, которое может быть выражено преобразованием координат с шестью постоянными типа (4.22). Поставим себе задачу: найти такое распределение условных нормированных весов D_j , которые нужно приписать опорным звездам на пластинке P , чтобы центр тяжести конфигурации опорных звезд и объекта находился бы в объекте S_0 . В этой задаче мы исходим из представления о конфигурации опорных звезд и объекта как о плоской механической конструкции, образованной n материальными точками с массами D_j , соединенными жесткими невесомыми стержнями. Масса объекта равна нулю, но через него обязательно проходит один из стержней так, что при правильном выборе масс вся конструкция сохранит равновесие, если ее приподнять на игле, направленной на объект (рис. 14).

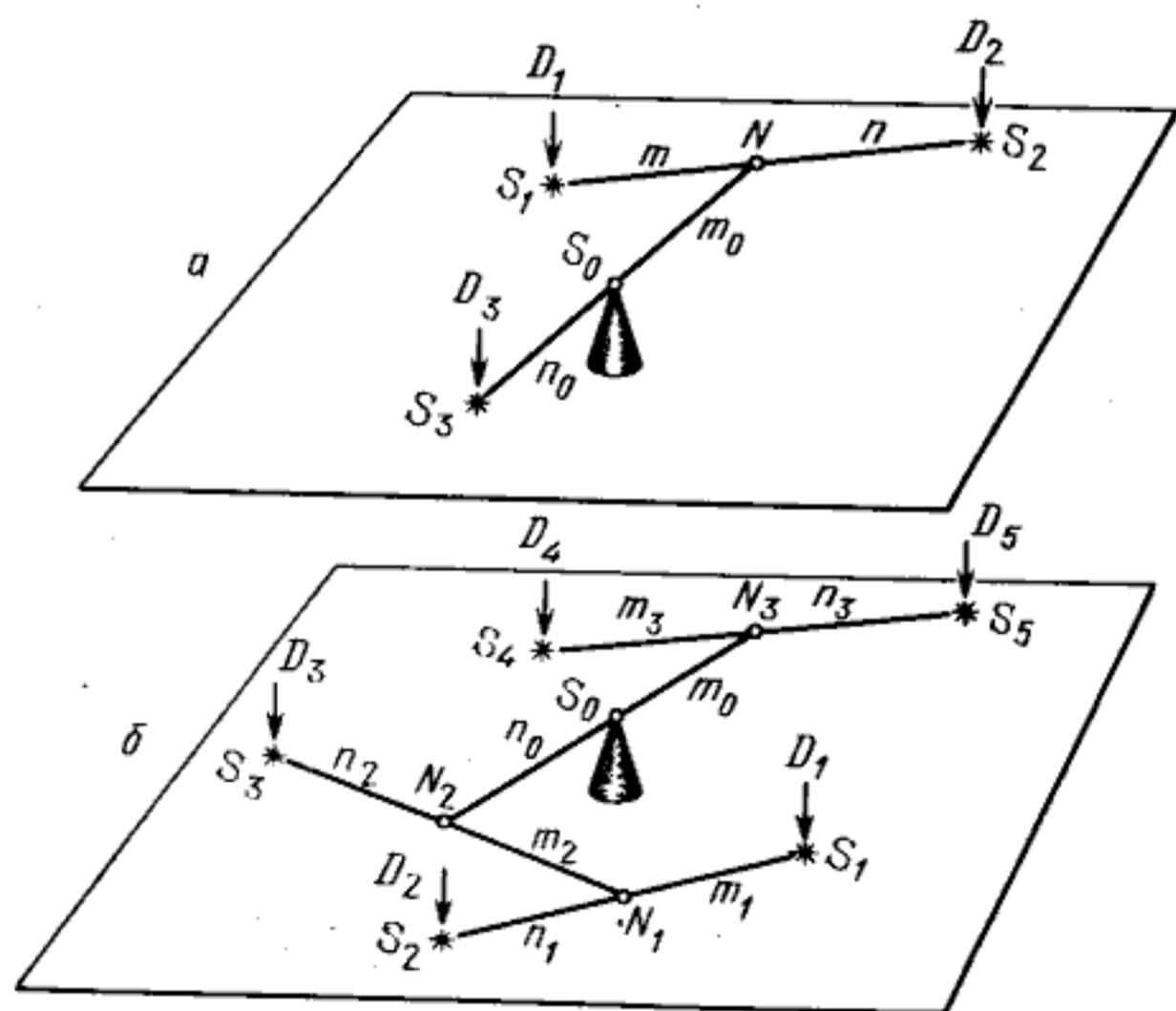


Рис. 14. Механическая интерпретация метода депенденсов:

a — конструкция из стержней в случае трех опорных звезд, b — конструкция из стержней в случае пяти опорных звезд, S_1, S_2, S_3, \dots — опорные звезды; S_0 — объект (определяемая звезда); N_1, N_2, N_3, \dots — узловые точки конструкции (фиктивные звезды); $(m/n)_1, (m/n)_2, \dots$ — инварианты интерполяционной схемы: отношения смежных отрезков; D_1, D_2, D_3, \dots — условные веса опорных звезд — инварианты метода депенденсов Шлезингера

По условию задачи в соответствии с принципами механики искомые веса D_j (массы материальных точек) должны удовлетворять следующим трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n D_j x_j &= x_0, \\ \sum_{j=1}^n D_j y_j &= y_0, \\ \sum_{j=1}^n D_j &= 1. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Система (4.43) однозначно определяет веса только в случае трех опорных звезд, не расположенных на одной прямой; в остальных случаях можно получить бесконечное множество решений, которым будут соответствовать различные узловые точки N_i и отношения плеч $(m/n)_i$ выбранной конструкции. Неоднозначность решения можно устранить с помощью дополнительного условия

$$\sum_{j=1}^n D_j^2 = \min, \tag{4.44}$$

которому должны удовлетворять искомые веса. Условие (4.44) сообщает задаче экстремальный характер и позволяет применить метод коррелят для получения однозначного решения.

Вернемся к системе (4.43). Домножим первое из уравнений системы на постоянную a_1 пластинки, второе — на b_1 , третье — на c_1 и полученные произведения сложим, объединяя слагаемые с одинаковыми D_j . В итоге будем иметь

$$\sum_{j=1}^n D_j (a_1 x_j + b_1 y_j + c_1) = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1, \tag{4.45}$$

но по условию задачи

$$\begin{aligned} a_1 x_j + b_1 y_j + c_1 &= \xi_j, \\ a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 &= \xi_0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n D_j \xi_j = \xi_0. \tag{4.47a}$$

Аналогично получим для координаты η

$$\sum_{j=1}^n D_j \eta_j = \eta_0, \tag{4.47b}$$

причем условия $\sum_{j=1}^n D_j = 1$, $\sum_{j=1}^n D_j^2 = \min$ сохраняются.

Как видим, координаты объекта также и на пластинке II удовлетворяют условию центра тяжести в системе опорных звезд, взятых с теми же

условными нормированными весами, которые были определены на пластинке P . Таким образом, можно сделать следующие выводы. Если при некотором распределении весов опорных звезд на пластинке P объект совмещается с центром тяжести конфигурации опорных звезд, то и на любой пластинке Π , аффинной относительно P , положение этого объекта будет совпадать с центром тяжести выбранной конфигурации опорных звезд. Это значит также, что при любом распределении весов опорных звезд центр тяжести системы при линейном преобразовании координат ведет себя как фиктивная звезда, а веса опорных звезд, удовлетворяющие (4.43), являются инвариантами этого преобразования. Подобное свойство центра тяжести позволяет решить задачу линейного преобразования координат, не определяя параметров преобразования (постоянных пластинки) в явном виде.

Таким образом, чтобы вычислить тангенциальные координаты ξ_0, η_0 объекта на пластинке Π , которая по определению аффинна относительно P , достаточно по измерениям пластинки P определить условные веса опорных звезд относительно этого объекта и затем сделать вычисления по формулам (4.47). Результат вычислений при этом, как следует из условия (4.46), не будет отличаться от того, который мы получили бы, применив метод шести постоянных в явной форме (с определением постоянных). В этом и заключается суть метода депенденсов Шлезингера в применении к задаче определения фотографических положений небесных объектов.

Аналогично можно решить и другие задачи фотографической астрометрии, связанные с пересчетом координат объекта, измеренного на какой-то одной пластинке, в систему координат другой или других реальных и фиктивных пластинок. При этом вовсе нет необходимости применять формулы типа (4.42) с разностями координат изображений звезд на сравниваемых пластинках; нет никакой нужды также добиваться, чтобы ориентировки координат на сравниваемых пластинках были одинаковыми. Необходимо лишь помнить, что какой бы системой координат на пластинке P мы ни воспользовались для вычисления условных весов, мы всегда определим единственную систему $\{D_j\}$, соответствующую конфигурации опорных звезд и объекта на выбранной пластинке. Войдя затем с этими весами в формулы (4.47), мы вычислим положение объекта в системе тех координат, при которых веса фигурируют в качестве множителей, т.е. мы выполним операцию, полностью эквивалентную преобразованию координат с шестью постоянными, если параметры преобразования определены на основе измерений тех же опорных звезд на пластинке P , что послужили для определения весов D_j . Таким образом, систему условных весов $\{D_j\}$ можно рассматривать как геометрические координаты точки, однозначно определяющие ее положение на некоторой плоскости P относительно фиксированной системы из n выбранных опорных точек (так называемого базиса), а также и на всех других плоскостях, аффинных относительно P . В случае базиса из трех точек такие координаты называются барицентрическими, в случае базиса из n точек эти координаты можно назвать обобщенными барицентрическими координатами. Барицентрические координаты имеют приложение в геометрии и механике (Балк, 1959).

Остается показать, что условные нормированные веса, удовлетворяющие определению (4.43), (4.44), тождественны депенденсам Шлезингера. Для этого достаточно проследить алгоритм вычисления весов с помощью коррелят.

Это решение построим, исходя из общих принципов метода наименьших квадратов. Уравнения (4.43) будем рассматривать как жесткие связи, которым должны удовлетворять неизвестные одновременно с условием (4.44). Воспользуемся приемом Лагранжа, введя неопределенные множители — корреляты k_1, k_2, k_3 — для построения вспомогательной функции неизвестных

$$F(D_1, D_2, \dots, D_n) = [D^2] - 2k_1([D_x] - x_0) - 2k_2([D_y] - y_0) - 2k_3([D] - 1). \quad (4.48)$$

В силу (4.43) функция F достигает минимума вместе с $[D^2]$. Поэтому условие $\min F$ совпадает с условием минимума для $[D^2]$. Это условие выражается системой из n уравнений для определения трех коррелят.

Аналитическое выражение этого условия найдем, приравняв нулю частные производные $\partial F/\partial D_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), что приводит к системе n уравнений для определения трех коррелят

$$\begin{aligned} k_1 x_1 + k_2 y_1 + k_3 \cdot 1 &= D_1, \\ k_1 x_2 + k_2 y_2 + k_3 \cdot 1 &= D_2, \\ &\dots\dots\dots \\ k_1 x_n + k_2 y_n + k_3 \cdot 1 &= D_n. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Система (4.49) имеет одно определенное решение, так как содержит $n-3$ линейных зависимости. Исключим эти зависимости с помощью условий (4.43). Для этого умножим уравнения системы (4.49) последовательно на x_1, x_2, \dots, x_n и результаты сложим; получим

$$[xx]k_1 + [xy]k_2 + [x]k_3 = x_0.$$

Аналогично после умножения на y_1, y_2, \dots, y_n и на $1, 1, \dots, 1$, получим еще два уравнения системы

$$\begin{aligned} [xy]k_1 + [yy]k_2 + [y]k_3 &= y_0, \\ [x]k_1 + [y]k_2 + nk_3 &= 1. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Определив из этой системы k_1, k_2, k_3 , найдем D_1, D_2, \dots, D_n из условий (4.49).

Как видим, система (4.50) совпадает с системой нормальных уравнений для определения постоянных пластинок a, b, c , а введенные нами корреляты k_1, k_2, k_3 совпадают с известными коэффициентами P, Q, R , неизменно фигурирующими при изложении метода Шлезингера. Таким образом, можно считать доказанной полную тождественность наших условных весов D_j и депенденсов Шлезингера.

4.3. О традиционной ошибке в изложении метода депенденсов. В связи с изложенной здесь интерпретацией метода депенденсов еще раз обратим внимание на формулу (4.42), служащую рабочей формулой почти всех практических приложений метода депенденсов. Например, в случае обработки измерений пластинок параллактической серии принято считать, что

с помощью этой формулы можно вычислить координаты объекта, измеренного на k -й пластинке, в системе стандартной пластинки. Именно так используется эта формула, когда записывают условные уравнения для определения параллакса по данным измерений каждой k -й пластинки (см., например, (Дейч 1973)):

$$\Delta x_0 + \pi p_{kx} + \mu_x \tau_k = (x_{0k} - x'_0) - \sum_{j=1}^n D_j (x_{jk} - x'_j), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.51)$$

Здесь слева — определяемые величины: Δx_0 — поправка положения исследуемой звезды на стандартной пластинке, π — искомый относительный параллакс, μ_x — собственное движение исследуемой звезды, а справа — измеренные координаты звезд на k -й и стандартной пластинках, как указано в объяснении к формуле (4.42). На самом деле, однако, в правой части уравнений (4.51) допущена тавтология. Действительно, поскольку $\{D_j\}$ вычислены по данным измерений стандартной пластинки, должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^n D_j x'_j = x'_0, \quad (4.52)$$

аналогичное условию (4.43). Однако

$$\sum_{j=1}^n D_j x_{jk} = x_{0k}^*, \quad (4.53)$$

где x_{0k}^* — координаты исследуемой звезды, измеренной на стандартной пластинке, в системе каждой k -й пластинки. Таким образом, уравнения (4.51) можно переписать так:

$$\Delta x_0 + \pi p_{kx} + \mu \tau_k = x_{0k} - \sum_{j=1}^n D_j x_{jk} = x_{0k} - x_{0k}^*, \quad (4.54)$$

откуда следует, что сравнение координат исследуемой звезды на k -й пластинке и на стандартной делается в системе k -й пластинки, а не в системе стандартной, как предполагается. Таким образом, в каждом из условных уравнений параллактической серии $x_{0k} - x_0$ вычислено в своей системе, отличной от стандартной. Эти системы могут отличаться как ориентировкой, так и масштабом (вследствие рефракции и температурного изменения фокуса телескопа), что в принципе нарушает строгость условий в задаче определения тригонометрических параллаксов. Однако на практике разности координат $x_{0k} - x_{0k}^*$ столь малы (редко превосходят 10 мкм при разности эпох наблюдений k -й и стандартной пластинок в два-три года), а ориентировка и масштабы всех пластинок столь близки к стандартным, что переход от систем измерений k -й пластинки к стандартной вряд ли изменил бы правые части уравнений заметным образом. Следовательно, алгоритм, изложенный Шлезингером для определения тригонометрических параллаксов звезд, сохраняет силу, хотя и излагается неточно. Мировая практика определения тригонометрических параллаксов звезд подтверждает этот вывод.

Остается ответить на вопрос, как же следует вычислять правые части уравнений (4.51), чтобы удовлетворить требованиям строгой теории. От-

вет непосредственно следует из геометрической сущности метода депенденсов. В применении к задаче определения тригонометрических параллаксов звезд это значит: нужно на каждой k -й пластинке параллактической серии определить положение исследуемой звезды с помощью своей системы депенденсов $\{D_j^{(k)}\}$, удовлетворяющих условиям (4.43). Тогда координаты объекта, измеренного на k -й пластинке, но в системе стандартной пластинки, определяются формулами

$$x'_{0k} = \sum_{j=1}^n D_j^{(k)} x'_j, \quad (4.55)$$

$$y'_{0k} = \sum_{j=1}^n D_j^{(k)} y'_j.$$

Соответственно уравнения (4.51) нужно переписать следующим образом:

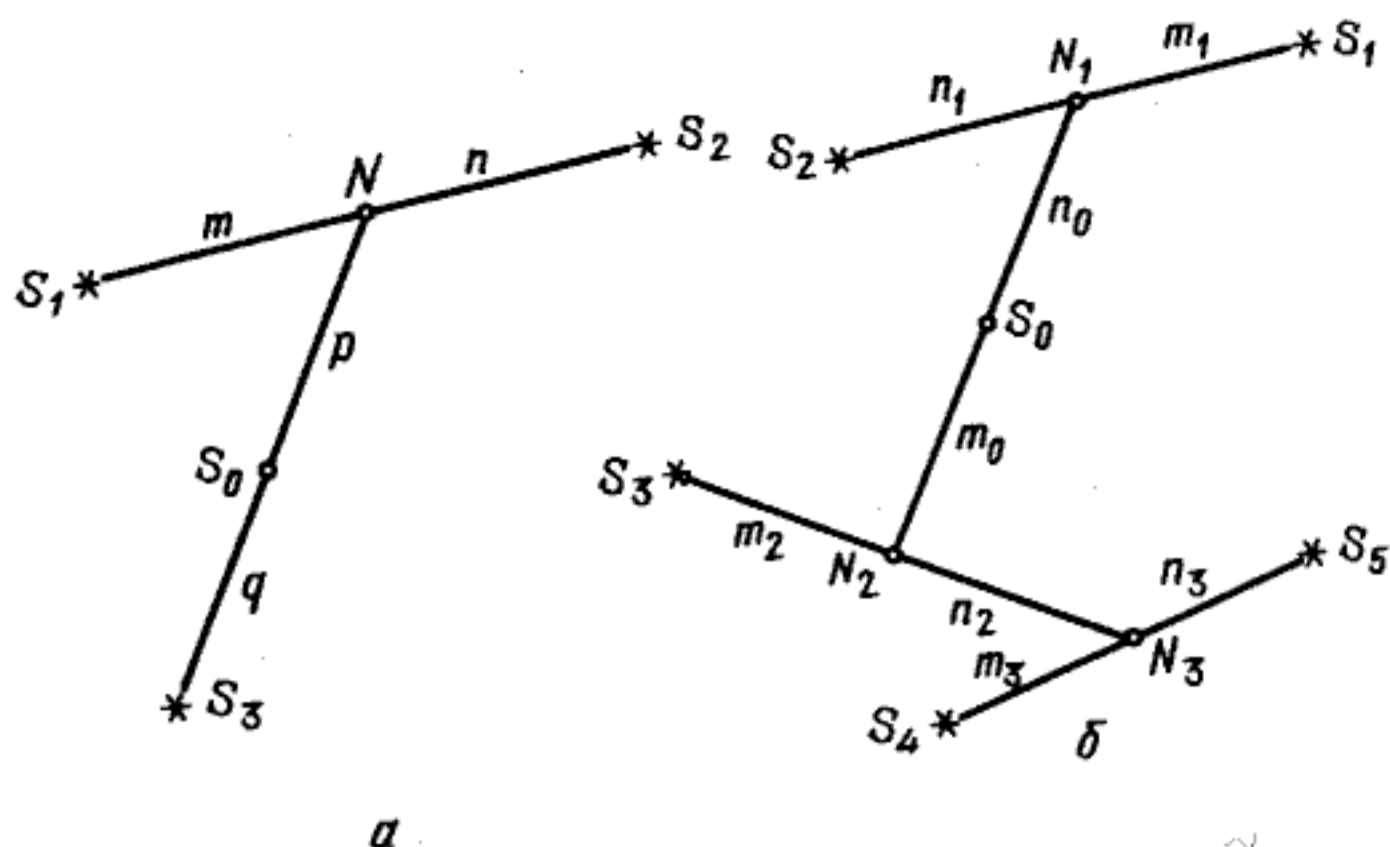
$$\Delta x'_0 + \pi p_{kx} + \mu_x \tau_k = \sum_{j=1}^n D_j^{(k)} x'_j - x'_0. \quad (4.56)$$

Напомним, что здесь координаты со штрихами относятся к системе стандартной пластинки.

Этот строгий алгоритм, очевидно, не сохраняет выгоды в вычислительном отношении, которые имеет алгоритм Шлезингера, однако он предоставляет астроному явные льготы при измерениях, поскольку теперь, при использовании приведенного алгоритма вычислений, достаточно ориентировать точно только одну из измеряемых пластинок — именно стандартную, а остальные можно измерять при произвольной ориентировке. Однако в настоящее время, когда ЭВМ прочно вошли в практику астрономических вычислений, едва ли имеет смысл добиваться сокращения объема вычислений в ущерб строгости решения задачи.

В заключение отметим, что обоснованное здесь строгое решение задачи обработки измерений серии параллактических пластинок полностью эквивалентно (как по объему вычислений, так и по результату) решению ван Маанена (Костинский, 1934), использующего для пересчета положения объекта на систему стандартной пластинки метод шести постоянных. Это следует из того, что, с одной стороны, эквивалентные операции вычислений постоянных пластинок по способу наименьших квадратов и вычисления депенденсов методом коррелят повторяются в обоих алгоритмах одинаковое число раз, а с другой стороны — со стороны теории, оба метода одинаково исходят из предположения об аффинном (линейном) соответствии сравниваемых пластинок.

4.4. Интерполяционный метод. Интерполяционный метод, предложенный в 1959 г. (Киселев, 1959) для астрометрической редукации фотографических наблюдений искусственных спутников Земли, естественным образом дополняет геометрическую идею метода депенденсов Шлезингера. Основная идея интерполяционного метода состоит в следующем. Положение объекта ищут на дуге большого круга, проведенного на небесной сфере через узловые точки, координаты которых точно известны. Эту операцию (назовем ее интерполяцией вдоль большого круга) выполняют



a

Рис. 15. Схемы интерполяций в задаче с тремя (а) и пятью (б) опорными звездами: S_1, S_2, \dots — опорные звезды, N_1, N_2, \dots — узловые точки, S_0 — объекты, $(p/q), (m/n)_j, \dots$ — интерполяционные параметры

с помощью формул (2.4)–(2.9), рассмотренных нами в гл. 2 настоящей работы. Узловыми точками могут служить сами опорные звезды S или фиктивные опорные звезды N , координаты которых, в свою очередь, интерполируют, опираясь на опорные звезды. Астрофотография в этом методе служит для определения сферических параметров интерполяций k на основе точных измерений относительных положений опорных звезд, объекта и оптического центра. В простейшем случае положение объекта интерполяционным методом определяется по трем опорным звездам посредством двух последовательных интерполяций с использованием одной фиктивной звезды N (рис. 15, а). В этой задаче, очевидно, необходимо, чтобы выбранные три опорных звезды не лежали на одном большом круге. В общем случае — при числе опорных звезд, равном n , положение объекта находят посредством $n - 1$ последовательных интерполяций. На астрофотографии каждой из схем последовательных интерполяций соответствует простейшее геометрическое построение, в котором изображения опорных звезд и объекта соединены отрезками прямых, проведенных через две точки с известными (измеренными или вычисленными) координатами. Положение средней (третьей) точки на каждом из отрезков определяется путем линейной интерполяции измеренных координат

$$x_N = \frac{n}{m+n} x_1 + \frac{m}{m+n} x_2, \quad (4.57)$$

$$y_N = \frac{n}{m+n} y_1 + \frac{m}{m+n} y_2,$$

причем аргументом интерполяции служит отношение направленных отрезков, которое условно можно назвать плоским параметром интерполяции m/n :

$$\frac{m}{n} = \frac{\overline{S_1 S}}{\overline{S S_2}}, \quad (4.58)$$

различая его и сферический параметр интерполяции k , участвующий в формулах (2.4)–(2.9). Параметр интерполяции m/n определяется из измерений изображений звезд на фотографии. Например, в задаче с тремя опорными звездами необходимые два плоских параметра интерполяции m/n и p/q определяются по формулам

$$\left(\frac{m}{n}\right)_1 = \frac{S_1 N}{NS_2} = \frac{(310)}{(230)}, \quad \frac{p}{q} = \frac{NS_0}{S_0 S_3} = \frac{(120)}{(230) + (310)},$$

$$(120) + (230) + (310) = (213), \quad (4.59)$$

в которых символом (abc) обозначена удвоенная площадь треугольника S_{abc}

$$(abc) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \end{vmatrix} =$$

$$= x_a(y_b - y_c) + x_b(y_c - y_a) + x_c(y_a - y_b). \quad (4.60)$$

Очевидно, в этой задаче плоские параметры интерполяции определяются однозначно. В общем случае, однако, при $n > 3$ выбор схемы и параметров интерполяции, вообще говоря, произволен. Исключение представляют два последних параметра, определяющих узловую точку и объект: эти величины необходимо вычислять с учетом результатов всех предыдущих интерполяций. Например, в схеме с пятью опорными звездами (рис. 15, б) параметры $(m/n)_1$ и $(m/n)_3$, определяющие положение узловых точек N_1 и N_3 , приняты равными 1; этот выбор однозначно определяет величины отношений $(m/n)_2$ и $(m/n)_0$, которые следует вычислять по формулам (4.59), как в случае трех опорных звезд, рассматривая треугольник $N_1 S_3 N_3$ в качестве основного опорного вместо треугольника $S_1 S_2 S_3$.

Рассмотренные здесь случаи применения интерполяционного метода удобно представить следующей условной записью:

а) случай трех опорных звезд:

1. $(S_1 \rightarrow S_2; m/n) = N$,
2. $(N \rightarrow S_3; p/q) = S_0$;

$$(4.60a)$$

б) случай пяти опорных звезд:

1. $[S_1 \rightarrow S_2; (m/n)_1] = N_1$,
2. $[S_4 \rightarrow S_5; (m/n)_3] = N_3$,
3. $[S_3 \rightarrow N_3; (m/n)_2] = N_2$,
4. $[N_2 \rightarrow N_1; (m/n)_0] = S_0$.

$$(4.60b)$$

Операции интерполяции здесь записаны символически. Например, первая запись означает, что фиктивная звезда N_1 расположена на дуге большого круга $\smile S_1 S_2$, причем ее изображение на пластинке делит отрезок $S_1 S_2$ в отношении m/n . Аналогично расшифровываются и последующие записи. Окончательный результат — сферическое положение объекта — определяется на дуге большого круга $\smile N_2 N_1$ с вычисленным плоским параметром интерполяции $(m/n)_0$.

Как видим, основным элементом любой интерполяционной схемы является операция вычисления сферического положения фотографического объекта, находящегося на прямой между изображениями (действительными или фиктивными) двух звезд, сферические координаты которых известны. Эта задача решается применением формул интерполяции вдоль дуги большого круга (2.4)–(2.9). Условием применимости этих формул в фотографической астрометрии является требование, чтобы изображения любых больших кругов на астрофотографии сохраняли прямолинейность, а отношение отрезков произвольной прямой оставалось инвариантным по отношению к преобразованиям дифференциальной рефракции и аберрации. Такому требованию, очевидно, удовлетворяют астрофотографии (пластинки P), сохраняющие аффинность по отношению к центральной проекции соответствующей области неба, т.е. по отношению к пластинке сравнения Π . При выполнении этих условий операция интерполяции по формулам (2.4) или (2.8), (2.9) обеспечивается вычислением сферического параметра интерполяции k по данным измерений пластинки P , если ее оптический центр T известен. Следующая формула решает эту задачу:

$$k = \frac{\sin \mu}{\sin \nu} = \frac{m}{n} \frac{\cos \rho_1}{\cos \rho_2}. \quad (4.61)$$

Здесь k — сферический параметр интерполяции, рассмотренный нами ранее (гл. 2, § 1), m/n — плоский параметр интерполяции, соответствующий определению (4.58)–(4.60), $\cos \rho_1 / \cos \rho_2$ — множитель, учитывающий расположение отрезка $\overline{S_1 S_2}$ относительно оптического центра фотографии, ρ_1 и ρ_2 — сферические расстояния звезд Σ_1 и Σ_2 от оптического центра, рассматриваемого как фиктивная звезда. Формула (4.61), связывающая сферический и плоский параметры интерполяции k и m/n , выражает фундаментальное свойство центральной проекции, имеющее большое теоретическое и практическое значение для фотографической астрометрии.

Докажем это свойство. Рассмотрим центральную проекцию дуги $\cup \Sigma_1 \Sigma_2$ большого круга небесной сферы на плоскость Π с заданной точкой каса-

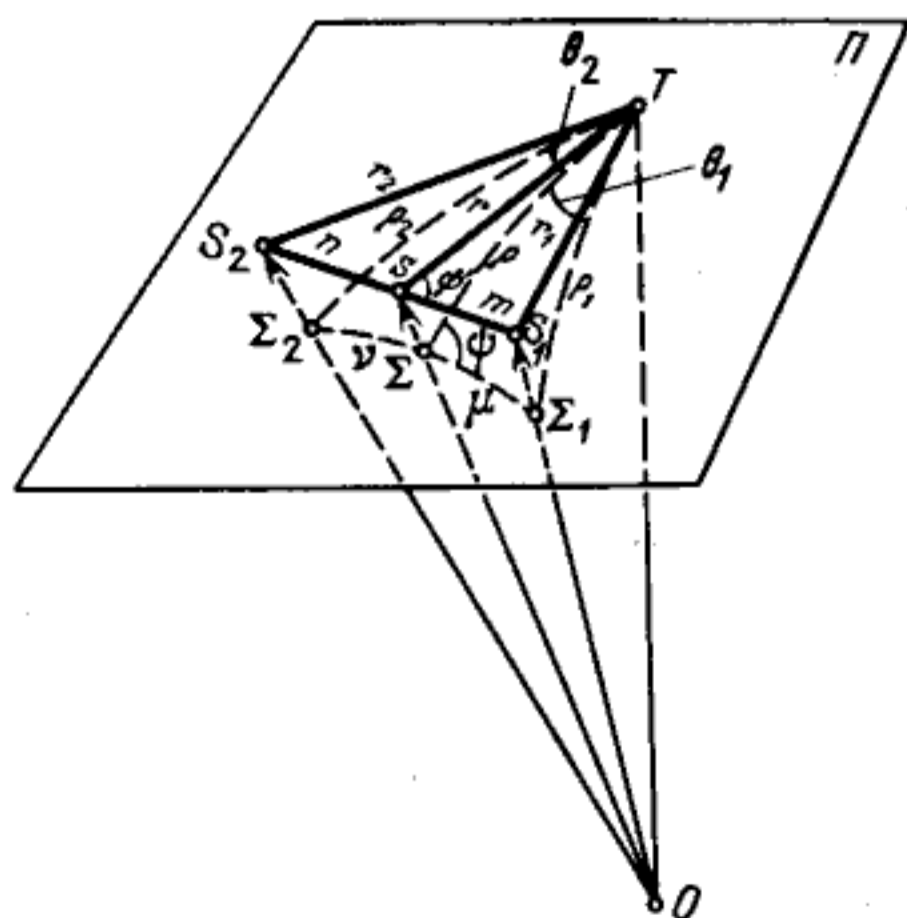


Рис. 16. Геометрическое построение для обоснования интерполяционного метода:

O — центр проекции, Π — картинная плоскость (пластинка Π), T — оптический центр пластинки Π , $\Sigma_1 T \Sigma_2$ и $S_1 T S_2$ — сферический треугольник и его проекция на плоскость Π , $\cup \Sigma_1 \Sigma_2$ и $S_1 S_2$ — дуга большого круга и ее изображение на плоскости Π

ния T (рис. 16). Данную плоскость Π примем за плоскость идеальной астрофотографии с заданным оптическим центром в точке T и масштабом $1/f_0$. Изображением дуги $\sphericalangle \Sigma_1 \Sigma_2$ служит отрезок $\overline{S_1 S_2}$, положение которого относительно оптического центра определим отрезками TS_1 и TS_2 :

$$|TS_1| = r_1 = f_0 \operatorname{tg} \rho_1, \quad |TS_2| = r_2 = f_0 \operatorname{tg} \rho_2. \quad (4.62)$$

На отрезке $\overline{S_1 S_2}$ отметим точку S , делящую этот отрезок на две части $\overline{S_1 S} = m$, $\overline{SS_2} = n$ в соответствии с определением (4.58). Соответствующая этой точке звезда Σ на небесной сфере лежит на дуге большого круга $\sphericalangle \Sigma_1 \Sigma_2$, и мы можем положить

$$\sphericalangle \Sigma_1 \Sigma = \mu, \quad \sphericalangle \Sigma \Sigma_2 = \nu. \quad (4.63)$$

Поставим себе задачу: определить величину отношения

$$k = \frac{\sin \mu}{\sin \nu}, \quad (4.64)$$

считая известными m/n , r_1 , r_2 , т.е. все параметры, которые могут быть определены непосредственно из измерений пластинки Π .

Решение получим из простых сферо-тригонометрических соотношений. Рассмотрим соответствующие плоский и сферический треугольники $TS_1 S_2$ и $\sphericalangle T \Sigma_1 \Sigma_2$ (рис. 16). Из точки касания T проведем радиусы TS и $\sphericalangle T \Sigma$ и введем обозначения θ'_1 , θ'_2 , ψ' для плоских углов и θ_1 , θ_2 , ψ для соответствующих сферических углов на небесной сфере. Теперь воспользуемся теоремой синусов:

$$\begin{aligned} m \sin \psi' &= r_1 \sin \theta'_1, \\ n \sin \psi' &= r_2 \sin \theta'_2, \\ \sin \mu \sin \psi &= \sin \rho_1 \sin \theta_1, \\ \sin \nu \sin \psi &= \sin \rho_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Здесь $\theta'_1 = \theta$ и $\theta'_2 = \theta$, так как вершины этих углов совпадают с точкой касания небесной сферы и картинной плоскости, т.е. с оптическим центром пластинки. Из (4.65) непосредственно следует

$$k = \frac{\sin \mu}{\sin \nu} = \frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} \frac{r_2}{r_1} \frac{m}{n}. \quad (4.66)$$

Заменяя r_1 и r_2 их определением согласно (4.62), приходим к формуле (4.61), что и требовалось доказать.

Для вычисления параметра k согласно (4.66) можно применить два варианта вычислений, зависящих от способа задания оптического центра рабочей пластинки T , которая, согласно нашему предположению, аффинна относительно Π . Так, в случае задания оптического центра его экваториаль-

ными координатами A и D , имеем

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{m}{n} \frac{\cos \rho_1}{\cos \rho_2} = \frac{m}{n} \frac{R_T R_1}{R_T R_2} = \\ &= \frac{m}{n} \frac{\sin \delta_1 \sin D + \cos \delta_1 \cos D \cos(\alpha_1 - A)}{\sin \delta_2 \sin D + \cos \delta_2 \cos D \cos(\alpha_2 - A)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Здесь R_T, R_1, R_2 — единичные векторы направлений оптического центра и узлов интерполяции, остальные обозначения те же, что и в гл. 2.

В случае задания оптического центра с помощью меток (измеренные координаты центра симметрии меток x_T, y_T) вычисляют r_1 и r_2 непосредственно по данным измерений изображений звезд S_1, S_2 и меток на пластинке P , а затем определяют $\cos \rho_1$ и $\cos \rho_2$, используя известное фокусное расстояние f_0 телескопа. Соответственно во втором случае имеем

$$\begin{aligned} \kappa &= (m/n) (\cos \rho_1 / \cos \rho_2) = (m/n) \sqrt{(f_0^2 + r_2^2) / (f_0^2 + r_1^2)} = \\ &= (m/n) (1 + \Delta r \bar{r} / f_0^2 + \dots), \text{ где } \Delta r = r_2 - r_1, \quad \bar{r} = (r_2 + r_1) / 2. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Поскольку обычно $f_0 \gg r_0$ и $f_0 \gg \Delta r$, то измерения r_1 и r_2 достаточно выполнить приближенно, можно на два-три порядка грубее, чем измерения изображений звезд; это равносильно заданию приближенного положения оптического центра, что всегда имеет место на практике.

Первый вариант вычисления κ предпочтительнее при редукции фотографических наблюдений, полученных на астрографах классического типа, второй вариант — при обработке наблюдений, полученных на спутниковых камерах. Исторически второй вариант вычисления κ принадлежит основному алгоритму интерполяционного метода (Киселев, 1959).

З а м е ч а н и е. Вычисления κ согласно (4.67) и (4.68) не эквивалентны. В первом случае фактор $\cos \rho_1 / \cos \rho_2$, учитывающий положение узлов интерполяции относительно оптического центра, вычисляется на основе средних координат опорных звезд и оптического центра как фиктивной звезды, и, следовательно, не может учесть смещение реального оптического центра пластинки относительно заданного, происходящее вследствие дифференциальной рефракции.

Во втором случае фактор $\cos \rho_1 / \cos \rho_2$ вычисляется на основе измерений реальной пластинки, на которой положение оптического центра относительно узлов интерполяции определяется с помощью измеренных координат; следовательно, в этом случае смещение оптического центра вследствие дифференциальной рефракции учитывается. Указанное различие в способах вычисления фактора $\cos \rho_1 / \cos \rho_2$ должно приводить к систематическому расхождению результатов редукции в зависимости от способа задания оптического центра. Однако это различие невелико, так как влияние дифференциальной рефракции в данном случае проявляется как эффект наклонности, т.е. эффект второго порядка. Ниже, в разделе 5.3 этой главы, нами показано, что систематическая ошибка результата редукции, зависящая от не полностью скомпенсированного влияния дифференциальной рефракции (членов второго порядка) в интерполяционном методе несколько меньше, если фактор $\cos \rho_1 / \cos \rho_2$ вычислять вторым способом по формуле (4.68). В первом способе ошибка, зависящая от

рефракции, в интерполяционном методе будет такой же, как в методе шести постоянных.

4.5. Интерполяционный метод и метод депенденсов — общность и различия. Как видно из геометрической схемы интерполяционного метода (см. (4.60), рис. 15) и механической интерпретации метода депенденсов Шлезингера (см. (4.43), рис. 14), в обоих случаях ставится задача об определении положения объекта внутри системы опорных звезд с помощью линейной интерполяции, причем коэффициентами интерполяции служат: в первом случае — отношения отрезков $(m/n)_i$, во втором случае — условные веса $\{D_j\}$. И те, и другие величины по определению инвариантны линейному преобразованию измеренных координат.

Поставим себе задачу: для данной интерполяционной схемы с заданной системой отношений отрезков $\{m/n\}$ найти соответствующие условные веса $\{D_j\}$, удовлетворяющие условиям (4.43). Решим также и обратную задачу: для данной системы весов $\{D_j\}$, удовлетворяющих условиям (4.43) и (4.44), найти соответствующую систему отношений отрезков $\{m/n\}$.

Рассмотрим сперва простейший случай, когда объект определяется по трем опорным звездам (рис. 15, а), и найдем веса опорных звезд из сопоставления геометрической и барицентрической моделей. Условие равновесия системы с невесомыми стержнями запишем так:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{m}{n}, \quad \frac{D_3}{D_1 + D_2} = \frac{p}{q}. \quad (4.69)$$

К условию (4.69) присоединим условие нормировки

$$D_1 + D_2 + D_3 = 1. \quad (4.70)$$

Теперь у нас три уравнения с тремя неизвестными. Условные веса определяются однозначно:

$$D_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 + \frac{p}{q}\right)}, \quad D_2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 + \frac{p}{q}\right)}, \quad (4.71)$$

$$D_3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{p}\right)}.$$

Подставляя в (4.71) выражения отношений отрезков с помощью площадей треугольников (4.59), придем к следующим формулам, определяющим депенденсы

$$D_1 = \frac{(230)}{(123)}, \quad D_2 = \frac{(310)}{(123)}, \quad D_3 = \frac{(120)}{(123)}. \quad (4.72)$$

Здесь применены обозначения (abc) для удвоенных площадей треугольников, такие же, как и в случае определения отношений отрезков.

Итак, формулы (4.71) решают прямую задачу, а формулы (4.69) — обратную задачу в простейшем случае.

Теперь рассмотрим общий случай. Интерполяционная схема в случае N опорных звезд определяется $N - 1$ параметрами $(m/n)_0, (m/n)_1, \dots, (m/n)_{N-2}$ из которых $N - 3$ произвольны и могут быть выбраны астрономом с учетом специфики задачи. Оставшиеся два параметра, например $(m/n)_0$ и $(m/n)_1$, вычисляются по схеме с тремя опорными звездами (4.59). Уравнения для определения весов D_j имеют смысл условий равновесия на каждом прямолинейном участке интерполяционной схемы, как и в случае трех опорных звезд. Например, условие равновесия для отрезка N_1N_2 , проходящего через определяемый объект, записывается в виде

$$\frac{D_k + D_{k+1} + D_{k+2} + \dots + D_N}{D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_{k-1}} = \left(\frac{m}{n}\right)_0. \quad (4.73)$$

Здесь в числителе суммируются веса всех звезд, примыкающих к узловой точке N_2 , а в знаменателе — веса звезд, примыкающих к N_1 . Условия равновесия, записанные в форме (4.73), и условия (4.43) эквивалентны, так как обе эти системы уравнений выражают условия для центра масс механической системы из N материальных точек, соединенных невесомыми жесткими стержнями. Условие нормировки сохраняется:

$$D_1 + D_2 + \dots + D_N = 1. \quad (4.74)$$

Решая систему типа (4.73) — (4.74), приходим к следующим выражениям депенденсов через параметры интерполяционной схемы:

$$D_k = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)_1\right] \left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)_2\right] \dots \left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)_0\right]}. \quad (4.75)$$

Здесь знаменатель образован согласно следующему правилу: если ломаная линия, состоящая из s звеньев интерполяционной схемы, на пути от изображения опорной звезды S_k к объекту S_0 представлена отрезками $m_1, n_2, \dots, n_{s-1}, m_0$, то знаменатель выражения D_k равен произведению s множителей вида

$$\left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)_1\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{n}{m}\right)_2\right] \dots \left[1 + \left(\frac{n}{m}\right)_{s-1}\right] \left[1 + \left(\frac{m}{n}\right)_0\right]. \quad (4.76)$$

Сформулированное правило обобщает последовательность операций при решении систем уравнений типа (4.73) — (4.74). Решение обратной задачи в общем случае задается условиями равновесия типа (4.73), т.е. так же, как и в случае трех опорных звезд. Таким образом, мы установили однозначное геометрическое соответствие между интерполяционными параметрами, имеющими смысл отношения отрезков $\{m/n\}$ и условными нормированными весами $\{D\}$ — депенденсами Шлезингера.

Обе системы величин, зависящие только от относительных измеренных координат изображений звезд и объекта на рабочей пластинке, корректно

(строго) обеспечивают решение задачи определения фотографического положения объекта с помощью опорных звезд при одном и том же условии, а именно: при условии аффинности пластинок P и Π . Следовательно, можно сделать вывод об эквивалентности двух методов редукции, использующих различный математический аппарат: метода Шлезингера или интерполяционного метода. Отметим, однако, и существенное различие этих методов. В интерполяционном методе результат редукции зависит от $N - 1$ параметров $\{m/n\}$, из которых $N - 3$ произвольны. Соответственно, по формулам (4.75) можно вычислить множество систем весов $\{D\}$, зависящих от выбранной интерполяционной схемы.

Каждая из этих систем удовлетворяет условиям (4.43) и позволяет определить положение объекта ξ_0, η_0 на пластинке Π , аффинной относительно P , а следовательно, и его сферические координаты α_0, δ_0 . Все эти координаты, как следует из (4.47), могут различаться между собой лишь в пределах линейной комбинации ошибок положений опорных звезд $\Delta\xi_j, \Delta\eta_j$, фиксированных при данной выборке опорных звезд и условных нормированных весов D_j , изменяющихся вместе с параметрами интерполяционной схемы. Следовательно, решение в интерполяционном методе неоднозначно и может зависеть от выбранной схемы интерполяций. Напротив, в методе депенденсов Шлезингера решение однозначно, так как оно определяется единственным набором весов $\{D^*\}$, удовлетворяющих не только (4.43), но и (4.44). Данному (оптимальному) набору весов $\{D^*\}$ можно поставить в соответствие такой же оптимальный набор параметров интерполяции $\{(m/n)^*\}$, на основе которого можно получить решение интерполяционным методом, совпадающее с решением методом депенденсов. Таким образом, приходим к следующему выводу: метод депенденсов Шлезингера является частным случаем общего интерполяционного метода, в котором реализуется оптимальная система весов, удовлетворяющих условию $[D^2] = \min$. Метод Шлезингера доставляет единственное решение в задаче определения фотографического положения небесного объекта, а в интерполяционном методе решение может зависеть от выбранной схемы интерполяции.

4.6. Векторная интерпретация метода депенденсов Шлезингера и интерполяционного метода. Как уже отмечалось, эквивалентные методы — Шлезингера и интерполяционный — используют различный математический аппарат. Метод Шлезингера использует традиционные тангенциальные координаты, а интерполяционный — единичные векторы звезд и формулу большого круга. Но тангенциальные координаты не являются неотъемлемой частью метода депенденсов; с другой стороны, изложенный выше аппарат интерполяционного метода довольно громоздок, так как предполагает последовательные вычисления координат узловых точек (фиктивных звезд), не представляющих интереса для задачи в целом. Поэтому естественно поставить задачу о создании такого оптимального математического аппарата, который бы одинаково экономно обслуживал оба метода. Такой аппарат предлагает нам алгебра единичных векторов, которая во многих случаях с успехом подменяет традиционный подход с использованием сферической тригонометрии.

Итак, вернемся к схеме решения по методу депенденсов. Система весов $\{D_j\}$ предполагается уже известной. Решение в тангенциальных коорди-

натах задается формулами (4.47), к которым мы присоединяем условие нормировки

$$\sum_{j=1}^n D_j \xi_j = \xi_0, \quad \sum_{j=1}^n D_j \eta_j = \eta_0, \quad \sum_{j=1}^n D_j = 1. \quad (4.77)$$

Домножим каждое из уравнений (4.77) соответственно на орты $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ тангенциального триэдра пластинки Π и результаты сложим. Найдем

$$\sum_{j=1}^n D_j (\xi_j \vec{\xi}^0 + \eta_j \vec{\eta}^0 + \zeta_j \vec{\zeta}^0) = \xi_0 \vec{\xi}^0 + \eta_0 \vec{\eta}^0 + 1 \cdot \vec{\zeta}^0. \quad (4.78)$$

Используя здесь обозначения, введенные в § 1 гл. 3, получим

$$\sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j r_j = \sec \rho_0 r_0. \quad (4.79)$$

Здесь r_j — единичные векторы опорных звезд и $\sec \rho_j = 1/(r_j r_T)$ — величины известные, поскольку оптический центр пластинки Π (вектор r_T) предполагается заданным, $\sec \rho_0$ — величина неизвестная (пока не определен вектор r_0), но может рассматриваться как нормирующий множитель при r_0 .

Сферические координаты объекта вычисляются непосредственно:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_0 &= \frac{Y_0}{X_0} = \frac{\sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j Y_j}{\sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j X_j}, \\ \operatorname{tg} \delta_0 &= \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} = \frac{\sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j Z_j}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j X_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j Y_j\right)^2}}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Запишем также выражение для нормирующего множителя $\sec \rho_0$, которое можно использовать для контроля вычислений сумм, участвующих в формулах (4.80):

$$\sec \rho_0 = \sqrt{\sum_{j=1}^n D_j^2 \sec^2 \rho_j + 2 \sum_{l \neq j} D_l D_j \sec \rho_l \sec \rho_j \cos \sigma_{lj}}. \quad (4.81)$$

Здесь введено обозначение

$$\cos \sigma_{ij} = r_i r_j \quad (4.82)$$

для косинусов сторон (диагоналей) фигуры опорных звезд.

Поскольку $\sec \rho_0$ можно считать известным, запишем также и выражение для составляющих единичного вектора объекта:

$$\begin{aligned} X_0 &= \cos \rho_0 \sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j X_j, \\ Y_0 &= \cos \rho_0 \sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j Y_j, \\ Z_0 &= \cos \rho_0 \sum_{j=1}^n D_j \sec \rho_j Z_j. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Формулы (4.80)–(4.83) решают задачу. Поскольку вывод этих формул никак не связан с условием $[D^2] = \min$, заключаем, что они одинаково строго могут применяться как для вычислений координат объекта в методе Шлезингера, так и в интерполяционном методе. В последнем случае, однако, необходимо от параметров типа m/n перейти к весовым коэффициентам D_j . Посредничество тангенциальных координат становится излишним. Если же необходимо учесть влияние дифференциальной рефракции (абберации), то единичные векторы опорных звезд, участвующие в левых частях формулы (4.79), необходимо преобразовать к "видимым положениям", т.е. совершить над ними операцию, условно названную нами прямым рефракционным преобразованием (2.13). Вычисленный таким образом в итоге редукции (формулы (4.83)) единичный вектор положения объекта необходимо вернуть на среднее место, т.е. подвергнуть его обратному рефракционному преобразованию (формула (2.13')).

Рассмотренный здесь вычислительный алгоритм существенно упрощает процедуру вычисления координат одиночного объекта на астрофотографии. Однако в этом алгоритме не предусмотрен контроль грубых ошибок измерений и оценки ошибок редукции, поэтому на практике данный алгоритм всегда дополняется вычислением постоянных пластинки по способу наименьших квадратов, а также вычислением невязок заданных и вычисленных тангенциальных координат и определением ошибки единицы веса. Подробнее об этом см. в гл. 5.

§ 5. Применение депенденсов Шлезингера к исследованию остаточных ошибок астрометрической редукции линейными методами

5.1. Выражение ошибки результата редукции через депенденсы Шлезингера. Алгоритм решения по методу депенденсов позволяет вполне строго проследить влияние конкретных погрешностей исходных данных астрометрической редукции (т.е. ошибок измеренных координат опорных звезд и ошибок их положений в каталогах на результат редукции.

Введем следующие обозначения:

$\Delta x_j, \Delta y_j$ — компоненты конкретной ошибки измеренных координат изображения j -й звезды;

ϵ_m — среднеквадратическая ошибка измерений опорных звезд на рабочей пластинке P ;

$\Delta \xi_{j*}, \Delta \eta_{j*}$ — компоненты конкретной ошибки положения j -й опорной звезды в каталоге на эпоху наблюдений, пересчитанные на систему тангенциальных координат с заданным центром, т.е. каталожная погрешность j -й опорной звезды, отнесенная к плоскости пластинки Π ;

ϵ_* — среднеквадратическая ошибка в каталоге положений опорных звезд на эпоху наблюдений (в смысле п. 4.1), отнесенная к плоскости пластинки Π ;

$\Delta x_0, \Delta y_0$ — компоненты конкретной ошибки измеренных координат объекта;

ϵ_{0m} — среднеквадратическая ошибка измерений координат объекта на пластинке P ;

$\Delta\xi_{0c}, \Delta\eta_{0c}$ — компоненты ошибки вычисленного положения объекта в системе координат пластинки П,

D_j — условные веса j -й опорной звезды, вычисленные согласно (4.43) или (4.75) на основе измеренных (ошибочных) координат опорных звезд и объекта на пластинке P .

Теперь обратимся к алгоритму астрометрической редукции с условными весами (депенденсами Шлезингера). Пусть для некоторой данной конфигурации N опорных звезд и объекта вычислены на основе измерений пластинки P условные веса $\{D_j\}$. По определению эти веса удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x_0 + \Delta x_0 &= \sum_{j=1}^N D_j(x_j + \Delta x_j), & y_0 + \Delta y_0 &= \sum_{j=1}^N D_j(y_j + \Delta y_j), \\ 1 + 1 &= \sum_{j=1}^N D_j + 1. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Здесь x_j, y_j и x_0, y_0 — правильные (нам неизвестные) измеренные координаты опорных звезд и объекта, $\{x_j + \Delta x_j, y_j + \Delta y_j\}$ и $x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0$ — фактически измеренные на пластинке P координаты. Теперь от пластинки P перейдем к пластинке П, аффинной относительно P . Для этого воспользуемся постоянными пластинок a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 и домножим первое из соотношений (4.84) на a_1 , второе — на b_1 , третье — на c_1 . Полученные произведения сложим. Аналогично поступим с постоянными a_2, b_2, c_2 . Получим

$$\begin{aligned} \xi_0 + \Delta\xi_{0m} &= \sum_{j=1}^N D_j(\xi_j + \Delta\xi_{jm}), \\ \eta_0 + \Delta\eta_{0m} &= \sum_{j=1}^N D_j(\eta_j + \Delta\eta_{jm}), \end{aligned} \quad (4.85)$$

где при ошибках $\Delta\xi_0, \Delta\eta_0$ и $\Delta\xi_j, \Delta\eta_j$ введен второй подстрочный индекс m , чтобы отметить то обстоятельство, что эти ошибки произошли в результате неточных измерений. Что касается тангенциальных координат $\xi_0, \eta_0, \xi_j, \eta_j$, то можно считать, что они сохраняют смысл точных величин, поскольку они вычислены на основе безошибочных измерений с правильными постоянными (о последних нам достаточно знать только то, что они существуют). Уместно отметить: соотношения (4.86)

$$\begin{aligned} \xi_0 &\neq \sum_{j=1}^N D_j \xi_j, \\ \eta_0 &\neq \sum_{j=1}^N D_j \eta_j, \end{aligned} \quad (4.86)$$

могут не выполняться, так как $\{D\}$ определены из условий (4.43), (4.84), включающих ошибки измерений.

Теперь нетрудно определить искомые ошибки координат объекта, зависящие от всех ошибок исходных данных. Для этого, во-первых, формально применим формулы (4.47) для вычислений тангенциальных ко-

ординат объекта и получим

$$\xi_{0c} = \sum_{j=1}^N D_j (\xi_j + \Delta \xi_{j*}), \quad \eta_{0c} = \sum_{j=1}^N D_j (\eta_j + \Delta \eta_{j*}). \quad (4.87)$$

Во-вторых, образуем разности $\xi_{0c} - \xi_0$ и $\eta_{0c} - \eta_0$, которые по определению равны искомым ошибкам. Раскрывая эти разности координат с помощью соотношений (4.85), (4.87), будем иметь

$$\Delta \xi_{0c} = \xi_{0c} - \xi_0 = \Delta \xi_{0m} + \sum_{j=1}^N D_j (\Delta \xi_{j*} - \Delta \xi_{jm}), \quad (4.88)$$

$$\Delta \eta_{0c} = \eta_{0c} - \eta_0 = \Delta \eta_{0m} + \sum_{j=1}^N D_j (\Delta \eta_{j*} - \Delta \eta_{jm}).$$

Этот результат можно наглядно представить, введя в рассмотрение векторы e соответствующих ошибок, лежащих в плоскости пластинки Π :

$$e = \Delta \xi \vec{\xi}^0 + \Delta \eta \vec{\eta}^0; \quad (4.89)$$

тогда получим окончательно

$$e_{0c} = e_{0m} + \sum_{j=1}^N D_j (e_{j*} - e_{jm}). \quad (4.90)$$

Смысл формулы (4.90) очевиден. Первое слагаемое — ошибка измерений объекта — входит в вычисленные координаты объекта полновесно, второе слагаемое — линейная комбинация ошибок измеренных и каталожных координат опорных звезд и их весов — входит в результат редукции в смягченной форме, поскольку в нормальной (равновесной) конфигурации опорных звезд и объекта веса D_j близки к $1/N$.

Выводы. 1. Результат (4.90) показывает, что в случаях астрометрической редукции методами Шлезингера или интерполяционным ошибка вычисленного положения объекта однозначно определяется ошибками исходных данных и условными весами (т.е. конфигурацией) опорных звезд относительно выбранного объекта. Этот вывод, очевидно, распространяется также и на результаты редукции любым другим строгим линейным методом (в частности, он справедлив и для метода шести постоянных Тернера), поскольку все линейные методы, исходящие из аффинности пластинок P и Π , эквивалентны.

2. Формулы (4.88) и (4.90) показывают, что ошибки измерений опорных звезд и ошибки их положений в каталогах обладают свойством аддитивности. Это важное свойство распространения ошибок разной природы доказывает справедливость нашего замечания (гл. 4, § 2) и имеет большое практическое значение, так как обосновывает применение формулы (4.20) при анализе ошибок фотографических положений звезд. До сих пор, однако, формула (4.20) не была обоснована строго.

Остановимся на следующих особенностях вывода формулы (4.90). Во-первых, оказалось, что для того чтобы получить формулу ошибок, вовсе нет необходимости знать точные начальные данные или точный результат редукции. Достаточно предположить аффинность между пластин-

ками P и Π (существование шести постоянных $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ или возможность вычислить систему $\{D\}$).

Во-вторых, формула (4.90) связывает ошибки конечной величины (в том числе и грубые). Это следует из того, что при выводе не требовалось никаких предположений о малости ошибок или их распределении.

В-третьих, при выводе соотношения (4.90) нигде не использовано условие для депенденсов Шлезингера (4.44), а именно $[D^2] = \min$, оказалось достаточным выполнение более слабого требования (4.43). Это показывает, что в интерполяционной схеме с $N - 3$ произвольными параметрами $\{m/n\}$ можно получить другое распределение ошибок, чем в методе депенденсов Шлезингера. В этом заключается свойство "избирательности" интерполяционного метода.

5.2. Оценка точности астрометрической редукции линейными методами в случайном отношении. Формула ошибок (4.90) позволяет получить удобные оценки точности астрометрической редукции при применении линейных методов. Действительно, достаточно предположить, что связанные с соотношением (4.90) конечные смещения $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ имеют характер случайных ошибок с известным среднеквадратическим рассеянием и применить к этим соотношениям статистический подход. Тогда получим

$$\epsilon_{0c}^2 = \epsilon_{0m}^2 + (\epsilon_*^2 + \epsilon_m^2) \sum_{j=1}^N D_j^2. \quad (4.91)$$

Здесь использованы обозначения среднеквадратических ошибок начальных данных редукции, которые мы определили в разделе 5.1.

Два слагаемых формулы (4.91) соответствуют основным составляющим полной ошибки координат объекта при редукции линейными методами. Первое слагаемое характеризует точность измерений объекта, второе — совокупное влияние ошибок опорных звезд.

Множитель $(\epsilon_*^2 + \epsilon_m^2)$ отражает свойство аддитивности ошибок измерений и ошибок положений опорных звезд в каталоге в случае применения линейных методов редукции. Принято, что ошибки измерений и положений всех опорных звезд, участвующих в редукции, примерно одинаковы. Влияние конфигурации проявляется через фактор $[D^2]$. В оптимальном случае, когда объект находится в центре симметрии опорных звезд, $[D^2] = 1/N$, но обычно

$$[D^2] > \frac{1}{N}, \quad (4.92)$$

и опорные звезды выбирают так, чтобы фактор $[D^2]$ лишь незначительно превышал $1/N$. Вторую составляющую ошибки ϵ_{0c} обычно называют ошибкой редукции. Она надежно оценивается в процессе редукции, если применен способ наименьших квадратов для определения постоянных пластинки и вычислены невязки $\{v_j\}$ условных уравнений. В этом случае ошибка единицы веса равна геометрической сумме средних квадратических ошибок измерений и каталожных положений опорных звезд, т.е. имеем

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{N-3}} = \sqrt{\epsilon_*^2 + \epsilon_m^2}. \quad (4.93)$$

Теперь ясно, почему вычисление депенденсов в методе Шлезингера (по схеме с коррелятами) приводит к лучшему по точности результату в случайном отношении: потому что только в этом случае выполняется условие $[D^2] = \min$ и, следовательно, достигается минимальное значение ϵ_{0c} .

5.3. Систематические ошибки результата редукции линейными методами, зависящие от наклонности, дисторсии и рефракции. Остановимся на применении формулы ошибок (4.90) для исследования некоторых важных систематических ошибок результата астрометрической редукции линейными методами, а именно тех, которые возникают вследствие: 1) погрешности принятого положения оптического центра астрофотографии, 2) пренебрежения учетом дисторсии в измеренных координатах опорных звезд и объекта, 3) применения средних координат опорных звезд вместо видимых в смысле рефракции и абберации, т.е. вследствие пренебрежения нелинейным эффектом дифференциальной рефракции и абберации.

Рассмотрение этих вопросов принципиально важно и актуально, поскольку линейные методы редукции являются наиболее выгодными с точки зрения статистики. Они обеспечивают такую же точность результата, что и нелинейные методы, но при существенно меньшем числе опорных звезд (подробнее об этом см. ниже, в гл. 5). С другой стороны, имеется известное предубеждение против линейных методов, которые, вообще говоря, могут стать источником больших систематических ошибок, если применять их в трудных условиях редукции, например, в случаях больших полей, неисследованной дисторсии, неопределенности положения оптического центра, больших зенитных расстояний.

Эти предубеждения возникают вследствие распространенной практики оценивать ошибки результатов редукции с помощью тех членов второго порядка наклонности (или дифференциальной рефракции), которые табулированы в учебных монографиях (Дейч, 1951; Кёниг, 1933) в качестве поправок "за ошибку в наклонности" или поправок "за члены второго порядка дифференциальной рефракции". В действительности эти члены второго порядка значительно больше той ошибки в координатах объекта редукции, которая может возникать вследствие игнорирования упомянутых членов второго порядка. Происходит это вследствие интерполяционных и статистических свойств методов фотографической астрометрии, которые проявляются в том, что какие бы ни были случайные или систематические ошибки измеренных и тангенциальных координат опорных звезд, в итоге редукции всегда достигается наилучшее соответствие между этими координатами в рамках той модели, которая заложена в принятом методе редукции (в нашем случае — в рамках линейной модели).

Наша задача в этом разделе состоит в том, чтобы найти правильные оценки остающейся после редукции систематической погрешности вычисленного положения объекта в трех вышеуказанных случаях, когда редукция линейными методами осложнена. Упомянутые систематические ошибки впредь условимся называть остаточными ошибками редукции. В этом параграфе будут рассмотрены остаточные ошибки наклонности, остаточные ошибки дисторсии и остаточные ошибки дифференциальной рефракции. Результаты нашего анализа помогут нам определить область применимости линейных методов редукции в зависимости от условий наблюдений и условий обработки. Задачу решим на основе формулы (4.88),

где ошибки измерений или ошибки звездных положений будем рассматривать как систематические ошибки, зависящие от тех или иных факторов редукции.

5.3а. Остаточная ошибка наклонности. Эта ошибка в координатах объекта возникает в случаях применения для редукции линейных методов, если принятое положение оптического центра (точка $T(A, D)$) астрофотографии не совпадает с ее истинным центром (точкой T_0). В соответствии с этими данными тангенциальные координаты опорных звезд отнесены к пластинке сравнения Π , наклоненной относительно рабочей пластинки P на некоторый небольшой угол τ равный $|\sim T_0 T|$. Введем вектор погрешности принятого положения оптического центра

$$E_T = \overrightarrow{T_0 T} = p\vec{\xi}^0 + q\vec{\eta}^0, \quad (4.94)$$

где p и q — составляющие этого вектора, отнесенные к осям $T\xi$ и $T\eta$ на плоскости P . Согласно определению

$$\sqrt{p^2 + q^2} = \tau. \quad (4.95)$$

Чтобы произвести в этих условиях редукцию каким-либо из линейных методов, строго говоря, необходимо "исправить" измеренные координаты за наклонность, т.е. перейти от пластинки P к пластинке Π . Соответствующее преобразование (см. гл. 3, формулы (3.49)) определяет разности тангенциальных координат близких пластинок Π_1 и Π_2 , каковыми в нашем случае являются пластинки P и Π . Рассматривая эти разности координат, взятые с обратным знаком, как ошибки измеренных координат опорных звезд и объекта на пластинке P , придем к следующим выражениям искомым систематических ошибок:

$$\Delta\xi_m = \xi_P - \xi_\Pi = p - \eta\Delta\psi + p\xi^2 + q\xi\eta, \quad (4.96)$$

$$\Delta\eta_m = \eta_P - \eta_\Pi = q + \xi\Delta\psi + p\xi\eta + q\eta^2.$$

Здесь $\Delta\psi$ — малый угол поворота, на который могут отличаться системы координат пластинок P и Π . Подставляя теперь выражения (4.96) в формулы ошибок (4.88), получим

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{ст} &= p - \eta_0\Delta\psi + p\xi_0^2 + q\xi_0\eta_0 - \\ &- \sum_{j=1}^N D_j(p - \eta_j\Delta\psi + p\xi_j^2 + q\xi_j\eta_j), \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\Delta\eta_{ст} = q + \xi_0\Delta\psi + p\xi_0\eta_0 + q\eta_0^2 - \sum_{j=1}^N D_j(q + \xi_j\Delta\psi + p\xi_j\eta_j + q\eta_j^2).$$

Здесь вместо общих обозначений остаточной ошибки положения объекта $\Delta\xi_{0с}$, $\Delta\eta_{0с}$ введено обозначение остаточной ошибки $\Delta\xi_{ст}$, $\Delta\eta_{ст}$, зависящей от наклонности.

Выражения (4.97) упрощаются, если воспользоваться основным свойством условных весов (4.43). Например,

$$p - \sum_{j=1}^N D_j p = 0, \quad \eta_0 - \sum_{j=1}^N D_j \eta_j = 0 \text{ и т.д.}$$

В результате этих упрощений получим

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{CT} &= p(\xi_0^2 - \sum_{j=1}^N D_j \xi_j^2) + q(\xi_0 \eta_0 - \sum_{j=1}^N D_j \xi_j \eta_j), \\ \Delta\eta_{CT} &= q(\eta_0^2 - \sum_{j=1}^N D_j \eta_j^2) + p(\xi_0 \eta_0 - \sum_{j=1}^N D_j \xi_j \eta_j).\end{aligned}\tag{4.98}$$

Дальнейшие упрощения получим, введя местную систему координат опорных звезд относительно объекта, т.е. заменяя ξ_j, η_j согласно (4.98):

$$\xi_j = \xi_0 + \xi'_j, \quad \eta_j = \eta_0 + \eta'_j.\tag{4.99}$$

После несложных преобразований получим окончательно

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{CT} &= -p \sum_{j=1}^N D_j \xi_j'^2 - q \sum_{j=1}^N D_j \xi_j' \eta_j', \\ \Delta\eta_{CT} &= -q \sum_{j=1}^N D_j \eta_j'^2 - p \sum_{j=1}^N D_j \xi_j' \eta_j'.\end{aligned}\tag{4.100}$$

Формулы (4.100) решают задачу об остаточной ошибке наклонности в общем виде. Однако, чтобы получить интересующие нас оценки, необходимо еще сделать некоторые выкладки. От местной системы координат $O\xi'\eta'$ перейдем к местной же системе Ouv , ориентированной осью Ov в направлении вектора погрешности оптического центра (4.94), (4.95) (рис. 17). Соответствующее преобразование координат имеет следующий вид:

$$u = \frac{1}{\tau} (q\xi' - p\eta'), \quad v = \frac{1}{\tau} (p\xi' + q\eta').\tag{4.101}$$

Здесь p/τ и q/τ равны синусу и косинусу позиционного угла, на который нужно повернуть оси Ouv , чтобы ось Ov стала бы параллельной направлению $\overrightarrow{T_0T}$. Теперь вычислим составляющие вектора остаточной ошибки наклонности e_{CT} в новой системе координат:

$$\begin{aligned}\Delta u_{CT} &= \frac{1}{\tau} (q\Delta\xi_{CT} - p\Delta\eta_{CT}) = \\ &= -\frac{1}{\tau} \{ pq([D\xi'^2] - [D\eta'^2]) + (q^2 - p^2)[D\xi'\eta'] \}, \\ \Delta v_{CT} &= \frac{1}{\tau} (p\Delta\xi_{CT} + q\Delta\eta_{CT}) = \\ &= -\frac{1}{\tau} \{ p^2[D\xi'^2] + q^2[D\eta'^2] + 2pq[D\xi'\eta'] \}.\end{aligned}\tag{4.102}$$

Для удобства записи в формулах (4.102) мы заменили все суммы по индексу j от 1 до N гауссовыми скобками.

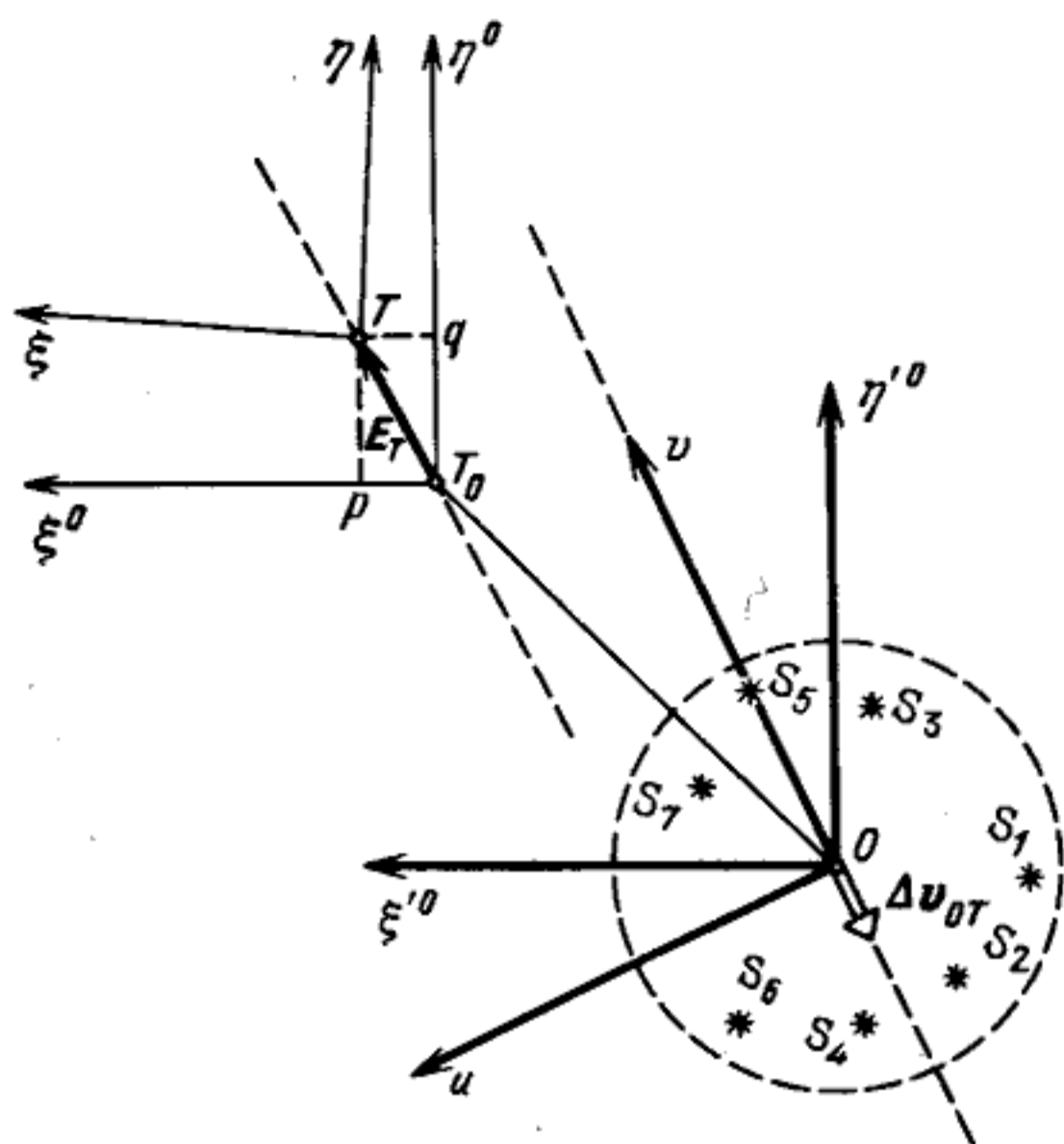


Рис. 17. Расположение осей в задаче определения остаточной ошибки наклонности в положении объекта при редукции линейными методами:

$\vec{T_0 T} = \vec{E_T}$, $|\vec{E_T}| = \tau$ — ошибка принятого положения оптического центра; O — объект астрометрической редукции; S_1, S_2, \dots, S_7 — опорные звезды, расположенные симметрично оси Ov ; $T_0 \xi \eta$ — тангенциальная система координат пластинки P ; $O \xi' \eta'$ — местная система координат; Ouv — местная система координат, ориентированная так, что $\vec{Ov} \parallel \vec{E_T}$; Δv_{0T} — остаточная ошибка наклонности

Дальнейшее преобразование формул (4.102) выполним на основе выражений

$$uv = \frac{1}{\tau^2} \{pq(\xi'^2 - \eta'^2) + (q^2 - p^2)\xi'\eta'\},$$

$$v^2 = \frac{1}{\tau^2} \{p^2\xi'^2 + q^2\eta'^2 + 2pq\xi'\eta'\},$$
(4.103)

которые вытекают из (4.101). Получим

$$\Delta u_{CT} = -\tau [Duv] \approx -\tau \overline{uv},$$

$$\Delta v_{CT} = -\tau [Dv^2] \approx -\tau \overline{v^2}.$$
(4.104)

Результат (4.104) позволяет сформулировать следующие принципиальные положения.

1. Остаточная ошибка наклонности в положении объекта не зависит от расстояний объекта и опорных звезд от оптического центра астрогографии и полностью определяется конфигурацией опорных звезд и объекта и протяженностью области опорных звезд.

2. При равномерном или симметричном относительно оси Ov расположении опорных звезд вектор остаточной ошибки наклонности e_{CT} параллелен и противоположно направлен вектору ошибки принятого положения

оптического центра астрофотографии и по величине равен произведению ошибки оптического центра и среднего из квадратов расстояний опорных звезд от прямой, проведенной перпендикулярно направлению E_T .

Воспользуемся результатами (4.104) для получения числовых оценок остаточной ошибки наклонности в некоторых характерных случаях применения линейных методов. Пусть, например, опорные звезды равномерно распределены вблизи окружности радиуса R с центром в объекте. Тогда, очевидно, $\overline{uv} = 0$, а $\overline{v^2}$ нетрудно оценить:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{R^2}{2}. \quad (4.105)$$

В случае, если опорные звезды равномерно распределены по площади круга радиуса R , получим другую оценку:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \cos^2 \theta \rho d\rho d\theta = \frac{R^2}{4}. \quad (4.106)$$

Таким образом, приходим к следующим оценкам остаточной ошибки наклонности для случаев равномерного распределения опорных звезд вблизи окружности или внутри круга:

$$e_{CT}'' = -0,137 \tau^\circ (D^\circ)^2, \quad (4.107)$$

$$e_{CT}'' = -0,068 \tau^\circ (D^\circ)^2. \quad (4.108)$$

Здесь наклонность и диаметр (τ и D) выражены в градусах, остаточная ошибка e_{CT} — в секундах дуги.

Оценки (4.107) имеют значение для практики определения фотографических положений одиночных объектов, например, больших планет, астероидов и комет с помощью широкоугольных телескопов, у которых положение оптического центра иногда бывает неопределенным в пределах $2' - 5'$. В этих условиях часто прибегают к нелинейным моделям редукции. Между тем оценки (4.107), (4.108) показывают, что если ограничиться близкими к объекту опорными звездами ($D < 2^\circ$) и произвести редукцию каким-либо линейным методом, то остаточная ошибка наклонности в положении объекта будет не более $0,1''$, т.е. значительно ниже уровня случайных ошибок измерений этих объектов. Остаточная ошибка наклонности, вычисленная в соответствии с формулой (4.107), табулирована нами в конце этого параграфа, где она сопоставлена вместе с другими остаточными ошибками, зависящими от дисторсии и дифференциальной рефракции.

В работе (Киселев, 1960) исследовано также распределение остаточных ошибок наклонности в поле идеальной широкоугольной астрофотографии, если редукция произведена линейным методом с шестью постоянными при равномерном распределении опорных звезд в некоторой области, расположенной симметрично оптическому центру. Координаты объекта u_0, v_0 в этой задаче рассматриваются как переменные. Начало этих координат перенесено в оптический центр астрофотографии, а ориен-

тировка сохранена, т.е. принято $Tv \parallel E_T$. Получены следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta u_{CT} &= u_0 v_0 \tau, \\ \Delta v_{CT} &= -(\overline{v^2} - \overline{v_0^2}) \tau. \end{aligned} \quad (4.109)$$

При выводе этих формул широко использована идеализация условий распределения опорных звезд, т.е. положено

$$[u] = [v] = [uv] = 0, \quad [v^2] = N \overline{v^2}. \quad (4.110)$$

Остаточные ошибки, вычисленные согласно (4.109) для фиктивных объектов, равномерно распределенных в области опорных звезд, по определению удовлетворяют требованиям способа наименьших квадратов, налагаемым на невязки условных уравнений в методе шести постоянных. В частности, легко проверяются следующие условия:

$$\begin{aligned} [\Delta u_{CT}] &= \tau [u_0 v_0] = 0, \\ [\Delta v_{CT}] &= \tau \{ N \overline{v^2} - [v_0^2] \} = 0. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Таким образом, можно заключить, что при отсутствии других заметных случайных или систематических ошибок начальных данных, кроме большой ошибки наклонности, в распределении невязок астрометрической редукции методом шести постоянных должен появиться систематический ход согласно формулам (4.109).

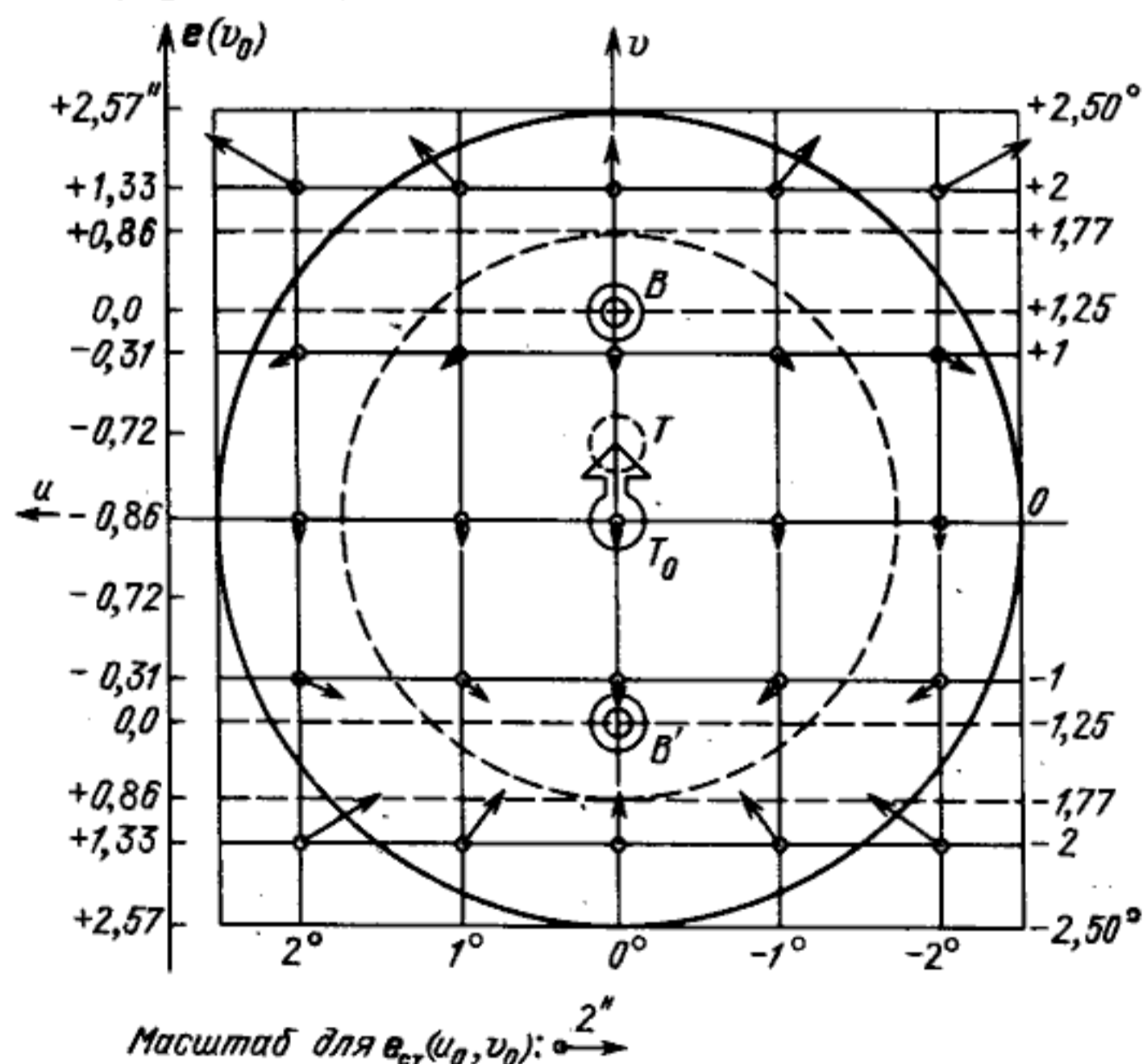


Рис. 18. Распределение остаточной ошибки наклонности $e_{CT}(u_0, v_0)$ в поле астрофотографии $5^\circ \times 5^\circ$ при редукции линейным методом со смещенным оптическим центром на $0,5^\circ$ в направлении \overline{Tv} , из положения T_0 в точку T . На шкале справа отложены координаты v в масштабе пластинки. Слева, на шкале $e(v_0)$, даны величины Δv_{CT} составляющих ошибки e_{CT} , одинаковых для всех звезд, расположенных вдоль линий $v = \text{const}$

Результат (4.109) иллюстрируется рис. 18, где наглядно представлено распределение остаточной ошибки наклонности $e_{CT}(u_0 v_0)$ по величине и направлению в зависимости от положения объекта в системе координат u, v . Составляющие векторов ошибок вычислены при следующих начальных данных: 1) область опорных звезд — круг диаметром 5° с центром в оптическом центре астрофотографии, 2) ошибка принятого положения оптического центра равна $0,5^\circ$, 3) составляющие остаточной ошибки вычислены для узловых точек в квадрате $4 \times 4^\circ$ с шагом в 1° по u и v .

Отметим следующие особенности распределения составляющих ошибки:

1. $\Delta u_{CT} = 0$ для всех точек на осях Tu и Tv .
2. $\Delta v_{CT} = f(v_0)$, т.е. эта составляющая постоянна для объектов, расположенных вдоль прямых, параллельных направлению оси Tu .
3. В области опорных звезд вблизи оси Tv найдутся две точки (B и B' на рис. 18), где остаточная ошибка наклонности равна нулю. Одна из этих точек (в области положительных v) служит центром разбегания векторов e_{CT} , другая (в области отрицательных v) служит центром сближения векторов e_{CT} .

4. В рассматриваемом случае (область опорных звезд — круг радиуса R) точки B и B' отстоят от центра области на половину радиуса ($R/2$), причем

во всей области круга $r < \frac{R}{\sqrt{2}}$ остаточная ошибка e_{CT} нигде не превосходит

по абсолютной величине ошибку в центре области, равную $R^2 \tau / 4$ в полном соответствии с оценками (4.106), (4.108).

Выявленные здесь закономерности в распределении остаточной ошибки наклонности могут помочь астроному-практику обнаружить и оценить по величине и направлению ошибку наклонности, если она достигает заметной величины.

5.36. Остаточная ошибка дисторсии. Эта ошибка в вычисленных координатах объекта возникает вследствие неучтенной дисторсии при редукции линейными методами. Для оценки остаточной ошибки воспользуемся, как и в предыдущем случае, уравнением ошибок (4.90). Ошибку, зависящую от дисторсии вида

$$\Delta r = c_3 r^3, \quad (4.112)$$

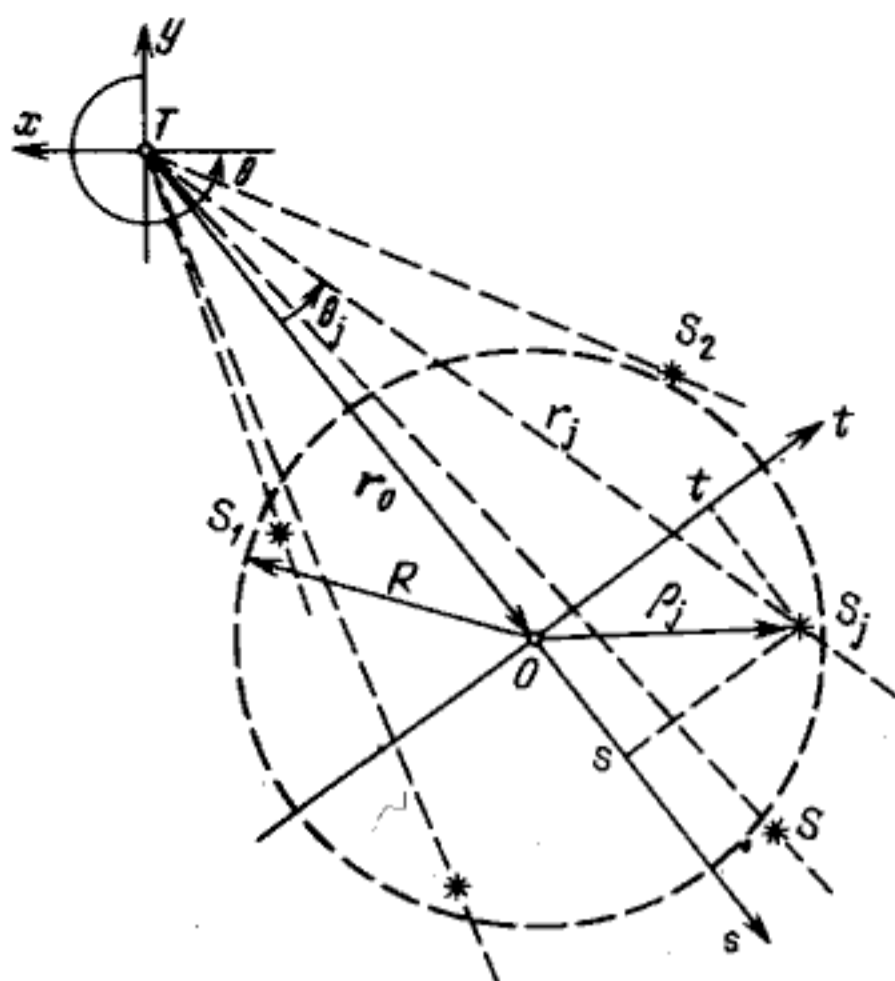
будем рассматривать в качестве ошибки измеренных координат. Для удобства выкладок введем в плоскости пластинки P местную систему координат Ost с началом в объекте, ориентированную по радиусу $Os \parallel TO$ (рис. 19). В проекции на радиус TO уравнение ошибок дает следующее выражение:

$$\Delta r_{0D} = \Delta r_0 - \sum_{j=1}^N D_j \Delta r_j \cos \theta_j. \quad (4.113)$$

Здесь Δr_{0D} — искомая остаточная ошибка дисторсии, Δr_0 и Δr_j — систематические ошибки измеренных координат объекта и опорных звезд вида (4.112), θ_j — угол между радиусом-вектором j -й опорной звезды r_j и

Рис. 19. Схема расположения опорных звезд и объекта в задаче оценивания остаточной ошибки дисторсии:

O — объект астрометрической редукции, S_1, S_2, \dots, S_j — опорные звезды, Ots — местная система координат, ориентированная так, что $\overline{Os} \parallel r_0$



радиусом-вектором r_0 объекта. Как следует из рис. 19,

$$\begin{aligned} \cos \theta_j &= (r_0 + s_j)/r_j, \quad \sin \theta_j = t_j/r_j, \\ r_j^2 &= (r_0 + s_j)^2 + t_j^2 = r_0^2 + 2r_0s_j + s_j^2 + t_j^2. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Учитывая (4.112) и (4.114), уравнение (4.113) преобразуем к виду

$$\Delta r_{0D} = c_3 r_0^3 - c_3 \sum_{j=1}^N D_j (r_0^2 + 2r_0s_j + s_j^2 + t_j^2) (r_0 + s_j).$$

Полученное выражение с помощью гауссовых скобок перепишем в следующей форме:

$$\Delta r_{0D} = -c_3 \{ 3r_0^2 [Ds] + 3r_0 [Ds^2] + r_0 [Dt^2] + [Ds(t^2 + s^2)] \}. \quad (4.115)$$

Аналогично выведем выражение для трансверсальной составляющей ошибки дисторсии

$$\Delta t_{0D} = -c_3 \{ r_0^2 [Dt] + 2r_0 [Dst] + [Dt\rho^2] \}. \quad (4.116)$$

Здесь введено дополнительное обозначение ρ для местного радиуса-вектора опорной звезды

$$\rho^2 = s^2 + t^2. \quad (4.117)$$

Результаты (4.116), (4.117) позволяют получить искомые оценки остаточной ошибки дисторсии при некоторой идеализации условий редукции, такой же, как и в случае исследования ошибки наклонности. Именно, полагая

$$[Ds] = [Dt] = [Dst] = [Ds\rho^2] = [Dt\rho^2] = 0,$$

найдем

$$\begin{aligned} \Delta r_{0D} &= -c_3 r_0 (3 \overline{s^2} + \overline{t^2}), \\ \Delta t_{0D} &= 0. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Дальнейшая идеализация условий редукции, связанная с предположением о равномерном распределении опорных звезд вблизи окружности или в круге, приводит к следующим оценкам:

случай распределения звезд вблизи окружности

$$\Delta r_{0D} = -\frac{1}{2} c_3 r_0 D^2, \quad \Delta t_{0D} = 0; \quad (4.119a)$$

случай распределения опорных звезд в круге

$$\Delta r_{0D} = -\frac{1}{4} c_3 r_0 D^2, \quad \Delta t_{0D} = 0. \quad (4.119b)$$

Размерности всех участвующих в формулах (4.119) величин — [мм], размерность величины c_3 — [мм⁻²], что неудобно в случае априорных оценок. Чтобы получить практически удобные оценки остаточной ошибки, выраженные в секундах дуги, необходимо задать фокусное расстояние телескопа f_0 , тогда оценка (4.119a) примет следующий вид:

$$\Delta r''_{0D} = -c_3 f_0^2 \cdot (0,548) r^\circ (D^\circ)^2. \quad (4.120)$$

Здесь приняты следующие размерности: $[c_3] = \text{мм}^{-2}$, $[f_0] = \text{мм}$, $[r^\circ] = [D^\circ] = \text{градус}$, $[\Delta r''] = 1''$.

Более удобной, на наш взгляд, является формула

$$\Delta r''_{0D} = -0,233'' c_3^* r^\circ (D^\circ) (f_0^*)^2, \quad (4.121)$$

где c_3^* выражено в единицах 10^{-7}мм^{-2} , а f_0^* выражено в единицах фокусного расстояния зонного астрографа, имеющего масштаб $100'' \text{мм}^{-1}$, т.е. в долях 2063 мм. По формуле (4.121) вычислены данные табл. 2.

5.3в. Остаточная ошибка рефракции. Эта ошибка возникает в связи с неполной компенсацией влияния дифференциальной рефракции (членов второго и высшего порядков) при применении линейных методов редукции. Чтобы оценить остаточную ошибку рефракции, воспользуемся, как и в предыдущих случаях, уравнением ошибок (4.90). В качестве ошибок измеренных координат будем рассматривать разности $\xi' - \xi$ и $\eta' - \eta$ видимых и вычисленных тангенциальных координат, где ξ и η отнесены к пластинке сравнения П, а ξ' , η' — к рабочей пластинке Р. Воспользуемся также представлением разностей $\xi' - \xi$ и $\eta' - \eta$ в виде рядов по степеням ξ и η до членов второго порядка включительно согласно (3.93).

Простые преобразования, аналогичные (4.96)–(4.100), приводят нас к следующему результату:

$$\begin{aligned} \Delta \xi_{0R} &= -\beta k_1 \{ (1 + k_1^2) [D\xi^{*2}] + 2k_1 k_2 [D\xi^* \eta^*] + (1 + k_2^2) [D\eta^{*2}] \}, \\ \Delta \eta_{0R} &= -\beta k_2 \{ (1 + k_1^2) [D\xi^{*2}] + 2k_1 k_2 [D\xi^* \eta^*] + (1 + k_2^2) [D\eta^{*2}] \}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Здесь $\Delta \xi_{0R}$, $\Delta \eta_{0R}$ — составляющие вектора остаточной ошибки рефракции e_{0R} ; ξ^* , η^* — координаты опорных звезд в местной системе координат (с началом в объекте), k_1 , k_2 — тангенциальные координаты астрономического зенита, отнесенные к плоскости пластинки П. Формулы (4.122) определяют остаточную ошибку рефракции в общем случае с точностью до членов второго порядка разложений дифференциальной рефракции

Формулы (4.122) допускают упрощения в случае выполнения условий (4.110) для распределения опорных звезд. В этих условиях получим

$$\Delta\xi_{0R} = -\beta k_1 [(1 + k_1^2) \overline{\xi^{*2}} + (1 + k_2^2) \overline{\eta^{*2}}], \quad (4.123)$$

$$\Delta\eta_{0R} = -\beta k_2 [(1 + k_1^2) \overline{\xi^{*2}} + (1 + k_2^2) \overline{\eta^{*2}}].$$

Представляет интерес также исследовать ориентировку ошибки относительно зенита. Для этого достаточно предположить, что наблюдения выполнены в меридиане. Тогда

$$\Delta\eta_{0R} = -\Delta\xi_{0R}, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \operatorname{tg} \zeta, \quad 1 + k_2^2 = \sec^2 \zeta,$$

и формулы (4.123) принимают следующий вид:

$$\Delta\xi_{0R} = 0, \quad (4.124)$$

$$\Delta\eta_{0R} = -\Delta\xi_{0R} = -\beta \operatorname{tg} \zeta (\overline{\xi^{*2}} + \sec^2 \zeta \overline{\eta^{*2}}).$$

Формулы (4.124) показывают, что в случае наблюдений в меридиане остаточная ошибка рефракции направлена от зенита и пропорциональна квадрату протяженности области опорных звезд в вертикальном направлении, величина этой ошибки очень сильно (пропорционально $\operatorname{tg} \zeta \sec^2 \zeta$) зависит от зенитного расстояния снимка. Этот результат очевидным образом обобщается на любые наблюдения вне меридиана, так как в этом случае достаточно заменить $\overline{\xi^2}$ на $\overline{h^2}$ и $\overline{\eta^2}$ на $\overline{z^2}$, где h и z — местные координаты опорных звезд относительно объекта, ориентированные в горизонтальной системе. Приведем еще один вариант оценки остаточной ошибки рефракции для случая равномерного распределения опорных звезд вблизи окружности или в круге радиуса R . Учитывая (4.105), (4.106), найдем для первого случая

$$\Delta\xi_{0R} = \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \zeta (1 + \sec^2 \zeta) R^2,$$

или

$$\Delta\xi''_{0R} = 0,0023'' \operatorname{tg} \zeta (1 + \sec^2 \zeta) (D^\circ)^2. \quad (4.125)$$

Здесь ошибка выражена в секундах дуги, а диаметр области опорных звезд, как обычно, в градусах. Согласно (4.125) вычислены данные в табл. 2.

В заключение этого раздела выведем оценку остаточной ошибки рефракции в случае применения основного алгоритма интерполяционного метода (вычисление k по формуле (4.68)). Как уже упоминалось в п. 4.4, влияние дифференциальной рефракции в этом случае не скажется на положении оптического центра, которое определяется прямыми измерениями расстояний $r_j = |TS_j|$. Следовательно, в итоге редукции этим методом не должна возникнуть дополнительная остаточная ошибка наклонности, как в других линейных методах. Поэтому, чтобы оценить остаточную ошибку рефракции в интерполяционном методе, достаточно

Таблица 2

Остаточная ошибка редукции линейными методами,
зависящая от наклонности, дисторсии и дифференциальной рефракции

Тип остаточной погрешности редукции	Условия	Диаметр области опорных звезд					
		1°	2°	3°	4°	5°	6°
Ошибка наклонности	$\tau = 5'$	0,01"	0,05"	0,10"	0,18"	0,29"	0,41"
	$\tau = 10'$	0,02	0,09	0,20	0,36	0,57	0,82
Ошибка дисторсии ($c_3 = 10^{-7} \text{ мм}^{-2}$, $f_0 = 2063 \text{ мм}$)	$r_0 = 1^\circ$	0,23	0,93	2,10	3,73	5,82	8,39
	$r_0 = 2$	0,47	1,86	4,19	7,46	11,65	16,78
	$r_0 = 3$	0,70	2,80	6,29	11,18	17,48	25,16
Ошибка рефракции ($\beta = 61,05''$)	$\zeta_0 = 50^\circ$	0,01	0,03	0,06	0,11	0,17	0,24
	$\zeta_0 = 60$	0,02	0,06	0,14	0,26	0,40	0,58
	$\zeta_0 = 70$	0,06	0,24	0,55	0,98	1,52	2,19

задать ошибку измеренных координат опорных звезд и объекта в форме

$$\Delta \zeta_j = -\beta \operatorname{tg} \zeta_j, \quad (4.126)$$

учитывающей только их положение относительно зенита. Далее, как и в предыдущих случаях, воспользуемся уравнением ошибок (4.90), которое на этот раз спроектируем на оси местной системы координат h и z , ориентированных осью Oz в направлении зенита. Получим

$$\Delta h_{0R} = \beta \sum_{j=1}^N D_j \operatorname{tg} \zeta_j \sin \theta_j, \quad (4.127)$$

$$\Delta \zeta_{0R} = -\beta \operatorname{tg} \zeta_0 + \beta \sum_{j=1}^N D_j \operatorname{tg} \zeta_j \cos \theta_j.$$

Здесь θ_j — углы между изображениями вертикалов, проходящих через опорные звезды S_j и объект S_0 на пластинке П. Пренебрегая в (4.127) небольшим эффектом сближения вертикалов, т.е. полагая все $\cos \theta_j = 1$, а $\sin \theta_j = 0$ и представляя $\operatorname{tg} \zeta_j$ согласно

$$\operatorname{tg} \zeta_j = \operatorname{tg} \zeta_0 + \sec^2 \zeta_0 (\zeta - \zeta_0) + \sec^2 \zeta_0 \operatorname{tg} \zeta_0 (\zeta - \zeta_0)^2, \quad (4.128)$$

получим искомую оценку

$$\Delta h_{0R} = 0, \quad (4.129)$$

$$\Delta \zeta_{0R} = \beta \operatorname{tg} \zeta_0 \sec^2 \zeta_0 \sum_{j=1}^N D_j (\zeta - \zeta_0)^2,$$

или, считая условия (4.110) выполненными,

$$\Delta\zeta_{0R} = \beta \operatorname{tg} \zeta_0 \sec^2 \zeta_0 \overline{z^2}. \quad (4.130)$$

Здесь $\overline{z^2} = [z^2]/N$ характеризует протяженность области опорных звезд в направлении вертикала. Остается написать оценку остаточной ошибки рефракции для случая равномерного распределения опорных звезд вблизи окружности радиуса R . Используя результат (4.105), легко найдем

$$\Delta\zeta_{0R} = \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \zeta_0 \sec^2 \zeta_0 R^2,$$

или (4.131)

$$\Delta\zeta''_{0R} = 0,0023'' \operatorname{tg} \zeta_0 \sec^2 \zeta_0 (D^\circ)^2.$$

Сравнивая оценки (4.131) и (4.125), заключаем, что в случае применения основной схемы интерполяционного метода остаточная ошибка рефракции несколько меньше, чем в других методах, что подтверждает наше замечание в конце п. 4.4 этой главы. Численные величины остаточной ошибки рефракции, вычисленные согласно (4.125), приведены в сводной таблице остаточных ошибок редукции линейными методами.

5.3г. Сводная таблица остаточных ошибок. Общие итоги этого параграфа приведены в сводной таблице 2 остаточных ошибок редукции линейными методами, зависящих от наклонности, дисторсии и рефракции. Таблица составлена компактно, для ограниченного числа вариантов, однако в ней содержится достаточно информации для получения приближенных оценок вышеперечисленных ошибок. Степень точности приведенных оценок в значительной мере зависит от степени приближения реальных условий редукции (характер распределения опорных звезд относительно объекта, диаметр области опорных звезд) к идеализированным, использованным при вычислении числовых данных таблицы.

Данные, приведенные в таблице, вычислены при следующих условиях. Опорные звезды равномерно распределены вблизи окружности диаметра D° с центром в объекте. В случае ошибки наклонности заданы величины τ погрешности принятого положения оптического центра. В случае ошибки дисторсии заданы следующие величины: c_3 — коэффициент кубической дисторсии, f_0 — фокусное расстояние телескопа, r_0 — расстояние объекта от оптического центра пластинки. В случае ошибки рефракции заданы зенитные расстояния объекта редукции ζ_0 во время наблюдений.

З а м е ч а н и я по поводу табл. 2. Оценки остаточных ошибок, приведенные в таблице, близки к максимальным. Это следует из того обстоятельства, что при вычислении ошибок сделано предположение о равномерном распределении опорных звезд вблизи окружности; с другой стороны, при равномерном распределении опорных звезд по площади круга того же диаметра ошибка уменьшается вдвое, в общем случае, который реализуется на практике, естественно ожидать среднего результата.

Учитывая, что при современном уровне точности измерений и каталожных положений опорных звезд средняя (случайная) ошибка фотографического положения одиночного объекта составляет $0,3'' - 0,5''$, можно принять величину остаточной ошибки редукции в $0,2''$ как максимально

допустимую. Соответствующие строки и столбцы, где $|e_{0c}|$ удовлетворяет этому условию, выделены в таблице ступенчатой линией. Указанные границы определяют область применимости линейных методов в зависимости от конкретных условий редукции.

Как показывает таблица, область применимости линейных методов достаточно широка, особенно если иметь в виду остаточные ошибки, зависящие от наклонности и рефракции. Хуже обстоит дело с дисторсией. Если дисторсия оптической системы достаточно велика, как, например, у современных широкоугольных астрографов Цейса ($D = 400$ мм, $f_0 = 2100$ мм), у которых она составляет $-0,5 \cdot 10^{-7}$ мм⁻², то область применения линейных методов сужается до градуса в диаметре. Дисторсию такого телескопа необходимо исследовать и учитывать при первичной обработке измерений.

Данными табл. 2 можно пользоваться также и в тех случаях, когда необходимо оценить остаточную ошибку дисторсии в условиях, отличных от табличных. Для этого достаточно числовые данные таблицы домножить на коэффициент

$$k = \left(\frac{f_0}{2063} \right)^2 c_3 \cdot 10^7, \quad (4.132)$$

где c_3 — коэффициент дисторсии в мм⁻², f_0 — фокусное расстояние исследуемого телескопа в мм. Например, для спутниковой камеры АФУ-75, у которой $f_0 = 737$ мм, а $c_3 = 3,5 \cdot 10^{-7}$, коэффициент $k = 0,45$; соответственно, остаточная погрешность дисторсии в условиях, близких к нормальным ($r_0 = 3^\circ$, $D = 3^\circ$), составит $2,8''$, т.е. несколько больше, чем случайная ошибка положений спутника ($\pm 2''$), характерная для этой камеры. Таким образом, заключаем, что пренебрегать дисторсией при обработке наблюдений, выполненных на этой камере, недопустимо.

§ 6. Проективные методы

Общая модель проективного метода представляется в форме дробно-линейного преобразования координат (4.28). Выше было показано, что такая модель сводится к методу восьми постоянных, которые надежно определяются по способу наименьших квадратов, если пластинки P и Π несильно наклонены одна относительно другой (постоянные a_3 и $b_3 \ll 1$). В этом параграфе мы рассмотрим два частных случая проективного метода. Во-первых, метод, использующий инварианты проективного преобразования, — так называемый метод гомографических координат (Киселев, 1965 (2)), во-вторых, геометрический метод (Киселев, 1970; Киселев и др. 1976), в котором рассматривается проективное преобразование двух ортогональных систем координат.

Метод гомографических координат удобно сопоставить с методом депенденсов Шлэзингера и его векторной интерпретацией. Гомографические координаты являются инвариантами проективного преобразования, а депенденсы Шлэзингера — инвариантами аффинного преобразования. Задача определения положения небесного объекта в обоих методах решается путем интерполяции единичных векторов опорных звезд. Таким образом, оба метода могут обходиться без аппарата тангенциальных коор-

динат. Что касается геометрического метода, то его удобно сопоставить с методами фотограмметрии (см., например, (Веселовский, 1945)), поскольку аналитическая связь двух координатных систем — системы внутренней ориентировки, связанной с камерой, и системы внешней ориентировки, привязанной к реперам аэросъемки в фотограмметрии, — устанавливается в той же форме, что и в геометрическом методе. Однако родственная связь этих методов полностью этим ограничивается, во всем остальном геометрический метод сохраняет свою астрономическую специфику.

6.1. Метод гомографических координат для определения положения небесного объекта. Рассматриваемый метод решает задачу определения фотографического положения небесного объекта на основе проективных инвариантов, свойственных конфигурации из четырех опорных звезд (базисный четырехугольник) и объекта S_0 (рис. 20). Инвариантами являются ангармонические (сложные) отношения отрезков, образованные сторонами базисного четырехугольника $S_1S_2S_3S_4$ и их пересечениями в точках (центрах) Q_1 и Q_2 . Определим их следующим образом. На пластинке P из центров Q_1 и Q_2 проведем в направлении объекта S_0 лучи Q_1S_0 и Q_2S_0 , точки пересечения этих лучей и сторон четырехугольника обозначим N_1, N_2, N_3, N_4 . Проведенные лучи вместе с продолженными сторонами базисного четырехугольника составят две группы из трех лучей с центрами в Q_1 и Q_2 . На этих лучах определим по три пары равных ангар-

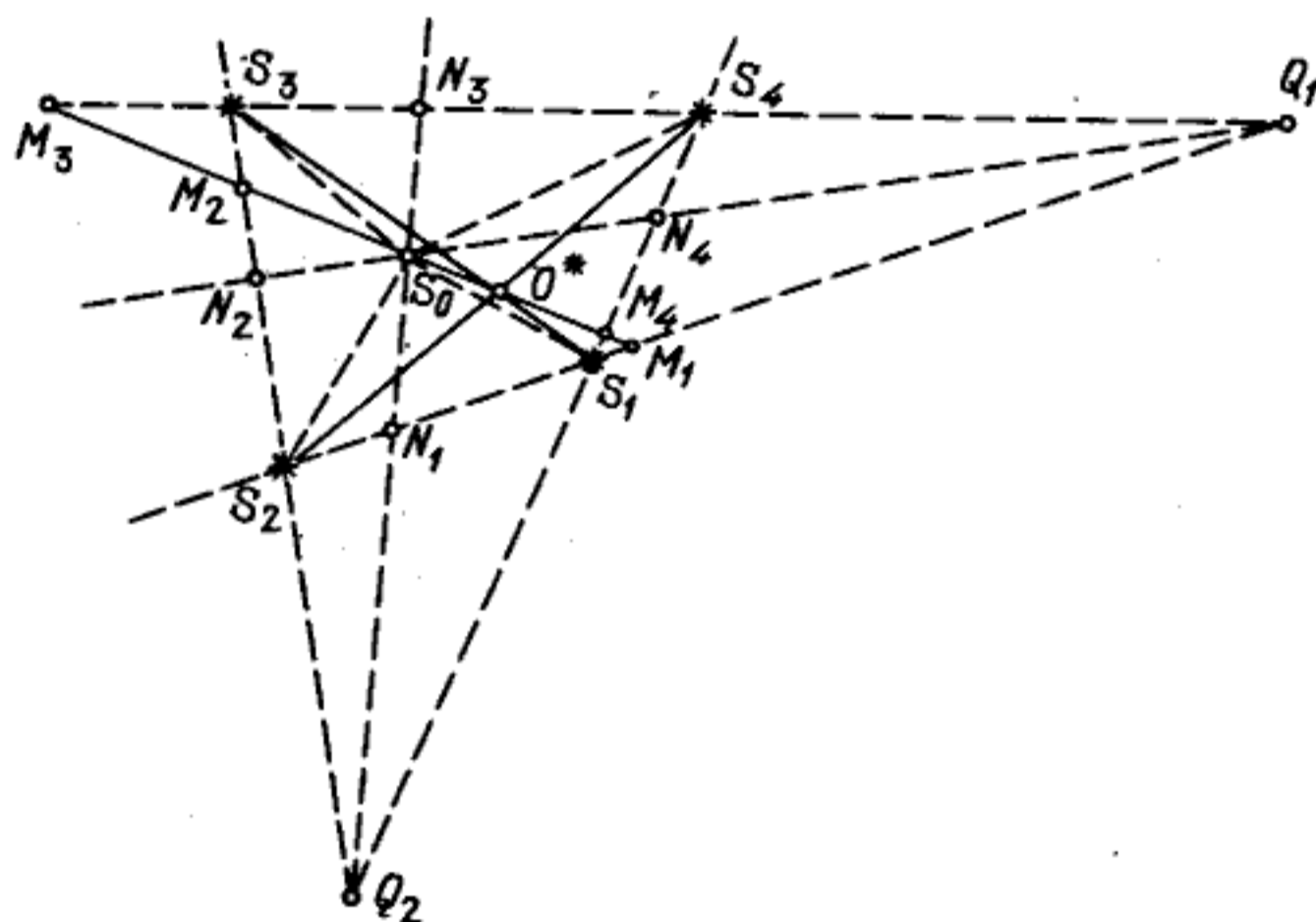


Рис. 20. Геометрическое построение в задаче определения положения небесного объекта методом гомографических координат:

S_1, S_2, S_3, S_4 — базисный четырехугольник опорных звезд, S_0 — объект, O^* — пересечение диагоналей базисного четырехугольника, Q_1 и Q_2 — центры, образованные продолжением сторон базисного четырехугольника, N_1, N_2, N_3, N_4 — узловые точки, h_1 и h_2 — гомографические координаты объекта.

$$h_1 = \frac{N_4 S_0}{S_0 N_2} : \frac{N_4 Q_1}{Q_1 N_2} = \frac{M_4 S_0}{S_0 M_2} : \frac{M_4 O^*}{O^* M_2},$$

$$h_2 = \frac{N_1 S_0}{S_0 N_3} : \frac{N_1 Q_2}{Q_2 N_3} = \frac{M_1 S_0}{S_0 M_3} : \frac{M_1 O^*}{O^* M_3}$$

монических отношений отрезков

$$\frac{S_1 N_1}{N_1 S_2} : \frac{S_1 Q_1}{Q_1 S_2} = \frac{N_4 S_0}{S_0 N_2} : \frac{N_4 Q_1}{Q_1 N_2} = \frac{S_4 N_3}{N_3 S_3} : \frac{S_4 Q_1}{Q_1 S_3} = -h_1 \text{ (центр } Q_1), \quad (4.133)$$

$$\frac{S_2 N_2}{N_2 S_3} : \frac{S_2 Q_2}{Q_2 S_3} = \frac{N_1 S_0}{S_0 N_3} : \frac{N_1 Q_2}{Q_2 N_3} = \frac{S_1 N_4}{N_4 S_4} : \frac{S_1 Q_2}{Q_2 S_4} = -h_2 \text{ (центр } Q_2).$$

Числа h_1 и h_2 , равные ангармоническим отношениям согласно (4.133), однозначно определяют положение объекта на пластинке P и на любой другой пластинке Π , проективной относительно P , если на сравниваемых пластинках присутствуют изображения базисных звезд. Назовем эти числа *гомографическими координатами точки* S_0 относительно базиса $S_1 S_2 S_3 S_4$.

Чтобы вычислить гомографические координаты по данным измерений объекта и базиса на пластинке P , необходимо от отношений отрезков перейти к отношениям площадей смежных треугольников. В итоге несложных чисто геометрических преобразований получаем

$$h_1 = \frac{(410)}{(230)} \frac{(123)}{(341)} \frac{(234)}{(412)}; \quad h_2 = \frac{(120)}{(340)} \frac{(234)}{(412)} \frac{(341)}{(123)}. \quad (4.134)$$

Здесь применены обозначения (abc) для удвоенных площадей треугольников $S_a S_b S_c$ аналогично случаю (4.59), (4.60).

Кроме объекта S_0 внутри базисного четырехугольника отметим еще точку O^* на пересечении диагоналей этого четырехугольника. Площади соответствующих смежных треугольников, имеющих общую вершину в O^* , выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} (120^*) &= \frac{1}{2S_{\square}} (123) (412), \\ (230^*) &= \frac{1}{2S_{\square}} (234) (123), \\ (340^*) &= \frac{1}{2S_{\square}} (341) (234), \\ (410^*) &= \frac{1}{2S_{\square}} (412) (341). \end{aligned} \quad (4.135)$$

Здесь S_{\square} — площадь базисного четырехугольника, $2S_{\square} = (123) + (341) = (234) + (412)$. Сопоставляя (4.134) и (4.135), получаем

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{(410)}{(230)} \frac{(230^*)}{(410^*)} = \frac{M_4 S_0}{S_0 M_2} : \frac{M_4 O^*}{O^* M_2}, \\ h_2 &= \frac{(120)}{(340)} \frac{(340^*)}{(120^*)} = \frac{M_1 S_0}{S_0 M_3} : \frac{M_1 O^*}{O^* M_3}. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Формулы (4.135) и (4.136) можно рассматривать как независимое новое определение гомографических координат. Причем если формулы (4.135)

удобны в вычислительном отношении, то формулы (4.136) лучше раскрывают геометрический смысл введенных координат. Действительно, из (4.136) непосредственно следует, что если объект S_0 находится вблизи точки пересечения диагоналей базисного четырехугольника, то его гомографические координаты будут близки к 1. Напротив, при удалении объекта от центра O^* гомографические координаты будут быстро возрастать (или уменьшаться), оставаясь положительными, до тех пор пока объект не пересечет одну из сторон базисного четырехугольника, где одна из координат станет равной ∞ (или нулю). Далее, вне базисного четырехугольника, одна или обе координаты будут сохранять значение, меньшее нуля. Таким образом, выявляется геометрический смысл введенных гомографических координат как меры удаления объекта от точки пересечения диагоналей базисного четырехугольника.

Покажем теперь, как использовать гомографические координаты в задаче определения положения небесного объекта, не пользуясь аппаратом тангенциальных координат. Пусть сферические положения опорных звезд определены единичными векторами r_1, r_2, r_3, r_4 по формулам (3.1) в системе экватора и равноденствия какого-нибудь рабочего каталога. Для определения единичного вектора положения объекта воспользуемся основной идеей интерполяционного метода, изложенного в п. 4.4. Положение объекта будем искать на дуге большого круга $\cup N_1 N_3$ (рис. 20) в соответствии со следующей схемой интерполяции единичных векторов:

$$\begin{aligned} r_{N_1} &= \frac{1}{m_1} (r_1 + \kappa_1 r_2), \\ r_{N_3} &= \frac{1}{m_3} (r_3 + \kappa_3 r_4), \\ r_0 &= \frac{1}{m_{01}} (r_{N_1} + \kappa_{01} r_{N_3}), \end{aligned} \quad (4.137)$$

где

$$\begin{aligned} m_1^2 &= 1 + \kappa_1^2 + 2\kappa_1 r_1 r_2, & m_3^2 &= 1 + \kappa_3^2 + 2\kappa_3 r_3 r_4, \\ m_{01}^2 &= 1 + \kappa_{01}^2 + 2\kappa_{01} r_{N_1} r_{N_3}, \end{aligned}$$

причем

$$\kappa_1 = \frac{\sin \cup S_1 N_1}{\sin \cup N_1 S_2}; \quad \kappa_3 = \frac{\sin \cup S_3 N_3}{\sin \cup N_3 S_4}; \quad \kappa_{01} = \frac{\sin \cup N_1 S_0}{\sin \cup S_0 N_3}. \quad (4.138)$$

Объединяя формулы интерполяционной схемы (4.137), получим следующее выражение для единичного вектора объекта:

$$r_0 = \frac{1}{m_{01} m_1} \left(r_1 + \kappa_1 r_2 + \kappa_{01} \frac{m_1}{m_3} r_3 + \kappa_{01} \kappa_3 \frac{m_1}{m_3} r_4 \right). \quad (4.139)$$

Остается выразить параметры $\kappa_{01}, \kappa_1, \kappa_3$ через гомографические координаты. Для этого необходимо воспользоваться выражением сложного отношения отрезков через синусы соответствующих углов (дуг на небесной сфере) в плоском пучке лучей. Таким образом, по определению ангар-

МОНИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ ИМЕЕМ:

$$\begin{aligned}
 -h_1 &= \frac{\sin \sphericalangle S_1 N_1}{\sin \sphericalangle N_1 S_2} : \frac{\sin \sphericalangle S_1 Q_1}{\sin \sphericalangle Q_1 S_2} = \kappa_1 : \frac{\sin \sphericalangle S_1 Q_1}{\sin \sphericalangle Q_1 S_2}, \\
 -h_1 &= \frac{\sin \sphericalangle S_4 N_3}{\sin \sphericalangle N_3 S_3} : \frac{\sin \sphericalangle S_4 Q_1}{\sin \sphericalangle Q_1 S_3} = \kappa_3^{-1} : \frac{\sin \sphericalangle S_4 Q_1}{\sin \sphericalangle Q_1 S_3}, \\
 -h_2 &= \frac{\sin \sphericalangle N_1 S_0}{\sin \sphericalangle S_0 N_3} : \frac{\sin \sphericalangle N_1 Q_2}{\sin \sphericalangle Q_2 N_3} = \kappa_{01} : \frac{\sin \sphericalangle N_1 Q_2}{\sin \sphericalangle Q_2 N_3}.
 \end{aligned} \tag{4.140}$$

Отношения синусов в правых частях равенств (4.140) не зависят от положения объекта и могут быть определены на основе данных единичных векторов опорных звезд, составляющих базис. Нетрудно проверить следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin \sphericalangle S_1 Q_1}{\sin \sphericalangle Q_1 S_2} &= - \frac{r_1(r_3 \times r_4)}{r_2(r_3 \times r_4)} = - \frac{[134]}{[234]}, \\
 \frac{\sin \sphericalangle S_4 Q_1}{\sin \sphericalangle Q_1 S_3} &= - \frac{r_4(r_1 \times r_2)}{r_3(r_1 \times r_2)} = - \frac{[412]}{[312]}, \\
 \frac{\sin \sphericalangle N_1 Q_2}{\sin \sphericalangle Q_2 N_3} &= - \frac{r_{N_1}(r_4 \times r_1)}{r_{N_3}(r_4 \times r_1)} = - \frac{m_3 \kappa_1 r_2(r_4 \times r_1)}{m_1 r_3(r_4 \times r_1)} = \\
 &= \frac{m_3 \kappa_1}{m_1} \frac{[241]}{[341]}.
 \end{aligned} \tag{4.141}$$

Здесь введены сокращенные обозначения для смешанных произведений векторов

$$[abc] = r_a(r_b \times r_c) = \begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}, \tag{4.142}$$

численные значения которых равны объему параллелепипедов, построенных на соответствующих единичных векторах. Сопоставляя (4.140) и (4.141), найдем искомые выражения для κ_1 , κ_3 и κ_{01} :

$$\kappa_1 = h_1 \frac{[134]}{[234]}, \quad \kappa_3 = h_1^{-1} \frac{[312]}{[412]}, \tag{4.143}$$

$$\kappa_{01} = h_2 \frac{m_3}{m_1} \kappa_1 \frac{[241]}{[341]} \Rightarrow h_1 h_2 \frac{m_3}{m_1} \frac{[241]}{[234]} [234]$$

Подставляя теперь найденные значения κ в общее уравнение (4.139), получим

$$r_0 = \frac{1}{m_{01} m_1} \left\{ r_1 + h_1 \frac{[341]}{[234]} r_2 + h_1 h_2 \frac{[412]}{[234]} r_3 + h_2 \frac{[123]}{[234]} r_4 \right\}. \tag{4.144}$$

Формула (4.144) решает задачу об определении координат небесного объекта на основе гомографии, т.е. с использованием только проективных свойств фотографической проекции.

Обратим внимание на структуру выведенной интерполяционной формулы. Во-первых, коэффициенты при единичных векторах базисных звезд составлены из двух множителей, первый из которых равен 1, h_1 , h_1h_2 или h_2 и вычисляется только на основе измерений изображений объекта и базисных звезд на пластинке P , а второй множитель полностью определяется сферическими координатами базисных звезд. Это обстоятельство позволяет оперативно использовать формулу (4.144) для вычислений положений многих объектов с одним общим базисом, если гомографические координаты этих объектов определены. Во-вторых, структура формулы (4.144) допускает круговую перестановку индексов всех участвующих в ней величин. Правила перестановки следующие:

$$\begin{aligned} &\text{для площадей треугольников } \frac{1}{3} (123) \rightarrow (234) \rightarrow (341) \rightarrow (412) \rightarrow (123); \\ &\text{для векторов базисных звезд } \frac{1}{4} r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r_3 \rightarrow r_4 \rightarrow r_1; \\ &\text{для объемов параллелепипедов } \frac{1}{6} [123] \rightarrow [234] \rightarrow [341] \rightarrow [412] \rightarrow [123]; \\ &\text{для гомографических координат } \frac{1}{4} h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow h_1^{-1} \rightarrow h_2^{-1} \rightarrow h_1. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Таким образом, справедливы следующие варианты формулы (4.144):

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{m_{02}m_2} \left\{ h_1^{-1} \frac{[234]}{[341]} r_1 + r_2 + h_2 \frac{[412]}{[341]} r_3 + h_2 h_1^{-1} \frac{[123]}{[341]} r_4 \right\}, \\ r_0 &= \frac{1}{m_{03}m_3} \left\{ h_1^{-1} h_2^{-1} \frac{[234]}{[412]} r_1 + h_2^{-1} \frac{[341]}{[412]} r_2 + r_3 + h_1^{-1} \frac{[123]}{[412]} r_4 \right\}, \\ r_0 &= \frac{1}{m_{04}m_4} \left\{ h_2^{-1} \frac{[234]}{[123]} r_1 + h_1 h_2^{-1} \frac{[341]}{[123]} r_2 + h_1 \frac{[412]}{[123]} r_3 + r_4 \right\}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Тождественность разложений (4.144), (4.146) вытекает из единственности геометрического построения, определяющего гомографические координаты. Разложения (4.144), (4.146) обобщаются следующим образом.

Построим суммарный вектор базиса следующего вида:

$$R_B = [234] r_1 + [341] r_2 + [412] r_3 + [123] r_4. \quad (4.147)$$

Вектор базиса, как видим, полностью определяется сферическими координатами базисных звезд. Нетрудно проверить, что вектор базиса направлен в точку пересечения диагоналей сферического четырехугольника $S_1 S_2 S_3 S_4$.

Составим таблицу (матрицу четвертого порядка) гомографических координат следующего вида:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & h_1 h_2 & h_2 \\ h_1^{-1} & 1 & h_2 & h_2 h_1^{-1} \\ h_1^{-1} h_2^{-1} & h_2^{-1} & 1 & h_1^{-1} \\ h_2^{-1} & h_1 h_2^{-1} & h_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix}. \quad (4.148)$$

Элементами каждой строки матрицы H являются гомографические координаты и их комбинации в соответствии с разложениями (4.144), (4.146). Каждую строку матрицы H обозначим H_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Определим еще вектор (одностолбцовую матрицу четвертого порядка) следующего вида:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [234] \\ [341] \\ [412] \\ [123] \end{bmatrix}. \quad (4.149)$$

Элементами матрицы V являются векторно-скалярные произведения V_k ($k = 1, 2, 3, 4$), составленные последовательными тройками единичных векторов звезд, образующих базисный четырехугольник.

Теперь, используя определения (4.147)–(4.149), запишем общий вид разложений (4.146) в следующей форме:

$$r_{0k} = \frac{1}{m_{0k} m_k V_k} (H_k R_B^T), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.150)$$

Здесь множитель в скобках следует рассматривать как произведение матрицы на вектор. Что касается коэффициента перед формулой, то он является нормирующим множителем, удовлетворяющим условию единичности вектора r_{0k} ,

$$(m_{0k} m_k V_k)^2 = \sum_{j=1}^4 H_{kj} V_j + 2 \sum_{j \neq i=1}^4 r_i r_j H_{ki} V_j. \quad (4.151)$$

Условие (4.151) можно использовать для контроля вычислений. На практике, однако, множитель $m_{0k} m_k V_k$ можно не вычислять, так как искомый результат — сферическое положение объекта — вычисляется непосредственно по составляющим вектора $H_k R_B$ при каком-нибудь фиксированном k :

$$\operatorname{tg} \alpha_{0k} = \frac{H_k R_{BY}}{H_k R_{BX}}, \quad \operatorname{tg} \delta_{0k} = \frac{H_k R_{BZ}}{\sqrt{(H_k R_{BX})^2 + (H_k R_{BY})^2}}. \quad (4.152)$$

Вычислительный контроль получается, если определение согласно этой формуле повторить при другом k .

Формулы (4.144), (4.146) приняты за основу нового метода фотографической астрометрии, который мы назвали методом гомографических координат. Гомографические координаты по определению являются инвариантами проективного преобразования, поэтому этот метод может применяться в условиях, когда оптический центр рабочей пластинки неизвестен. Поскольку сами гомографические координаты определяются согласно (4.134) через отношения площадей треугольников (так же, как и депенденсы Шлезингера), то метод гомографических координат компенсирует линейные дифференциальные эффекты рефракции и аберрации так же, как и методы, основанные на предположении об аффинном соответствии пластинок P и Π . Таким образом, можно заключить, что метод гомографических координат эквивалентен проективному методу

с восемью постоянными при четырех опорных звездах, т.е. в условиях, когда способ наименьших квадратов для отыскания постоянных пластинки применяться не может. Этот вывод подтверждается искусственным примером, приведенным в статье автора (Киселев, 1965(2)). На практике метод гомографических координат применялся для обработки фотографических наблюдений искусственных спутников Земли, полученных на широкоугольных камерах НАФА-3С (Киселев, 1969), а также для определения положений Марса по наблюдениям на широкоугольном астрографе АКД ($D = 100$, $f = 710$ мм) (Киселева, 1970). В последнем случае метод гомографических координат, применялся, как правило, с двумя четверками опорных звезд, что обеспечивало эффективный контроль начальных данных, включая погрешности измерений и отождествления опорных звезд. Оказалось, что погрешность в положении планеты, зависящая только от каталожных положений и измерений опорных звезд, составляет в среднем $\pm 0,20''$, или $0,60''$ на одну звезду, что соответствует точности Йельского каталога на эпоху наблюдений Марса в 1960–67 гг. В целом метод гомографических координат при обработке наблюдений, выполненных на АКД, оказался эффективнее метода Тернера, так как на этом телескопе примитивная конструкция кассеты со вкладышем не обеспечивает стабильности положения оптического центра.

Неожиданное применение метод гомографических координат нашел в задаче определения приближенных координат объектов на фотографических картах Паломарского атласа. Опыт производился в Пулковской обсерватории для отождествления некоторых звездообразных туманностей; попутно определялись координаты десятка контрольных звезд, разбросанных в разных частях карты. В углах карты были отождествлены четыре опорные (базисные) звезды и для них вычислен вектор базиса R_B . Измерения карты производились с помощью циркуля и линейки непосредственно на чертежном столе. Определялись расстояния между звездами базиса и объектами. Эти измерения выполнялись с точностью $\pm 0,3$ мм. Площади треугольников вычислялись по формуле Герона и ввиду наличия избыточной информации выравнивались в соответствии с условием

$$(120) + (230) + (340) + (410) = (123) + (341) = (234) + (412). \quad (4.153)$$

Гомографические координаты объектов были определены с относительной ошибкой порядка $\pm(0,002 - 0,005)$. В итоге редукции с применением формулы (4.144) были определены сферические координаты всех объектов. Ошибки определения координат контрольных звезд оказались в пределах $\pm(15'' - 20'')$ для звезд внутри базисного четырехугольника. Напомним, что масштаб карт Паломарского атласа составляет 67 угловых секунд в миллиметре.

К недостаткам метода гомографических координат следует отнести, в первую очередь, отсутствие контроля грубых и случайных ошибок по невязкам типа "О — С" на опорных звездах. Этот недостаток свойственен всем методам, обходящимся без вычисления постоянных пластинки. В рассматриваемом случае эффективный контроль обеспечивается только повторением редукции с другими базисными звездами. В этом случае, как будет показано ниже (см. гл. 5, п. 3.5), при равномерном распределении базисных звезд относительно объекта дисперсия разностей двух неза-

висимых решений оценивается величиной ошибки единицы веса, определяемой по способу наименьших квадратов:

$$\sigma_{(I-II)}^2 = \sigma_1^2 \approx \sigma_m^2 + \sigma_*^2. \quad (4.154)$$

(здесь обозначения такие же, как и в формуле (4.93)). Этот результат позволяет (при наличии достаточной статистики) оценить точность редукции методом гомографических координат.

Другой недостаток метода гомографических координат связан с повышенной чувствительностью этого метода к искажениям фотографической проекции. Этот недостаток свойственен всем проективным методам. Единственное противодействие — надежно калибровать камеру и исключить дисторсию в процессе первичной обработки измерений.

6.2. Метод гомографических координат для сравнения пластинок. В этой задаче гомографические координаты объекта на пластинке P используются для пересчета положения объекта в систему координат пластинки P' , проективной относительно P . Предполагается, что изображения одних и тех же базисных звезд присутствуют как на пластинке P , так и на пластинке P' .

Обозначим координаты точек на пластинках P и P' соответственно x, y, x', y' . Гомографические координаты объекта обозначим h_1, h_2 ; они вычислены по формулам (4.134) на основе данных прямоугольных координат объекта x_0, y_0 и базисных звезд x_j, y_j ($j = 1, 2, 3, 4$) на пластинке P . Требуется определить прямоугольные координаты объекта x'_0, y'_0 на пластинке P' , считая координаты базисных звезд x'_j, y'_j на этой пластинке известными. Решение построим по идее метода депенденсов, а именно: положение объекта на пластинке P' вычислим по формулам

$$x'_0 = \sum_{j=1}^4 D'_j x'_j, \quad y'_0 = \sum_{j=1}^4 D'_j y'_j, \quad (4.155)$$

где D'_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — условные нормированные веса (депенденсы Шлезингера), подлежащие определению по начальным данным задачи. Для определения весов D'_j воспользуемся их представлением через отношения отрезков в интерполяционной схеме (4.75), (4.137), рис. 20. В нашем случае соответствующие формулы перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D'_1} &= \left(1 + \frac{m'_1}{n'_1}\right) \left(1 + \frac{p'}{q'}\right); & \frac{1}{D'_2} &= \left(1 + \frac{n'_1}{m'_1}\right) \left(1 + \frac{p'}{q'}\right); \\ \frac{1}{D'_3} &= \left(1 + \frac{m'_3}{n'_3}\right) \left(1 + \frac{q'}{p'}\right); & \frac{1}{D'_4} &= \left(1 + \frac{n'_3}{m'_3}\right) \left(1 + \frac{q'}{p'}\right). \end{aligned} \quad (4.156)$$

Здесь малыми буквами $m'_1, n'_1, m'_3, n'_3, p', q'$ обозначим длины отрезков $\overline{S_1N_1}, \overline{N_1S_2}, \overline{S_3N_3}, \overline{N_3S_4}, \overline{N_1S_0}, \overline{S_0N_3}$ на пластинке P' .

Существенно заметить, что формулы (4.156) однозначно определяют систему из четырех D'_j , принадлежащих данной интерполяционной схеме,

построенной на основе гомографии, и, следовательно, полностью сохраняют проективные свойства. Поэтому чтобы вычислить D'_j по формулам (4.156), достаточно выразить отношения отрезков m'_1/n'_1 , m'_3/n'_3 , p'/q' через проективные инварианты, каковыми в нашей задаче являются гомографические координаты объекта. Соответствующие формулы выведем непосредственно из определения гомографических координат (4.134). После несложных геометрических преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{m'_1}{n'_1} &= \frac{(341)'}{(234)'} h_1, & \frac{m'_3}{n'_3} &= \frac{(123)'}{(412)'} h_1^{-1}, \\ \frac{m'_2}{n'_2} &= \frac{(412)'}{(341)'} h_2, & \frac{m'_4}{n'_4} &= \frac{(234)'}{(123)'} h_2^{-1}, \\ \frac{p'}{q'} &= \frac{m'_2}{n'_2} \frac{1 + m'_3/n'_3}{1 + n'_1/m'_1} = \frac{n'_4}{m'_4} \frac{1 + n'_3/m'_3}{1 + m'_1/n'_1}. \end{aligned} \quad (4.157)$$

Теперь подставим выражения (4.157) в определение (4.156) и получим искомые формулы для условных весов в гомографическом четырехугольнике:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D'_1} &= 1 + h_1 \frac{(341)'}{(234)'} + h_1 h_2 \frac{(412)'}{(234)'} + h_2 \frac{(123)'}{(234)'} , \\ \frac{1}{D'_2} &= h_1^{-1} \frac{(234)'}{(341)'} + 1 + h_2 \frac{(412)'}{(341)'} + h_2 h_1^{-1} \frac{(123)'}{(341)'} , \\ \frac{1}{D'_3} &= h_1^{-1} h_2^{-1} \frac{(234)'}{(412)'} + h_2^{-1} \frac{(341)'}{(412)'} + 1 + h_1^{-1} \frac{(123)'}{(412)'} , \\ \frac{1}{D'_4} &= h_2^{-1} \frac{(234)'}{(123)'} + h_2^{-1} h_1 \frac{(341)'}{(123)'} + h_1 \frac{(412)'}{(123)'} + 1. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Как видим, найденные веса выражаются через гомографические координаты объекта и отношения диагональных площадей базисного четырехугольника пластинки P' , т.е. вполне могут быть вычислены по начальным данным задачи. Остается вычислить координаты объекта x'_0, y'_0 по формулам (4.155), что и решает задачу.

Остановимся на формулах (4.158). Общий вид этих формул позволяет заключить, что они одинаково справедливы как для пластинки P' (для которой они выведены), так и для пластинки P (стоит только убрать штрихи в обозначениях весов D_j и площадей (abc)) и для любых других пластинок, аффинных относительно P или P' . Главное значение формул (4.158) состоит в том, что они дают строгое геометрическое решение задачи о преобразовании плоских координат одной пластинки в систему плоских

координат другой пластинки, проективной относительно первой. Задача решается в общем виде на основе линейных (аффинных) и проективных инвариантов преобразования координат, поэтому можно говорить, что формулы (4.158) устанавливают однозначное соответствие между двумя произвольными пластинками — идеальными астрофотографиями, если только на обеих пластинках имеется общий гомографический базис: четыре звезды, из которых никакие три не лежат на одной прямой.

Алгоритм преобразований координат на основе гомографии сводится к следующим операциям.

а) По измеренным на пластинке P координатам базисных звезд и объекта вычисляем четыре диагональные площади четырехугольника вида (abc) и четыре центральных площади вида $(ab0)$ по формулам (4.60). Контроль вычислений:

$$(123) + (341) = (234) + (412) = (120) + (230) + (340) + (410). \quad (4.159)$$

б) Вычисляем гомографические координаты объекта h_1, h_2 по формулам (4.134) и составляем матрицу (4.148).

в) По известным координатам базисных звезд на пластинке P' вычисляем диагональные площади $(abc)'$; составляем матрицу делений диагональных площадей $[s_{ik}]$

s_{jk}	$(234)'$	$(341)'$	$(412)'$	$(123)'$	S_k
$(234)'$	1	s_{12}	s_{13}	s_{14}	S_1
$(341)'$	s_{21}	1	s_{23}	s_{24}	S_2
$(412)'$	s_{31}	s_{32}	1	s_{34}	S_3
$(123)'$	s_{41}	s_{42}	s_{43}	1	S_4

(4.160)

Здесь каждый элемент матрицы вычисляется делением площади треугольника, стоящего в заголовках столбцов, на площадь треугольника в заголовках строк, например,

$$s_{23} = \frac{(412)'}{(341)'}, \quad s_{32} = \frac{(341)'}{(412)'} \quad \text{и т. д.}$$

г) Вычисляем обратные величины условных весов базисных звезд относительно объекта на пластинке P' . Для этого перемножаем скалярно вектор-строки матрицы гомографических координат H и матрицы деления диагональных площадей $[s_{ik}]$:

$$(D'_k)^{-1} = H_k S'_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.161)$$

Контроль: $\sum_{k=1}^4 D'_k = 1.$

д) Вычисляем координаты объекта на пластинке P' по формулам (4.155).

Простой замкнутый характер этих вычислений, обеспеченных на каждом шаге эффективным контролем, обычно вызывает у вычислителя или программиста чувство искреннего удовлетворения от строгого и точного решения этой непростой задачи. К сожалению, реальная точность таких решений существенно зависит от того, насколько относительные положения базисных звезд на пластинках P и P' можно считать неизменными с точки зрения их положений на небесной сфере. Во многих задачах фотографической астрометрии это условие нельзя считать выполненным, так как между наблюдениями пластинок P и P' может пройти много лет, и собственные движения базисных звезд могут нарушить их первоначальную конфигурацию. Следовательно, при выборе опорных звезд желательно привлекать в качестве базисных объекты с заведомо малыми собственными движениями, например, звездообразные галактики.

На практике изложенный алгоритм сравнения пластинок был применен в задаче определения собственных движений звезд на основе сравнения современных наблюдений и данных астрографического каталога "Карта неба" (Киселев, 1968), в задаче определения тригонометрических параллаксов звезд по наблюдениям на 26-дюймовом рефракторе в Пулковке (Киселев, 1982), а также при обработке позиционных наблюдений Марса, полученных на широкоугольной камере (Киселева, 1970).

6.3. Геометрический метод. Аналитическое соответствие между точками пластинок P и Π в геометрическом методе устанавливается в форме дробно-линейного преобразования двух ортогональных систем координат. Такое преобразование, зависящее от шести независимых параметров, можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} x - x_T &= f_0 \frac{\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3}{\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3}, \\ y - y_T &= f_0 \frac{\beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3}{\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3}. \end{aligned} \tag{4.162}$$

Здесь x_T, y_T — измеренные координаты оптического центра пластинки P ; f_0 — главное фокусное расстояние телескопа, определяющее масштаб измеренных координат звезд на пластинке P ; $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 1, 2, 3$) — девять косинусов углов между осями измеренных координат $Oxuz$ пластинки P (причем $Oz \perp P$) и осями тангенциальных координат $T\xi\eta\zeta$ пластинки Π .

Дробно-линейное выражение в правых частях формул (4.162) можно рассматривать как преобразование тангенциальных координат двух близких пластинок Π_1 и Π_2 , изученное нами в гл. 3, п. 2.2, причем в качестве пластинки Π_1 в рассматриваемом случае мы имеем пластинку Π с заданным оптическим центром в точке $T_0(A, D)$, а в качестве Π_2 — пластинку P с неизвестным оптическим центром в точке T . Рассматриваемое преобразование координат зависит от трех независимых параметров, имеющих смысл углов Эйлера. Следующие формулы, вытекающие из формул

(3.40) – (3.43), выражают эти зависимости:

$$\alpha_1 = \cos \theta - 2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin^2 \frac{\tau}{2},$$

$$\alpha_2 = -\sin \theta - 2 \cos \psi_1 \sin \psi_2 \sin^2 \frac{\tau}{2},$$

$$\alpha_3 = -\sin \psi_2 \sin \tau, \quad (4.163)$$

$$\beta_1 = \sin \theta - 2 \sin \psi_1 \cos \psi_2 \sin^2 \frac{\tau}{2},$$

$$\beta_2 = \cos \theta - 2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \sin^2 \frac{\tau}{2},$$

$$\beta_3 = -\cos \psi_2 \sin \tau,$$

$$\gamma_1 = \sin \psi_1 \sin \tau, \quad \gamma_2 = \cos \psi_1 \sin \tau, \quad \gamma_3 = \cos \tau.$$

Здесь введены следующие обозначения (см. рис. 21): τ – угол наклона пластинки P относительно пластинки Π ; на небесной сфере τ равно дуге $\overset{\frown}{T_0 T}$, в плоскости рабочей пластинки P имеет место

$$f_0 \operatorname{tg} \tau = TT_0; \quad (4.164)$$

ψ_1 и ψ_2 – позиционные углы направления сдвига истинного оптического центра относительно принятого в плоскостях Π и P . В дальнейших выкладках принято

$$\psi_1 - \psi_2 = \theta, \quad \psi_1 = \psi, \quad f_0 \operatorname{tg} \tau \sin \psi_1 = p, \quad f_0 \operatorname{tg} \tau \cos \psi_1 = q. \quad (4.165)$$

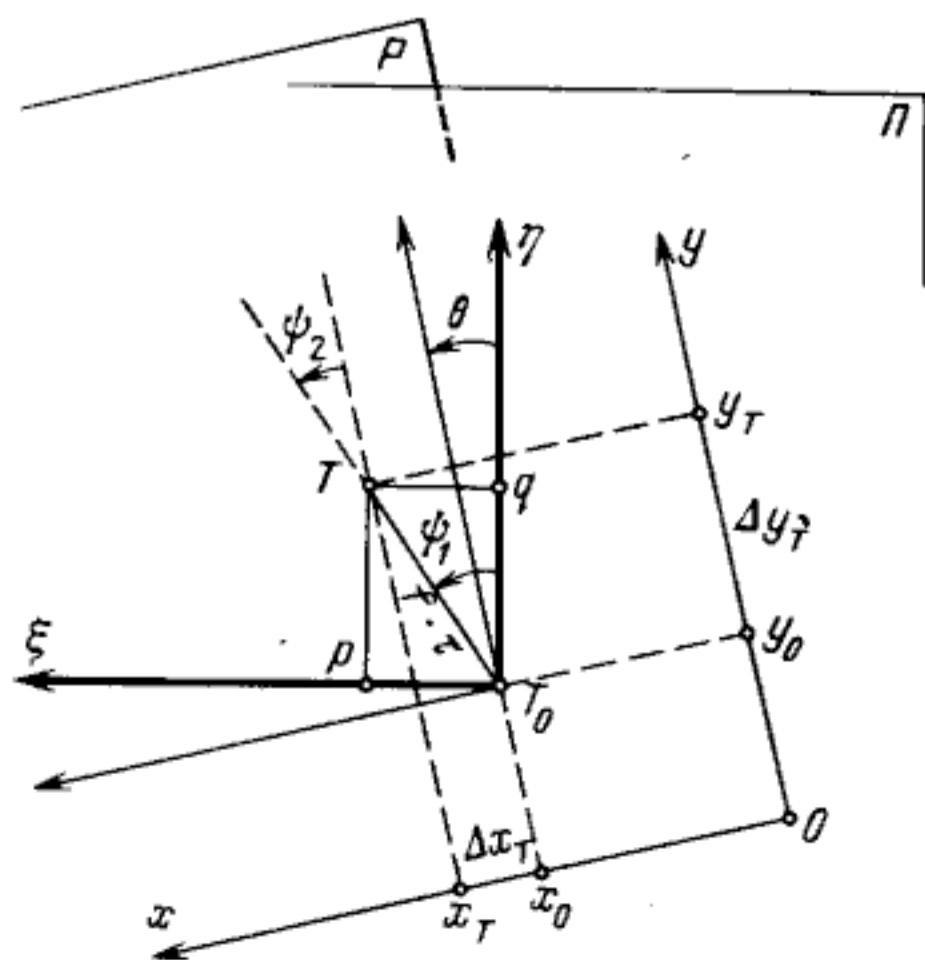


Рис. 21. Расположение осей измеренных и тангенциальных координат в геометрическом методе:

P – плоскость рабочей пластинки; Oxy – оси измеренных координат на плоскости P ; $T_0(x_0, y_0)$ – приближенное положение оптического центра пластинки P ; $T(x_T, y_T)$ – истинное положение оптического центра пластинки P ; Π – плоскость пластинки сравнения; $T_0 \xi \eta$ – тангенциальные координаты в плоскости Π ; ψ_1 – позиционный угол смещения T относительно T_0 в системе $T_0 \xi \eta$; ψ_2 – позиционный угол смещения T относительно T_0 в системе Oxy

Первоначальной задачей в геометрическом методе является определение шести независимых параметров преобразования (4.162). Эта задача решается с помощью достаточного количества опорных звезд, для которых необходимо иметь надежные измеренные координаты, отнесенные к произвольной ортогональной системе осей, и видимые в смысле учета рефракции и aberrации тангенциальные координаты. На заключительном этапе по данным измеренным координатам объектов x_0, y_0 вычисляются их видимые тангенциальные координаты по формулам (4.166), которые являются обращением формул (4.162):

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \frac{(x_0 - x_T)\alpha_1 + (y_0 - y_T)\beta_1 + f_0\gamma_1}{(x_0 - x_T)\alpha_3 + (y_0 - y_T)\beta_3 + f_0\gamma_3}, \\ \eta_0 &= \frac{(x_0 - x_T)\alpha_2 + (y_0 - y_T)\beta_2 + f_0\gamma_2}{(x_0 - x_T)\alpha_3 + (y_0 - y_T)\beta_3 + f_0\gamma_3}.\end{aligned}\quad (4.166)$$

Важное и принципиальное отличие геометрического метода от всех других методов астрометрической редукции с постоянными пластинок состоит в том, что постоянные пластинок в этом методе (шесть параметров преобразований (4.162) и (4.166)) находят на основе прямых формул, в которых измеренные координаты опорных звезд представлены свободными членами уравнений и рассматриваются в качестве наблюдаемых величин, а координаты объекта вычисляются с помощью обращенных формул, в которых свободными членами являются тангенциальные координаты. Учитывая замечание 2.1 (в этой главе), можно ожидать, что геометрический метод обеспечивает лучшее с точки зрения статистики решение в случае редукции наблюдений, полученных на короткофокусных камерах.

Остановимся на алгоритме вычислений постоянных в геометрическом методе. Как следует из вида формул (4.162), способ наименьших квадратов не может быть применен непосредственно для определения неизвестных параметров в этих преобразованиях. Линеаризация формул (4.162) для нас неприемлема, так как эта операция связана с ограничениями величины допустимого наклона τ , что лишило бы геометрический метод строгости и общности. Поэтому мы предпочли процесс последовательных приближений, в котором способ наименьших квадратов используется как неотъемлемое промежуточное звено. Этот метод позволяет определить наиболее вероятные числовые значения параметров преобразования (4.162) даже в том случае, когда взаимный наклон пластинок P и Π достигает нескольких градусов.

В качестве нулевого приближения воспользуемся решением системы (4.162) при $\tau = 0$. В этих условиях система (4.162) вырождается в систему линейных уравнений с четырьмя неизвестными, характерную для метода четырех постоянных,

$$\begin{aligned}c + a\xi_j + b\eta_j &= x_j, \\ d + a\eta_j - b\xi_j &= y_j, \\ j &= 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (4.167)$$

Найденные по способу наименьших квадратов постоянные a, b, c, d используем для определения численных значений параметров геометрического метода в нулевом приближении

$$x_T^{(0)} = c; \quad y_T^{(0)} = d; \quad f_0^{(0)} = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \theta^{(0)} = -\operatorname{arctg}(b/a);$$

$$\tau = 0; \quad \psi - \text{произвольный угол.} \quad (4.168)$$

Теперь, используя эти значения шести параметров, вычислим по полным формулам (4.162) "измеренные координаты" всех опорных звезд в нулевом приближении и сравним их с фактическими измеренными координатами этих звезд. Полученные невязки $x_j - x_j^{(0)}$ и $y_j - y_j^{(0)}$, имеющие смысл "O-C", представим в форме дифференциалов формул (4.162). В общем случае для k -го приближения эти формулы имеют следующий вид:

$$x_j - x_j^{(k)} = c + a\xi'_j + b\eta'_j + e\xi'_j\xi + f\xi'_j\eta_j,$$

$$y_j - y_j^{(k)} = d + a\eta'_j - b\xi'_j + e\xi_j\eta'_j + f\eta_j\eta'_j. \quad (4.169)$$

Здесь

$$\xi'_j = \xi_j \cos \theta^{(k)} - \eta_j \sin \theta^{(k)},$$

$$\eta'_j = \eta_j \cos \theta^{(k)} + \xi_j \sin \theta^{(k)}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Линейные уравнения (4.169) будем рассматривать как условные для определения поправок к принятым в k -ом приближении значениям шести параметров геометрического метода. Решая эту систему уравнений по способу наименьших квадратов, найдем соответствующие наивероятнейшие значения постоянных c, d, a, b, e, f , которые связаны с искомыми поправками параметров следующими формулами:

$$\Delta x_T^{(k+1)} = c - (e \cos \theta^{(k)} - f \sin \theta^{(k)}); \quad \Delta y_T^{(k+1)} = d - (f \cos \theta^{(k)} + e \sin \theta^{(k)});$$

$$\Delta f_0 = a; \quad f_0 \Delta \theta^{(k+1)} = -b; \quad \Delta p^{(k+1)} = -e; \quad \Delta q^{(k+1)} = -f. \quad (4.170)$$

Новые значения шести параметров геометрического метода после k -го приближения вычислим с учетом всех предшествующих результатов:

$$x_T^{(k+1)} = x_T^{(k)} + \Delta x_T^{(k+1)}; \quad y_T^{(k+1)} = y_T^{(k)} + \Delta y_T^{(k+1)};$$

$$f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} + \Delta f^{(k+1)}; \quad \theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \Delta \theta^{(k+1)}; \quad (4.171)$$

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \Delta p^{(k+1)}; \quad q^{(k+1)} = q^{(k)} + \Delta q^{(k+1)};$$

$$\psi^{(k+1)} = \operatorname{arctg}(p^{(k+1)} / q^{(k+1)});$$

$$\tau^{(k+1)} = \frac{1}{f_0^{(k+1)}} \sqrt{(p^{(k+1)})^2 + (q^{(k+1)})^2}.$$

Процесс последовательных приближений в геометрическом методе контролируется после каждого k -го шага путем вычисления дисперсии невязок вычисленных и измеренных координат опорных звезд. Таким образом, определив согласно (4.171) параметры $(k + 1)$ -го приближения, мы должны повторно вычислить по полным формулам (4.162) соответствующие "измеренные координаты" $(k + 1)$ -го приближения всех опорных звезд и определить их невязки v_x и v_y и дисперсию S :

$$v_{xj}^{(k+1)} = x_j - x_j^{(k+1)}; \quad v_{yj}^{(k+1)} = y_j - y_j^{(k+1)}; \quad (4.172)$$

$$S^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (v_{xj}^2 + v_{yj}^2)}.$$

Если окажется, что

$$S^{(k+1)} < S^{(k)}, \quad (4.173a)$$

то процесс последовательных приближений следует продолжить, если же

$$S^{(k+1)} \geq S^{(k)}, \quad (4.173b)$$

то процесс следует остановить, причем в качестве окончательных значений шести параметров геометрического метода нужно принять их величины, полученные на предыдущем k -ом шаге. Тангенциальные координаты объектов в итоге редукции вычисляются по обращенным формулам (4.166).

З а м е ч а н и я о п р и м е н е н и и г е о м е т р и ч е с к о г о м е т о д а н а п р а к т и к е. Геометрический метод широко применялся в Пулковке при астрометрической обработке фотографических наблюдений больших планет и комет на двойном широкоугольном астрографе ($D : f_0 = 1 : 7,1$), а также при калибровке некоторых широкоугольных камер советских обсерваторий (Киселев и др., 1976; Киселев и др., 1985). Наш опыт применения геометрического метода позволяет сделать несколько важных замечаний.

1. Непременным условием применения геометрического метода является ортогонализация системы измеренных координат, которую необходимо производить всякий раз, если угол неперпендикулярности шкал γ измерительного прибора превышает $10''$. Ортогонализация производится путем следующего преобразования:

$$\begin{aligned} x &= x' - y' \sin \gamma, \\ y &= y' \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4.174)$$

Здесь x', y' — измеренные координаты объектов на пластинке P в косоугольной системе, x, y — те же координаты, приведенные к ортогональной системе, $90^\circ + \gamma$ — координатный угол осей измеренных координат.

2. Вторым обязательным условием применения геометрического метода является выполнение требования, чтобы система измеренных координат

была левой, т.е. того же смысла, что и тангенциальные координаты звезд. Поэтому в случаях редукции измерений астрофотографий, полученных на рефлекторах системы Максудова или Шмидта, необходимо произвести зеркальное отображение измеренных координат, т.е. выполнить следующее преобразование:

$$\begin{aligned}x &= -x', \\y &= y'.\end{aligned}\tag{4.175}$$

3. При составлении программы вычислений по геометрическому методу для ЭВМ неизбежно встает вопрос об определении сферических координат A, D , соответствующих принятому положению оптического центра пластинки P , т.е. метки T с измеренными координатами x_T, y_T . Поскольку в этой задаче не требуется высокой точности (погрешность в $\pm 2-3''$ вполне допустима), задача решается с помощью опорных звезд путем последовательных приближений линейными формулами. Опорные звезды выбираются в области радиусом $r < 1^\circ$ с центром в точке T_0 . Далее вычисляются депенденсы D_j ($j = 1, 2, \dots, m$) этих ближайших опорных звезд относительно T_0 и определяется искомый вектор r_T в нулевом приближении

$$r_T^{(0)} = \sum_{j=1}^N D_{Tj} r_j.\tag{4.176}$$

Поскольку вектор $r_T^{(0)}$, вычисленный согласно (4.176), не удовлетворяет условию единичности

$$|r_T^{(0)}| = 1,\tag{*}$$

вектор $r_T^{(0)}$ нормируют, т.е. заменяют вектором $r_T^{*(0)} = r_T^{(0)} / |r_T^{(0)}|$, и повторяют вычисления вектора r_T следующего k -го приближения

$$r_T^{(k)} = \sum_{j=1}^m D_{Tj} \frac{r_j}{r_T^{*(k+1)} r_j}.\tag{4.177}$$

После каждого вычисления $r_T^{(k)}$ согласно (4.177) проверяют условие нормировки (*). Процесс вычислений останавливают, когда (*) удовлетворяется с точностью до $\pm 10^{-6}$. Опыт применения геометрического метода в Пулковке показывает, что процесс последовательных приближений при определении шести независимых параметров обычно сходится на втором-третьем шаге после нулевого. Исключением являются случаи, когда в начальных данных имеются грубые погрешности и когда заданное положение оптического центра пластинки P смещено относительно истинного положения более 1° ; в этих случаях процесс расходится. Поэтому очень важно предусмотреть отсеб грубых погрешностей уже при выполнении нулевого приближения. В пулковской программе для этой цели применяется критерий $2\sigma_1^{(0)}$ или $3\sigma_1^{(0)}$, где $\sigma_1^{(0)}$ — ошибка единицы веса в способе наименьших квадратов при определении величин параметров в нулевом приближе-

нии. Достаточным числом опорных звезд в задаче определения фотографических положений геометрическим методом можно считать 10.

6.4. Применение геометрического метода для калибровки широкоугольных камер. Как следует из рассмотрения математической схемы геометрического метода, постоянные $x_T, y_T, f_0, \theta, \psi, \tau$ суть реальные, имеющие ясное геометрическое значение параметры преобразований (4.162), (4.164), трансформирующие тангенциальные координаты точек на пластинке Π в систему ортогональных измеренных координат пластинки P и обратно. Поскольку в этом преобразовании участвуют видимые тангенциальные координаты, параметры геометрического метода должны быть свободными от влияния дифференциальной рефракции и абберации и, следовательно, должны точно (или по крайней мере с точностью до влияния случайных ошибок измеренных и тангенциальных координат опорных звезд) характеризовать систему измеренных координат, т.е. положение ее начала, масштаб и ориентировку в пространстве относительно звезд. Таким образом, геометрический метод позволяет определить реальный масштаб и положение оптического центра астрофотографии и тем самым решить основную задачу калибровки телескопа. Надежность решения этой задачи обеспечивается возможностью выбора достаточно большого числа опорных звезд. Применительно к задаче калибровки геометрический метод имеет также другую важную особенность, которая состоит в том, что невязки редукции здесь рассматриваются по существу как величины, зависящие только от фактических погрешностей измеренных координат опорных звезд. Формально эта особенность геометрического метода выражается в том, что коэффициенты при неизвестных в условных уравнениях k -го приближения (4.169), зависящие от тангенциальных координат опорных звезд, имеют смысл точных величин, а свободные члены этих уравнений, зависящие от измеренных координат опорных звезд, имеют смысл наблюдаемых величин, отягощенных погрешностями измеренных координат, как случайными, так и систематическими. Такое положение вполне соответствует природе задачи калибровки широкоугольных камер ($f_0 < 1$ м), так как в этом случае погрешности измеренных координат опорных звезд существенно больше погрешностей их каталожных положений. В этих условиях невязки вычисленных и измеренных координат опорных звезд действительно могут зависеть только от погрешностей измеренных координат, включая систематические ошибки проекции. Этим свойством невязок редукции с применением геометрического метода можно воспользоваться для детального изучения дисторсии широкоугольных камер, понимая под дисторсией любые систематические ошибки в измеренных положениях звезд, которые зависят от расстояния изображений звезд до осевой точки (или оптического центра) астрофотографии, а также от позиционного угла изображений. Такое обобщенное представление о дисторсии соответствует характеру искажений современных многокомпонентных широкоугольных объективов, сохраняющих радиальную симметричную дисторсию и дополнительную несимметричную радиальную и тангенциальную дисторсию, возникающую вследствие неточной центрировки оптической системы телескопа.

Резюмируя сделанные замечания, приходим к выводу, что геометрический метод можно принять за основу калибровки (включая исследование

дисторсии) современных широкоугольных камер, удовлетворяющих условию $\epsilon_{xy} > \epsilon_{\xi\eta}$ (см. гл. 4, § 2.1).

Первоначально геометрический метод был применен в Пулкове в 1974 г. для калибровки двух спутниковых камер АФУ-75 и ФАС-3А, а также двух камер двойного широкоугольного астрографа Крымской астрофизической обсерватории (Киселев и др., 1976). Накопленный опыт позволил разработать стандартную методику калибровки и исследования дисторсии астрофотографий на основе геометрического метода и составить соответствующие программы для ЭВМ "Минск-22". Позднее эта методика была применена для калибровки других спутниковых камер, в частности, камеры SBG и ряда широкоугольных астрографов Цейса, приобретенных некоторыми обсерваториями СССР (Киселев и др., 1985).

Методика калибровки и исследования дисторсии на основе геометрического метода состоит в следующем. Начальными данными являются массивы измеренных и сферических координат большого числа опорных звезд (не менее 100), равномерно распределенных в круге, охватывающем все рабочее поле астрофотографии. Наблюдения выполняют в оптимальном для исследуемого телескопа режиме: экспозиции выбирают в интервале $30^s - 3^m$, фотопластинки используют с контрастной мелкозернистой эмульсией, фотографируют обычно околзенитную зону, обеспеченную надежным астрометрическим каталогом или астрометрическим стандартом. Измерения производят на измерительном приборе высшего класса точности в хорошо термостатированном помещении; существенно, чтобы эти измерения выполнялись одним человеком без перерывов, в кратчайшее время. Систематические ошибки шкал прибора и микрометров учитывают при первичной обработке измерений.

Астрометрическая редукция и калибровка выполняется в три этапа. Во-первых, производят полную редукцию всего наблюдательного материала на основе геометрического метода, при этом вычисляют шесть параметров преобразования (4.162) $\Delta x_T, \Delta y_T, f_0, \theta, \psi, \tau$, а также основные характеристики точности — ошибку единицы веса при решении системы (4.169) $\sigma_{1x, y}$ в последнем приближении и значения дисперсий невязок измеренных координат на опорных звездах в том же приближении:

$$S_x = \sqrt{\frac{[v_x v_x]}{N}}, \quad S_y = \sqrt{\frac{[v_y v_y]}{N}}. \quad (4.178)$$

На этом этапе происходит также отсев грубых погрешностей измерений и отождествлений звезд.

На втором этапе переходят к определению коэффициента кубической дисторсии путем направленного поиска. Чтобы целесообразно организовать и ускорить этот процесс вычислений, в управляющей программе задают величины приближенного начального коэффициента дисторсии, максимального и минимального шагов его изменения $(\delta D_3)_{\max}, (\delta D_3)_{\min}$. Процесс вычислений начинается с исправления измеренных координат всех опорных звезд за дисторсию по формулам

$$\begin{aligned} \Delta x &= -D_3(x - x_T)r^2, \\ \Delta y &= -D_3(y - y_T)r^2. \end{aligned} \quad (4.179)$$

Здесь D_3 — коэффициент осесимметричной кубической дисторсии, понимаемой в смысле (1.33), (1.34); Δx и Δy — поправки измеренных координат звезды; x_T, y_T — координаты геометрического центра астрофотографии, которые совпадают с заданными координатами ее оптического центра в нулевом приближении; r — расстояние звезды от геометрического центра астрофотографии.

Далее вычисления продолжаются в соответствии с алгоритмом геометрического метода и заканчиваются определением шести параметров и точностных характеристик (4.179). Продолжение процесса вычислений контролируется условием

$$S_x^{(k+1)} \leq S_x^{(k)}; \quad S_y^{(k+1)} \leq S_y^{(k)}, \quad (4.180)$$

которое должно удовлетворяться одновременно для S_x и для S_y . Если это условие на k -ом шаге оказывается выполненным, то процесс поиска коэффициента D_3 продолжается в прежнем направлении, т.е. назначается новая величина коэффициента дисторсии

$$D_3^{(k+1)} = D_3^{(k)} + (\delta D_3). \quad (4.181)$$

Исходные данные исправляются согласно (4.179) заново, и определяется новая система шести параметров геометрического метода. В противном случае, если условие (4.180) оказывается невыполненным, процесс поиска D_3 продолжается в обратном направлении с уменьшенным вдвое шагом:

$$D_3^{(k+1)} = D_3^{(k)} - \frac{1}{2} (\delta D_3). \quad (4.182)$$

Процесс поиска коэффициента дисторсии заканчивается после m -го изменения направления поиска, когда

$$\frac{1}{2^m} (\delta D_3) \leq (\delta D_3)_{\min}. \quad (4.183)$$

В итоге определяется коэффициент осесимметричной кубической дисторсии и шесть параметров геометрического метода, всего семь величин, доставляющих наилучшее решение в смысле представления наблюдений формулами (4.162). Формально погрешности этого решения вычисляются на основе корреляционной матрицы, составленной из системы условных уравнений (4.169) (см. гл. 5, пп. 1.1 и 3,5). В случае равномерного распределения N опорных звезд в круге диаметром D° эти погрешности таковы:

$$\epsilon_{\Delta x_T} = \epsilon_{\Delta y_T} = \epsilon_p = \epsilon_q = \frac{\pm 0,197 \sigma_1'' f_0}{(D^\circ)^2 \sqrt{N}}, \quad (\pm 0,66 \text{ мм}), \quad (4.184)$$

$$\epsilon_{f_0} = \epsilon_a = \epsilon_b = \frac{\pm 0,111 \sigma_1'' f_0 \times 10^{-2}}{(D^\circ) \sqrt{N}}, \quad (\pm 0,02 \text{ мм}), \quad (4.185)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\epsilon_a}{f_0} = \frac{\epsilon_b}{f_0} = \frac{\pm 0,111 \sigma_1'' \times 10^{-2}}{(D^\circ) \sqrt{N}}, \quad (\pm 0,90 \cdot 10^{-5}); \quad (4.186)$$

в скобках приведены значения погрешностей, вычисленные при начальных данных, характерных для современных широкоугольных астрографов среднего фокуса ($f_0 = 2063$ мм, $D^0 = 5^\circ$, $N = 100$, $\sigma_1 = 0,4''$), если в качестве рабочего каталога использовать зонный каталог АГК-3.

На третьем этапе производят анализ невязок измеренных координат опорных звезд после астрометрической редукции с учетом осесимметричной дисторсии в оптимальном варианте. Цель анализа — убедиться в отсутствии других систематических несимметричных ошибок типа дисторсии, которые не могли быть учтены на предыдущих этапах редукции. Для этого, во-первых, выделяют массив невязок $\{v_x$ и $v_y\}$ для опорных звезд, расположенных во внешней кольцевой зоне рабочего поля астрофотографии. Во-вторых, вычисляют радиальные и тангенциальные составляющие v_r и v_t наблюдаемых невязок

$$\begin{aligned} v_t &= -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta, \\ v_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \end{aligned} \tag{4.187}$$

Здесь θ — позиционный угол радиуса-вектора опорной звезды в плоскости пластинки P относительно оси T_0y . В-третьих, изучают распределение невязок v_r и v_t по аргументу θ . В пулковской программе калибровки на основе геометрического метода этому этапу соответствует построение графиков (рис. 22), которое выполняется ЭВМ. Если в распределении невязок обнаруживается двойная волна со сдвигом по фазе на 45° для v_r относительно v_t , то можно заключить о существовании тангенциальной дисторсии типа (1.54). Амплитуду D_r' и позиционный угол θ_0 наибольшей дисторсии можно снять непосредственно с графика. Ввиду большого рассеяния наблюдений можно ожидать лишь небольшой точности в определении этих величин (на рис. 22 погрешность амплитуды v_r составляет 20%, а ошибка θ_0 порядка 30%). Тем не менее, как показывается в работе (Киселев и др., 1976), при астрометрической редукции наблюдений, полученных на спутниковой камере ФАС-3А, учет тангенциальной дисторсии уменьшает

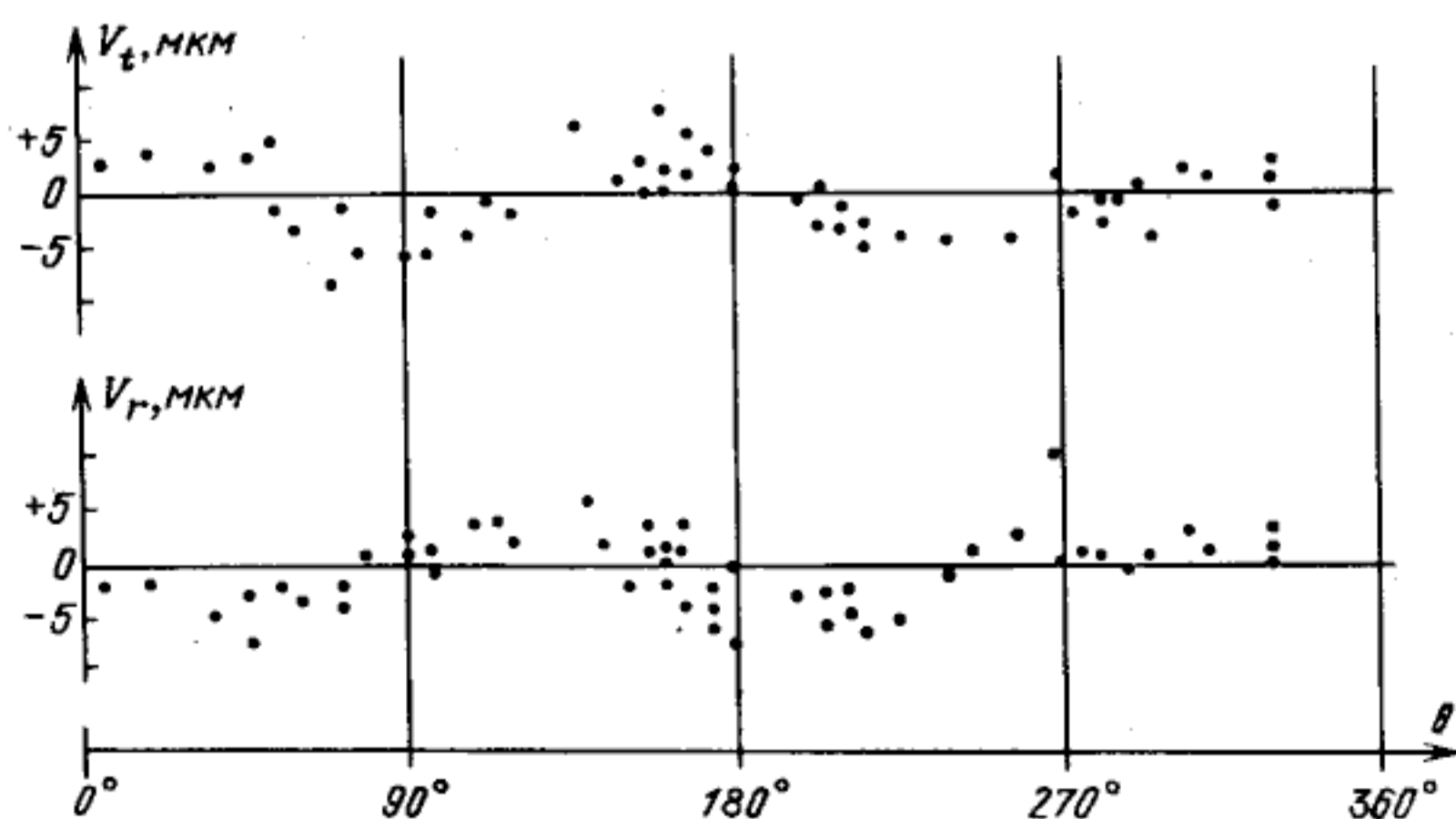


Рис. 22. Распределение невязок v_t и v_r в зависимости от позиционного угла при редукции геометрическим методом измерений звезд во внешней зоне астрофотографии, полученной на камере ФАС-3А в Пулкове

Таблица 3

Результаты калибровки некоторых спутниковых камер

Тип камеры, место установки, диаметр объектива, фокусное расстояние	Диаметр рабочего поля D°	Число пластинок n_p	Поправки к положению оптического центра		Число опорных звезд N	Результаты калибровки			Дисперсия невязок до и после учета дисторсии		Рабочий каталог	
			x_T	y_T		$f_0, \text{мм}$	$D_r, 10^{-6} \text{мм}^{-2}$	$D_t, 10^{-5} \text{мм}^{-1}$	S_x	S_y		
												4
1	2	3			6							11
АФУ-75, камера I Пулково, 220/750	12	1	-0,2	-0,3	36	738,45	0,	0	8,1 ^u	8,1 ^u		AGK-3
			-3,4	-3,4		737,30	3,50	4,0	3,5	3,5		
АФУ-75, камера II Пулково, 220/750	6	4	1,0	-0,6	94	740,73	-	-	1,9	1,8		AGK-3
			±1,6	±1,9		±	6					
ФАС-3А, Пулково, 250/500	7	5	0,0	0,0	90	483,6	-	-	3,2	3,2		AGK-3
			0,0	0,0		482,8	4,20	-0,6	1,0	1,0		
SBG, Уральский университет, 425/500/780 (исследо- вания 1976)	5,5	4	±0,1	±0,2	100	±	±	±	3,6	3,4		AGK-3
			0,2	1,0		777,53	-	-				
SBG, Уральский уни- верситет, 425/500/780 (исслед. 1981 г.)	5,5	4	±0,6	±1,0	52	±	±	±	2,5	2,4		AGK-3
			-0,8	-0,9		776,32	1,43	-	1,0	1,0		
SBG, Ужгородский университет, 425/500/780	6	5	±0,3	±0,3	80	±	±	±	4,7	4,7		AGK-3
			0,2	0,8		777,58	-	-				
SBG, Ужгородский университет, 425/500/780	6	5	-3,3	-1,9	98	±	±	±	0,8	0,8		AGK-3
			±1,0	±0,5		776,45	1,40	0,0	0,8	0,8		
SBG, Ужгородский университет, 425/500/780	6	5	-3,3	-1,4	80	±	±	±	4,7	4,7		AGK-3
			±0,4	±0,1		776,91	-	-				
SBG, Ужгородский университет, 425/500/780	6	5	±0,4	±0,1	80	±	±	±	0,8	0,8		AGK-3
			-2,0	0,8		776,91	-	-				
SBG, Ужгородский университет, 425/500/780	6	5	±1,4	±0,7	80	±	±	±	0,8	0,8		AGK-3
			-0,3	2,4		775,19	1,50	-	0,8	0,7		
SBG, Ужгородский университет, 425/500/780	6	5	±0,3	±0,4	80	±	±	±	0,8	0,8		AGK-3
			-0,3	±0,4		775,19	1,50	-	0,8	0,7		

ошибку единицы веса до 2,5 мкм (1,1") по сравнению с ошибкой единицы веса в 3,2 мкм (1,4"), достигаемой в тех же условиях, но с учетом только симметричной радиальной дисторсии.

Как уже упоминалось, эффект децентрической дисторсии типа (1.52), выражаемый двумя простыми синусоидами, сдвинутыми по фазе на 90° , в исследовании с помощью геометрического метода обнаружить невозможно, так как такая систематическая ошибка компенсируется сдвигом эффективного положения оптического центра, определяемого в геометрическом методе. Однако в распределении невязок u_r и v_r могут появиться и другие систематические ошибки измеренных положений звезд, например, погрешности, зависящие от блеска и цвета звезд, если различать опорные звезды не только по их полярным координатам r и θ в плоскости пластинки P , но и по другим характеристикам, например, по яркости и спектральным классам. В целом можно утверждать, что рассмотренный здесь прием разложения невязок редукции на тангенциальные и радиальные составляющие и изучение распределений этих невязок по позиционным углам для изображений звезд, расположенных в узких кольцевых зонах, является подходящим способом исследования дисторсии и других систематических ошибок измеренных положений звезд на астрофотографиях.

Результаты применения геометрического метода для калибровки некоторых спутниковых камер и широкоугольных астрографов приведены в табл. 3, 4, 5. По поводу составления указанных таблиц необходимо сделать следующие замечания.

В первом столбце каждой из таблиц помещены основные данные об исследованных телескопах: название или тип объектива, место установки телескопа, номинальный диаметр и фокусное расстояние объектива (в случае зеркально-линзовых камер приведены три числа — диаметр входного отверстия, диаметр зеркала и его фокусное расстояние). Во втором столбце указан диаметр исследованного рабочего поля телескопа (в некоторых случаях оно существенно меньше фактического рабочего поля). В третьем столбце указано количество обработанных пластинок, во многих случаях использовано только две или одна пластинка, что далеко не достаточно. В четвертом и пятом столбцах приведены вычисленные в итоге калибровки координаты истинного оптического центра рабочей пластинки относительно принятого, т.е. поправки принятого положения оптического центра; первая пара чисел соответствует случаю калибровки без учета дисторсии, вторая пара, помещенная ниже, — случаю калибровки с учетом кубической дисторсии, коэффициент D_r которой помещен в столбце 8. При координатах x_T , y_T указаны их погрешности, вычисленные по сходимости между пластинками, если $n_p \geq 3$. Если погрешности не указаны, то это значит, что имеет место значительный (более 2 мм) разброс найденных координат T , что свидетельствует о непостоянстве нуля-пункта отсчетов этих координат, т.е. о неопределенности принятого положения оптического центра пластинки P . В столбце 6 приведены средние числа опорных звезд, использованных при калибровке в каждом конкретном случае. Название рабочего каталога опорных звезд приведено в последнем столбце. Обращаем внимание на результаты редукции, полученные для московского астрографа АФР-1: одни и те же измерения были обработаны на основе координат звезд астрометрического стандарта в области α Per (Гекман и др., 1956) и согласно

Таблица 4

Результаты калибровки широкоугольных астрографов Цейса

Тип камеры, место установки, диаметр объектива, фокусное расстояние	Диаметр рабочего поля в градусах D	Число пластинок n_p	Поправки к принятому положению оптического центра		Число опорных звезд N	Результаты калибровки		Дисперсия невязок до и после учета дисторсии		Рабочий каталог
			x_T , мм	y_T , мм		$f_0, f_0 D$, мм	$D_T, 10^{-7}$ мм $^{-2}$	S_x	S_y	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Двойной широкоугольный астрограф (ДША), камера первая, Голосеево, 400/2000	6	3	1,9	-3,4	82	2004,93 ± 0,20	-	1,33"	1,23"	AGK-3
			1,2	0,3		2005,84 ± 0,17	-0,53 ± 0,03	0,43	0,42	
То же, камера вторая	6	3	2,7	-7,3	83	2005,65 ± 0,14	-	1,13	1,03	AGK-3
			-0,3	2,0		2006,58 ± 0,04	-0,57 ± 0,03	0,39	0,41	
Двойной широкоугольный астрограф (ДША), камера первая, Китаб, 400/3000	5	4	-9,4	-6,2	90	3009,62 ± 0,14	-	0,68	0,62	AGK-3
			-9,4	-4,2		3010,17 ± 0,08	-0,18 ± 0,06	0,59	0,54	

Таблица 4 (окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
То же, камера вторая	5	4	-2,0	3,3	96	3020,71 ± 0,08	-	0,77"	0,70"	AGK-3
			-2,7	4,5		3021,46 ± 0,12	-0,24 ± 0,05	0,58	0,53	
Широкоугольный астрограф, Душанбе, 400/2000	6	5	4,4 ± 0,4	2,4 ± 0,2	80	2009,06 ± 0,03	-	1,23	1,30	AGK-3
			1,4 ± 0,1	-1,1 ± 0,6		2009,96 ± 0,03	-0,54 ± 0,01	0,66	0,75	
Широкоугольный астрограф, Звенигород, 400/2000	6	2	-	-	53	2006,44 ± 0,10	-	1,36	1,46	AGK-3
						2008,00 ± 0,12	-0,48 ± 0,02	0,62	0,52	
Широкоугольный астрограф, Зеленчук, 400/2000	6	2	1,1	-3,0	52	1999,83 ± 0,30	-	1,60	1,40	AGK-3
			-1,3	-1,1		2001,06 ± 0,04	-0,48 ± 0,02	0,57	0,52	

Таблица 5

Результаты калибровки некоторых телескопов классического типа

Тип телескопа, место установки, диаметр объектива, фокусное расстояние	Диаметр рабочего поля D° , град	Количество во пластинок n_p	Поправки к принятому положению оптического центра		Число опорных звезд N	Результаты калибровки			Дисперсия невязок до и после учета дисторсии		Рабочий каталог						
			x_T , мм	y_T , мм		$f_0, f_0 D$, мм	$D_p \cdot 10^{-7}$ мм ⁻²	$D_{\text{дист}} \cdot 10^{-7}$ мм ⁻¹	S_x	S_y							
1	2	3	4	5	6	7	8	8a	9	10	11						
Зонный астрограф, Николаев 150/2000	5	3	0,3 ± 0,6	0,3 ± 0,1	75	2042,58	-	-	0,41"	0,39"	AGK-3						
												0,1 ± 0,6	0,3 ± 0,1	2042,58	-10.0	0,30	0,34
АФР-1, Москва, ГАИШ, 230/2300	6	2	-2,0	6,1	74	2300,08	-	-	0,33	0,33	Стандарт α Per						
												-2,1	5,9	2300,06	-	0,33	0,36
												-2,1	5,6	2298,98	-	0,48	0,50
												-2,0	5,4	2299,90	0,04	0,47	0,48
Шмидт, Обсерватория Рожен (Болгария), 400/500/1700	4	4	0,0	-1,7	130	1719,23	-	-	0,68	0,70	AGK-3						
												-1,7	2,2	± 1719,72	-1,03 ± 9	0,59	0,61

данным каталога АГК-3. Результаты калибровки по двум фотографиям одной и той же области приведены отдельно для обоих случаев редукции. В седьмом столбце даны значения фокусных расстояний f_0 и f_{0D} , вычисленных согласно алгоритму геометрического метода в двух случаях: при редукции без учета дисторсии и при редукции с учетом радиальной кубической дисторсии с коэффициентом D_r (столбец 8). Обе величины фокусного расстояния надо рассматривать как усредненные, сглаживающие неучтенные эффекты дисторсии и дифференциальной рефракции во всем рабочем поле, поэтому они лишь в смягченной форме отражают зависимость (1.46), рассмотренную в гл. 1 этой работы. В восьмом столбце приведены результаты определения коэффициента радиальной кубической дисторсии D_r путем направленного поиска. Так же как и в случае определения фокусных расстояний, эти величины следует рассматривать как усредненные, поскольку они выравнивают аномалии проекции по всему полю астрофотографии. Небольшие погрешности определения коэффициентов D_r свидетельствуют о надежности примененного здесь метода определения дисторсии. В столбце 8а табл. 3 приведены величины коэффициента тангенциальной дисторсии D_t типа (1.54), обнаруженные у некоторых спутниковых камер. В столбцах 9 и 10 приведены величины дисперсий невязок измеренных координат S_x и S_y (4.177), оставшиеся после выравнивания геометрическим методом в двух случаях редукции — без учета и с учетом дисторсии. В последнем случае, как правило, обе величины значительно меньше, чем в первом случае, что является показателем эффективности выполненной калибровки. Нижним пределом дисперсий S_x и S_y следует считать величину

$$S_m = \sqrt{\epsilon_*^2 + \epsilon_m^2} \quad (4.188)$$

(обозначения 4.91), равную ϵ_* , или $0,3'' - 0,5''$, для среднефокусных телескопов на современную эпоху, или равную ϵ_m для короткофокусных телескопов, причем в этом случае $\epsilon_m \gg \epsilon_*$. Таким образом, можно заключить, что если у какого-либо из астрографов при $f_0 > 2000$ величины $S_x, S_y > 0,5''$, то это может означать только, что избранным нами способом не удалось полностью учесть дисторсию в измеренных положениях звезд или что сами измерения выполнены недостаточно тщательно, так что $\epsilon_m \approx \epsilon_*$. Судя по данным табл. 4, такое положение характерно для астрографов Цейса в Душанбе, Звенигороде и Китабе.

По поводу результатов калибровки с помощью геометрического метода можно сделать следующие выводы общего и фактического характера.

1. Калибровка спутниковых камер ($f_0 < 1$ м), использующих стеклянные пластинки, позволяет представить с учетом дисторсии положения изображений звезд на пластинке с точностью до ошибок их измерений ($\pm 2-3$ мкм) во всем поле астрофотографии.

2. Калибровка спутниковой пленочной камеры АФУ-75 не позволила представить даже после учета дисторсии измеренные положения звезд с точностью до погрешностей измерений в поле астрофотографии диаметром 12° (остаточная погрешность $12-13$ мкм). Однако калибровка АФУ-75, выполненная по астрофотографии с рабочим полем в 6° , показала значительно лучшие результаты: остаточная погрешность уменьшилась до ± 6 мкм. Таким образом подтверждается, что для астрометрической редукции фотографических наблюдений, полученных на спутниковых пленочных

камерах, следует использовать только самые малые поля не более $2-3^\circ$ в диаметре.

3. Калибровка современных широкоугольных астрографов с фокусным расстоянием около 2 м позволяет представить измеренные положения опорных звезд с учетом дисторсии с точностью до погрешностей положений этих звезд в рабочем каталоге на эпоху наблюдений. Об этом свидетельствует опыт калибровки зонного астрографа Цейсса в Николаеве, московского широкоугольного астрографа АФР-1 и двойного широкоугольного астрографа в Голосееве. В случае калибровки астрографа АФР-1 показано, что использование для опорных звезд данных астрометрического стандарта α Per приводит к лучшему представлению измеренных положений звезд по всему полю астрофотографии, чем при использовании данных каталога AGK-3 (остаточная погрешность уменьшилась с $\pm 0,5''$ до $0,3''$).

4. Среди широкоугольных астрографов, имеющихся на обсерваториях СССР, наилучшими с точки зрения астрометрической калибровки являются московский астрограф АФР-1, зонный астрограф Цейсса в Николаеве и двойной широкоугольный астрограф Цейсса в Голосееве. Однако имеются указания на то, что послевоенная центрировка объектива зонного астрографа в Николаеве выполнена недостаточно точно: в распределении тангенциальных составляющих невязок обнаружена волна, характерная для тангенциальной дисторсии с коэффициентом $D_t \approx 1 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^{-1}$.

5. Для всех исследованных астрографов Цейсса (400/2000) характерна отрицательная радиальная дисторсия, хорошо представляемая кубическим законом с коэффициентом $D_r = -0,5 \cdot 10^{-7} \text{ мм}^{-2}$, что составляет 50 мкм на краю шестиградусного поля. Эту дисторсию, безусловно, необходимо учитывать при астрометрических работах с использованием широкого поля. Качество изображений по всему рабочему полю некоторых из этих астрографов неодинаково, что приводит к недопустимо большим ошибкам измерений. Об этом говорит опыт калибровки астрографа в Душанбе. Что касается астрографов, установленных в Звенигороде и Зеленчуке, то ввиду недостаточности присланного наблюдательного материала, полученного на этих инструментах, наши результаты их калибровки можно считать лишь предварительными.

6. Калибровка геометрическим методом двойных широкоугольных астрографов Цейсса с фокусным расстоянием 3 м производится неуверенно. Дисторсия проекции этих астрографов вообще мала (порядка $-0,2 \cdot 10^{-7}$) и выявляется на пределе точности редукции. Погрешность представления измеренных положений опорных звезд велика ($0,6''-0,7''$ или 9–10 мкм) и не может объясняться погрешностями каталожных данных. По-видимому, большая величина этих погрешностей зависит от недостаточности принятой модели дисторсии или от особенностей внеосевых изображений звезд, что приводит к систематическим ошибкам измерений звезд в краевых зонах на пластинках размером 30 X 30 см, применяемых на этом астрографе.

7. Калибровка камеры Шмидта обсерватории Рожен привела лишь к посредственным результатам (остаточная погрешность представления составляет $0,6''$ или 5 мкм), хотя найденный коэффициент радиальной кубической дисторсии $D_r = -1,0 \cdot 10^{-7} \text{ мм}^{-2}$ определен вполне уверенно. По-

видимому, принятая модель дисторсии недостаточна для воспроизводства сложных искажений проекции на пластинках Шмидта, выгибаемых во время наблюдений и выпрямляемых во время измерений.

Выполненное исследование показывает, что астрометрическую калибровку широкоугольных коротко- и среднефокусных камер можно успешно произвести на основе геометрического метода редукиции. Можно утверждать, что результаты такой калибровки лучше отвечают практическим требованиям фотографической астрометрии, чем данные калибровки, полученные оптическими способами или классическими методами, использующими широкие пары звезд (см., например, (Шорр и др., 1951; Дейч, 1973)), включая метод скользящей пары (Киселева, 1966). Внутренняя точность этих методов довольно низка, хотя они и обладают повышенной чувствительностью к искажениям проекции и их можно использовать для калибровки длиннофокусных телескопов. Результаты калибровки методами широких пар, как правило, расходятся с результатами калибровки геометрическим методом несколько больше, чем допускают формальные погрешности этих методов. Это объясняется в первую очередь локальным характером условий применения классических методов и, напротив, свойством интегральности результатов калибровки, полученных геометрическим методом. Но именно такие результаты калибровки — положение оптического центра и параметры дисторсии — нужны, чтобы не прибегая к излишне сложным моделям и ограничиваясь разумным числом опорных звезд, выполнить астрометрическую редукицию фотографических наблюдений без потери точности. Важное преимущество геометрического метода калибровки состоит в том, что он наряду с искомыми параметрами калибровки позволяет выявить реальную точность астрометрической редукиции фотографий с широким полем при заданной модели дисторсии и при данном рабочем каталоге опорных звезд. Эти результаты могут служить основой для планирования конкретных астрометрических программ, выполняемых на широкоугольных телескопах.

§ 7. Метод астрометрической редукиции с двумя системами опорных звезд

7.1. Постановка задачи. При определении сферических координат больших планет, галактик или квазаров фотографическим методом часто возникает задача астрометрической редукиции с двумя системами опорных звезд или, как иногда говорят, задача двухступенчатой редукиции. Необходимость в такой сложной редукиции возникает из самой методики наблюдений, отражающей специфику изображений определяемых объектов. Так, при наблюдениях больших планет и их спутников целесообразно применять телескопы с большими (порядка 10 м) фокусными расстояниями, так как только с помощью таких астрографов можно достичь максимальной точности относительных положений планеты и спутников, для которых в настоящее время характерны погрешности порядка $\pm 0,05'' - 0,10''$ (Пэску, 1980). Однако, кроме относительных положений тел в системе спутников большой планеты, обычно желательно иметь еще и их сферические координаты в системе какого-нибудь современного каталога. Вывести эти координаты из фотографических наблюдений с длиннофокус-

ным телескопом, как правило, невозможно ввиду недостаточного числа опорных звезд. Чтобы решить эту вторую задачу, прибегают к повторному фотографированию в близкую дату с помощью широкоугольного астрографа области неба, где планета находилась во время наблюдений, полученных на длиннофокусном телескопе.

Обработка наблюдений в этом случае делается по *алгоритму двухступенчатой редукции*, идея которого состоит в следующем. Измеренные координаты объектов на пластинке длиннофокусного телескопа P_1 пересчитывают в систему измерений пластинки широкоугольного астрографа P_2 , а затем с помощью обычного алгоритма астрометрической редукции вычисляют тангенциальные и сферические координаты определяемых объектов. Чтобы реализовать эту схему, необходимо, во-первых, отождествить общие звезды (не менее трех) на пластинках P_1 и P_2 , а во-вторых, выбрать опорные звезды на пластинке P_2 в соответствии с имеющимся рабочим каталогом. Звезды, общие для пластинок P_1 и P_2 , называют опорными звездами первой ступени (обычно это слабые и не очень многочисленные звезды, окружающие объекты на пластинке P_1), а звезды, служащие для вычисления тангенциальных координат, т.е. для перехода от пластинки P_2 к пластинке сравнения Π , называют опорными звездами второй ступени. Таким образом, все операции, связанные с обработкой наблюдений, полученных на двух телескопах, разделяются на два этапа: на первом этапе с помощью опорных звезд первой ступени определяют "измеренные" координаты объектов на пластинке P_2 , на втором этапе с помощью опорных звезд второй ступени вычисляют сферические координаты объектов.

В случае определения координат галактик или квазаров главная трудность задачи заключается в большой разнице яркостей определяемых объектов и опорных звезд, составляющей 6–10 величин. Эта трудность преодолевается путем создания двух- или трехступенчатой системы опорных звезд на одной и той же пластинке, которая с этой целью экспонируется последовательно с разными выдержками и со сдвигом. Например, если требуется определить положение квазара 18-й величины, применяют широкоугольный астрограф (типа ДША Цейсса), на котором изображение квазара можно получить за 40–60 мин экспозиции; одновременно получают и четкие изображения опорных звезд первой ступени, которые выбирают из числа звезд фона 13–14-й величины. Изображения опорных звезд второй ступени (звезды из AGK-3 обычно 9–10-й величины) получают на этой же пластинке путем дополнительной экспозиции в одну минуту, которую производят вблизи среднего момента длинной экспозиции так, чтобы не нарушать принципа симметрии наблюдений. В итоге таких наблюдений и последующих измерений на широкоугольной пластинке P_2 получают две системы измеренных координат: одну — для изображений звезд, снятых с часовой экспозицией, и другую — для изображений звезд с минутной экспозицией. Если эти системы измеренных координат рассматривать как принадлежащие разным пластинкам P_1 и P_2 , то задача астрометрической редукции сводится к предыдущему случаю. Переходным звеном от P_1 к P_2 в этой ситуации служат звезды 13–14-й величины, изображения которых можно уверенно измерить как при экспозициях в один час, так и при экспозиции в одну минуту. Окончательная редукция в этой задаче выполняется

с помощью опорных звезд второй ступени. Легко видеть, что в этой схеме астрометрической редукции с двумя системами опорных звезд между определяемыми объектами и опорными звездами нигде нет различия в яркости более чем на четыре величины (в 40 раз), что считается допустимым, учитывая высокое качество изображений, получаемых на современных телескопах.

Альтернативным методом редукции фотографических наблюдений с двумя системами опорных звезд является метод, в котором пластинка с широким полем (P_2 в наших обозначениях) применяется для определения сферических координат опорных звезд на пластинке P_1 , которая затем используется для определения положений объектов обычным путем. В этом методе опорные звезды первой ступени (на пластинке P_1) обычно называют промежуточными опорными звездами, а сам метод — *методом с промежуточной системой опорных звезд*. Здесь алгоритм определения фотографических положений небесных объектов применяется два раза (первый раз — по отношению к промежуточным опорным звездам, рассматриваемым как объекты, и второй раз — по отношению к основным определяемым объектам). Никаких дополнительных операций, обеспечивающих применение этого метода, не требуется. Что касается первого метода (изложенного в начале раздела 7.1), то дополнительно к обычной программе определения фотографического положения небесного объекта для него требуется специальный алгоритм сравнения измеренных координат на пластинках P_1 и P_2 . Несмотря на существенно разные алгоритмы, оба метода эквивалентны по точности, если применяются корректно и в одинаковых условиях. Оба метода широко используются в фотографической астрометрии (Бронникова и др., 1973; Киселева и др., 1977; Кумкова, 1978; Левитская, 1979).

7.2. Алгоритм метода двухступенчатой редукции. Остановимся подробнее на алгоритме первого метода, в котором удалось реализовать некоторые новые идеи, связанные с преобразованием депенденсов при переходе от одной системы опорных звезд к другой.

Введем следующие обозначения: P_1 — пластинка, полученная на длиннофокусном телескопе; $T_1(x_T, y_T)$ — ее оптический центр; x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, M$) — измеренные координаты M опорных звезд первой ступени; x_{0k}, y_{0k} ($k = 1, 2, \dots, K$) — измеренные координаты K объектов на той же пластинке; P_2 — пластинка, полученная на широкоугольном телескопе; $T_2(x'_T, y'_T)$ — ее оптический центр, совпадающий с T_1 или близкий к нему; x'_i, y'_i ($i = 1, 2, \dots, M$) — измеренные координаты изображений звезд первой ступени на пластинке P_2 ; x'_j, y'_j ($j = 1, 2, \dots, N$) — измеренные координаты N опорных звезд второй ступени на той же пластинке; ξ_j, η_j ($j = 1, 2, \dots, N$) — тангенциальные координаты опорных звезд второй ступени, вычисленные на основе данного рабочего каталога с началом в оптическом центре пластинки P_2 .

Требуется определить сферические координаты всех K объектов, измеренных на пластинке P_1 . Задачу будем считать решенной, если вычислим тангенциальные координаты ξ_{0k}, η_{0k} определяемых объектов в системе опорных звезд пластинки P_2 . В соответствии с идеей первого метода вычислительную схему построим следующим образом.

Первый этап. Определяем K систем депенденсов опорных звезд первой ступени относительно объектов. Вычисления выполняем согласно схеме с коррелятами по формулам (4.49), (4.50). Результаты вычислений расположим в матрице, имеющей K строк (по числу объектов) и M столбцов (по числу опорных звезд первой ступени):

$$\Delta_{KM} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1M} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{K1} & D_{K2} & \dots & D_{KM} \end{bmatrix}. \quad (4.189)$$

Напомним, что полученные депенденсы по определению удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^M D_{ki} x_i = x_{0k}, \quad \sum_{i=1}^M D_{ki} y_i = y_{0k}, \quad \sum_{i=1}^M D_{ki} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.190)$$

Теперь, используя то обстоятельство, что оптические центры пластинок P_1 и P_2 близки, вычисляем "измеренные" координаты объектов в системе измерений пластинки P_2 :

$$x'_{0k} = \sum_{i=1}^M D_{ki} x'_i, \quad y'_{0k} = \sum_{i=1}^M D_{ki} y'_i, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.191)$$

Второй этап. По измеренным координатам опорных звезд второй ступени и найденным координатам объектов определяем K систем депенденсов опорных звезд второй ступени относительно объектов. Результаты вычислений представим в виде матрицы

$$\Delta_{KN} = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & \dots & D'_{1N} \\ D'_{21} & D'_{22} & \dots & D'_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D'_{K1} & D'_{K2} & \dots & D'_{KN} \end{bmatrix}. \quad (4.192)$$

Здесь депенденсы D'_{ij} по определению удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^N D'_{kj} x'_j = x'_{0k}, \quad \sum_{j=1}^N D'_{kj} y'_j = y'_{0k}, \quad \sum_{j=1}^N D'_{kj} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.193)$$

Теперь вычисляем тангенциальные координаты объектов в соответствии с основными положениями метода депенденсов (4.43) – (4.47)

$$\xi_{0k} = \sum_{j=1}^N D'_{kj} \xi_j, \quad \eta_{0k} = \sum_{j=1}^N D'_{kj} \eta_j, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.194)$$

Тем самым задачу астрометрической редукции с двумя ступенями опорных звезд можно считать решенной.

В этом решении обращает на себя внимание наличие промежуточного результата – измеренных координат объектов (4.191), не представляю-

щих другого интереса, кроме как для вычисления D'_{kj} из условий (4.193). В связи с этим естественно поставить вопрос: нельзя ли определить D'_{kj} непосредственно, не прибегая к вычислениям x'_{0k} и y'_{0k} . Ответ будет положительным. В самом деле, предположим, что нам известны тангенциальные координаты ξ_i, η_i ($i = 1, 2, \dots, M$) опорных звезд первой ступени. Тогда, используя уже вычисленные депенденсы D_{ki} , можем записать решение задачи в следующем виде:

$$\xi_{0k} = \sum_{i=1}^M D_{ki} \xi_i, \quad \eta_{0k} = \sum_{i=1}^M D_{ki} \eta_i, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.195)$$

Остается определить ξ_i, η_i , что несложно, поскольку изображения опорных звезд и первой, и второй ступени одновременно присутствуют на пластинке P_2 . Рассматривая в этой задаче звезды первой ступени в качестве определяемых объектов, а звезды второй ступени — в качестве опорных, вычислим по известным формулам (4.49), (4.50) M наборов депенденсов D'_{ij} ($i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$), которые расположим в виде матрицы

$$\Delta'_{MN} = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & \dots & D'_{1N} \\ D'_{21} & D'_{22} & \dots & D'_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D'_{M1} & D'_{M2} & \dots & D'_{MN} \end{bmatrix}. \quad (4.196)$$

По определению D'_{ij} удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^N D'_{ij} x'_j = x'_i, \quad \sum_{j=1}^N D'_{ij} y'_j = y'_i, \quad \sum_{j=1}^N D'_{ij} = 1, \quad (4.197)$$

и, следовательно, искомые ξ_i и η_i можно вычислить по формулам

$$\xi_i = \sum_{j=1}^N D'_{ij} \xi_j, \quad \eta_i = \sum_{j=1}^N D'_{ij} \eta_j. \quad (4.198)$$

Теперь подставим найденные ξ_i и η_i в (4.195) и сделаем очевидные перегруппировки слагаемых

$$\begin{aligned} \xi_{0k} &= \sum_{i=1}^M D_{ki} \left(\sum_{j=1}^N D'_{ij} \xi_j \right) = \left(\sum_{i=1}^M D_{ki} D'_{i1} \right) \xi_1 + \left(\sum_{i=1}^M D_{ki} D'_{i2} \right) \xi_2 + \dots \\ &\dots + \left(\sum_{i=1}^M D_{ki} D'_{iN} \right) \xi_N, \end{aligned} \quad (4.199)$$

$$\eta_{0k} = \left(\sum_{i=1}^M D_{ki} D'_{i1} \right) \eta_1 + \left(\sum_{i=1}^M D_{ki} D'_{i2} \right) \eta_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^M D_{ki} D'_{iN} \right) \eta_N.$$

Сравнивая выражения (4.194) и (4.199), которые получены в рамках аффинных преобразований между пластинками P_1 и P_2 и в строгом соответствии с правилами однозначного вычисления депенденсов посредством коррелат, приходим к следующим формулам преобразования депенденсов, подменяющих прямые вычисления, связанные с преобразованиями

З а м е ч а н и е . Как уже отмечалось, при изложении метода с двойной системой опорных звезд мы исходим из близости оптических центров пластинок P_1 и P_2 . Таким образом, эти пластинки мы считаем находящимися в аффинном соответствии, что позволяет применять линейные методы сравнения координат. На практике, однако, это условие не всегда бывает выполнено, например, в тех случаях, когда одна пластинка P_2 обслуживает две или три пластинки P_1 , смещающиеся вслед за движением планеты. Чтобы и в этом случае сохранить право применить рассмотренный здесь метод, необходимо всякий раз при сравнении пластинок P_1 и P_2 проверять положения их оптических центров, и если окажется, что различие центров T_1 и T_2 (наклонность) таково, что при пересчете измеренных координат объекта из системы P_1 на систему P_2 по линейным формулам возникает остаточная погрешность, большая допустимой (это проверяется по таблицам типа табл. 2), то необходимо исправить систему измеренных координат пластинки P_1 за наклонность так, чтобы она оказалась в аффинном соответствии с пластинкой P_2 . Необходимые поправки можно вычислить по формулам (3.49), воспользовавшись тем обстоятельством, что ориентировки пластинок P_1 и P_2 практически совпадают. Именно так разработан алгоритм и составлена программа для ЭВМ астрометрической редукции фотографических наблюдений больших планет, которые выполняются в Пулковке на двух телескопах — на 26-дюймовом рефракторе ($D = 65$ см, $f_0 = 10,4$ м) и на нормальном астрографе ($D = 30$ см, $f_0 = 3,4$ м). Наблюдения эти успешно проводятся начиная с 1969 года (Бронникова и др., 1973; Киселева и др., 1977).

7.3. Среднеквадратичная ошибка редукции. Рассмотрим вычисление ошибок редукции в методе с двумя системами опорных звезд. Исходить будем из формулы (4.91), согласно которой оценивается погрешность редукции в методе депенденсов. Применяя эту формулу к решению (4.194), получим

$$\epsilon_{ck}^2 = \epsilon_k^2 + (\epsilon_*^2 + \epsilon_{m2}^2) \sum_{j=1}^N D_{kj}^2. \quad (4.205)$$

Здесь ϵ_{m2} и ϵ_* — средние ошибки измерений и каталожных положений опорных звезд второй ступени на эпоху наблюдений, ϵ_k — ошибки измеренного положения k -го объекта на пластинке P_2 ; по условиям редукции эта ошибка состоит из ошибки измерений объекта на пластинке P_1 и из ошибки преобразования измеренных координат объекта с пластинки P_1 на пластинку P_2 . Согласно (4.91), эту ошибку следует оценить так:

$$\epsilon_k^2 = \epsilon_{mk1}^2 + (\epsilon_{m1}^2 + \epsilon_{m2}^2) \sum_{i=1}^M D_{ki}^2. \quad (4.206)$$

В этой формуле ϵ_{m1} и ϵ_{m2} — погрешности измерений опорных звезд первой и второй ступени. Объединяя оценки (4.205) и (4.206), получим окончательно

$$\epsilon_{ck}^2 = \epsilon_{mk1}^2 + (\epsilon_{m1}^2 + \epsilon_{m2}^2) \sum_{i=1}^M D_{ki}^2 + (\epsilon_{m2}^2 + \epsilon_*^2) \sum_{j=1}^N D_{kj}^2. \quad (4.207)$$

Данной формулой удобно пользоваться, если указанные в ней компоненты общей погрешности известны априори. Если же нет таких сведений, необходимо оценить все эти погрешности в процессе редукции по внутренней сходимости исходных данных. Формулу (4.207) в этих случаях удобнее применять в следующем виде:

$$\epsilon_{ck} = \epsilon_{mk1}^2 + \sigma_{11}^2 \sum_{i=1}^M D_{ki}^2 + \sigma_{12}^2 \sum_{j=1}^N D_{kj}^2. \quad (4.208)$$

Здесь σ_{11} и σ_{12} — ошибки единицы веса в условных уравнениях при редукции на первой и второй ступенях. Разумеется, в этом случае необходимо параллельно с вычислениями депенденсов вычислять также и постоянные пластинок и невязки условных уравнений как на первой, так и на второй ступенях редукции. Этими вычислениями никогда не следует пренебрегать ввиду эффективного контроля фактических начальных данных редукции, который они обеспечивают.

Формулы (4.207) и (4.208) могут применяться для оценивания точности результата астрометрической редукции как в случае использования первого изложенного здесь алгоритма, так и в случае использования альтернативного метода с вычислением сферических координат промежуточных опорных звезд.

* * *

В этой главе были всесторонне рассмотрены задачи астрометрической редукции позиционных фотографических наблюдений небесных объектов. Ее главное содержание сводится к следующему.

1. Даны определения основных понятий фотографической астрометрии в связи с задачей определения координат небесных объектов.

2. Предложена строгая формулировка задачи редукции измерений астрофотографий, использующая понятия рабочей пластинки P и пластинки сравнения Π . Обращено внимание на условия корректности применения метода наименьших квадратов для определения постоянных пластинок.

3. Дан обзор наиболее употребительных моделей астрометрической редукции и их характеристики в связи с опытом практического применения.

4. Детально рассмотрены свойства линейных методов редукции. Получены формулы связи постоянных пластинок с геометрическим масштабом астрографа, учитывающие влияние дифференциальной рефракции, обоснована геометрическая интерпретация метода депенденсов Шлэзингера и указаны заблуждения, связанные с применением этого метода на практике, особенно в задаче определения тригонометрических параллаксов звезд.

5. На основе геометрических свойств метода депенденсов выведена формула (4.90) распределения ошибок в линейных методах и показано, как ее можно использовать для оценки остаточных систематических ошибок редукции в линейных методах, зависящих от погрешности принятого положения оптического центра, от дисторсии и от пренебрежения нелинейными эффектами дифференциальной рефракции. Эти результаты проиллюстрированы соответствующими численными данными (табл. 2), имеющими прикладное, практическое значение.

6. Предложено два новых метода астрометрической редукции фотографий небесных объектов, не применяющих тангенциальные координаты. Первый из этих методов — интерполяционный — использует линейные инварианты измеренных координат и является векторной интерпретацией, обобщающей метод депенденсов Шлезингера. Второй метод — метод гомографических координат — использует проективные инварианты и, следовательно, не требует знания положения оптического центра астрофотографии. Оба метода применяют векторные формулы для вычисления результата редукции и рассчитаны на использование их в схемах с небольшим числом опорных звезд, что особенно удобно при обработке фотографических наблюдений искусственных спутников Земли.

7. Предложен метод астрометрической редукции широкоугольных фотографий, основанный на строгих формулах проективного преобразования координат, так называемый геометрический метод. Этот метод, заимствованный из фотограмметрии, успешно применен для калибровки широкоугольных телескопов.

8. Рассмотрен метод астрометрической редукции с двумя системами опорных звезд, рассчитанный на применение при обработке фотографических наблюдений больших планет, полученных на длиннофокусных телескопах, а также для определения положений небесных объектов, существенно более слабых, чем опорные звезды, например галактик или квазаров. Показано, что имеется два пути реализации основной идеи этого метода. Подробно рассмотрен алгоритм двухступенчатого метода, использующего преобразования измеренных координат. Для случая аффинного соответствия пластинок первой и второй ступени выведена формула преобразования депенденсов при переходе к новой системе опорных звезд. Результат получен в форме произведения матриц, элементами которых являются депенденсы.

ОШИБКИ АСТРОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ ФОТОГРАФИЙ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Постановка задачи

Как следует из формулировки задачи об определении координат небесных объектов фотографическим методом, существенной частью решения этой задачи является определение параметров функций $g_1(x, y, a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $g_2(x, y, b_1, b_2, \dots, b_m)$, устанавливающих взаимно однозначное соответствие между измеренными координатами рабочей пластинки P и координатами пластинки сравнения Π . Аналогичная задача решается и в других разделах фотографической астрометрии, например, при определении собственных движений звезд или их тригонометрических параллаксов. Во всех этих проблемах конечная погрешность результата складывается из двух частей — из *ошибки измерений объекта* ϵ_{m0} и *ошибки редукции* ϵ_R , отражающей совокупное влияние *ошибок измерений* опорных звезд ϵ_m и *ошибок их каталожных положений* ϵ_* на эпоху наблюдений. В полном соответствии с этим положением была выведена формула (4.91). *Ошибка редукции* в этой формуле выражается через фактор $[D^2]$, т.е. существенно зависит от числа опорных звезд N и от характера общей конфигурации опорных звезд и объекта. Естественно ожидать, что при использовании различных моделей редукции ошибка редукции ϵ_R будет изменяться. Рассмотрим задачу об оценивании ошибок редукции в общем виде и на основе полученного результата выведем оценки ошибки редукции в различных моделях, рассмотренных в § 3 гл. 4.

1.1 Ошибки астрометрической редукции в общем случае. Согласно (4.12) тангенциальные координаты объекта ξ_0, η_0 в общем случае вычисляются с помощью линейных форм, коэффициенты которых $\{a_i\}, \{b_i\}$ (постоянные пластинки) определяются по способу наименьших квадратов в схеме выравнивания косвенных наблюдений. Коэффициенты $\{a_i\}, \{b_i\}$, таким образом, нельзя считать независимыми, напротив, они могут быть сильно коррелированными, что непосредственно проверяется, если вычислить соответствующую корреляционную матрицу. В этих условиях ошибка редукции, которая определяется дисперсией тех линейных форм (4.12), с помощью которых вычислены тангенциальные координаты объектов, должна быть вычислена с учетом корреляций между постоянными пластинки, определяемыми по способу наименьших квадратов. Соответствующая теория рассмотрена в монографии Ю.В. Линника (1958).

Рассмотрим этот вопрос в общем виде. Пусть выбранная модель редукции определяется преобразованием с $2m$ постоянными

$$\begin{aligned} \xi_j &= a_1 \cdot 1 + a_2 x_j + a_3 y_j + a_4 x_j^2 + \dots + a_m x_j^p y_j^q, \\ \eta_j &= b_1 \cdot 1 + b_2 x_j + b_3 y_j + b_4 x_j^2 + b_5 x_j y_j + \dots + b_m x_j^r y_j^s, \\ j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь ξ_j , η_j и x_j , y_j — тангенциальные и измеренные координаты опорных звезд. Число определяемых постоянных по каждой координате равно m , число опорных звезд N , причем $N > m$, комбинации степеней измеренных координат при постоянных в формулах для ξ_j и для η_j могут быть различными.

Решается задача определения наивероятнейших значений постоянных a_i и b_i по способу наименьших квадратов. Системы уравнений для решения этой задачи имеют следующий вид: условные уравнения для определения постоянных a_i

$$X_{Nm} A_{m1} = \Xi_{N1}, \quad (5.2)$$

условные уравнения для определения постоянных b_i

$$X_{Nm}^* B_{m1} = H_{N1}. \quad (5.3)$$

Здесь X_{Nm} и X_{Nm}^* — прямоугольные матрицы, имеющие N строчек и m столбцов, заданные коэффициентами условных уравнений (5.1):

$$X_{Nm} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & \dots & x_1^p y_1^q \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & \dots & x_2^p y_2^q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & y_N & x_N^2 & x_N y_N & \dots & x_N^p y_N^q \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Определим A_{m1} и B_{m1} как

$$A_{m1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix}, \quad B_{m1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

— одностолбцовые матрицы, составленные из определяемых постоянных a_i и b_i , $i = 1, 2, \dots, m$, а

$$\Xi_{N1} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad H_{N1} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_N \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

— одностолбцовые матрицы, составленные из тангенциальных координат ξ_j , η_j опорных звезд ($j = 1, 2, \dots, N$). В дальнейшем нам еще понадо-

бются одно столбцовые матрицы $X_{m1}^{(j)}$, $X_{m1}^{*(j)}$, имеющие вид

$$X_{m1}^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_j \\ y_j \\ x_j^2 \\ x_j y_j \\ \vdots \\ x_j^p y_j^q \end{bmatrix}, \quad X_{m1}^{*(j)} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_j \\ y_j \\ x_j^2 \\ x_j y_j \\ \vdots \\ x_j^r y_j^s \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

составленные из тех степеней измеренных координат каждой j -й опорной звезды ($j = 1, 2, \dots, N$), которые включены в уравнения (5.2), (5.3).

Нижеследующие выкладки, одинаковые для решения систем (5.2) и (5.3), проследим на примере определения постоянных $\{a_i\}$ в системе (5.2). В этих выкладках, как и всюду далее при операциях с матрицами, будем различать прямые и транспонированные матрицы изменением порядка сопровождающих индексов, определяющих число строчек (первый индекс) и число столбцов (второй индекс) в таблице, например

$$(X_{m1})^T = X_{1m}, \quad (X_{Nm})^T = X_{mN}. \quad (5.8)$$

Итак, для определения постоянных пластинок a_i и b_i имеем следующую типовую систему условных уравнений:

$$X_{Nm} A_{m1} = L_{N1}, \quad (5.9)$$

где L_{N1} принимает значение Ξ_{N1} или H_{N1} в зависимости от того, определяются ли постоянные a_i или b_i .

Решение системы условных уравнений (5.9) по способу наименьших квадратов имеет следующий вид:

$$\tilde{A}_{m1} = C_{mm}^{-1} X_{mN} L_{N1}. \quad (5.10)$$

Здесь \tilde{A}_{m1} — вектор оценок искомых постоянных пластинки a_i ($i = 1, 2, \dots, m$), C_{mm}^{-1} — симметричная матрица, обратная по отношению к матрице нормальных уравнений C_{mm} . Последнюю, пользуясь гауссовыми обозначениями сумм, можем записать так:

$$C_{mm} = X_{mN} X_{Nm} = \begin{bmatrix} N & [x] & \dots & [x^p y^q] \\ [x] & [x^2] & \dots & [x^{p+1} y^q] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [x^p y^q] & [x^{p+1} y^q] & \dots & [x^{2p} y^{2q}] \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Согласно теории метода наименьших квадратов (Линник, 1958) решение (5.10) доставляет несмещенные наиболее вероятные оценки величин постоянных a_1, a_2, \dots, a_m при условии, что наблюдаемые величины l_j ($j = 1, 2, \dots, N$) есть тангенциальные координаты опорных звезд ξ_j, η_j , которые отличаются от своих точных значений l_j^* (удовлетворяющих

всем N уравнениям (5.9)), только случайным образом, иначе говоря, если

$$(l_j - l_j^*) \in N(0, \sigma), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.12)$$

где $\mathcal{N}(0, \sigma)$ — нормальный закон распределения с центром в нуле и дисперсией σ^2 .

Ошибки величин постоянных \tilde{a}_i , вычисленных согласно (5.10), в этих условиях оцениваются по формуле

$$\epsilon^2(\tilde{a}_i) = \sigma^2 \{C_{mm}^{-1}\}_{ii} \approx \frac{\sigma_1^2}{p_i}. \quad (5.13)$$

Здесь σ^2 — неизвестная нам дисперсия в распределении (5.12), σ_1 — ошибка единицы веса в системе условных уравнений (5.9), определяемая по невязкам этих уравнений, $\sigma_1 \rightarrow \sigma$ при $N \rightarrow \infty$, $\{C^{-1}\}_{ii}$ — i -й диагональный элемент обратной матрицы системы нормальных уравнений, равный обратной величине веса определяемой неизвестной a_i .

Ошибка единицы веса в этой задаче вычисляется по известной формуле

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{N - m}}, \quad (5.14)$$

где

$$v = l_j - l_j^{(c)}; \quad [vv] = \sum_{j=1}^N (l_j - l_j^{(c)})^2 \quad (5.15)$$

имеют смысл традиционных в астрономии величин "наблюдения минус вычисления" ("O — C"), поскольку $l_j^{(c)}$ вычисляются путем прямой подстановки вектора оценок A_{m1} в систему уравнений (5.9)

$$l_j^{(c)} = \tilde{A}_{1m} X_{m1}^{(j)}, \quad (5.16)$$

где X_{m1} определено согласно (5.7).

Величина $[vv]$ может быть вычислена и непосредственно, используя коэффициенты нормальных уравнений

$$[vv] = L_{1N} L_{N1} - \tilde{A}_{1m} C_{mm} \tilde{A}_{m1}. \quad (5.17)$$

Матричное уравнение (5.17) легко приводится к известному выражению, обычно приводимому при изложении способа наименьших квадратов в учебниках (см., например, Идельсон, 1932). В нашей задаче это соотношение записывается следующим образом:

$$[vv] = [ll] - \{ \tilde{a}_1[l] + \tilde{a}_2[xl] + \tilde{a}_3[y1] + \tilde{a}_4[x^2l] + \dots + \tilde{a}_m[x^p y^q l] \}. \quad (5.18)$$

Определения величины $[vv]$ по формулам (5.15) и (5.18) теоретически тождественны, поэтому для контроля вычислений полезно пользоваться обеими формулами.

Приведенные здесь оценки погрешностей постоянных по формулам (5.13) и (5.14) при небольшом числе условных уравнений с точки зрения статистики недостаточны. Они должны быть дополнены построением доверительных интервалов для заданной величины надежности \mathcal{P}_c . Для этого следует воспользоваться статистическим свойством величины

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} = \frac{[vv]}{N-m} \frac{1}{\sigma^2}, \quad (5.19)$$

которая, как доказывается в теории вероятностей, имеет распределение Стьюдента χ_{N-m}^2 с $N-m$ степенями свободы. Таким образом, и величина

$$t_{N-m} = \frac{\tilde{a}_i - a_i}{\epsilon(a_i)} = \frac{\tilde{a}_i - a_i}{\sqrt{\{C^{-1}\}_{ii} \frac{[vv]}{N-m}}}, \quad (5.20)$$

являющаяся нормированным отклонением определяемого параметра относительно его истинной величины, также имеет распределение Стьюдента с $N-m$ степенями свободы, т.е. t -распределение Стьюдента, для которого имеются подробные таблицы (Линник, 1958; Слуцкий, 1950). Это позволяет построить доверительные интервалы для найденных оценок \tilde{a}_i , исходя из условия

$$\mathcal{P} \{ |\tilde{a}_i - a_i| \leq \gamma \epsilon(a_i) \} = \mathcal{P}_c, \quad (5.21)$$

где \mathcal{P}_c есть вероятность (надежность) того, что вычисленное значение постоянной a_i не будет отличаться от ее истинного значения более чем на γ -ю долю ее формальной ошибки $\epsilon(a_i)$. Величина $\gamma = \gamma(\mathcal{P}_c, k)$ находится из таблицы t -распределения Стьюдента по двум аргументам — величине заданной надежности \mathcal{P}_c и известному числу степеней свободы $k = N-m$. Например, в случае применения для астрометрической редукции модели $M = (3L + 3Q) \times 2$ (метода двенадцати постоянных) при небольшом числе опорных звезд ($N = 9$) доверительный интервал для $\mathcal{P}_c = 0,95$ и $k = 3$ определяется так:

$$|\tilde{a}_i - a_i| \leq 3,18 \epsilon_i. \quad (5.22)$$

В той же задаче, если пренебречь различием нормального закона распределения и распределения Стьюдента, приходим к следующей оценке доверительного интервала ($\mathcal{P}_c = 0,95$):

$$|\tilde{a}_i - a_i| \leq 1,96 \epsilon(a_i). \quad (5.23)$$

Таким образом, пренебрежение особенностью распределения величины $[vv]$ в случае небольшого числа степеней свободы $N-m$ приводит к существенному завышению оценок точности постоянных редукции.

Теперь перейдем к главной задаче этого раздела — к задаче оценивания ошибок результата редукции, т.е. к определению погрешностей координат объекта ξ_0, η_0 , вычисленных на основе уже определенных постоянных пластинки по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_0 &= \tilde{a}_1 \cdot 1 + \tilde{a}_2 x_0 + \tilde{a}_3 y_0 + \tilde{a}_4 x_0^2 + \dots + \tilde{a}_m x_0^p y_0^q, \\ \tilde{\eta}_0 &= \tilde{b}_1 \cdot 1 + \tilde{b}_2 x_0 + \tilde{b}_3 y_0 + \tilde{b}_4 y_0^2 + \dots + \tilde{b}_m x_0^r y_0^s. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Здесь \tilde{a}_i и \tilde{b}_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — значения постоянных пластинки, вычисленных согласно (5.10), x_0, y_0 — измеренные координаты объекта на пластинке P . В матричном представлении формулы имеют следующий вид:

$$\tilde{\xi}_0 = X_{1m}^{(0)} \tilde{A}_{m1}, \quad \tilde{\eta}_0 = X_{1m}^{*(0)} \tilde{B}_{m1}. \quad (5.25)$$

Здесь использованы обозначения одностолбцовых матриц (5.5), (5.7). Верхний индекс в обозначениях матриц $X_{1m}^{(0)}$ и $X_{1m}^{*(0)}$ показывает, что при образовании этих матриц использованы измеренные координаты объекта x_0, y_0 .

Ошибки редукции в нашей задаче $\epsilon_{R\xi}, \epsilon_{R\eta}$ определим через дисперсии соответствующих линейных форм (5.24) в полном согласии со сделанным в начале этого параграфа замечанием, т.е. с учетом корреляций параметров a_i (между собой) и b_i (между собой)

$$\epsilon_{R\xi} = \sqrt{D(\tilde{\xi}_0)}, \quad \epsilon_{R\eta} = \sqrt{D(\tilde{\eta}_0)}. \quad (5.26)$$

Корреляционной матрицей параметров a_i служит матрица, обратная матрице нормальных уравнений (5.11), а именно

$$K(a_i a_k) = \sigma^2 C_{mm}^{-1}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.27)$$

Дисперсии линейных форм (5.24) определяются матричными формулами

$$D(\tilde{\xi}_0) = \sigma^2 X_{1m}^{(0)} C_{mm}^{-1} X_{m1}^{(0)},$$

$$D(\tilde{\eta}_0) = \sigma^2 X_{1m}^{*(0)} C_{mm}^{-1} X_{m1}^{*(0)}. \quad (5.28)$$

Эти выражения раскрываются в виде квадратичных форм составляющих векторов $X_{m1}^{(0)}$ и $X_{m1}^{*(0)}$: или,

$$D(\xi_0) = \frac{\sigma^2}{\Delta_m} \left\{ A_{11} + 2A_{12}x_0 + 2A_{13}y_0 + \dots + 2A_{1m}x_0^p y_0^q + \right.$$

$$\quad + A_{22}x_0^2 + 2A_{23}x_0 y_0 + \dots + 2A_{2m}x_0^{p+1} y_0^q +$$

$$\quad + A_{33}y_0^2 + \dots + 2A_{3m}x_0^p y_0^{q+1} +$$

$$\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\quad \left. + A_{mm}x_0^{2p} y_0^{2q} \right\} \quad (5.29)$$

Здесь Δ_m — определитель нормальной системы уравнений (5.11), A_{ik} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ_m , σ^2 — дисперсия данных наблюдений, о которых сделано предположение (5.12); оценкой величины σ служит ошибка единицы веса σ_1 , определяемая согласно (5.14).

Аналогично записывается квадратичная форма для $D(\tilde{\eta}_0)$.

Формулы (5.28) и (5.29) имеют большое практическое значение для фотографической астрометрии, так как позволяют вычислить строгие оценки ошибок астрометрической редукции на основе внутренней сходимости начальных данных (величин σ_1) с учетом положения объекта (координаты x_0, y_0), конфигурации опорных звезд и корреляций между постоянными пластинки в связи с выбранной моделью редукции. Так же, как и в случае определения постоянных пластинки, ошибки редукции, вычислен-

ные по формулам (5.26), можно дополнить оценками доверительных интервалов типа (5.21). Это особенно желательно в условиях редукции с небольшим числом степеней свободы $k = N - m$. Задача легко решается, поскольку случайные величины $\tilde{\xi}_0 - \xi_0$; $\tilde{\eta}_0 - \eta_0$, так же, как и величины $\tilde{a}_i - a_i$, зависящие от $[uv]$, распределены по закону Стьюдента с $N - m$ степенями свободы. Для этого достаточно задаться величиной надежности \mathcal{P}_c и обратиться к таблице t -распределения Стьюдента с аргументами k и \mathcal{P}_c ; найденное в таблице значение γ позволяет записать

$$|\tilde{\xi}_0 - \xi_0| < \gamma \epsilon_{R\xi} \quad (\mathcal{P} = \mathcal{P}_c). \quad (5.30)$$

Аналогично оценивается доверительный интервал для $\tilde{\eta}_0$.

§ 2. Обобщение метода депенденсов для общего случая астрометрической редукции

Как следует из (5.25) и (5.10), для $\tilde{\xi}_0$ и $\tilde{\eta}_0$ имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_0 &= X_{1m}^{(0)} \tilde{A}_{m1} = X_{1m}^{(0)} (C_{mm}^{-1} X_{mN} \Xi_{N1}) = \\ &= (X_{1m}^{(0)} C_{mm}^{-1} X_{mN}) \Xi_{N1} = \vec{\Lambda}_{1N} \Xi_{N1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j, \\ \tilde{\eta}_0 &= X_{1m}^{(0)} \tilde{B}_{m1} = \dots = \vec{\Lambda}_{1N}^* \eta_{N1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^* \eta_j. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Здесь введены обозначения для N -мерных векторов

$$\vec{\Lambda}_{N1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix}, \quad \vec{\Lambda}_{N1}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \vdots \\ \lambda_N^* \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

определяемых взаимным расположением опорных звезд и объекта на пластинке P и моделью редукции. Таким образом, результат редукции — тангенциальные координаты объекта $\tilde{\xi}_0$ и $\tilde{\eta}_0$ — в конечном итоге выражается в виде линейных комбинаций тангенциальных координат опорных звезд ξ_j , η_j и некоторых коэффициентов λ_j и λ_j^* , составляющих векторов $\vec{\Lambda}_{N1}$ и $\vec{\Lambda}_{N1}^*$, зависящих при данной модели редукции только от измеренных координат изображений опорных звезд и объекта на пластинке P . Отметим, что если модели редукции выбрать одинаковыми как по ξ , так и по η , то, очевидно, $X_{Nm} = X_{Nm}^*$, и, следуя выводу формул (5.31), получим $\vec{\Lambda}_{N1} = \vec{\Lambda}_{N1}^*$. В этом случае обе тангенциальные координаты объекта вычисляются с одним набором λ_j :

$$\tilde{\xi}_0 = \sum_{j=1}^N \lambda_j \xi_j, \quad \tilde{\eta}_0 = \sum_{j=1}^N \lambda_j \eta_j, \quad (5.33)$$

где λ_j , как составляющие вектора $\vec{\Lambda}_{N1}$, определяются в соответствии с его матричным выражением в формулах (5.31):

$$\vec{\Lambda}_{N1} = (X_{1m}^{(0)} C_{mm}^{-1} X_{mN})^T = X_{Nm} C_{mm}^{-1} X_{m1}^{(0)}. \quad (5.34)$$

С помощью коэффициентов λ_j можно вывести оценку ошибки редукции, эквивалентную оценкам (5.26), (5.28), в наглядной форме, позволяющей заметить индивидуальный вклад каждой опорной звезды в общую суммарную ошибку редукции. Теория дает

$$D(\tilde{\xi}_0) = \sigma^2 [\lambda^2]. \quad (5.35)$$

Эта формула легко проверяется с помощью следующих выкладок:

$$\begin{aligned} [\lambda^2] &= \vec{\Lambda}_{1N} \vec{\Lambda}_{N1} = (X_{1m}^{(0)} C_{mm}^{-1} X_{mN}^{(0)}) (X_{Nm} C_{mm}^{-1} X_{m1}^{(0)}) = \\ &= X_{1m}^{(0)} C_{mm}^{-1} (X_{mN} X_{Nm}) C_{mm}^{-1} X_{m1}^{(0)} = X_{1m}^{(0)} C_{mm}^{-1} X_{m1}^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Здесь мы воспользовались свойством ассоциативности матричного умножения, а также определением матриц, данным при постановке задачи. Сравнивая результат (5.36) и формулу (5.28), заключаем об эквивалентности оценок (5.28) и (5.35).

Представляет интерес сопоставить приведенные нами общие формулы (5.33), (5.35) и формулы метода депенденсов (4.47), (4.91). Первые заимствованы из общей теории метода наименьших квадратов, вторые получены чисто геометрически в связи с изложением линейных методов астрометрической редукции. В обоих случаях конечный результат редукции — координаты объекта — определяются линейной комбинацией типа (5.33), а ошибки вычисленных координат оцениваются формулой типа (5.35), где множителем при дисперсии наблюдательных данных фигурирует либо фактор $[\lambda^2]$, либо $[D^2]$, выражающие влияние конфигурации опорных звезд и объекта на точность редукции при заданной ее модели. Таким образом, в обоих случаях координаты объекта вычисляются непосредственно, без привлечения постоянных пластинки. Аналогию можно проследить и далее. В обоих случаях результат редукции оказывается наимвероятнейшим в случайном отношении, по крайней мере постольку, поскольку он совпадает с результатом решения по способу наименьших квадратов с промежуточным определением постоянных пластинки. Ошибка редукции в обоих случаях достигает своего минимума, что в методе депенденсов обеспечивается условием $[D^2] = \min$, которое накладывается на вычисление депенденсов в схеме с коррелятами (4.47) — (4.50), а в общем случае соблюдение условия $[\lambda^2] = \min$ следует только из общих соображений; в том, что оно формально выполняется, нам еще предстоит убедиться.

Ввиду отмеченной аналогии естественно поставить вопрос: можно ли рассматривать полученное здесь решение (5.33) как естественное обобщение депенденсов для общего случая редукции (с произвольной моделью) или эта аналогия отражает лишь внешнее сходство решений. Чтобы ответить на этот вопрос, попытаемся определить коэффициенты λ_j самостоятельно, независимо от задачи определения постоянных пластинок, т.е. так, как это было сделано для депенденсов в § 4 гл. 4. Условия для λ_j запишем

по аналогии с системой (4.47) для депенденсов

$$\begin{aligned} [\lambda'] &= 1, \quad [\lambda'x] = x_0, \quad [\lambda'y] = y_0, \quad [\lambda'x^2] = x_0^2, \\ [\lambda'xy] &= x_0y_0, \dots, [\lambda'x^p y^q] = x_0^p y_0^q, \quad [\lambda'^2] = \min. \end{aligned} \quad (5.37)$$

В матричной форме записи эти же условия имеют следующий вид:

$$X_{mN} \vec{\Lambda}'_{N1} = X_{m1}^{(0)}; \quad \vec{\Lambda}'_{1N} \vec{\Lambda}'_{N1} = \min. \quad (5.38)$$

Здесь введены новые обозначения для вектора

$$\vec{\Lambda}'_{N1} = \begin{bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_N \end{bmatrix}, \quad (5.34a)$$

в отличие от вектора $\vec{\Lambda}_{N1}$, определяемого согласно (5.34). Наша задача как раз в том и состоит, чтобы показать, что вектор $\vec{\Lambda}'_{N1}$, удовлетворяющий условиям (5.37), и вектор $\vec{\Lambda}_{N1}$, служащий для вычисления координат объекта (формулы (5.33)) и для оценок ошибок редукции (формула (5.35)), совпадают.

Покажем, во-первых, что составляющие вектора $\vec{\Lambda}'_{N1}$ обеспечивают вычисления координат объекта по формулам (5.33). Для этого достаточно предположить, что постоянные пластинки, соответствующие выбранной модели редукции, существуют, и преобразования (5.2) и (5.3) выполняются для всех опорных звезд и объектов на пластинке P . Домножим обе части матричного равенства (5.38) на матрицу постоянных A_{1m} слева и воспользуемся ассоциативностью матричного умножения

$$\begin{aligned} A_{1m} (X_{mN} \vec{\Lambda}'_{N1}) &= A_{1m} X_{m1}^{(0)}, \\ (A_{1m} X_{mN}) \vec{\Lambda}'_{N1} &= A_{1m} X_{m1}^{(0)} = \xi_0, \\ \Xi_{1N} \vec{\Lambda}'_{N1} &= \xi_0, \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^N \lambda'_j \xi_j = \xi_0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Формулы (5.33) и (5.39) совпадают. Следовательно, рассматриваемый нами вектор $\vec{\Lambda}'_{N1}$ удовлетворяет основному требованию редукции. Остается однозначно определить этот вектор по начальным данным (5.37) и в соответствии с условием (5.38). Для решения этой задачи имеется m уравнений и N неизвестных λ'_j , $j = 1, 2, \dots, N$, причем $N > m$, однозначность решения обеспечивается условием $[\lambda'^2] = \min$. Задача решается методом коррелят, аналогично случаю определения депенденсов. Неизвестные λ'_j будем искать в форме линейной комбинации коррелят k_i ($i = 1, 2, \dots, m$) и составляющих вектора $X_{m1}^{(j)}$

$$\lambda'_j = k_1 \cdot 1 + k_2 x_j + k_3 y_j + k_4 x_j^2 + \dots + k_m x_j^p y_j^q,$$

или, в общем виде,

$$\vec{\Lambda}'_{N1} = X_{Nm} K_{m1}, \quad (5.40)$$

где $K_{1m} = [k_1 k_2 \dots k_m]$ есть вектор, составленный из коррелят. Чтобы определить корреляты, используем уравнение (5.38), в котором вектор Λ'_{N1} заменим его выражением через корреляты (5.40); далее следуют несложные матричные преобразования

$$X_{mN}(X_{Nm}K_{m1}) = X_{m1}^{(0)}, \quad (X_{mN}X_{Nm})K_{m1} = C_{mm}K_{m1} = X_{m1}^{(0)},$$

в результате выполнения которых получим

$$K_{m1} = C_{mm}^{-1} X_{m1}^{(0)}, \quad (5.41)$$

и окончательно

$$\Lambda'_{N1} = X_{Nm}K_{m1} = X_{Nm}C_{mm}^{-1}X_{m1}^{(0)}. \quad (5.42)$$

Выражение (5.42) совпадает с (5.34), следовательно

$$\vec{\Lambda}_{N1} = \vec{\Lambda}'_{N1}, \quad (5.43)$$

что и требовалось доказать.

Итак, независимое определение коэффициентов λ_j ($j = 1, 2, \dots, N$), удовлетворяющих условиям (5.37), (5.38), обеспечивает вычисление координат объекта по формулам (5.53) без посредства постоянных пластинки и позволяет получить простые оценки точности редукции по формуле (5.35). Рассмотренное решение задачи астрометрической редукции как по результату, так и по его точности полностью эквивалентно решению той же задачи с постоянными пластинки; таким образом, полученное решение с коэффициентами λ_j можно рассматривать как естественное обобщение метода депенденсов для случаев произвольной модели редукции, а сами коэффициенты λ_j как обобщенные депенденсы. Метод астрометрической редукции, использующий рассмотренный здесь аппарат (формулы (5.33) – (5.42)), условимся называть обобщенным методом депенденсов. Ниже следует характеристика основных свойств этого метода.

В случае редукции с линейной моделью ($m = 3$) коэффициенты λ_j совпадают с депенденсами Шлезингера и, следовательно, тоже являются инвариантами линейного преобразования координат; кроме того, они имеют простое геометрическое значение как нормированные условные веса, приписанные опорным звездам и распределенные таким образом, чтобы центр тяжести системы опорных звезд совпадал с положением определяемого объекта. В общем случае ($m \geq 4$) коэффициенты λ_j не являются инвариантами преобразования типа (5.1), однако и в этом случае λ_j определяют такое распределение нормированных весов опорных звезд, при котором центр тяжести конфигурации сохраняет свое место в определяемом объекте при заданной модели преобразования. Таким образом, вычисление тангенциальных координат объекта по формулам (5.33) в обобщенном методе депенденсов равносильно определению центра тяжести системы опорных звезд с заданными весами λ_j и координатами ξ_j, η_j на пластинке сравнения П. Основная вычислительная нагрузка в этой задаче падает на этап определения условных весов – коэффициентов λ_j – по данным измерений рабочей пластинки Р. Этот этап по объему вычислений мало чем отличается от этапа определения постоянных пластинок, так как предполагает операции составления и обращения одной и той же матрицы нормальных уравнений (5.11). В случае изменения модели редукции условные веса

опорных звезд будут определены другими, но центр тяжести системы сохранит свое положение в определяемом объекте.

Применяя обобщенный метод депенденсов в задаче астрометрической редукции со многими определяемыми объектами, для каждого k -го объекта определяется свой набор $\{\lambda_j\}_k$, но вычисления существенно не усложняются, поскольку каждый из этих наборов определяется произведением трех матриц (5.34), из которых две — общие для всех объектов и только третья — правая — зависит от координат конкретного определяемого объекта.

Важным моментом решения этих задач является операция оценки точности редукции, для которой в обобщенном методе депенденсов имеется удобная и наглядная формула (5.35). Чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо знать дисперсию данных наблюдений, т.е. величину σ^2 , которая оценивается по невязкам условных уравнений (5.14), (5.17). Отсюда следует практически важный вывод: при корректном применении обобщенного метода депенденсов для астрометрической редукции необходимо наряду с условными весами λ_j для каждого объекта определять также и постоянные пластинки и вычислять невязки условных уравнений v_j . Положения объектов в этой задаче вычисляются по формулам (5.33), а ошибки положений — по формуле (5.35). Именно такая традиция установилась в последние десятилетия при обработке фотографических позиционных наблюдений больших и малых планет методом депенденсов Шлезингера.

Практическое значение обобщенного метода депенденсов состоит, по нашему мнению, прежде всего в распространении почти всех преимуществ линейного метода депенденсов на случаи редукции с нелинейными моделями. Среди таких преимуществ отметим следующие:

1. Обобщенный метод депенденсов предоставляет возможность сравнивать положения избранного объекта на многих пластинках, различающихся центрами и условиями наблюдений; эта операция, типичная для задач определения тригонометрических параллаксов и собственных движений звезд, выполняется сравнительно просто с одним набором коэффициентов λ_j .

2. Обобщенный метод депенденсов обеспечивает возможность исправления результатов редукции, если со временем обнаруживается, что использованные первоначально тангенциальные координаты опорных звезд требуют поправок. Такое исправление, являющееся следствием формул (5.33), выполняется по формулам

$$\Delta\xi_0 = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Delta\xi_j, \quad \Delta\eta_0 = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Delta\eta_j. \quad (5.44)$$

Здесь $\Delta\xi_j, \Delta\eta_j$ — обнаруженные апостериорные поправки положений опорных звезд, $\Delta\xi_0, \Delta\eta_0$ — искомые поправки в координатах объекта $\tilde{\xi}_0$ и $\tilde{\eta}_0$.

3. Обобщенный метод депенденсов обеспечивает наглядность оценкам ошибки редукции (посредством сравнения величин условных весов — коэффициентов λ_j), что позволяет заметить индивидуальный вклад отдельных опорных звезд в суммарную величину ошибки.

З а м е ч а н и е. В отличие от линейного метода депенденсов в обобщенном методе аддитивность ошибок измерений Δx_{mj} , Δy_{mj} и ошибок сферических положений $\Delta \xi_j$, $\Delta \eta_j$ опорных звезд, строго говоря, не выполняется. Поэтому применение формулы (4.90) в задачах с нелинейными моделями редукции некорректно.

§ 3. Численные оценки ошибки астрометрической редукции при применении различных моделей редукции в идеализированных условиях

Оценки (5.28) и (5.35) показывают, что мерой точности астрометрической редукции в любом методе, использующем тангенциальные координаты, служит дисперсия наблюдательных данных σ^2 , а влияние конфигурации опорных звезд и объекта с учетом принятой модели редукции оценивается величиной $[\lambda^2]$ или матричным произведением $X_{1m}^{(0)} C_{mm}^{-1} X_{m1}^{(0)}$. Дисперсия σ^2 , в свою очередь, оценивается по невязкам условных уравнений (5.1) величиной ошибки единицы веса σ_1^2 , вычисляемой согласно (5.14). Если принятая модель редукции правильно отражает природу связи между измеренными и тангенциальными координатами опорных звезд, то априорная оценка величины σ_1 обычно известна. Для линейных методов редукции справедлива уже знакомая нам формула

$$\sigma_1^2 = \epsilon_m^2 + \epsilon_*^2, \quad (5.45)$$

где применены обозначения § 5 гл. 4. В случае применения нелинейных моделей редукции формулу (5.45) можно считать лишь *приближенно* верной в силу нарушения аддитивности ошибок измеренных и каталожных положений в этих методах. Что касается влияния конфигурации и модели (фактор $[\lambda^2]$), то оно также может быть оценено априори аналитически, если воспользоваться геометрической идеализацией условий редукции. Например, если предположить, что опорные звезды распределены равномерно в круге радиуса R , а объект смещается вдоль радиуса r от центра ($r = 0$) до границы круга $r/R = 1$ и далее до $r/R = 1,25$. Геометрическая идеализация позволяет сравнительно просто вычислить элементы всех матриц, участвующих в определении условных весов λ_j и величины $[\lambda^2]$ при заданной модели редукции. За единицу измерений в этих расчетах естественно принять радиус круга R , в котором равномерно распределены опорные звезды. Необходимо также фиксировать число опорных звезд N .

Ниже приводятся оценки величин некоторых характерных гауссовых сумм, из которых составляются матрицы нормальных уравнений типа (5.11). Вычисления сделаны для двух вариантов равномерных распределений опорных звезд: а) внутри круга радиуса R , б) вблизи окружности того же радиуса. За основу расчетов взяты следующие асимптотические формулы, которые выполняются тем точнее, чем равномернее распределение опорных звезд и чем больше их число N :

$$\frac{1}{N} [x^{2p} y^{2q}] \approx \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^{2(p+q)} \cos^{2p} \theta \sin^{2q} \theta r dr d\theta. \quad (5.46)$$

при распределении опорных звезд в круге,

$$\frac{1}{N} [x^{2p} y^{2q}] = \frac{R^{2(p+q)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2p} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \quad (5.47)$$

при распределении опорных звезд вблизи окружности,

$$\frac{1}{N} [x^{2p+1} y^{2q+1}] = \frac{1}{N} [x^{2p+1} y^{2q}] = \frac{1}{N} [x^{2p} y^{2q+1}] = 0, \quad (5.48)$$

$$p, q = 0, 1, 2, \dots, m$$

при любом равномерном распределении опорных звезд.

Т а б л и ц а 6

Оценка величин гауссовых сумм
при равномерном распределении опорных звезд

Гауссовы суммы	Опорные звезды		Гауссовы суммы	Опорные звезды	
	внутри круга	вблизи окружности		внутри круга	вблизи окружности
$[x^2], [y^2]$	$\frac{1}{4} NR^2$	$\frac{1}{2} NR^2$	$[x^4 y^2], [x^2 y^4]$	$\frac{1}{64} NR^6$	$\frac{1}{4} NR^6$
$[x^2 y^2]$	$\frac{1}{24} NR^4$	$\frac{1}{8} NR^4$	$[x^6]$	$\frac{5}{64} NR^6$	$\frac{5}{16} NR^6$
$[x^4], [y^4]$	$\frac{1}{8} NR^4$	$\frac{3}{8} NR^4$			

А теперь обратимся непосредственно к некоторым наиболее употребительным моделям астрометрической редукции для анализа их эффективности в случайном отношении на основе геометрической идеализации. Прежде всего остановимся на линейных методах редукции.

3.1. **Линейная модель $3L \times 2$.** Прямая и обратная матрицы нормальных уравнений для этой модели редукции в условиях равномерного распределения опорных звезд в круге имеют следующий простой вид:

$$C_{33} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{NR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{NR^2}{4} \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

$$C_{33}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 \\ 0 & 4/(NR^2) & 0 \\ 0 & 0 & 4/(NR^2) \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Согласно формуле (5.34) можно получить также и достаточно простые выражения для условных весов (депенденсов) отдельных опорных звезд относительно заданного объекта

$$\lambda_j = \frac{1}{N} \left[1 + \frac{4}{R^2} (x_j x_0 + y_j y_0) \right] =$$

$$= \frac{1}{N} [1 + 4(u_j u_0 + v_j v_0)], \quad (5.51)$$

где x_j, y_j и x_0, y_0 — измеренные координаты j -й опорной звезды и объекта, отнесенные к центру круга опорных звезд, u_j, v_j и u_0, v_0 — те же координаты, выраженные в единицах радиуса круга. Фактор $[\lambda^2]$ при тех же условиях с учетом формулы (5.36) имеет вид

$$[\lambda^2]_{\bullet} = \frac{1}{N} (1 + 4\rho_0^2). \quad (5.52)$$

Здесь ρ_0 соответствует расстоянию объекта от центра круга опорных звезд, выраженному в единицах радиуса этого круга. Если опорные звезды в том же числе распределены вблизи окружности радиуса R , то выражение для $[\lambda^2]$ получается иным:

$$[\lambda^2]_{\circ} = \frac{1}{N} (1 + 2\rho_0^2). \quad (5.53)$$

Сравнивая формулы (5.52) и (5.53), можем сделать следующий практически полезный вывод: при применении линейных методов с одним и тем же числом опорных звезд для точности редукции выгоднее, если опорные звезды равномерно распределены вблизи окружности, описанной вокруг определяемых объектов, а отнюдь не внутри круга, ограниченного той же окружностью. Наибольший выигрыш достигается для объектов, расположенных вблизи границы области опорных звезд, а в центре этой области ошибки редукции одинаковы.

Вышеприведенный анализ точности и условий для опорных звезд при использовании линейных методов редукции выполнен нами также и для других моделей редукции. Основные результаты этого анализа представлены, во-первых, числовыми характеристиками обратных матриц C_{mm}^{-1} , вычисленными для каждой модели редукции при двух предположениях о равномерном распределении опорных звезд — по площади круга (символ \bullet) и вблизи окружности (символ \circ); во-вторых, аналитическими выражениями зависимости фактора $[\lambda^2]$ от положения объекта относительно центра области опорных звезд при тех же предположениях о их распределении; в-третьих, таблицей 7, иллюстрирующей зависимость фактора $[\lambda^2]$ от положения объекта числовыми оценками. Ниже приводятся эти результаты.

3.2. Модель с неполной квадратичной формой (десять постоянных)
 $(3L + 2Q) \times 2$, случай редукции по ξ .

Опорные звезды внутри
 круга

Опорные звезды вблизи
 окружности

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{ccccc} c & a & b & p & q \\ \left[\begin{array}{ccccc} \frac{2}{N} & 0 & 0 & \frac{-4}{NR^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{NR^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{NR^2} & 0 & 0 \\ \frac{-4}{NR^2} & 0 & 0 & \frac{16}{NR^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{NR^4} \end{array} \right] & & \begin{array}{ccccc} c & a & b & p & q \\ \left[\begin{array}{ccccc} \frac{3}{N} & 0 & 0 & \frac{-4}{NR^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{NR^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{NR^2} & 0 & 0 \\ \frac{-4}{NR^2} & 0 & 0 & \frac{8}{NR^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{NR^4} \end{array} \right]
 \end{array}$$

(5.54)

$$[\lambda^2]_{\xi \bullet} = \frac{2}{N} (1 - 2u_0^2 + 2v_0^2 + 8u_0^4 + 12u_0^2 v_0^2),$$

(5.55)

$$[\lambda^2]_{\xi \circ} = \frac{3}{N} \left(1 - 2u_0^2 + \frac{2}{3} v_0^2 + \frac{8}{3} u_0^2 \rho_0^2 \right).$$

В случае редукции по η в матрице (5.54) элементы a_{14} , a_{41} , a_{44} и элементы a_{15} , a_{51} , a_{55} меняются местами, вследствие чего в формулах для $[\lambda^2]$ произойдет замена u на v и v на u , например,

$$[\lambda^2]_{\eta \bullet} = \frac{2}{N} (1 - 2v_0^2 + 2u_0^2 + 8v_0^4 + 12u_0^2 v_0^2).$$

Таким образом, ошибка редукции для объекта с координатами u_0 , v_0 ($u_0 \neq v_0 \neq 0$) будет различной по ξ и η . В случае смещения объекта от центра области опорных звезд вдоль диагонали $u_0 = v_0 = \rho_0 / \sqrt{2}$ получим следующие выражения для фактора ошибки:

$$[\lambda^2]_{\bullet}^{u=v} = \frac{2}{N} (1 + 5\rho_0^4), \quad [\lambda^2]_{\circ}^{u=v} = \frac{3}{N} \left(1 - \frac{2}{3} \rho_0^2 + \frac{4}{3} \rho_0^4 \right). \quad (5.56)$$

Подводя итог, заключаем, что так же как и в линейных методах, модель $(3L + 2Q) \times 2$ обеспечивает лучшую точность редукции для объектов вблизи границы области опорных звезд в случае распределения опорных звезд вблизи окружности; однако для объектов, расположенных в центре

области опорных звезд, выгоднее, если опорные звезды распределены по площади круга.

3.3. Модель с полной квадратичной формой (двенадцать постоянных), $(3L + 3Q) \times 2$.

Опорные звезды внутри круга						Опорные звезды вблизи окружности
c	a	b	p	q	r	
$\frac{4}{N}$	0	0	$\frac{-6}{NR^2}$	0	$\frac{-6}{NR^2}$	$ C_{66} = 0$
0	$\frac{4}{NR^2}$	0	0	0	0	C_{66}^{-1} не вычисляется
0	0	$\frac{4}{NR^2}$	0	0	0	(5.57)
$\frac{-6}{NR^2}$	0	0	$\frac{18}{NR^4}$	0	$\frac{-6}{NR^4}$	
0	0	0	0	$\frac{24}{NR^4}$	0	
$\frac{-6}{NR^2}$	0	0	$\frac{6}{NR^4}$	0	$\frac{18}{NR^4}$	

$$[\lambda^2]_{\bullet} = \frac{4}{N} \left(1 - 2\rho_0^2 + \frac{9}{2}\rho_0^4 \right). \quad (5.58)$$

Из данных (5.57) следует, что модель с полной квадратичной формой не может корректно применяться при распределении опорных звезд вблизи окружности. Ясно также, что при применении этой модели в общем случае следует считаться с большими корреляциями между постоянными p, q и c , что ведет к неуверенности редукции для объектов вблизи центра области опорных звезд. Формула (5.58) показывает, что точность редукции в случае применения метода двенадцати постоянных зависит только от расстояния объекта до центра области опорных звезд. Меньшая ошибка редукции в этом методе при $[\lambda^2] \cdot N = 3,11$ достигается не в центре области опорных звезд, а на некотором расстоянии от центра, равном

$$\rho_0 = \rho |_{\min \epsilon_R} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,4714, \quad (5.59)$$

или приблизительно на полпути от центра до границы области опорных звезд. Далее, к границе области, ошибка редукции стремительно растет.

3.4. Проективная модель (восемь постоянных), $(6L + 2Q)$.

Опорные звезды
внутри круга

c_1	a_1	b_1	c_2	a_2	b_2	p	q
$\frac{8}{5N}$	0	0	0	0	0	$\frac{-12}{5NR^2}$	0
0	$\frac{4}{NR^2}$	0	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{4}{NR^2}$	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{8}{5N}$	0	0	0	$\frac{-12}{5NR^2}$
0	0	0	0	$\frac{4}{NR^2}$	0	0	0
0	0	0	0	0	$\frac{4}{NR^2}$	0	0
$\frac{-12}{5NR^2}$	0	0	0	0	0	$\frac{48}{5NR^4}$	0
0	0	0	$\frac{-12}{5NR^2}$	0	0	0	$\frac{48}{5NR^4}$

Опорные звезды
вблизи окружности

c_1	a_1	b_1	c_2	a_2	b_2	p	q
$\frac{2}{N}$	0	0	0	0	0	$\frac{-2}{NR^2}$	0
0	$\frac{2}{NR^2}$	0	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{2}{NR^2}$	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{2}{N}$	0	0	0	$\frac{-2}{NR^2}$
0	0	0	0	$\frac{2}{NR^2}$	0	0	0
0	0	0	0	0	$\frac{2}{NR^2}$	0	0
$\frac{-2}{NR^2}$	0	0	0	0	0	$\frac{4}{NR^4}$	0
0	0	0	$\frac{-2}{NR^2}$	0	0	0	$\frac{4}{NR^4}$

(5.60)

$$\begin{aligned}
[\lambda^2]_{\xi\bullet} &= \frac{8}{5N} \left[1 + \frac{5}{2} \rho_0^2 - 3u_0^2 + 6u_0^2 \rho_0^2 \right], \\
[\lambda^2]_{\xi\circ} &= \frac{2}{N} [1 - (u_0^2 - v_0^2) + 2u_0^2 \rho_0^2], \\
[\lambda^2]_{\eta\bullet} &= \frac{8}{5N} \left[1 + \frac{5}{2} \rho_0^2 - 3v_0^2 + 6v_0^2 \rho_0^2 \right], \\
[\lambda^2]_{\eta\circ} &= \frac{2}{N} [1 - (v_0^2 - u_0^2) + 2v_0^2 \rho_0^2], \\
[\lambda^2]_{\bullet}^{u_0=v_0} &= \frac{8}{5N} [1 + \rho_0^2 + 3\rho_0^4], \quad [\lambda^2]_{\circ}^{u_0=v_0} = \frac{2}{N} (1 + \rho_0^4).
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Данные (5.60) и (5.61) достаточно полно характеризуют так называемый метод восьми постоянных как в отношении точности определения самих постоянных, так и в отношении точности редукции. В частности, из (5.60) следует, что постоянные p и q , имеющие смысл поправок координат принятого положения оптического центра пластинки P , определяются в методе восьми постоянных со следующими погрешностями:

$$\epsilon_p = \epsilon_q = \sigma_1 \sqrt{\{C^{-1}\}_{88}} = \sigma_1 \sqrt{\{C^{-1}\}_{77}} = \frac{2\sigma_1}{\sqrt{NR^2}} \left(= 0,127 \frac{f_0}{(D^\circ)^2} \frac{\sigma_1''}{\sqrt{N}} \right). \tag{5.62}$$

Оценка (5.62) справедлива для случая распределения опорных звезд вблизи окружности; при распределении опорных звезд в круге погрешности определения p и q оказываются большими:

$$\epsilon_p = \epsilon_q = \frac{4}{R^2 \sqrt{N}} \sqrt{\frac{3}{5}} \sigma_1 \left(= 0,197 \frac{f_0}{(D^\circ)^2} \frac{\sigma_1''}{\sqrt{N}} \right). \tag{5.63}$$

Числовые коэффициенты в формулах (5.62) и (5.63) удовлетворяют следующим условиям: f_0 — фокусное расстояние астрографа, выраженное в мм, D° — диаметр области опорных звезд, выраженный в градусах, σ_1'' — ошибка единицы веса, выраженная в секундах дуги, ϵ_p и ϵ_q при этих условиях вычисляются в миллиметрах. Формулы (5.63) использованы нами для оценки точности определения положения оптического центра в геометрическом методе. Заметим, кстати, из сравнения диагональных элементов $\{C^{-1}\}_{55}$ и $\{C^{-1}\}_{88}$ матриц (5.54) и (5.60) следует, что положение оптического центра астрофотографии аналитическим способом наиболее эффективно определяется при редукции методом восьми постоянных в условиях распределения опорных звезд вблизи окружности. Модель восьми постоянных оказывается также и наиболее эффективной по точности редукции среди всех других моделей, использующих квадратичные члены; это следует из сравнения формул (5.61) и (5.56) или (5.58).

3.5. Модель с членами наклонности и дисторсии $(3L + 2Q + D) \times 2$.

Опорные звезды
внутри круга

Опорные звезды
вблизи окружности

$$\begin{array}{cccccc}
 c_1 & a_1 & b_1 & p_1 & q_1 & t_1 \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{2}{N} & 0 & 0 & \frac{-4}{NR^2} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{36}{NR^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-48}{NR^4} \\
 0 & 0 & \frac{4}{NR^2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{-4}{NR^2} & 0 & 0 & \frac{16}{NR^4} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{NR^4} & 0 \\
 0 & \frac{-48}{NR^4} & 0 & 0 & 0 & \frac{72}{NR^6}
 \end{array} \right] , & \begin{array}{l} |C_{66}| = 0 \\ C_{66}^{-1} \\ \text{не вычисляется} \\ (5.64) \end{array}
 \end{array}$$

$$[\lambda^2]_{\xi \bullet} = \frac{2}{N} [1 + 2\rho_0^2 + 12u_0^2 - 4u_0^4 - 36u_0^2\rho_0^2(1 - \rho_0^2)],$$

$$[\lambda^2]_{\eta \bullet} = \frac{2}{N} [1 + 2\rho_0^2 + 12v_0^2 - 4v_0^4 - 36v_0^2\rho_0^2(1 - \rho_0^2)], \quad (5.65)$$

$$[\lambda^2]_{\bullet}^{u_0=v_0} = \frac{2}{N} (1 + 8\rho_0^2 - 19\rho_0^4 + 18\rho_0^6).$$

Результаты вычисления матриц (5.64) показывают, что квадратичная модель с одним кубическим членом ("членом дисторсии") может корректно применяться только при условии заполнения опорными звездами всей площади пластинки. Однако и в этом случае сохраняются сильные корреляции между постоянными p_1 и c_1 (или q_2 и c_2 при редукции по η) и между постоянными t_1 и a_1 (или t_2 и b_2), что делает результаты определения параметров принятой модели недостаточно надежными. В идеальном случае редукции коэффициент дисторсии в этом методе определяется со следующей погрешностью:

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} \frac{6\sqrt{2}}{R^3} \left(= 61,9 \frac{\sigma_1''}{\sqrt{N}} \frac{1}{f_0^2 (D^\circ)^3} \right). \quad (5.66)$$

Коэффициент в формуле (5.66) вычислен таким, чтобы при размерностях $[f_0] = \text{мм}$, $[D^\circ] = \text{градус}$, $[\sigma_1''] = 1''$ получить размерность погрешности коэффициента дисторсии в мм^{-2} . Например, если $f_0 = 2063 \text{ мм}$, $D^\circ = 5^\circ$, $\sigma_1 = 0,5''$ и $N = 100$, согласно (5.66) получим $\epsilon_t = \pm 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ мм}^{-2}$. Хорошим контролем определения коэффициента дисторсии в этом методе слу-

жит совпадение результатов определения постоянных t_1 и t_2 , что редко имеет место на практике ввиду отклонения реальных условий редукции от идеальных. Напомним, что с помощью геометрического метода коэффициент кубической дисторсии для многих камер удалось определить с погрешностью $\pm 1-2 \cdot 10^{-8} \text{ мм}^{-2}$.

3.6. Эффективность редукции с различными моделями. Ниже (см. табл. 7) приведена сокращенная сводка результатов анализа точности редукции для пяти рассмотренных здесь моделей. В таблице приведены результаты вычислений фактора

$$G(\rho) = N[\lambda^2] \quad (5.67)$$

для различных моделей редукции в зависимости от положения объекта внутри области опорных звезд в двух случаях их равномерного распределения: внутри круга единичного радиуса и вблизи границы этого круга. Суммы $[\lambda^2]$ вычислены по формулам типа (5.52) и (5.53). Во всех разделах таблицы предполагается, что объект смещается равномерно через $1/4$ радиуса из центра области опорных звезд до расстояния в $1,25$ радиуса от центра. Таким образом, таблица позволяет оценить также и ошибку редукции в условиях экстраполяции, т.е. когда объект находится вне области опорных звезд. Напомним, что ошибка редукции есть та часть погрешности вычисленных координат объекта $\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0$, которая зависит только от ошибок измеренных и каталожных координат опорных звезд, во всех методах редукции, использующих способ наименьших квадратов, оценивается формулами (5.26), (5.35), а именно

$$\epsilon_{R\xi} = \sqrt{D(\xi_0)} = \sigma_1 \sqrt{[\lambda^2]}.$$

Чтобы воспользоваться данными табл. 7, нужно положить

$$\epsilon_{R\xi} = \sigma_1 \sqrt{\frac{G(\rho)}{N}}, \quad (5.68)$$

и мы получим приемлемые априорные оценки ошибок астрометрической редукции, зависящие от выбранной модели редукции и положения объекта, если ошибку единицы веса σ_1 можно считать известной. Оценка (5.68) будет выполняться тем лучше, чем более условия реальной астрометрической редукции будут приближаться к идеализированным, при которых вычислены величины $G(\rho)$, приведенные в табл. 7.

По поводу пользования данными табл. 7 на практике нужно заметить следующее. Они могут помочь получить правильные ориентировочные оценки ошибки редукции только в том случае, если выбранная модель правильно отражает геометрические и астрономические условия наблюдений и, следовательно, ошибка единицы веса σ_1 зависит только от случайных факторов. В этом случае табл. 7 позволяет априори оценить ожидаемую ошибку редукции при использовании той или иной модели и тем самым сравнить эффективность различных методов в случайном отношении. Под эффективностью метода редукции мы подразумеваем свойство метода обеспечить заданную точность редукции при минимальном числе опорных звезд. Кроме того, табл. 7 может помочь правильно выбрать опорные звезды с учетом расположения вероятных объектов редукции. Пользуясь данными табл. 7 для сравнения ошибок редукции с примене-

Таблица 7

Фактор $G = N[\lambda^2]$ для различных моделей редукции и условий распределения опорных звезд в зависимости от положения объекта относительно центра области опорных звезд

А. Объект смещается вдоль диагонали $u_0 = v_0 = \rho_0/\sqrt{2}$

Модель редукции	Значения радиуса $\rho_0 = r/R$					Примечания
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	
$3L \times 2$	1,00	1,25	2,00	3,25	5,0	Опорные звезды – внутри круга $G_{\min} = 3,11$ при $\rho_0 = 0,47$
$(3L + 2Q) \times 2$	2,00	2,04	2,62	5,16	12,0	
$(3L + 3Q) \times 2$	4,00	3,57	3,12	5,20	14,0	
$6L + 2Q$	1,60	1,72	2,30	4,02	8,0	
$(3L + 2Q + D) \times 2$	2,00	2,86	4,19	5,38	16,0	
$3L \times 2$	1,00	1,12	1,50	2,12	3,0	Опорные звезды – на границе круга
$(3L + 2Q) \times 2$	3,00	2,89	2,75	3,14	5,0	
$6L + 2Q$	2,00	2,01	2,12	2,63	4,0	

Таблица 7 (окончание)

Б. Объект смещается вдоль оси z , $u_0 = \rho_0$, $v_0 = 0$

Модель редукации	Значения радиуса $\rho_0 = r_0/R$						Примечания
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	
	<i>Опорные звезды – внутри круга</i>						
$3L \times 2$	1,00	1,25	2,00	3,25	5,0	7,2	$G_{\min} = 1,75$ при $\rho_0 = 0,35$
$(3L + 2Q) \times 2$	2,00	1,81	2,00	4,81	14,0	34,8	$G_{\min} = 3,11$ при $\rho_0 = 0,47$
$(3L + 3Q) \times 2$	4,00	3,57	3,12	5,20	14,0	35,4	$G_{\min} = 1,58$ при $\rho_0 = 0,20$
$6L + 2Q$	1,60	1,59	2,00	2,62	10,4	23,8	$G_{\max} = 5,15$ при $\rho_0 = 0,53$
$(3L + 2Q + D) \times 2$	2,00	3,46	5,12	5,25	22,0	125	$G_{\min} = 4,96$ при $\rho_0 = 0,68$
	<i>Опорные звезды – на границе круга</i>						
$3L \times 2$	1,00	1,12	1,50	2,12	3,0	4,1	$G_{\min} = 1,88$ при $\rho_0 = 0,61$
$(3L + 2Q) \times 2$	3,00	2,66	2,00	2,16	5,0	13,2	$G_{\min} = 1,62$ при $\rho_0 = 0,50$
$6L + 2Q$	2,00	1,89	1,62	2,14	4,0	8,6	

нием различных моделей в одинаковых условиях (предполагается, что σ_1 одинаковы), удобно руководствоваться следующим правилом, вытекающим из формулы (5.68). Для того чтобы ожидаемая ошибка редукции в методе M_2 была бы одинаковой с ошибкой метода M_1 , необходимо в методе M_2 взять опорных звезд во столько раз больше (меньше), во сколько табличное число $G(\rho)$ для M_2 больше (меньше) табличного числа $G(\rho)$ для M_1 . Таким образом, например, применяя метод двенадцати постоянных, нужно взять вчетверо больше опорных звезд, чтобы получить в центре рабочего поля одинаковую точность редукции с линейным методом.

Отметим также другие следствия, вытекающие из анализа данных табл. 7.

1. Наиболее эффективными методами астрометрической редукции измерений фотографий являются линейные методы.

2. Из нелинейных методов астрометрической редукции наиболее эффективным является метод восьми постоянных.

3. Метод, учитывающий дисторсию, целесообразно применять в тех случаях, когда объекты измерений заведомо не расположены вблизи границы области опорных звезд.

4. Среди методов с квадратичными членами наименее эффективным является метод двенадцати постоянных. Особенно слабым местом модели, используемой в этом методе, является зона центра области опорных звезд, где ошибка редукции вдвое больше, чем в линейных методах, и в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в других методах, использующих квадратичные члены.

5. В случаях необходимости определять положения объектов, расположенных вблизи границы или даже за границей области опорных звезд, целесообразнее выбирать опорные звезды только на границе области, но отнюдь не внутри области. Это правило справедливо для всех рассмотренных здесь моделей.

* * *

Задача о корректной с точки зрения статистики оценке погрешностей астрометрической редукции наблюдений небесных тел решается формально строго на основе современной теории метода наименьших квадратов (Линник, 1958). Выведенные матричные формулы позволяют получить простые аналитические и числовые оценки погрешности, если предположить, что опорные звезды равномерно распределены по площади круга или вблизи его границы. Полученные оценки, в свою очередь, позволяют сделать сравнение различных моделей редукции. Результаты сравнения могут помочь при выборе подходящей модели редукции в поставленной задаче. Однако решающее значение в этом выборе, по нашему мнению, остается за данными исследования фотографической проекции конкретного астрографа и его калибровки.

В процессе анализа точности астрометрической редукции в общем случае выявлена роль коэффициентов λ_j , характеризующих условный вес каждой j -й опорной звезды в формировании координат объекта в заданном месте пластинки сравнения Π . Коэффициенты λ_j , зависят от выбранной модели редукции и вычисляются однозначно по измеренным координатам объекта и опорных звезд на рабочей пластинке P . В случае применения линейной модели редукции коэффициенты λ_j совпадают с депенденсами Шлезинге-

ра. В случаях применения других моделей коэффициенты λ_j могут иметь другие численные значения, но удовлетворяют основным соотношениям метода депенденсов (5.37), и служат основой для вычисления оценок точности редукции (5.35). Таким образом, коэффициенты λ_j можно рассматривать как естественное обобщение депенденсов Шлезингера для случаев нелинейных моделей. С помощью коэффициентов λ_j обоснован новый метод редукции измерений астрофотографий — так называемый обобщенный метод депенденсов, сохраняющий схему вычислений и преимущества метода Шлезингера для случаев нелинейных моделей связи между координатами пластинок P и Π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД

§ 1. Фотографические собственные движения звезд

Рассмотрим другую традиционную задачу звездной астрономии, которую до настоящего времени решают почти исключительно средствами фотографической астрометрии. Речь идет о массовых определениях собственных движений слабых звезд. Разумеется, фотографический метод в этой задаче позволяет непосредственно определить лишь относительные собственные движения звезд, т.е. движения выбранных определяемых звезд относительно группы других звезд, тоже движущихся, но условно принимаемых за неподвижные. Обе группы звезд, по смыслу определения, занимают лишь небольшую область неба, ограниченную одной или несколькими перекрывающимися пластинками. В этих условиях естественно встает вопрос о стандартизации результатов, т.е. о приведении вычисленных относительных собственных движений к определенной системе координат, например, к системе фундаментального каталога. Эта задача, вообще говоря, является более трудной, чем определение относительных собственных движений звезд. Рассмотрим решение этой задачи с помощью так называемых контрольных звезд, собственные движения которых известны в двух системах — исследуемой и какой-либо другой, принимаемой за стандартную.

Строгая постановка и решение задачи об определении системы фотографических собственных движений звезд является основной темой этой главы. Попутно рассмотрим традиционное решение этой задачи, определим условия его применимости и оценим его ошибки. В конце главы особое внимание будет уделено проблеме абсолютизации фотографических собственных движений звезд с помощью галактик. Рассмотрим три пути решения этой задачи — два традиционных и один новый.

1.1. Постановка и решение задачи. Задачу определения собственных движений звезд фотографическим методом можно сформулировать следующим образом. Пусть для некоторой области неба имеются две фотографии — пластинки P_1 и P_2 , полученные в разные эпохи t_1 и t_2 . На пластинках отождествлены и измерены изображения многих звезд, среди которых в соответствии со смыслом задачи мы выделяем s_0 определяемых звезд S_s ($s = 1, 2, \dots, s_0$), N опорных звезд S_r ($r = 1, 2, \dots, N$) и k_0 контрольных звезд S_k ($k = 1, 2, \dots, k_0$).

Определяемыми звездами назовем те звезды или светила, относительные собственные движения которых нас интересуют; опорными звездами

в этой задаче назовем те звезды, которые мы условно считаем неподвижными или обладающими общим переносным движением; контрольными звездами назовем те звезды, о собственных движениях которых имеется дополнительная информация. В этом перечне в качестве определяемых и контрольных звезд могут фигурировать и галактики, и яркие фундаментальные звезды; галактики могут быть использованы также и в качестве опорных звезд, если число галактик на пластинках достаточно. Измеренные координаты звезд на пластинке P_1 обозначим x, y , а измеренные координаты на пластинке P_2 — x', y' . Измеренные координаты всех объектов на обеих пластинках будем считать приведенными к центру тяжести системы опорных звезд, т.е. к точкам \bar{S}_r и \bar{S}'_r с координатами

$$\bar{x}_r = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r, \quad \bar{y}_r = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N y_r, \quad \bar{x}'_r = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x'_r, \quad \bar{y}'_r = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N y'_r. \quad (6.1)$$

Никаких других ограничений на измеренные координаты не накладываемся. Разность эпох $t_2 - t_1$, выраженную в годах, обозначим τ .

Требуется определить собственные движения звезд S_s при заданном наборе опорных звезд S_r .

Задача решается на основе общих принципов астрометрической редукции фотографий, изложенных в § 2 гл. 4. В качестве пластинки сравнения воспользуемся пластинкой первой эпохи P_1 . Модель редукции выберем в соответствии с условиями наблюдений и измерений. Если пластинки P_1 и P_2 получены на одном и том же телескопе в одном месте наблюдений и в близких условиях, а оптические центры пластинок близки или совпадают, что обычно имеет место на практике, то вполне достаточно воспользоваться линейной моделью редукции. Не нарушая общности будем рассматривать только случай редукции с линейной моделью, специально оговаривая те случаи, когда применение нелинейных моделей приводит к существенно отличным результатам.

Постоянные пластинки определим из системы условных уравнений, составленных для опорных звезд:

$$\begin{aligned} c_1 + a_1 x'_r + b_1 y'_r &= x_r, \\ c_2 + a_2 x'_r + b_2 y'_r &= y_r, \quad r = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Решив систему (6.2) по способу наименьших квадратов, определим 6 постоянных пластинки c_1, a_1, b_1 и c_2, a_2, b_2 , невязки условных уравнений v_{rx} и v_{ry} и формальные ошибки единицы веса

$$\sigma_{1rx} = \sqrt{\frac{[v_{rx} v_{rx}]}{N-3}}, \quad \sigma_{1ry} = \sqrt{\frac{[v_{ry} v_{ry}]}{N-3}}. \quad (6.3)$$

По условию решения

$$\sum_{r=1}^N v_{rx} = 0, \quad \sum_{r=1}^N v_{ry} = 0. \quad (6.4)$$

Попутно определим системы депенденсов $\{D_{sr}\}$ ($s = 1, 2, \dots, s_0, r =$

$= 1, 2, \dots, N$) для каждой из s определяемых звезд и вычислим соответствующие геометрические факторы $[D_{sr}^2]$. В итоге этих вычислений найдем с помощью постоянных пластинки или посредством деппенденсов "измеренные" координаты определяемых звезд в эпоху t_2 в системе измеренных координат пластинки P_1 :

$$x_{cs}^{(2)} = c_1 + a_2 x'_s + b_1 y'_s \quad (6.5)$$

или

$$x_{cs}^{(2)} = \sum_{r=1}^N D_{sr} x_r, \quad s = 1, 2, \dots, s_0. \quad (6.6)$$

и аналогично для координаты $y_{cs}^{(2)}$.

Сравнивая теперь вычисленные измеренные координаты $x_{cs}^{(2)}$, $y_{cs}^{(2)}$ определяемых звезд и их непосредственно измеренные координаты $x_s^{(1)}$, $y_s^{(1)}$, найдем смещения $x_{cs}^{(2)} - x_s^{(1)}$ и $y_{cs}^{(2)} - y_s^{(1)}$ изображений звезд на пластинке P_1 за время τ , равное разности эпох наблюдений пластинок P_1 и P_2 . Искомые собственные движения звезд вычислим согласно формулам

$$\mu_{sx} = \frac{x_{cs}^{(2)} - x_s^{(1)}}{\tau} M_x, \quad \mu_{sy} = \frac{y_{cs}^{(2)} - y_s^{(1)}}{\tau} M_y. \quad (6.7)$$

Здесь M_x и M_y — масштабы измеренных координат на пластинке P_1 в направлении осей x и y ; μ_{sx} и μ_{sy} по этим формулам вычисляются в секундах дуги за год. Если оси измеренных координат пластинки P_1 ориентированы стандартным образом, так же, как и тангенциальные координаты, то переход от μ_x и μ_y к μ_α и μ_δ для объектов, находящихся вблизи центрального меридиана пластинки, выполняется согласно соотношениям

$$\mu_\alpha = \frac{1}{15} \mu_x \sec \delta, \quad \mu_\delta = \mu_y. \quad (6.8)$$

Для звезд высоких склонений при переходе от μ_x, μ_y к μ_α, μ_δ необходимо учитывать также и влияние наклона меридиана определяемой звезды относительно центрального меридиана пластинки P_1 по формулам типа (1.27):

$$\mu_\alpha = \frac{1}{15} \sec \delta \left[\mu_x + \frac{x - x_T}{f_0} \operatorname{tg} \delta \mu_y \right],$$

$$\mu_\delta = - \frac{x - x_T}{f_0} \mu_x \operatorname{tg} \delta + \mu_y.$$
(6.9)

Здесь $(x - x_T)/f_0$ — расстояние определяемой звезды от центрального меридиана, выраженное в единицах фокусного расстояния телескопа.

Изложенные здесь постановка задачи об определении фотографических собственных движений звезд и ее решение в основном соответствуют классическому рассмотрению этой задачи (Камп ван де и др., 1937; Дейч, 1973; Бугославская, 1947). Однако мы сознательно акцентируем формальную сторону проблемы и избегаем всяческих упрощений, которые нарушают строгость и общность нашего изложения. Например, на этапе определения

постоянных пластинки по формулам (6.2) мы отказались от применения условных уравнений в традиционной форме

$$c + ax + by = x^{(2)} - x^{(1)} \quad (6.2a)$$

с разностями измеренных координат второй и первой эпох в правых частях, так как в этом случае неясно, в какой системе координат (P_1 или P_2) окажутся выраженными невязки уравнений, имеющие по определению смысл "остаточных движений опорных звезд". Не определенными так же окажутся вычисленные на основе найденных из системы (6.2a) постоянных собственные движения определяемых звезд, особенно в тех случаях, когда масштабы и ориентировки пластинок P_1 и P_2 заметно различны. Кроме того, при замене уравнения (6.2) уравнениями (6.2a) вольно или невольно теряется из виду основная идея метода определения фотографических собственных движений звезд, которая состоит в том, что относительные смещения звезд определяют в системе координат какой-нибудь одной пластинки, принятой за стандартную (в нашем рассмотрении это пластинка P_1), а опорные звезды служат только для пересчета измеренных координат другой (рабочей) пластинки на систему координат стандартной пластинки; при этом способ измерений и ориентировка рабочей пластинки, вообще говоря, не имеют значения, лишь бы измеренные координаты были достаточно точны и свободны от систематических ошибок.

Применение формул (6.2a) может быть оправдано только при выполнении следующих условий: если сравниваемые пластинки P_1 и P_2 получены на одном телескопе и если измерения обеих пластинок одинаково ориентированы. Выполнения таких условий добивались астрономы в ранний период развития фотографической астрометрии, когда для определения собственных движений звезд был выработан метод измерений пар пластинок, совмещенных в измерительном приборе слой к слою. Этот метод предполагал, что одна из парных пластинок фотографируется сквозь стекло. Главное преимущество метода измерений пластинок, совмещенных слой к слою, заключалась в том, что измеряющий астроном мог одновременно видеть в окуляр микроскопа изображения одних и тех же звезд на сравниваемых пластинках и соответственно измерять не полные координаты звезд на обеих пластинках, а лишь их разности Δx и Δy , которые и определялись со всей возможной точностью. Для редукации в этих условиях естественно было воспользоваться уравнениями (6.2a), где в левые части достаточно было подставить приближенные полные координаты изображений звезд. Таким образом, можно было определить собственные движения звезд в поле широкоугольной фотографии, не прибегая к измерительным машинам с длинными шкалами или винтами. В настоящее время измерения астрофотографий производятся на полностью автоматизированных или полуавтоматических измерительных машинах, обеспечивающих высокоточные отсчеты координат в пределах полей размерами 300 X 300 мм, а все вычислительные операции производятся с помощью ЭВМ. Вряд ли в новых условиях имеет смысл рекомендовать метод обработки наблюдений, который недостаточно строг и не обладает общностью.

1.2. Ошибки фотографических собственных движений звезд. Вопрос о точности фотографических собственных движений требует особого внимания, так как в существующей учебной литературе он рассмотрен явно не-

достаточно, а в отдельных трудах, связанных с массовыми определениями фотографических собственных движений звезд (Нокс-Шоу и др., 1934; Дейч, 1940; Лавдовский, 1965; Фатчихин, 1974) наблюдается явная тенденция завышать точность публикуемых результатов. Здесь мы рассмотрим эту проблему на основе строгих формул ошибок, выведенных в § 5 гл. 4.

Как следует из алгоритма вычислений координат $x_{cs}^{(2)}, y_{cs}^{(2)}$ по формулам (6.5), (6.6), конечные ошибки этих координат выражаются согласно формулам (4.90) и (4.91) через индивидуальные ошибки начальных данных как

$$e_{cs}^{(2)} = e_{ms}^{(2)} + \sum_{r=1}^N D_{sr}(e_r^{(1)} - e_r^{(2)}), \quad s = 1, 2, \dots, s_0. \quad (6.10)$$

Здесь $e_r^{(1)}, e_r^{(2)}$ — векторы погрешностей измеренных положений опорных звезд на пластинках первой и второй эпох, приведенные на систему измеренных координат пластинки P_1 , $e_{cs}^{(2)}$ и $e_{ms}^{(2)}$ — векторы погрешностей вычисленного и измеренного положений S -й определяемой звезды для второй эпохи в системе пластинки P_1 . Смысл погрешностей $e_r^{(1)}$ и $e_r^{(2)}$ следует раскрыть. Первую можно принять равной погрешностям фактических измерений опорных звезд на пластинке P , поскольку именно эта пластинка рассматривается в алгоритме в качестве стандартной. Вторую следует рассматривать как составную погрешность: результат сложения погрешностей измеренного положения r -й опорной звезды на пластинке P_2 и ее действительного смещения за время τ относительно первоначального положения в эпоху t_1 . Таким образом, можем записать

$$e_r^{(1)} = e_{mr}^{(1)},$$

$$e_r^{(2)} = e_{mr}^{(2)} + \frac{\tau}{\mathcal{M}} \mu_r, \quad r = 1, 2, \dots, N. \quad (6.11)$$

Здесь μ_r — векторы годовых собственных движений опорных звезд, \mathcal{M} — масштаб астрофотографии. Как и прежде, векторы всех погрешностей в (6.10) выражены в системе пластинки P_1 . Учитывая (6.7), (6.10) и (6.11), конечную погрешность годового собственного движения s -й определяемой звезды выразим через погрешность начальных данных в следующем виде:

$$e_{\mu s} = \frac{\mathcal{M}}{\tau} (e_{ms}^{(2)} - e_{ms}^{(1)}) - \frac{1}{\tau} \sum_{r=1}^N D_{sr} [\mathcal{M}(e_{mr}^{(2)} - e_{mr}^{(1)}) + \mu_r \tau],$$

$$s = 1, 2, \dots, s_0. \quad (6.12)$$

Формула (6.12) имеет не только теоретическое, но и практическое значение, поскольку она позволяет исправить выведенные на основе линейных методов собственные движения объектов, если в начальных данных уже после редукции была бы обнаружена какая-нибудь конкретная погрешность. В теоретическом плане соотношение (6.12) служит основой для вывода общей формулы средних ошибок в задаче определения фотографических собственных движений. Для этого достаточно предположить, что ошибки измерений как опорных, так и определяемых звезд носят слу-

чайный характер и распределены по нормальному закону:

$$e_{mr} \in \mathcal{N}(0, \epsilon_{mr}^2), \quad e_{ms} \in \mathcal{N}(0, \epsilon_{ms}^2). \quad (6.13)$$

Кроме того, какое-то разумное предположение следует сделать и о характере движений опорных звезд. Например, достаточно общим предположением будет представление, согласно которому в реальном движении каждой опорной звезды всегда можно выделить систематическую часть, общую для всех опорных звезд, которая может зависеть от положения звезды в поле астрофотографии, и случайную часть, характерную только для данной звезды. Систематическая составляющая характеризует движение всей системы опорных звезд в целом; например, это может быть общий дрейф системы, ее расширение (сближение) или вращение. Случайная составляющая характеризует пекулярное движение, присущее индивидуальной звезде. В соответствии с этим представлением можно записать

$$\begin{aligned} \mu_{rx} &= \underline{\gamma_1 + \alpha_1 x_r + \beta_1 y_r} + \xi_r, \\ \mu_{ry} &= \underline{\gamma_2 + \alpha_2 x_r + \beta_2 y_r} + \eta_r, \quad r = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Здесь подчеркнуты члены, описывающие систематическое движение опорных звезд, а слагаемые ξ_r и η_r обозначают составляющие пекулярного движения. В связи со сделанным предположением (6.13) будем иметь

$$\xi_r \in \mathcal{N}(0, \sigma_{\mu rx}^2), \quad \eta_r \in \mathcal{N}(0, \sigma_{\mu ry}^2). \quad (6.15)$$

Выражения (6.14) подставим в формулу ошибок (6.12) и вычислим отдельно систематическую и случайную части ошибки $e_{\mu s}$ в направлении x и y . Используя основные свойства метода депенденсов, найдем

$$\begin{aligned} e_{\mu sx} &= -(\gamma_1 + \alpha_1 x_s + \beta_1 y_s) + \\ &+ \frac{\mathcal{M}}{\tau} (e_{msx}^{(2)} - e_{msx}^{(1)}) - \frac{1}{\tau} \sum_{r=1}^N D_{sr} [\mathcal{M}(e_{msx}^{(2)} - e_{msx}^{(1)}) + \xi_r \tau] \end{aligned} \quad (6.16)$$

и аналогично для

$$e_{\mu sy} = -(\gamma_2 + \alpha_2 x_s + \beta_2 y_s) + \text{слагаемые, зависящие от случайных факторов.}$$

Формулы (6.16) выражают полную погрешность собственного движения определяемой звезды, зависящую от начальных данных редукции, включая систематические и случайные смещения опорных звезд за время τ . Как видим, ошибка $e_{\mu s}$ также разделяется на систематическую и случайную части, причем систематическая часть может зависеть от положения объекта в поле астрофотографии, если α , β не равны нулю. Легко сообразить, что систематическая составляющая ошибки $e_{\mu s}$ не может быть обнаружена в процессе редукции, рассмотренном выше, так как она будет поглощена соответствующим изменением постоянных пластинки (подробнее об этом говорится в п. 1.4). Напротив, случайная составляющая ошибки $e_{\mu s}$ безусловно будет обнаружена в процессе редукции по способу наименьших квадратов, поскольку она составляется из случайных ошибок измерений и пекулярных смещений опорных звезд, которые учитываются невяз-

ками условных уравнений (6.2) и оцениваются ошибкой единицы веса (6.3).

1.3. Точность фотографических собственных движений звезд в случайном отношении. Воспользуемся зависимостью (6.16) для вывода общей формулы связи среднеквадратических ошибок начальных данных и результата в задаче определения фотографических собственных движений звезд; статистический подход позволяет записать

$$\epsilon_{\mu sx}^2 = \frac{M^2}{\tau^2} ((\epsilon_{msx}^{(1)})^2 + (\epsilon_{msx}^{(2)})^2) + \left[\frac{M^2}{\tau^2} ((\epsilon_{mrx}^{(1)})^2 + (\epsilon_{mrx}^{(2)})^2) + \sigma_{\mu rx}^2 \right] \sum_{r=1}^N D_{sr}^2, \quad s = 1, 2, \dots, s_0, \quad (6.17)$$

и аналогично для координаты y .

Формулу (6.17) можно представить в более компактном виде, если предположить, что ошибки измерений определяемых и опорных звезд одинаковы для пластинок первой и второй эпох и равны по x и y , т.е. положив

$$\epsilon_{msx}^{(1)} = \epsilon_{msx}^{(2)} = \epsilon_{msy}^{(1)} = \epsilon_{msy}^{(2)} = \epsilon_{ms}, \quad (6.18)$$

$$\epsilon_{mrx}^{(1)} = \epsilon_{mrx}^{(2)} = \epsilon_{mry}^{(1)} = \epsilon_{mry}^{(2)} = \epsilon_{mr}.$$

Кроме того, можно предположить, что

$$\sigma_{\mu rx} = \sigma_{\mu ry} = \sigma_{\mu r}. \quad (6.19)$$

Это значит, что дисперсия пекулярных движений опорных звезд не зависит от направления. При этих предположениях формула (6.17) принимает следующий вид:

$$\epsilon_{\mu s}^2 = 2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{ms}^2 + \left[2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{mr}^2 + \sigma_{\mu r}^2 \right] \sum_{r=1}^N D_{sr}^2, \quad s = 1, 2, \dots, s_0. \quad (6.20)$$

Второе слагаемое в выражении (6.20) полностью определяется пекулярными движениями и ошибками измерений опорных звезд, и, следовательно,

Т а б л и ц а 8

Ошибка единицы веса при сравнении пластинок
в задаче определения фотографических собственных движений звезд

τ в годах	0	10	20	30	40	60	80
$M\sigma_{1r}$	0,170"	0,227"	0,345"	0,481"	0,624"	0,916"	1,212"
$\frac{M}{\tau}\sigma_{1r}$	—	0,023	0,017	0,016	0,016	0,015	0,015

П р и м е ч а н и е. При составлении таблицы принято $\sigma_{1r} = 0,015''$ в год, $M\epsilon_{mr} = \pm 0,120''$ (или 2 мкм при $M = 60''/\text{мм}$).

но, это — часть полной погрешности собственных движений, которая должна выявляться в процессе редукции при решении системы (6.2). Если сделанные предположения (6.13) и (6.15) соответствуют реальным условиям редукции, то второе слагаемое в (6.20) имеет смысл ошибки редукции, деленной на разность эпох, и должно выполняться соотношение

$$\sigma_{1r}^2 = 2\epsilon_{mr}^2 + \left(\frac{\tau}{M}\right)^2 \sigma_{\mu r}^2, \quad (6.21)$$

позволяющее оценить дисперсию пекулярных движений опорных звезд по внутренней сходимости решения системы (6.2), если ошибка измерений опорных звезд известна априори. Из (6.21) непосредственно следует, что доля дисперсии пекулярных движений опорных звезд в ошибке единицы веса увеличивается вместе с увеличением разности эпох τ . Этот вывод иллюстрируется табл. 8, вычисленной на основе формул (6.21).

Данные табл. 8 приблизительно соответствуют условиям редукции в задаче определения собственных движений звезд из фотографических наблюдений на нормальном астрографе ($f = 3440$ мм, опорные звезды 14-й величины). Таблица показывает, что уже при разности эпох в 20 лет ошибка единицы веса практически полностью определяется дисперсией пекулярных движений опорных звезд.

Воспользуемся формулой (6.20) для вычислений оценок погрешностей фотографических собственных движений в некоторых средних условиях редукции с учетом наиболее характерных факторов, влияющих на точность редукции, а именно: разности эпох τ , числа опорных звезд N , расстояния определяемой звезды от центра области опорных звезд r/R . Результаты этих вычислений приведены в табл. 9. Начальные данные, необходимые для применения формулы (6.20), указаны в подзаголовках таблиц. Чтобы выполнить эти вычисления, воспользуемся оценками фактора $[D^2]$, приведенными в табл. 7. Применение этих оценок в задаче определения собственных движений звезд вполне оправдано, поскольку условие равномерного распределения опорных звезд в круговой области здесь обычно выполнено, так как опорные звезды выбираются среди многочисленных слабых звезд фона. Все же следует помнить, что приведенные в табл. 9 величины являются оценками погрешностей по минимуму; в реальных условиях погрешности могут лишь возрасти вследствие неизбежных флуктуаций в относительных положениях опорных и определяемых звезд и, соответственно, в величинах фактора $[D^2]$. В пунктах (а) и (б) приведены оценки погрешностей в линейных методах редукции, в пункте (в) вычислены оценки ошибок с теми же начальными данными, что и в пункте (б), но для случая применения квадратичной модели редукции.

Таблица 9 позволяет сделать ряд выводов, существенных для проблемы определения фотографических собственных движений. Эти выводы имеют общую значимость, поскольку данные таблицы вычислены при начальных условиях, которые обычно бывают выполнены при определении собственных движений звезд из наблюдений на широкоугольных среднефокусных астрографах, т.е. на телескопах, наиболее эффективных для решения этой задачи. Пункт (а) доставляет данные для анализа точности массовых определений собственных движений слабых звезд, например в таких работах,

Таблица 9

Ошибки фотографических собственных движений звезд
в зависимости от их расстояний от центра области опорных звезд и разности эпох

Число опорных звезд N	Разность эпох τ	Расстояния от центра r/R						Начальные условия
		0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	
10	(0)*	0,1780"	0,1800"	0,1860"	0,1950"	0,2080"	0,2230"	а) Опорные звезды распределены равномерно в круге, модель редуциции линейная. $M_{err} = \pm 0,120''$ (2 мкм), $M_{ms} = \pm 0,120''$; $\sigma_{ms} = 0,015''$ в год
	20	101	104	115	130	148	170	
	40	65	70	82	98	118	139	
25	80	52	58	69	87	108	130	
	(0)*	1730	1740	1760	1800	1850	1930	
	20	92	93	98	105	115	126	
50	40	53	55	61	70	82	94	
	80	36	40	48	59	71	84	
	(0)*	1710	1720	1730	1750	1780	1820	
40	20	88	89	92	96	101	107	
	40	48	49	53	58	65	73	
	80	30	32	37	44	52	61	
50	20	0,0149	0,0150	0,0154	0,0154	0,0157	0,0161	б) $M_{err} = \pm 0,120''$ (2 мкм), $M_{ms} = \pm 0,208''$ (3,5 мкм). Остальные условия те же, что в случае (а)
	40	77	78	80	84	89	95	
	80	43	44	48	53	60	69	
50	20	0,0154	0,0154	0,0153	0,0157	0,0173	0,0207	в) Модель редуциции квадратичная, остальные условия те же, что в случае (б)
	40	85	85	83	89	111	150	
	80	56	55	53	61	88	133	

* В этих строках указаны ошибки сравнения пластинок, полученных в близкие эпохи, зависящие только от измерений. Вычисления сделаны по формуле (6.20) при $\tau = 1$, $\sigma_{ms} = 0$.

как каталоги собственных движений звезд в площадях Каптейна (Нокс-Шоу и др., 1934; Дейч, 1940) или в каталоге (Фатчихин, 1974). Пункты (б) и (в) могут помочь в анализе точности относительных собственных движений галактик и звезд, т.е. при решении задачи определения абсолютных собственных движений звезд фотографическим методом. В этих таблицах в качестве определяемых звезд служат галактики, ошибки измерений которых преувеличены по сравнению с ошибками измерений опорных звезд в $\sqrt{3}$ раз в соответствии с опытом выполненной в Пулковской обсерватории работы (Фатчихин, 1974). Кроме того, сравнение данных пунктов (б) и (в) позволяет оценить влияние модели редукции на точность определяемых собственных движений в случайном отношении.

Выводы: 1. В задаче простого сравнения пластинок главными составляющими ошибки $\epsilon_{\mu s}$ результата являются ошибки измерений координат определяемых звезд на пластинках P_1 и P_2 . Ошибка $\epsilon_{\mu s}$ слабо зависит от числа опорных звезд и от расстояния определяемой звезды до центра области опорных звезд.

2. В задаче определения фотографических собственных движений звезд главная часть ошибки результата определяется суммарной ошибкой измерения координат объектов на пластинках P_1 и P_2 , деленной на разность эпох. Однако роль составляющей ошибки, зависящей от опорных звезд (ошибка редукции), существенно возрастает. Это проявляется в росте формальной ошибки результата по мере удаления определяемой звезды от центра области опорных звезд и в ее уменьшении с ростом числа опорных звезд.

3. Доля ошибки редукции в задаче определения фотографических собственных движений звезд возрастает с разностью эпох. В условиях примера (табл. 9, $N = 50$) формальная ошибка редукции превосходит ошибку, зависящую от измерений объекта, уже при $\tau = 40$, если объект находится на периферии области опорных звезд, а при $\tau = 80$ она превосходит ошибку измерений для всех определяемых звезд, в том числе и для тех, которые находятся в центре области опорных звезд.

4. В задаче определения относительных собственных движений объектов типа галактик (с пониженной точностью измерений) подавляющее значение имеют ошибки измерений определяемых объектов. Ошибка редукции начинает играть заметную роль только при разности эпох, большей 40 лет.

5. В случае применения для редукции квадратичной модели роль ошибки редукции возрастает; особенно это заметно для объектов, расположенных на периферии области опорных звезд.

6. Данные табл. 9 позволяют оценить также влияние флуктуаций в расположении опорных звезд. Эти флуктуации, как уже упоминалось, могут привести лишь к увеличению фактора $[D^2]$ и соответственно увеличить ошибку редукции. Ошибка результата для таких случаев приведена в табл. 9 в последних столбцах, соответствующих аргументу $r/R = 1,25$. Анализ погрешностей фотографических собственных движений галактик в реальных условиях (Киселев и др., 1975) показывает, что флуктуации величины фактора $[D^2]$ в 5 и даже в 10 раз по сравнению с его минимальной величиной, равной $1/N$, довольно обычны, особенно если объект находится вблизи границы области опорных звезд, так что использование аргумента $r/R = 1,25$ для оценки величины флуктуирующей погрешности оправдано.

1.4. Точность фотографических собственных движений звезд в систематическом отношении. Остановимся на систематических ошибках фотографических собственных движений, зависящих от пекулярных и систематических движений опорных звезд.

Они имеют принципиальное значение, так как неотделимы от фотографического метода определения собственных движений. Другие систематические ошибки фотографических собственных движений, зависящие от блеска и цвета звезд, или аберраций объектива телескопа, или особенностей визуальных или автоматических фотоэлектрических измерений мы здесь не рассматриваем, поскольку эти ошибки, как правило, имеют индивидуальный или специфический характер.

В наших рассуждениях будем исходить из определения фотографических собственных движений звезд согласно (6.2), (6.7), формул ошибок (6.12), (6.16) и предположения (6.14), которое выполняется, даже если параметры γ , α , β незначительно отличаются от нуля. Как следует из (6.16), собственное движение какой-либо звезды S_s определяются фотографическим методом с точностью до эффекта систематического движения опорных звезд типа (6.14), если применяется линейная модель редукции. Таким образом, в рассматриваемом случае определяется относительное собственное движение звезды

$$\mu'_s = \mu_s - (\gamma + \alpha x_s + \beta y_s) = \mu_s - \Delta\mu_{sr}, \quad (6.22)$$

где $\Delta\mu_{sr} = \mu_s - \mu'_s = \gamma + \alpha x_s + \beta y_s$. Здесь μ_s — неизвестное нам действительное (абсолютное) движение определяемой звезды, $\Delta\mu_{sr}$ — эффект общего движения системы опорных звезд в точке x_s, y_s на пластинке P_1 , где расположена определяемая звезда. В справедливости выражения (6.22) можно убедиться, если проследить последовательность операций при определении фотографических собственных движений звезд. Действительно, всякое систематическое движение опорных звезд, имеющее характер линейного преобразования координат, при сравнении пластинок, разделенных заметной разностью эпох, будет учтено постоянными пластинок и тем самым исключено из определяемых собственных движений.

В общем случае можно утверждать, что фотографические собственные движения звезд определяются с точностью до систематической ошибки $\Delta\mu_{sr}(x_s, y_s)$, имеющей характер преобразования координат в той модели, которая применена при сравнении пластинок первой и второй эпох

$$\Delta\mu_{sr} = \gamma_1 + \gamma_2 x_s + \gamma_3 y_s + \gamma_4 x_s^2 + \dots + \gamma_m x_s^p y_s^q. \quad (6.23)$$

Здесь сохранен набор коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ при тех же степенях координат, которые использованы в модели сравнения пластинок P_1 и P_2 . Систематическая ошибка вида (6.22)–(6.23) может иметь вполне реальный смысл, если действительные движения опорных звезд имеют похожий характер. Но и при чисто хаотическом движении опорных звезд может возникнуть систематическая ошибка вида (6.23) постольку, поскольку при разности эпох порядка 20 лет и более случайные флуктуации пекулярных собственных движений могут заметно исказить величины постоянных пластинок, особенно в тех случаях, когда число этих постоянных велико, а число опорных звезд ограничено. Таким образом, случайные пекулярные движения могут стать источником систематических ошибок

собственных движений типа (6.23), особенно опасных для определяемых звезд, расположенных вблизи границы области опорных звезд.

Систематическую ошибку фотографических собственных движений типа (6.22), (6.23), зависящую от реальных систематических и пекулярных движений опорных звезд, назовем ошибкой переноса. Как следует из определений (6.22), (6.23), ошибка переноса состоит из двух частей: постоянной части — общей ошибки всех собственных движений звезд в изучаемой площадке неба, и переменной части — ошибки, зависящей от положения определяемой звезды относительно центра тяжести системы опорных звезд. Первая ошибка характеризуется коэффициентами γ_1 и γ_2 выражений (6.22), а вторая — коэффициентами α_1, β_1 и α_2, β_2 . Постоянная составляющая отражает общий дрейф системы опорных звезд, а переменная составляющая отражает локальные флуктуации пекулярных движений опорных звезд. Соответственно в дальнейшем изложении первую часть ошибки переноса будем называть общей ошибкой переноса, а переменную составляющую — локальной ошибкой переноса, имея в виду местный характер этой погрешности в области неба, покрываемой данной пластинкой.

Для иллюстрации наших рассуждений приводим результаты подсчетов ошибок постоянных и соответствующих систематических ошибок в собственных движениях звезд для некоторых значений расстояния r от центра области опорных звезд и разности эпох τ . Расчеты выполнены при тех же начальных условиях, при которых вычислены данные табл. 8, которые приблизительно соответствуют условиям определения фотографических собственных движений звезд с помощью нормального астрографа. Сделано предположение о равномерном распределении опорных звезд в круге радиуса R . Ошибки постоянных вычислены по формулам (5.13) для линейных методов редукции. Дополнительные условия, необходимые для этих вычислений, были приняты следующими: радиус области опорных звезд $R = 40$ мм (или $40'$), число опорных звезд $N = 50$, масштаб астрографа $M = 60'$ в мм.

В первой строке табл. 10 приведены ошибка единицы веса σ_{1r} и ошибки постоянных c, a, b , которые соответствуют случаю простого сравнения пластинок, полученных в близкие даты. Во второй и последующих строках приведены те же ошибки, соответствующие случаям сравнения пластинок с большой разницей эпох наблюдений τ . В правой половине таблицы (четыре последних столбца) даны оценки систематических ошибок собственных движений звезд, возникающие вследствие приведенных ошибок постоянных. Эти ошибки вычислены формально по следующим формулам:

$$\delta\mu_0 = \delta\mu \Big|_{r=0} = \frac{M}{\tau} \epsilon_c, \quad (6.24)$$

$$\delta\mu_x = \delta\mu_y = \delta\mu \Big|_{r=r} = \frac{M}{\tau} r \epsilon_a.$$

Первая из этих ошибок характеризует часть ошибки переноса, зависящую от ошибки постоянной c , вторая — локальную ошибку переноса. Согласно нашему определению полная ошибка переноса оценивается вторым

слагаемым выражения (6.20):

$$\epsilon_{\mu sxy}^2 = \left[2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{mr}^2 + \sigma_{\mu r}^2 \right] \sum_{r=1}^N D_{sr}^2 = \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \sigma_{1r}^2 \sum_{r=1}^N D_{sr}^2, \quad (6.25)$$

причем если определяемая звезда находится в центре тяжести системы опорных звезд ($x_s = \bar{x}_r = 0$; $y_s = \bar{y}_r = 0$), то

$$\epsilon_{\mu sxy} = \epsilon_{\mu s00} = \frac{M}{\tau} \epsilon_c = \frac{M}{\tau} \sigma_{1r} \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (6.26)$$

Таким образом, первая из ошибок (6.24) оценивается согласно (6.26). Что касается второй ошибки, то рассматривая ее как часть полной ошибки переноса, получим для нее следующую оценку:

$$\epsilon_{\mu s(x, y)}^2 = \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \sigma_{1r}^2 \left(\sum_{r=1}^N D_{sr}^2 - \frac{1}{N} \right). \quad (6.27)$$

В условиях идеализированной модели (при отсутствии корреляций между постоянными c , a , b) эта оценка имеет следующий простой вид:

$$\epsilon_{\mu s(x, y)} = \frac{M}{\tau} \sqrt{x^2 \epsilon_a^2 + y^2 \epsilon_b^2} = \frac{M}{\tau} \frac{\sigma_{1r}}{\sqrt{N}} \frac{2r}{R}. \quad (6.28)$$

Таблица 10 показывает, что выявленная нами систематическая ошибка — ошибка переноса, возникающая вследствие пекулярных движений опорных звезд, — может достигать заметной величины и практически не зависит от разности эпох уже при $\tau \geq 20$ лет. Поскольку число опорных звезд велико, можно ожидать, что в 68% случаев редукции локальная ошибка переноса будет не более той, которая указана в таблице, а в 32% случаев будет даже превышать ее. Главная опасность этой ошибки заключается в ее систематическом характере при данной выборке опорных звезд. Это значит, например, что при определении собственных движений скоплений средний результат по многим близким на пластинке звездам сохранит систематическую ошибку, оцениваемую данными табл. 10, сколько бы звезд мы ни взяли. Отбор звезд скопления по собственным движениям в этих условиях должен выполняться только с учетом влияния возможной ошибки переноса. С другой стороны, однако, погрешности фотографических собственных движений одиночных звезд правильно оцениваются формулой (6.20) и данными табл. 9. Противоречия здесь нет. Сравнивая табл. 9 и табл. 10 (случай $N = 50$), вычисленные при одинаковых начальных условиях, замечаем, что полная ошибка собственного движения определяемой звезды $\epsilon_{\mu s}$ всегда больше систематической ошибки $\delta_{\mu s}$. Так и должно быть, поскольку систематическая ошибка, зависящая только от реальных движений и ошибок измерений опорных звезд, является ошибкой редукции, т.е. частью полной ошибки. Специфика задачи оценки погрешностей фотографических собственных движений звезд в том и состоит, что интересующие нас

Таблица 10

Среднеквадратические ошибки постоянных сравнения пластинок
и соответствующие им систематические ошибки в собственных движениях звезд

Разность эпох τ	Ср. кв. ошибки сравнения пластинок			Систематические ошибки в собственных движениях, зависящие от расстояния r				Примечания
	σ_{1r}	ϵ_c	ϵ_a, ϵ_b	$r = 0$	$r = 20'$	$r = 40'$	$r = 60'$	
0	0,170"	0,024"	$2,0 \cdot 10^{-5}$	0,0240"	0,0240"	0,0480"	0,0720"	Начальные данные те же, что и в табл. 8. $R = 40'$
20	345	49	$4,1 \cdot 10^{-5}$	24	25	49	74	
40	624	88	$7,4 \cdot 10^{-5}$	22	22	44	66	
60	916	130	$10,8 \cdot 10^{-5}$	22	22	43	65	
80	1,212	171	$14,3 \cdot 10^{-5}$	21	21	43	64	

погрешности можно рассматривать и как случайные, если определяются движения одиночных объектов, и как систематические (зависящие от конкретной выборки опорных звезд), если исследуются групповые движения многих звезд.

Главный вывод из приведенных выше рассуждений состоит в следующем: установлено, что реальные групповые и пекулярные движения опорных звезд могут стать источником заметных систематических ошибок фотографических собственных движений звезд. Механизм возникновения этих ошибок таков: реальные движения опорных звезд искажают систему постоянных сравнения пластинок; ошибки постоянных распределяют эффект движения опорных звезд по всему полю астрофотографии, что приводит к появлению систематической ошибки в собственных движениях определяемых звезд, зависящей от их положения на пластинке. Таким образом, эта систематическая ошибка неизбежно становится функцией координат объекта (см. формулы (6.22), (6.23)) в зависимости от того, какая модель применена для сравнения пластинок. Часть систематической ошибки $\delta \mu$, зависящую только от ошибок постоянных a и b , мы условились называть локальной ошибкой переноса.

§ 2. Определение системы фотографических собственных движений звезд.

Абсолютизация собственных движений

2.1. Прямой способ с постоянными перехода. Как следует из анализа погрешностей, фотографические собственные движения звезд в области неба, покрываемой одной пластинкой, могут обладать систематической ошибкой типа (6.22) или (6.23), т.е. ошибкой переноса. Нет никакой возможности обнаружить общую ошибку переноса из анализа внутренних условий редукции при определении фотографических собственных движений, и имеется лишь ограниченная возможность обнаружить существование локальной ошибки переноса, если она проявила себя существенным искажением величин постоянных сравнения пластинок. Таким образом, система фотографических собственных движений в данной площадке остается неопределенной, если не выполнено специальное исследование с целью сравнения полученной системы с другими системами или не сделана абсолютизация.

Систему фотографических собственных движений звезд в данной площадке будем считать определенной, если для каждой звезды можно указать (вычислить) поправку, переводящую ее движение в абсолютное или хотя бы в другую систему относительных собственных движений. В общем случае, как следует из (6.16), (6.22), (6.23), такая поправка зависит от реальных движений индивидуальных опорных звезд, от положения определяемой звезды относительно центра тяжести системы опорных звезд и от принятой модели редукции при сравнении пластинок первой и второй эпох; ее вид определяется формулами (6.23). Здесь мы ограничимся рассмотрением поправок линейного вида как наиболее характерных для этой задачи:

$$\Delta \mu_s = \mu_s - \mu'_s = \gamma + \alpha x_s + \beta y_s. \quad (6.29)$$

В этой формуле и далее мы применяем обозначения μ' для исходных относительных собственных движений звезд и μ (без штрихов) — для эталонных собственных движений звезд или каких-то иных собственных движений, система которых хорошо определена. Задача определения системы фотографических собственных движений заключается в нахождении поправок $\Delta\mu_s$ для всех определяемых звезд в области неба, покрываемой пластинками P_1 и P_2 . Эта задача, как уже отмечалось, не может быть решена без привлечения внешних данных о собственных движениях каких-нибудь звезд или других объектов (например, галактик, квазаров), для которых определены также и относительные собственные движения в исследуемой системе. Такими объектами служат контрольные звезды S_k ($k = 1, 2, \dots, k_0$), о которых упоминалось в начале этой главы. Используя данные о собственных движениях контрольных звезд в двух системах μ_k и μ'_k , находим параметры перехода γ , α и β с помощью условных уравнений вида

$$\gamma + \alpha x_k + \beta y_k = \mu_k - \mu'_k, \quad k = 1, 2, \dots, k_0, \quad (6.30)$$

после чего искомые поправки $\Delta\mu_s$ вычисляем для каждой определяемой звезды по формулам (6.29). Таким образом, задача определения системы фотографических собственных движений может быть хотя бы в принципе решена строго, если имеется не менее трех контрольных объектов. Указанный способ определения системы фотографических собственных движений можно назвать прямым способом в отличие от другого — косвенного, который будет рассмотрен ниже.

Остановимся на оценке точности поправок (6.29), вычисляемых с помощью контрольных звезд. Пусть при решении системы (6.30) по методу наименьших квадратов определена ошибка единицы веса $\sigma_{1\Delta\mu k}$. Тогда, следуя общим правилам (5.28), (5.35), ошибка величины $\Delta\mu_s$ должна оцениваться дисперсией линейной формы от параметров γ , α , β , т.е. следующим образом:

$$\epsilon_{\Delta\mu s I}^2 = \sigma_{1\Delta\mu k}^2 X_{13}^{(0)} C_{33}^{-1} X_{31}^{(0)} = \sigma_{1\Delta\mu k}^2 \sum_{k=1}^{k_0} D_{sk}^2. \quad (6.31)$$

Здесь D_{sk} — массив депенденсов всех k_0 контрольных звезд относительно s -й определяемой звезды. Индекс I показывает, что система определена прямыми методами. Что касается ошибки единицы веса $\sigma_{1\Delta\mu}$, то в данной задаче эта ошибка характеризует дисперсию разностей абсолютных и относительных собственных движений контрольных звезд

$$\sigma_{1\Delta\mu k}^2 = \epsilon_{\mu k}^2 + \epsilon_{\mu' k}^2, \quad (6.32)$$

где $\epsilon_{\mu k}$ — известная ошибка эталонных собственных движений контрольных звезд, $\epsilon_{\mu' k}$ — ошибка относительных собственных движений контрольных звезд, оцениваемая, например, по формуле (6.20). Как следует из формул (6.31) и (6.32), ошибка определения системы, или ошибка абсолютизации, может достигать заметной величины. Это зависит от того,

что число контрольных звезд в поле астрофотографии всегда ограничено, а ошибки их собственных движений велики. Например, если в качестве контрольных звезд используются звезды из каталога AGK-3, то ошибка абсолютизации собственных движений звезд в поле нормального астрографа составит

$$\epsilon_{\Delta\mu sI} = \begin{cases} \pm 0,0054'' \text{ для объекта в центре поля,} \\ \pm 0,0120'' \text{ для объекта на краю поля.} \end{cases} \quad (6.33)$$

Если же в качестве контрольных звезд используются галактики, то ошибка абсолютизации будет еще больше:

$$\epsilon_{\Delta\mu sI} = \begin{cases} \pm 0,0075'' \text{ для объекта в центре поля,} \\ \pm 0,0168'' \text{ для объекта на краю поля.} \end{cases} \quad (6.34)$$

В этом примере вычисления выполнены по формуле (6.31), причем соблюдены начальные условия табл. 9 при $\tau = 20$ лет. Сделано предположение, что измерения изображений звезд и галактик производятся со средней ошибкой $\pm 3,5$ мкм, число звезд меридианного каталога в поле астрофотографии — 10, число галактик — 4, ошибки собственных движений звезд AGK-3 равны $\pm 0,008''$, ошибки собственных движений галактик равны нулю, распределение контрольных объектов в поле астрофотографии равномерное. Реальные ошибки абсолютизации могут быть только больше ввиду нарушения условия равномерности при малом числе контрольных объектов.

2.2. Прямой способ с депенденсами. Задачу определения системы фотографических собственных движений можно решать также и на основе метода депенденсов. Остановимся на этом решении ввиду его важности для проблемы в целом. Исходить будем из формулы (6.12), где, опуская множитель M , можно положить

$$e_{ms}^{(2)} - e_{ms}^{(1)} = \mu_s \tau, \quad (6.35)$$

$$e_{mr}^{(2)} - e_{mr}^{(1)} = \mu_r \tau,$$

подменяя таким образом ошибки измерений на пластинках P_1 и P_2 полным эффектом собственных движений определяемых и опорных звезд. Это можно сделать, так как в исходной основополагающей формуле ошибок (4.88), (4.90) смещения звезд на пластинке сравнения Π (вследствие ошибок положений и собственных движений) и смещения тех же звезд вследствие ошибок измерений пластинки аддитивны. После подстановки (6.35) в (6.12) получим

$$\mu_s' = \mu_s - \sum_{r=1}^N D_{sr} \mu_r. \quad (6.36)$$

Формула (6.36) имеет фундаментальное значение для проблемы определения системы фотографических собственных движений. Она раскрывает смысл относительности этого движения, определяемого для каждой звезды как разность действительного движения и средневзвешенного (по депенденсам) для данной точки астрофотографии движения системы опорных звезд. Нуль-пункт отсчета фотографического собственного движения каждой звезды тем самым оказывается различным. Из формулы (6.36), в частности, следует, что если индивидуальные собственные движения опорных звезд известны (например, когда в качестве опорных звезд использованы звезды меридианного каталога AGK-3R), то фотографические собственные движения звезд могут быть переведены в систему AGK-3R путем вычисления для каждой звезды индивидуальной поправки

$$\Delta\mu_s = \sum_{r=1}^N D_{sr} \mu_r. \quad (6.37)$$

Эти поправки, очевидно, не будут одинаковыми для всех s_0 определяемых звезд, так как

$$\sum_{r=1}^N \bar{D}_{sr} \mu_r \neq \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \mu_r = \bar{\mu}_r, \quad (6.38)$$

кроме случая, когда определяемая звезда расположена точно в центре тяжести системы опорных звезд. Другое следствие формулы (6.36) состоит в том, что если в качестве опорных звезд воспользоваться галактиками, то собственные движения определяемых звезд будут одновременно и относительными, и абсолютными. Впрочем, это положение ясно и априори, поскольку галактики можно считать неподвижными объектами в инерциальной системе координат. Этот принцип, как известно, положен в основу Ликской программы определения абсолютных собственных движений звезд (Василевскис, 1954).

Воспользуемся формулой (6.36) для анализа проблемы определения системы фотографических собственных движений с помощью контрольных звезд. Для этого определим систему движений определяемых и контрольных звезд относительно опорных звезд S_r ($r = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \mu_s - \sum_{r=1}^N D_{sr} \mu_r, & s &= 1, 2, \dots, s_0, \\ \mu'_k &= \mu_k - \sum_{r=1}^N D_{kr} \mu_r, & k &= 1, 2, \dots, k_0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

и аналогично с помощью формулы (6.36) определим систему движений определяемых звезд относительно контрольных:

$$\mu''_s = \mu_s - \sum_{k=1}^{k_0} D_{sk} \mu_k. \quad (6.40)$$

Теперь домножим второе из уравнений (6.39) на D_{sk} и результаты просуммируем по k :

$$\sum_{k=1}^{k_0} D_{sk} \mu'_k = \sum_{k=1}^{k_0} D_{sk} \mu_k - \sum_{k=1}^{k_0} D_{sk} \left(\sum_{r=1}^N D_{kr} \mu_r \right). \quad (6.41)$$

Во втором слагаемом правой части изменим порядок суммирования и выделим слагаемое с μ_r :

$$\sum_k D_{sk} \left(\sum_r D_{kr} \mu_r \right) = \sum_r \left(\sum_k D_{sk} D_{kr} \right) \mu_r.$$

Нетрудно проверить, пользуясь формулами (4.189) – (4.201), что

$$\sum_{k=1}^{k_0} D_{sk} D_{kr} = D_{sr}, \quad (6.42)$$

поскольку измеренные координаты звезд S_s , S_k и S_r принадлежат одной пластинке.

З а м е ч а н и е. Строго говоря, достаточно предположить, что на какой-то одной паре пластинок P_1, P_2 измерены звезды S_s и S_r , на другой паре звезды S_k и S_r , а на третьей паре S_s и S_k , перечисленные пластинки должны удовлетворять условиям аффинного соответствия. Тогда выражение (6.42) можно рассматривать как элементарную операцию при умножении матриц, составленных из депенденсов D_{sk} и D_{ks} :

$$\Delta_{sk} \cdot \Delta_{kr} = \Delta_{sr}. \quad (6.43)$$

Формула (6.43), напомним, выражает алгоритм преобразования депенденсов при редукции с двумя системами опорных звезд (§ 7 гл. 4), причем в данном случае первую систему ("ближайшую" к определяемым звездам) составляют звезды S_k , а вторую — звезды S_r . Формула (6.43) позволяет вычислить D_{sr} , даже если ни на какой из пар пластинок изображения звезд S_s и S_r одновременно не присутствуют.

В правой части (6.41) заменим первое и второе слагаемые их выражениями из (6.40) и (6.36); тогда получим следующий промежуточный результат, имеющий самостоятельное значение:

$$\mu_s'' - \mu_s' = - \sum_k D_{sk} \mu_k'. \quad (6.44)$$

Остается подставить μ_s'' из (6.44) в (6.40) и объединить слагаемые с одинаковыми D_{sk} . Окончательно получим

$$\mu_s - \mu_s' = \sum_k D_{sk} (\mu_k - \mu_k'). \quad (6.45)$$

Формулы (6.44) и (6.45) решают поставленную задачу определения системы фотографических собственных движений с помощью контрольных звезд. Первая из них решает задачу перехода от одной системы относитель-

ных собственных движений звезд к другой. В рассматриваемом случае первая система движений определена относительно опорных звезд S_r ($r = 1, 2, \dots, N$), а вторая — относительно звезд S_k ($k = 1, 2, \dots, k_0$). Как видим, чтобы решить эту задачу, необходимо знать собственные движения опорных звезд S_k второй системы относительно опорных звезд S_r первой системы; кроме того, для каждой определяемой звезды S_s необходимо вычислить свою систему депенденсов D_{sk} ($s = 1, 2, \dots, s_0$, $k = 1, 2, \dots, k_0$).

Вторая формула дает решение задачи абсолютизации фотографических собственных движений. Для этого достаточно знать абсолютные и относительные собственные движения контрольных звезд в одной системе с определяемыми звездами. Очевидно, что обе задачи решаются без прямого привлечения данных об опорных звездах S_r . Это значит, что система фотографических собственных движений определяется по контрольным звездам одинаково, как бы ни была хороша или плоха исходная система относительных собственных движений. Влияние опорных звезд исходной системы в этой задаче выявляется лишь при оценивании погрешности перехода к другой системе (или абсолютизации), поскольку эти погрешности неизбежно должны учитывать дисперсию разностей собственных движений контрольных звезд в двух системах, из которых одна исходная.

Итак, были рассмотрены два решения задачи определения системы фотографических собственных движений звезд с помощью контрольных звезд. В первом решении мы непосредственно определяли постоянные перехода к другой системе, а во втором решении использовали инварианты линейного преобразования координат — депенденсы Шлезингера, что позволило вычислить поправки к исходным собственным движениям звезд непосредственно, без помощи постоянных перехода. Оба решения строго эквивалентны, так как основываются на аффинных свойствах пластинок сравнения. На практике желательно оба метода применять параллельно, так как для того чтобы оценить внутреннюю точность определения системы, следует вычислить ошибку единицы веса в системе уравнений (6.30). Эта операция тем более необходима потому, что она обеспечивает решение, свободное от грубых погрешностей собственных движений контрольных звезд. Ошибка системы в конечном итоге оценивается формулой (6.31), для применения которой во всяком случае требуется вычислить системы депенденсов D_{sk} для каждой из определяемых звезд, т.е. подготовить все данные для применения второго метода. Таким образом, оба рассмотренных метода в этой задаче органически дополняют друг друга. В этом аспекте имеется глубокая аналогия с применением методов Тернера и Шлезингера в позиционной задаче фотографической астрометрии.

2.3. Косвенный способ. Рассмотрим другой способ определения системы фотографических собственных движений, так называемый косвенный, широко используемый в практике фотографической астрометрии, особенно в тех случаях, когда явно недостаточно контрольных объектов, чтобы воспользоваться прямым способом. Исторически этот более простой способ возник первым (Дейч, 1955; Фатчихин, 1974). Его основная идея состоит в следующем. Если предположить, что совокупность опорных звезд смещается по небесной сфере как целое, не разбегаясь и не вращаясь, обла-

дая лишь небольшой дисперсией скоростей, то переход от относительного движения к эталонному движению с помощью контрольных объектов может производиться посредством поправки

$$\Delta\mu_s = \frac{1}{k_0} \sum_{r=1}^{k_0} (\mu_k - \mu'_k) = \overline{\mu_k - \mu'_k}, \quad (6.46)$$

одинаковой для всех определяемых звезд в поле астрофотографии. Таким образом, допускается, что определение системы фотографических собственных движений возможно даже и по одной контрольной звезде.

Легко видеть, что принимая основную гипотезу косвенного метода, мы априори предполагаем равенство нулю параметров преобразования α и β (6.30), т.е. полагаем

$$\Delta\mu_s = \overline{\mu_k - \mu'_k} = \gamma, \quad (6.47)$$

что противоречит результатам нашего анализа (6.22), (6.29), (6.45) и может рассматриваться как частный случай, который выполняется лишь при особенно благоприятных условиях редукции. В общем случае условие (6.47) удовлетворяется только для определяемой звезды, находящейся точно в центре тяжести системы контрольных звезд. Действительно, согласно (6.30) имеем

$$\overline{\mu_k - \mu'_k} = \gamma + \alpha \bar{x}_k + \beta \bar{y}_k, \quad (6.48)$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} \Delta\mu_s &= \gamma + \alpha x_s + \beta y_s, \\ \delta(\Delta\mu_s) &= \Delta\mu_s - \overline{\mu_k - \mu'_k} = \alpha(x_s - \bar{x}_k) + \beta(y_s - \bar{y}_k), \end{aligned} \quad (6.49)$$

следовательно, $\Delta\mu_s = \overline{\mu_k - \mu'_k}$, если $x_s = \bar{x}_k$, $y_s = \bar{y}_k$, каковы бы ни были параметры α и β .

Сравнивая результаты (6.49) и (6.29), заключаем, что поправки системы в прямом и косвенном способах совпадают в центре тяжести системы контрольных звезд (в точке \mathcal{K}), но расходятся по мере удаления определяемой звезды S_s от \mathcal{K} . Это различие полностью характеризуется локальной погрешностью переноса на пути от \mathcal{K} до S_s , т.е. величиной (6.49). Указанную систематическую ошибку в косвенном способе обнаружить невозможно (так как параметры α , β в этом способе не определяются), но можно оценить возникающую в связи с ней неопределенность при условии равенства нулю параметров α и β . Эта неопределенность выражается дисперсией линейной формы (6.49), коэффициенты которой определены по способу наименьших квадратов из системы уравнений следующего вида:

$$\gamma + \alpha x_r + \beta y_r = \mu'_r, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad (6.50)$$

где μ'_r — относительные собственные движения опорных звезд. По определению μ'_r , которые иногда называют остаточными движениями опорных звезд, решением системы (6.50) является нулевое решение

$$\gamma = \alpha = \beta = 0, \quad (6.51)$$

а ошибка единицы веса в этом решении служит мерой дисперсии остаточных движений опорных звезд

$$\sigma_{1\mu r}^2 = \frac{1}{N-3} \sum_r \mu_r'^2 = \sigma_{\mu r}^2 + 2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{mr}^2 \quad (6.52)$$

и совпадает с выражением $\frac{M}{\tau} \sigma_{1r}$ согласно (6.21).

Решение системы (6.50) позволяет получить численные параметры для оценивания дисперсии линейной формы (6.49) по формулам (6.27) и (6.28) для локальной погрешности переноса, если вместо координат определяемой звезды S_s в этих формулах использовать координаты фиктивного объекта S_s^* :

$$x_s^* = \bar{x}_r + (x_s - \bar{x}_k), \quad y_s^* = \bar{y}_r + (y_s - \bar{y}_k). \quad (6.53)$$

Как следует из (6.53), фиктивный объект S_s^* в поле астрофотографии располагается относительно центра тяжести системы опорных звезд так же, как действительный объект S_s относительно центра тяжести контрольных звезд.

Теперь у нас имеются все данные для вывода выражения ошибки определения системы собственных движений звезд, полученной косвенным способом. Эта ошибка должна состояться из двух частей: формальной ошибки среднего из $\mu_k - \mu'_k$ и ошибки локального переноса (6.49)

$$\epsilon_{\Delta\mu s\Pi}^2 = \frac{1}{k_0} (\epsilon_{\mu k}^2 + \epsilon_{\mu' k}^2) + \sigma_{1\mu r}^2 \left[\sum_{r=1}^N D_{S^*r}^2 - \frac{1}{N} \right]. \quad (6.54)$$

Здесь дополнительный индекс Π показывает, что оценка ошибки получена для косвенного способа определения системы, символ D_{S^*r} введен для определения депенденсов опорных звезд относительно фиктивного объекта в точке S_s^* с координатами (6.53), остальные обозначения уже применялись нами ранее.

Воспользуемся формулой (6.54) для вычисления ошибок системы в косвенном способе при тех же условиях, при которых получены оценки (6.33) и (6.34) для прямого способа. Получим

а) контрольные объекты — 10 звезд AGK-3,

$$\epsilon_{\Delta\mu\Pi} = \begin{cases} = \pm 0,0054'' \text{ в центре области контрольных звезд,} \\ = \pm 0,0070'' \text{ на краю области контрольных звезд,} \end{cases} \quad (6.55)$$

б) контрольные объекты — 4 галактики,

$$\epsilon_{\Delta\mu II} = \begin{cases} = \pm 0,0075'' \text{ в центре области контрольных звезд,} \\ = \pm 0,0089'' \text{ на краю области контрольных звезд.} \end{cases} \quad (6.56)$$

Как видим, в центре области контрольных звезд оценки (6.55), (6.56) и оценки (6.33), (6.34) совпадают, а на границе области существенно различаются. Косвенный способ в этом примере оказывается точнее в случайном отношении.

Чтобы детально сравнить прямой и косвенный способы определения системы фотографических собственных движений, составим разность оценок $\epsilon_{\Delta\mu}$ согласно (6.31) и (6.54):

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Delta\mu sI}^2 - \epsilon_{\Delta\mu sII}^2 &= \\ &= (\epsilon_{\mu k}^2 + \epsilon_{\mu'k}^2) \left(\sum_{k=1}^{k_0} D_{sk}^2 - \frac{1}{k_0} \right) - \sigma_{1\mu r}^2 \left(\sum_{r=1}^N D_{S^*r}^2 - \frac{1}{N} \right). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Формула (6.57) показывает, что вопрос о преимуществе прямого или косвенного способов определения системы решается сравнением локальных погрешностей переноса на пути от центра тяжести системы контрольных объектов к определяемой звезде, причём в прямом способе мерой ошибки переноса служит ошибка единицы веса $\sigma_{1\Delta\mu k}$, а в косвенном — ошибка $\sigma_{1\mu r}$. Первая из этих погрешностей характеризует в основном дисперсию разностей эталонных и относительных движений контрольных звезд, а вторая — дисперсию остаточных движений опорных звезд. Обе локальные ошибки переноса существенно зависят от числа контрольных объектов: первая — пропорциональна $1/\sqrt{k_0}$, вторая $1/\sqrt{N}$.

Для сравнения ошибок переноса на практике полезным оказывается следующее приближённое соотношение:

$$\text{если } \frac{\sigma_{\Delta\mu k}}{\sigma_{\mu r}} < \frac{\sqrt{\sum_k D_{sk}^2 - 1/k_0}}{\sqrt{\sum_r D_{sr}^2 - 1/N}} \approx \sqrt{\frac{k_0}{N}}, \quad (6.58)$$

то прямой способ определения системы фотографических собственных движений предпочтительнее как в отношении случайных, так и в отношении систематических ошибок. В противном случае косвенный способ точнее в случайном отношении. Из условия (6.59), в частности, следует, что при $N \approx k_0$ предпочтительнее прямой способ определения системы, так как обычно выполняется

$$\sigma_{\mu r} > \sigma_{\Delta\mu k}. \quad (6.59)$$

Правило (6.58) подтверждает также результат сравнения оценок (6.33), (6.34), (6.55), (6.56) в нашем примере; этот результат можно было предвидеть, если учесть, что в рассмотренном примере $N \gg k_0$.

Что касается возможной систематической ошибки в определении системы собственных движений косвенным способом, то, как уже отмечалось, эта ошибка в косвенном способе не обнаруживается; не всегда эта ошибка может быть выявлена и в прямом способе ввиду его недостаточной точности при небольшом числе контрольных объектов.

2.4. Абсолютизация. *Абсолютизацией собственных движений звезд* принято называть операцию приведения наблюдаемых движений звезд к некоторой системе осей, не вращающихся в пространстве. В фотографической астрометрии абсолютизацию собственных движений производят, используя изображения внегалактических туманностей (галактик) на фотографиях звездных полей в качестве реперов, которые условно считают неподвижными. Полученную систему абсолютных собственных движений звезд сравнивают с системой собственных движений меридианных каталогов, основанной, как известно, на других принципах. Сравнение этих двух систем независимых собственных движений звезд позволяет получить ценную информацию о точности системы астрономических постоянных, которая лежит в основе каждого меридианного каталога и эфемеридной астрономии в целом. Таким образом, проблема определения абсолютных собственных движений звезд методами фотографической астрометрии представляется важной, перспективной и актуальной научной задачей в деле построения инерциальной системы координат.

Имеется три способа определения абсолютных собственных движений звезд фотографическим методом с помощью галактик. В первом и втором из них первоначально определяются относительные собственные движения звезд с большим числом опорных звезд, попутно определяются также и относительные собственные движения галактик, которые в этом случае рассматриваются как контрольные объекты. На следующем этапе исследования производят собственно "абсолютизацию", т.е. определяют поправки к полученным относительным собственным движениям звезд и галактик, переводящие их в систему, в которой собственные движения галактик в среднем становятся равными нулю. Абсолютизацию, как показано выше, можно выполнять двумя способами — прямым или косвенным. Чтобы применить первый способ, необходимо иметь относительные движения не менее трех галактик; поправки относительных собственных движений звезд вычисляются по формулам (6.29), параметры которых γ , α , β определяются из системы уравнений (6.30), где в правых частях следует положить

$$\mu_k = 0. \quad (6.60)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, k_0$, k_0 — число галактик, относительные собственные движения которых μ'_k определены на первом этапе редукции. Поправки системы $\Delta\mu_s$, $s = 1, 2, \dots, s_0$, в этом способе получаются равными для различных определяемых звезд в зависимости от их положения на астрофотографии. Погрешности величин $\Delta\mu_s$ оцениваются формулами (6.31), (6.32), где следует положить $\epsilon_{\mu k}^2 = 0$,

$$\sigma_{1\Delta\mu k}^2 = \epsilon_{\mu'k}^2 = 2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{mk}^2 + \left[2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{mr}^2 + \sigma_{\mu r}^2 \right] \sum_{r=1}^N D_{kr}^2. \quad (6.61)$$

Здесь ϵ_{mk} — ошибка измерений галактики, которая обычно в полтора-два

раза больше ошибки измерений опорных звезд ϵ_{mr} . Таков первый (или прямой) способ абсолютизации. Второй способ использует алгоритм определения системы собственных движений звезд, основанный на предположении (6.47), которое в применении к рассматриваемому случаю абсолютизации принимает следующий вид:

$$\Delta\mu_s = -\bar{\mu}'_k = \text{const.} \quad (6.62)$$

Результат обычно формулируют в виде такого правила: поправка перевода относительных собственных движений звезд к абсолютным равна среднему из относительных собственных движений галактик, взятому с обратным знаком. Это положение является основой Пулковской программы определения абсолютных собственных движений фотографическим методом (Дейч, 1955). Согласно (6.62), поправки $\Delta\mu_s$ принимаются равными для всех определяемых звезд. Однако точность этих поправок, согласно нашим исследованиям, зависит от положения определяемой звезды относительно центра тяжести системы контрольных объектов, т.е. галактик; соответствующая ошибка оценивается формулой (6.54), где следует положить $\epsilon_{\mu k} = 0$, а $\epsilon_{\mu' k}$ вычислять по формуле (6.61). Из (6.62) вытекает также, что для абсолютизации вторым (косвенным) способом в принципе достаточно и одной галактики.

Обратимся к третьему способу определения абсолютных собственных движений. В этом способе сами галактики используются в качестве опорных звезд. Соответственно, относительные собственные движения всех определяемых звезд должны считаться абсолютными. Таким образом, задача определения абсолютных собственных движений звезд решается без посредничества слабых опорных звезд. На этом способе основывается Ликская программа определения абсолютных собственных движений звезд по всему небу (Василевскис, 1954). В отношении системы собственных движений этот способ, по-видимому, обеспечивает наиболее корректное решение задачи, так как не требует дополнительных исследований промежуточной опорной системы для абсолютизации. Посмотрим, какова точность определяемых этим методом собственных движений в случайном отношении. Интересующие нас оценки получаем из формулы (6.20), где следует положить $\sigma_{\mu r} = 0$:

$$\epsilon_{\mu s}^2 = 2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{ms}^2 + 2 \left(\frac{M}{\tau} \right)^2 \epsilon_{mk}^2 \sum_{k=1}^{k_0} D_{sk}^2. \quad (6.63)$$

Формула (6.63) показывает, что погрешности фотографических собственных движений звезд, определенных относительно галактик, зависят только от ошибок измерений определяемых звезд и галактик и уменьшаются обратно пропорционально увеличению разности эпох. В этом коренное отличие этих собственных движений от тех, которые определяются с промежуточной системой опорных звезд. Погрешности последних, уменьшаясь с разностью эпох, стремятся к некоторым предельным значениям, зависящим от реальных движений опорных звезд и конфигурации их и объекта.

Для сравнения рассмотренных здесь трех способов вывода абсолютных собственных движений с помощью галактик приведем формулы ошибок конечных результатов. Эти ошибки в первом и втором способах, очевидно,

складываются из ошибок относительного собственного движения звезды и ошибки абсолютизации. Для первого (прямого) способа получим следующую оценку:

$$\epsilon_{\mu_{absI}}^2 = \epsilon_{\mu's}^2 + \epsilon_{\mu'k}^2 \sum_{k=1}^{k_0} D_{sk}^2. \quad (6.64)$$

Для второго (косвенного) способа будем иметь

$$\epsilon_{\mu_{absII}}^2 = \epsilon_{\mu's}^2 + \frac{1}{k_0} \epsilon_{\mu'k}^2 + \sigma_{\mu r}^2 \left\{ \sum_{r=1}^N D_{sr}^2 - \frac{1}{N} \right\}. \quad (6.65)$$

Оценка ошибки абсолютных собственных движений в третьем способе дается формулой (6.63).

Т а б л и ц а 11

Ошибки абсолютных собственных движений звезд, полученных тремя способами по галактикам.
Начальные условия: $M\epsilon_{ms} = M\epsilon'_{mr} = 0,120''$,
 $M\epsilon_{mk} = 0,208''$, $\sigma_{\mu r} = 0,015''$, число опорных звезд $N = 50$,
ошибки вычислены для линейной модели редукции при равномерном распределении опорных звезд и галактик.

Число опорных галактик N_G	Разность эпох τ	Расстояние объекта от центра (в единицах R)				Способы абсолютизации
		0	0,5	1,0	1,25	
5	20	0,0112"	0,0133"	0,0184"	0,0214"	Способ I: определены относительные движения звезд и галактик, абсолютизация выполнена прямым методом.
	40	61	75	107	126	
	80	39	51	76	90	
10	20	0,0101	0,0115	0,0143	0,0169	Способ II: определены относительные движения звезд и галактик, абсолютизация выполнена косвенным методом.
	40	56	65	89	103	
	80	35	44	65	77	
20	20	0,0094	0,0104	0,0127	0,0142	Способ III: абсолютные собственные движения определены непосредственно по галактикам, которые использовались в качестве опорных звезд.
	40	52	59	78	89	
	80	32	41	59	69	
5	20	0,0112	0,0118	0,0131	0,0141	Способ I: определены относительные движения звезд и галактик, абсолютизация выполнена косвенным методом.
	40	61	69	87	99	
	80	39	49	72	85	
10	20	0,0101	0,0107	0,0122	0,0133	Способ II: абсолютные собственные движения определены непосредственно по галактикам, которые использовались в качестве опорных звезд.
	40	56	63	83	96	
	80	35	46	70	83	
20	20	0,0094	0,0101	0,0118	0,0127	Способ III: абсолютные собственные движения определены непосредственно по галактикам, которые использовались в качестве опорных звезд.
	40	52	60	81	93	
	80	32	45	68	82	
5	20	0,0107	0,0126	0,0170	0,0196	Способ I: определены относительные движения звезд и галактик, абсолютизация выполнена косвенным методом.
	40	54	63	85	98	
	80	27	31	42	49	
10	20	0,0097	0,0107	0,0134	0,0151	Способ II: абсолютные собственные движения определены непосредственно по галактикам, которые использовались в качестве опорных звезд.
	40	48	54	67	76	
	80	24	27	34	38	
20	20	0,0091	0,0097	0,0112	0,0123	Способ III: абсолютные собственные движения определены непосредственно по галактикам, которые использовались в качестве опорных звезд.
	40	45	48	56	61	
	80	23	24	28	31	

Для иллюстрации в табл. 11 приведем численные оценки ошибок абсолютных собственных движений, вычисленных тремя способами при одинаковых начальных условиях, использовавшихся при составлении табл. 9 и 10.

Данные табл. 11 позволяют сделать ряд практически полезных выводов о сравнительной ценности различных способов определения абсолютных собственных движений μ_{abs} звезд по галактикам.

1. Ни один из способов абсолютизации не обеспечивает существенного (в 1,5 – 2 раза) выигрыша в точности конечных μ_{abs} определяемых звезд, если $\tau \leq 20$ лет. Это зависит от того, что главной составляющей ошибки $\epsilon_{\mu_{abs}}$ в этих условиях является ошибка измерений определяемых звезд ϵ_m , одинаковая в трех способах.

2. Наименьшую ошибку $\epsilon_{\mu_{abs}}$ определяемых звезд при небольшом числе галактик ($k \leq 5$) и $\tau \approx 20$ обеспечивает второй (косвенный) способ абсолютизации.

3. Наилучшую точность определяемых звезд в центральной области поля опорных звезд и галактик ($r/R \leq 0,5$) обеспечивает третий способ определения μ_{abs} , использующий галактики в качестве опорных звезд. Этот выигрыш тем более заметен, чем больше k и больше τ .

4. Различие между $\epsilon_{\mu_{abs}}$ в первом и втором способах вообще не существенно. При малом числе галактик ($k = 5$) заметно преимущество второго способа; при большом числе галактик ($k = 20$) и при $\tau \geq 40$ преимущество имеет первый способ. Рост ошибки ϵ_{μ} по мере удаления объекта от центра области опорных звезд особенно ярко выражен в первом способе абсолютизации при $\tau = 20$ и смягчен во втором способе.

В связи с перечисленными выводами необходимо напомнить, что в основе формул (6.63) – (6.65) и, соответственно, табл. 11 лежит допущение (6.62), согласно которому реальные движения опорных звезд не обладают другим систематическим эффектом, кроме общего переносного движения. В этих условиях применение первого и второго способов абсолютизации корректно, а формулы (6.64) и (6.65) правильно оценивают погрешности индивидуальных определяемых звезд. Однако эти оценки нельзя рассматривать как независимые по отношению к групповым движениям определяемых звезд; поскольку значительную долю оцениваемой погрешности составляет локальная погрешность переноса (6.27), (6.28), имеющая систематический характер при данной выборке опорных звезд. Совсем иной аспект приобретает задача оценивания $\epsilon_{\mu_{abs}}$, если допущение (6.62) не выполняется. Применение косвенного способа абсолютизации в этом случае влечет за собой систематическую ошибку вида (6.49), никак не контролируемую. Искомые μ_{abs} в этих условиях корректно вычисляются по относительным движениям только первым (прямым) способом, или если они вычисляются непосредственно относительно галактик, т.е. третьим способом, который вообще следует признать лучшим в систематическом отношении.

Представляет интерес сравнить данные таблицы 11 с результатами реальных наблюдений. Воспользуемся для этого итогами анализа точности относительных собственных движений звезд и галактик в каталоге (Фатчихин, 1974), который получен в Пулковке по наблюдениям на нормальном астро-

Т а б л и ц а 12

Ошибки абсолютных собственных движений звезд в каталоге Н.Ф. Фатчихина

Виды ошибок	В каталоге	Теоретические оценки	
		в центре области	на границе области
Ошибки относительных собственных движений слабых звезд	0,0076"	0,0088"	0,0101"
Ошибки относительных собственных движений галактик	0,0100	0,0149	0,0157
Ошибки абсолютных собственных движений слабых звезд	0,0094	0,0112	0,0131
Абсолютизация выполнена косвенным способом при числе галактик	3,3		5

графе с разностью эпох порядка 20 лет, т.е. в условиях, весьма близких к тем, при которых вычислены данные табл. 9, 10, 11. Результаты такого сравнения приводятся в табл. 12.

Как видим, приведенные в каталоге оценки точности собственных движений приближаются к теоретическим для центра области опорных звезд, но остаются заниженными. Такой итог сравнения подтверждает правильность наших теоретических оценок, так как приведенные в каталоге оценки выведены из сравнения собственных движений одних и тех же звезд в разных парах, которые при одном и том же наборе опорных звезд не могут считаться независимыми. В этих условиях определяется только та составляющая ошибки собственных движений, которая зависит от измерений определяемых и опорных звезд; другая составляющая, зависящая от дисперсии остаточных скоростей звезд, остается необнаруженной. Между тем, именно от этой составляющей зависит увеличение полной погрешности определяемых собственных движений на периферии области опорных звезд по сравнению с центром.

* *
*

Были рассмотрены основные геометрические — принципиальные для этой задачи — аспекты проблемы определения фотографических собственных движений звезд. Других аспектов этой проблемы — чисто фотографических, измерительных или звездно-астрономических — мы здесь сознательно не касаемся. Отметим главные результаты выполненного анализа.

1. Выведены строгие оценки случайных ошибок фотографических собственных движений звезд, учитывающие дисперсию пекулярных движений опорных звезд.

2. Показано, что фотографические собственные движения звезд определяются с точностью до систематической ошибки вида $\Delta \mu_{sr}$ (6.22), (6.23), зависящей от выбранной модели сравнения пластинок.

3. Строго решена задача определения системы фотографических собственных движений звезд. Выведены формулы преобразования собствен-

ных движений звезд, полученных относительно данной системы опорных звезд, к другой системе опорных звезд, присутствующих на сравниваемых пластинках среди определяемых звезд.

4. Строго рассмотрена задача определения абсолютных собственных движений звезд на основе фотографических наблюдений звезд и галактик. Выведены оценки ошибок фотографических собственных движений звезд, полученных относительно галактик тремя способами.

Наши оценки ошибок фотографических собственных движений звезд, как правило, больше тех, которые приписывают авторы массовых определений собственных движений звезд своим результатам (Кадла, 1966; Фролов, 1975). Это неудивительно, так как в этих работах, так же как и в исследовании (Фатчихин, 1974), ошибки собственных движений выведены из сравнения результатов их определения в двух и более парах пластинок, которые считаются независимыми, что неправильно. Как уже отмечалось, при таком подходе выявляется только часть погрешности, зависящая от измерений, а другая часть, зависящая от движений опорных звезд, не обнаруживается ввиду того, что опорные звезды на сравниваемых пластинках одни и те же. Наш вывод подтверждается еще и тем обстоятельством, что нигде в упомянутых работах не обнаружено увеличение ошибки $\epsilon_{\mu s}$ на границе области опорных звезд по сравнению с центром. Между тем, согласно нашему анализу (см. табл. 9), такое увеличение должно иметь место, особенно для случаев редукции с большой разностью эпох τ , т.е. в условиях, когда относительный вклад дисперсии пекулярных движений опорных звезд в общую погрешность собственных движений определяемых звезд становится преобладающим. Таким образом, корректные оценки погрешности фотографических собственных движений звезд должны учитывать эффект дисперсии пекулярных движений опорных звезд и положение звезды относительно центра тяжести системы опорных звезд. Чтобы получить правильные оценки традиционным путем, сравнивая результаты определения собственных движений одних и тех же звезд на разных парах пластинок, необходимо, чтобы опорные звезды в этих парах были бы разными — только в этом случае сравниваемые данные можно считать независимыми.

Итак, в нашем исследовании еще раз подчеркивается роль эффекта пекулярных и систематических движений опорных звезд в определении системы фотографических собственных движений звезд и в оценке их погрешностей. Показано, что эффект реальных движений опорных звезд ставит предел точности фотографическим собственным движениям звезд и существенно затрудняет определение системы этих движений. Последним обстоятельством можно объяснить, в частности, тот значительный разницей в определениях собственных движений известных скоплений χ и h Per, выполненных разными авторами (см. (Муминов, 1981)), который невозможно объяснить случайными ошибками результатов. Здесь следует отметить, что на существование погрешности фотографических собственных движений звезд, зависящей от движений опорных звезд, ранее указывал А.Н. Высоцкий (Высоцкий, 1954), назвавший эту ошибку "космической". Он оценил эту ошибку, исходя из известных величин дисперсий пекулярных лучевых скоростей звезд разных спектральных классов и сделал правильный вывод о невозможности исключить или уменьшить

влияние этой погрешности за счет увеличения разности эпох или числа пар сравниваемых пластинок. Согласно оценкам А.Н. Высоцкого "вероятная дисперсия" движений звезд 14-й величины, если их спектральные классы неизвестны, составляет $0,003'' - 0,008''$ в зависимости от галактической широты или $0,005'' - 0,014''$, если говорить о дисперсии в общепринятом в статистике смысле. Он считает, что этой ошибкой можно пренебречь при разности эпох порядка 20 лет и числе опорных звезд, равном 36. К такому же выводу приходит А.Н. Дейч в своей работе (Дейч, 1974). С этими выводами, как показывает наш анализ, нельзя согласиться, оставаясь на принципиальных позициях.

Вопрос о выборе опорных звезд при определении фотографических собственных движений требует самого серьезного рассмотрения. По-видимому, эта задача не столько задача астрометрии, сколько звездной астрономии и именно на основе звездно-астрономических данных ее и следует решать. И уж во всяком случае нельзя, определяя собственные движения звезд фотографическим методом, выбирать опорные звезды по признаку собственных движений, так как это приводит к селекции, т.е. к нарушению основного принципа статистики.

АСТРОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАНДАРТИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ АСТРОФОТОГРАФИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ДЛИННОФОКУСНЫХ ТЕЛЕСКОПАХ

§ 1. Постановка задачи

В этой главе мы остановимся на задаче астрометрической редукции измерений астрофотографий без опорных звезд. Эта задача остается весьма актуальной при обработке фотографических наблюдений, полученных на длиннофокусных телескопах. Такие наблюдения в настоящее время систематически производятся с целью изучения относительных движений в системах визуально-двойных и кратных звезд, а также для определения относительных положений в системах спутников больших планет с целью улучшения теорий движения спутников. Можно сказать, что в настоящее время фотографический метод полностью вытеснил метод визуально-микрометрических измерений из этой области астрометрии. Дальнейший прогресс здесь, по-видимому, будет связан с оснащением длиннофокусных телескопов фотоэлектрическими микрометрами и заменой пластины ПЗС-матрицами.

Условия астрометрической редукции фотографических наблюдений, полученных на современных длиннофокусных телескопах (см., например, (Дейч и др., 1965; Камп ван де, 1967; Герцшпрунг, 1940)), характеризуются следующими данными:

- фокусное расстояние телескопа и масштаб: $f_0 = 10$ метров, $M = 20''/\text{мм}$;
- рабочее поле: не более 1 кв. град. ($2\rho_{\text{max}} \leq 60'$);
- диаметр звездных изображений: $\rho_* > 1''$ (или 50 мкм);
- разрешающая сила: $\rho_{\Delta x} > 2''$ (имеется в виду возможность точно измерить относительные положения компонент двойной звезды, пренебрегая эффектами взаимодействия фотографических изображений);
- кома и другие аберрации: можно пренебречь;
- ошибки измерений относительных координат звездных изображений: $\epsilon_m = 0,04'' - 0,06''$ (или 2–3 мкм) для хорошо проработанных изображений и $0,05'' - 0,10''$ для передержанных;
- число опорных звезд N : не более 6, чаще 2–3, в зависимости от области неба и экспозиции;
- наибольший диаметр измеряемой конфигурации может достигать $\sigma_{\text{max}} = 1000''$.

Непосредственная задача астрометрической редукции фотографических наблюдений с длиннофокусными телескопами состоит в определении высокоточных относительных положений измеренных на пластинке объектов

в определенной фиксированной системе небесных координат, например, в системе экватора 2000,0.

Точность измерений на пластинке характеризуется относительной ошибкой измерений отрезков; эта ошибка, равная также ошибке определения позиционного угла θ , оценивается следующим образом:

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\epsilon_m}{\sigma} \geq \frac{\epsilon_m}{\sigma_{\max}} = \frac{0,05''}{1000} = 5 \cdot 10^{-5}, \quad (7.1)$$

или $\pm 10''$ для θ . В этом выражении σ — длина измеренного отрезка.

Естественно потребовать, чтобы в результате редукиции достигнутая при измерениях точность была сохранена. Легко убедиться, что традиционные методы с опорными звездами не удовлетворяют этому условию, если только изучаемая конфигурация звезд недостаточно тесна, например, если

$$\sigma_1 < 100''. \quad (7.2)$$

Действительно, как следует из оценок ошибок постоянных в линейных методах (см. (5.49)), имеем:

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\epsilon_m}{M_e} \geq \frac{2\sigma_1}{\rho\sqrt{N}} \left(\approx 5,6 \frac{\sigma_1''}{\rho^{\circ}\sqrt{N}} 10^{-4} \right); \quad (7.3)$$

здесь M_e — эмпирический масштаб телескопа, определяемый при редукиции с опорными звездами, σ_1'' — ошибка единицы веса в секундах дуги, ρ_0 — радиус области опорных звезд в градусах. При $\rho < 0,4^{\circ}$, $N < 6$, $\sigma_1'' = 0,3''$, оценка (7.3) дает

$$\frac{\epsilon_m}{M_e} \geq 1,7 \cdot 10^{-4}. \quad (7.4)$$

Таким образом, даже при шести опорных звездах, равномерно распределенных в поле фотографии длиннофокусного телескопа, не удастся сохранить фактической точности измерений объектов, если астрометрическую редукицию производить с постоянными пластинки. Реальные условия редукиции на современную эпоху (1986) обычно даже хуже вышеприведенных: редко, когда удастся отождествить в малом поле ($\rho < 0,4^{\circ}$) шесть подходящих опорных звезд, обычно не более двух-трех, а ошибки каталожных положений опорных звезд могут составлять $\pm 0,5'' - 0,8''$.

Следовательно, необходимо обратиться к альтернативным методам астрометрической редукиции, не использующим опорных звезд. Основу для применения этих методов составляют следующие необходимые исходные данные.

1. Надежное знание геометрического масштаба телескопа и его зависимости от температуры. В условиях наших задач, очевидно, необходимо, чтобы масштаб был известен с относительной ошибкой порядка $\pm 5 \cdot 10^{-5}$ или до $\pm 0,001''/\text{мм}$, если $f_0 = 10 \text{ м}$, а $\sigma_{\max} = 1000''$.

2. Наличие на астрофотографии хотя бы одного опорного направления, позиционный угол которого на небесной сфере был бы достаточно точно известен в заданной системе координат. Такое опорное направление может быть задано, например, двумя широко расставленными звездами с извест-

ными координатами, или двумя изображениями какой-нибудь одной звезды на суточной параллели. Точность теоретического позиционного угла опорного направления должна быть не хуже той, которую обеспечивают измерения.

3. Применение строгих алгоритмов учета дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации при переходе от измеренных в произвольной системе координат относительных положений объектов в поле астрофотографии к стандартной тангенциальной системе координат с началом в главном объекте конфигурации.

Перечисленные данные должны быть обеспечены заранее. Для этого необходима большая подготовительная работа, включающая: а) тщательную калибровку телескопа и изучение аберраций его оптики; б) изучение методов стандартизации и составление соответствующих программ для ЭВМ; в) организацию и производство наблюдений таким образом, чтобы получать на каждой рабочей фотографии надежно фиксированное опорное направление.

В этой главе мы рассмотрим основные теоретические вопросы поставленной задачи.

§ 2. Начальная ориентировка астрофотографий при наблюдениях и измерениях

Для обеспечения начальной ориентировки измерений астрофотографий в астрономической практике выработаны специальные приемы наблюдений и их обработки. Наиболее распространенными являются:

1. Наблюдения со следом суточного движения яркой звезды.
2. Наблюдения с парой ориентирующих звезд.
3. Наблюдения со вспомогательным калибровочным полем.

Первый способ, рекомендованный еще Э. Герцшпрунгом (Герцшпрунг, 1912; Герцшпрунг, 1940), применяется в основном на американских обсерваториях, второй способ используется в Пулковке при обработке наблюдений двойных звезд, у которых подозреваются невидимые спутники (Дейч, 1957; Шахт, 1976), третий способ иногда применяется при позиционных наблюдениях спутников больших планет (Балановский, 1916). При наблюдениях первым или вторым способом астрометрическую стандартизацию измерений производят в полном соответствии с пунктами 1, 2, 3 "исходных данных", т.е. на основе априори известного масштаба и его зависимости от температуры и дифференциальной рефракции. В литературе этот способ стандартизации иногда называют *scale-trail-редукцией* (Пэску, 1980).

При наблюдениях третьим способом калибровочное поле используется для определения и масштаба, и ориентировки измеренных координат на астрофотографии непосредственно из наблюдений, т.е. делается попытка решить задачу стандартизации с помощью опорных звезд и постоянных пластинки, но в лучших условиях, поскольку калибровочное поле может обеспечить значительно большее число опорных звезд, чем каталог типа AGK-3 (Дикфосс, 1975).

В Пулковке фотографические наблюдения двойных звезд и спутников больших планет на 26-дюймовом рефракторе производят и первым, и вто-

рым способом, однако первый способ применяют в несколько измененном виде. А именно, в отличие от обычной практики, на рабочей фотографии получают не след посторонней яркой звезды, а два изображения исследуемой звезды, расположенные на суточной параллели. Одно из этих изображений — восточное S_E — получают в общем ряду рабочих изображений (рис. 23), второе изображение — западное S_W — получают после короткой задержки часового движения телескопа на время Δt , в течение которого изображение звезды смещается вдоль суточной параллели на заданную величину

$$l = f_0 \Delta t \cos \delta = 0,727 \Delta t^s \cos \delta f_0 10^{-4} \text{ мм}, \quad (7.5)$$

достаточную, чтобы обеспечить базу для уверенной ориентировки измеренных координат на астрофотографии. В некоторых особенно ответственных случаях, например, при наблюдениях галилеевых спутников Юпитера, получают два вспомогательных изображения объекта S_{E1} и S_{W2} , расположенных к востоку и к западу от центрального меридиана пластинки. Для двойных и кратных звезд, расположенных к северу от параллели $\delta = 65^\circ$, применяется способ наблюдений с ориентирующей парой звезд.

Полученные на длиннофокусном телескопе фотографии двойных звезд или других объектов тщательно измеряются в некоторой произвольной

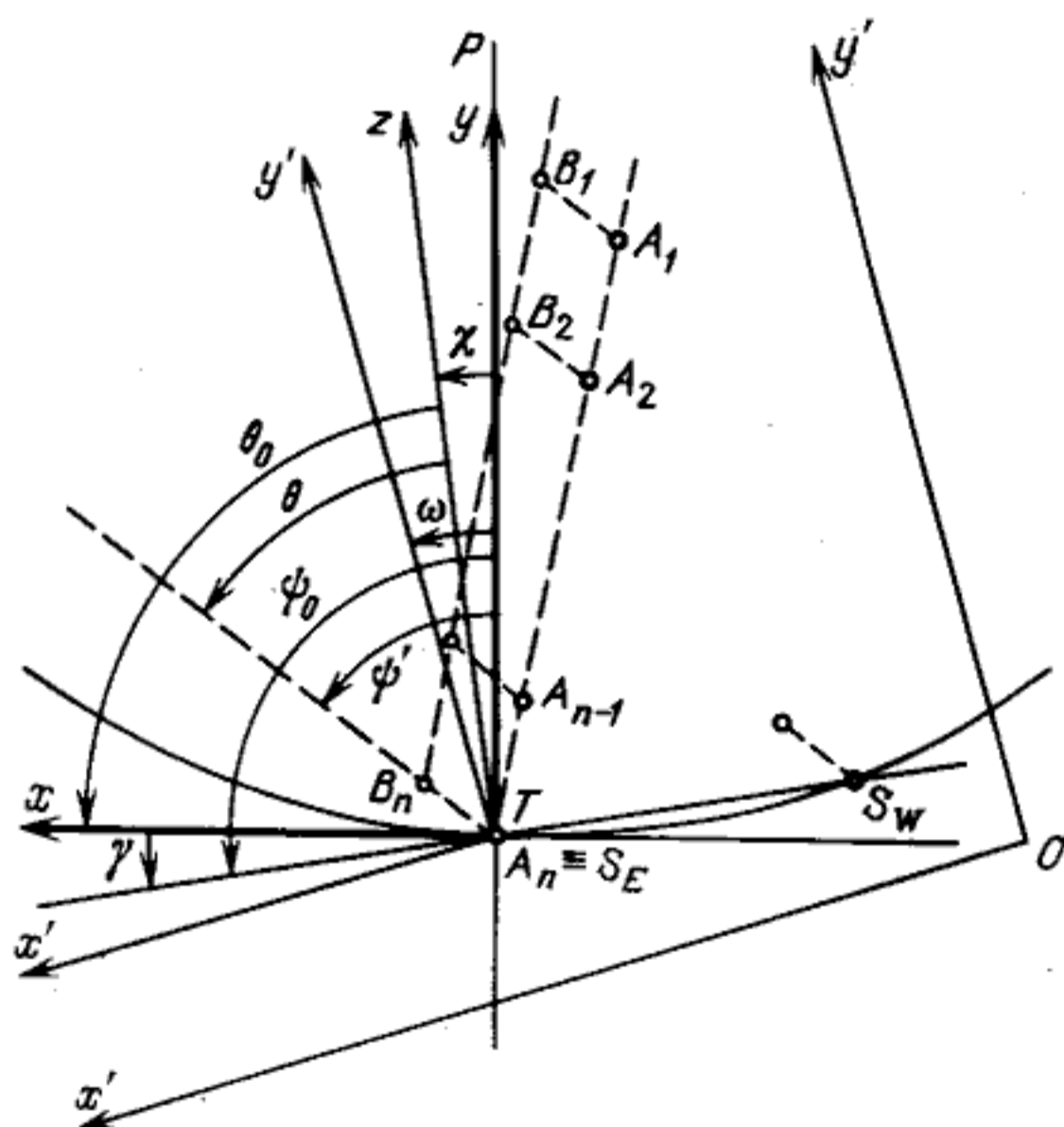


Рис. 23. Ориентировка измерений фотографии двойной звезды с компонентами A и B по следу (пулковский способ); $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ — изображения двойной звезды, полученные при параллельном переносе кассеты; S_W, S_E — изображения звезды A , расположенные на суточном следе; оптический центр T фотографии совмещен с изображением главной звезды A , TZ — несмещенное направление на зенит; Tx — видимое направление суточной параллели; $Ty (\equiv TP)$ — видимое направление круга склонений; $\psi_0 = 90^\circ + \gamma$ — позиционный угол опорного направления, γ — угол между направлением хорды $S_W S_E$ и касательной Tx ; χ — параллактический угол; ψ' — измеренный позиционный угол направления AB ; $Ox'y'$ — первичная система измеренных координат, ω — ее позиционный угол

системе координат $Ox'y'$ (рис. 23), которая затем преобразуется в определенную, строго ориентированную систему координат Txu с началом координат в главном объекте A кратной системы, который по условию наблюдений находится вблизи оптического центра фотографии. Эти преобразования следующие:

$$\begin{aligned}x &= (x' - x'_1) \cos \omega + (y' - y'_1) \sin \omega, \\y &= -(x' - x'_1) \sin \omega + (y' - y'_1) \cos \omega.\end{aligned}\tag{7.6}$$

Параметры преобразования $\sin \omega$ и $\cos \omega$ находятся из измерений вспомогательных изображений звезд S_1 и S_2 или S_W и S_E

$$\begin{aligned}r \sin \omega &= (y'_2 - y'_1) \sin \psi_0 - (x'_2 - x'_1) \cos \psi_0, \\r \cos \omega &= (y'_2 - y'_1) \cos \psi_0 + (x'_2 - x'_1) \sin \psi_0.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Здесь r — длина отрезка S_1S_2 , ψ_0 — теоретический позиционный угол ориентирующего направления $\overline{S_1S_2}$ в системе экваториальных координат на момент наблюдений. В случае наблюдений с ориентирующей парой звезд позиционный угол направления $\overline{S_1S_2}$ определяется следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{\cos \delta_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin \delta_2 \cos \delta_1 - \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}.\tag{7.8}$$

Если же в качестве ориентирующего направления используется отрезок суточного следа $\overline{S_W S_E}$, то его позиционный угол есть

$$\psi_0 = 90^\circ + \gamma,\tag{7.9}$$

где γ — малый угол между направлениями хорды $\overline{S_W S_E}$ и касательной к следу в точке S_E . Угол γ определяется следующей формулой:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{l}{f_0} \operatorname{tg} \delta_1 \approx 3,636 \cdot 10^{-6} \Delta t^s \sin \delta_1.\tag{7.10}$$

Здесь $f_0 \operatorname{ctg} \delta_1$ — радиус кривизны параллели объекта $\delta_1 = \operatorname{const}$. Формула (7.10) выведена в соответствии с результатом (1.30). Нетрудно проверить, что выполнив преобразование первичных измеренных координат в соответствии с формулами (7.6)–(7.9), мы получим новую систему координат, в которой в первом случае позиционный угол направления $\overline{S_1S_2}$ относительно оси y окажется в точности равным ψ_0 , а во втором случае направления касательной к суточному следу в точке $S_E(S_1)$ и направления оси x совпадут. В общем случае это условие можно выразить следующей формулой:

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \operatorname{tg} \psi_0.\tag{7.11}$$

Определив таким образом точную ориентировку всех измерений в поле рабочей астрофотографии, можем приступить к строгой астрометрической редукции результатов измерений.

§ 3. Формулы первого порядка для учета дифференциальной рефракции при стандартизации измерений астрофотографий

Рабочее поле современных длиннофокусных телескопов обычно не превосходит одного квадратного градуса. При наблюдениях двойных и кратных звезд используют лишь небольшую область этого поля ($\rho < 5'$) в центре пластинки. В случае наблюдений спутников больших планет измеряемое поле может составлять 20 – 30' в диаметре. Только при определении тригонометрических параллаксов звезд используется все рабочее поле пластинки, но эта задача решается с помощью опорных звезд, т.е. на принципиально другой основе, и здесь не рассматривается. Таким образом, для нашей задачи достаточно ограничиться рассмотрением области астрофотографии $\rho < 20'$ вблизи оптического центра пластинки. При таких ограничениях, как показано в § 3 гл. 1 (см. табл. 1), проективные искажения длин дуг $\Delta\sigma/\sigma$ и искажения углов $\Delta\theta$ в проекции на плоскость не превышают $3 \cdot 10^{-5}$, и остаются заведомо меньше соответствующих искажений длин отрезков и углов на астрофотографии, возникающих вследствие ошибок измерений изображений звезд, для которых справедлива оценка (7.1). В этих условиях можно полностью пренебречь искажениями проекции и, чтобы выполнить строгую астрометрическую редукцию измерений, достаточно учесть влияние дифференциальной рефракции и аберрации на масштаб и ориентировку измерений. В соответствии с этой установкой теорию астрометрической редукции построим, исходя из следующих положений.

1. Относительные искажения длин элементарных дуг σ и углов θ на небесной сфере, происходящие вследствие дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации, оцениваются следующими формулами: эффект дифференциальной рефракции I порядка

$$|\Delta\sigma/\sigma|_{IR} \leq \beta \sec^2 \zeta, \quad (7.12)$$

эффект дифференциальной рефракции II порядка

$$|\Delta\sigma/\sigma|_{IIR} \leq \beta \sigma \operatorname{tg} \zeta \sec^2 \zeta, \quad (7.13)$$

эффект дифференциальной аберрации I порядка

$$|\Delta\sigma/\sigma|_{IA} \leq k |\cos \rho_A|. \quad (7.14)$$

В формулах (7.12)–(7.14) сохранены обозначения гл. 3; оценки выведены непосредственно из формул (3.88) и (3.93); численные значения этих оценок приведены в табл. 13 для различных зенитных расстояний ζ и расстояний от апекса ρ_A при $\beta = 29,1 \cdot 10^{-5}$ (60") и $k = 9,8 \cdot 10^{-5}$ (20,5').

2. Если считать относительную ошибку измерений $5 \cdot 10^{-5}$ допустимой при определении положений звезд в исследуемой конфигурации, то для строгой астрометрической редукции измерений астрофотографий, полученных на длиннофокусных телескопах, достаточно учесть влияние дифференциальной рефракции на масштаб и ориентировку измерений, т.е. ограничиться учетом эффектов первого порядка дифференциальной рефракции, пренебрегая ее вторым порядком и влиянием дифференциальной аберрации. Мы полагаем при этом, что протяженность исследуемой конфигурации звезд не превосходит 20' (60 мм, если $f_0 \approx 10$ м), а случайные ошибки

Т а б л и ц а 13

Оценки максимальных относительных искажений длин элементарных дуг, зависящих от дифференциальной рефракции и аберрации, в ед. 10^{-5}

ζ	0°	15°	30°	45°	60°	70°	75°	Примечание
$ \Delta\sigma/\sigma _{IR}$	29,1	31,2	38,8	58,2	164,4	248,7	434,2	Принято $\sigma = 0,0058$ (20')
$ \Delta\sigma/\sigma _{II R}$	0	0,1	0,1	0,3	1,2	4,0	9,4	

ρ_A	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	Примечание
$ \Delta\sigma/\sigma _{IA}$	9,8	9,6	8,6	7,0	5,0	2,6	0	

измерений отрезков на астрофотографии составляют 3 — 5 мкм, что существенно больше, чем искажения проекции, которыми мы пренебрегаем; кроме того, предполагаем, что наблюдения выполнены с соблюдением условия

$$|\rho_A - 90^\circ| < 30^\circ, \quad (7.15)$$

например, не далее 2^h от местной полуночи, если объект находится вблизи эклиптики.

3. Формулы учета дифференциальной рефракции должны выражать рефракционное сокращение отрезков дуг больших кругов на небесной сфере и изменение их позиционных углов относительно вертикала. Если ограничиться первым порядком этого эффекта, то соответствующие формулы имеют следующий вид (Блажко, 1954):

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= -\beta_\zeta \sigma (1 + \operatorname{tg}^2 \zeta \cos^2 \theta), \\ \Delta\theta &= \beta_\zeta \operatorname{tg}^2 \zeta \sin \theta \cos \theta, \\ \beta_\zeta &= \beta - \beta' \operatorname{tg}^2 \zeta, \quad \theta = \psi - \chi. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Здесь σ — длина дуги большого круга, проведенного через исследуемые звезды S_1 и S_2 ; θ — позиционный угол дуги $\sphericalangle S_1 S_2$ относительно вертикального круга $S_1 Z$; Z — астрономический зенит места наблюдений, ψ — позиционный угол дуги $\sphericalangle S_1 S_2$ относительно круга склонений $S_1 P$; χ — параллактический угол при звезде S_1 ; остальные обозначения те же, что в формулах (2.11), (2.12).

4. На астрофотографии все направления, отмеченные изображениями звезд или их следов, смещены вследствие влияния рефракции. Есть только одно несмещенное рефракцией направление — это направление из оптического центра пластинки на зенит (TZ на рис. 23), однако это направление никак не отмечено на снимке. Таким образом, любая ориентировка измерений, определяемая реальными изображениями звезд на астрофотографии, не может считаться точной, в том числе и та, которая удовлетворяет условиям (7.8) — (7.9). Измеренные в такой системе позиционные углы ψ'

должны быть исправлены как за счет смещения определяемого направления θ , так и за счет смещения опорного направления θ_0 , т.е. искомая поправка к измеренному позиционному углу ψ' должна определяться как разность поправок $\Delta\theta$ и $\Delta\theta_0$:

$$\Delta\psi = \Delta\theta - \Delta\theta_0, \quad (7.17)$$

причем сами поправки, рассматриваемые как функции геометрических ($\alpha, \delta, s, \varphi, \psi, \psi_0$) и физических (t°, B) условий наблюдений, должны вычисляться теоретически в соответствии с формулами (7.16).

Теперь выведем формулы преобразования для перехода от измеренных координат x, y , ориентированных по опорному направлению ψ_0 , к искомым тангенциальным координатам ξ, η с началом в главной звезде конфигурации S_1 . В соответствии с исходными положениями 1 – 4 формулы должны учитывать влияние дифференциальной рефракции первого порядка согласно (7.16) и условия начальной ориентировки (7.8) – (7.11). Геометрический масштаб астрофотографии M_0 и коэффициенты рефракции β и β' будем считать известными.

Воспользуемся дифференциальными соотношениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \xi &= M_0 x - \Delta\xi, \\ \eta &= M_0 y - \Delta\eta. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Здесь ξ, η – искомые тангенциальные координаты, $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ – погрешности этих координат, зависящие от дифференциальной рефракции. Эти погрешности вычисляются на основе дифференциальных формул

$$\Delta\xi = \frac{\Delta\rho}{\rho} \xi + \eta \Delta\psi, \quad \Delta\eta = \frac{\Delta\rho}{\rho} \eta - \xi \Delta\psi, \quad (7.19)$$

которые следуют из выражений тангенциальных координат через полярные координаты

$$\xi = \rho \sin \psi, \quad \eta = \rho \cos \psi. \quad (7.20)$$

Величины $\Delta\rho/\rho$ и $\Delta\psi$ в формулах (7.19) должны удовлетворять условиям (7.16) и (7.17), поэтому можно записать

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\beta_\xi [1 + \operatorname{tg}^2 \xi \cos^2(\psi - \chi)], \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \Delta\theta |_{\psi - \chi} - \Delta\theta |_{\psi_0 - \chi} = \\ &= \beta \operatorname{tg}^2 \xi [\sin(\psi - \chi) \cos(\psi - \chi) - \sin(\psi_0 - \chi) \cos(\psi_0 - \chi)] = \\ &= \beta \operatorname{tg}^2 \xi \sin(\psi - \psi_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\chi). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Формулы (7.21), (7.22) преобразуем, используя определения величин k_1, k_2 согласно (3.89) и полагая угол ψ_0 заданным, а угол ψ – определяемым согласно (7.20):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\beta_\xi \left[1 + \frac{1}{\rho^2} (k_1 \xi + k_2 \eta)^2 \right], \quad (7.23)$$

$$\Delta\psi = \frac{\beta_\xi}{\rho^2} [(k_2^2 - k_1^2)(\xi\eta - \rho^2 \sin \psi_0 \cos \psi_0) + 2k_1 k_2 (\xi^2 \cos^2 \psi_0 - \eta^2 \sin^2 \psi_0)].$$

Остается подставить выражения (7.23) в (7.19) и вычислить ξ и η по формулам (7.18), заменив в правых частях $\beta\xi$ и $\beta\eta$ на $\beta M_0 x$ и $\beta M_0 y$, что вполне законно в формулах первого порядка относительно β . После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \xi &= M_0 [1 + \beta \zeta (1 + k_1^2)] x + \\ &+ M_0 \beta \zeta [2k_1 k_2 \sin^2 \psi_0 + (k_2^2 - k_1^2) \sin \psi_0 \cos \psi_0] y, \\ \eta &= M_0 [1 + \beta \zeta (1 + k_2^2)] y + \\ &+ M_0 \beta \zeta [2k_1 k_2 \cos^2 \psi_0 - (k_2^2 - k_1^2) \sin \psi_0 \cos \psi_0] x. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Формулы (7.24) решают задачу. Чтобы убедиться в правильности преобразований (7.24), применим их для исправления измерений самой ориентирующей пары — звезд S_1 и S_2 , т.е. вычислим ξ_2, η_2 по данным x_2, y_2 и найдем отношение ξ_2/η_2 , учитывая, что по условию (7.11) $x_2/y_2 = \operatorname{tg} \psi_0$. В итоге вычислений с точностью до членов второго порядка относительно β получим

$$\begin{aligned} \frac{\xi_2}{\eta_2} &= \frac{x_2}{y_2} \frac{1 + \beta [1 + k_1^2 + k_1 k_2 \sin 2\psi_0 + (k_2^2 - k_1^2) \cos^2 \psi_0]}{1 + \beta [1 + k_2^2 + k_1 k_2 \sin 2\psi_0 - (k_2^2 - k_1^2) \sin^2 \psi_0]} = \\ &= \frac{x_2}{y_2} [1 + \beta(k_1^2 - k_2^2) + \beta(k_2^2 - k_1^2) \cos^2 \psi_0 + \beta(k_2^2 - k_1^2) \sin^2 \psi_0] = \\ &= \frac{x_2}{y_2} = \operatorname{tg} \psi_0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Искажения координатной сетки вследствие дифференциальной рефракции

Обратим внимание на структуру преобразований (7.24). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_x &= M_0 [1 + \beta(1 + k_1^2)], \\ M_y &= M_0 [1 + \beta(1 + k_2^2)], \\ \gamma_1 &= \beta(k_2^2 - k_1^2) \sin \psi_0 \cos \psi_0 = \beta \operatorname{tg}^2 \zeta \cos 2\chi \sin \psi_0 \cos \psi_0, \\ \gamma_2 &= 2\beta k_1 k_2 \sin^2 \psi_0 = \beta \operatorname{tg}^2 \zeta \sin 2\chi \sin^2 \psi_0, \\ \gamma_3 &= 2\beta k_1 k_2 \cos^2 \psi_0 = \beta \operatorname{tg}^2 \zeta \sin 2\chi \cos^2 \psi_0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Среди введенных нами величин первые две имеют значение эмпирических масштабов по x и y (см. (4.32), (4.33)), а последние три можно рассматривать как малые углы, сравнимые по величине с β ($3 \cdot 10^{-4}$). Используя обозначения (7.26), преобразования (7.24) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &= M_x x + M_0(\gamma_1 + \gamma_2) y, \\ \eta &= M_y y - M_0(\gamma_1 + \gamma_2) x + M_0(\gamma_2 + \gamma_3) x. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Полученные выражения сравним с преобразованием (4.2). Из сопоставления формул следует, что с точностью до членов второго порядка относительно β преобразование (7.27) равносильно переходу от измеренных в косоугольной системе координат x^*, y^* к стандартной прямоугольной системе координат ξ, η , отнесенных к неизменному началу в звезде S_1 , причем масштабы измеренных координат по x^* и y^* различны и равны M_x и M_y согласно (7.26). В этом преобразовании поворот системы координат x^*, y^* относительно ξ, η определяется углом

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= \beta \sin \psi_0 [(k_2^2 - k_1^2) \cos \psi_0 + 2k_1 k_2 \sin \psi_0] = \\ &= \beta \sin \psi_0 \operatorname{tg}^2 \zeta \cos(2\chi - \psi_0), \end{aligned} \quad (7.28)$$

равным позиционному углу оси $S_1 y^*$ относительно направления $S_1 \eta$, а косоугольность системы x^*, y^* оценивается углом

$$\gamma_2 + \gamma_3 = -2\beta k_1 k_2 = -\beta \operatorname{tg}^2 \zeta \sin 2\chi, \quad (7.29)$$

так что координатный угол $90^\circ + \gamma_2 + \gamma_3$ системы x^*, y^* может отличаться от 90° в большую или меньшую сторону в зависимости от знака 2χ (χ — параллактический угол). Таким образом, главный эффект дифференциальной рефракции состоит в нарушении ортогональности экваториальной сетки координат и ее общем повороте относительно направления на зенит, масштабы вдоль координатных осей при этом становятся различными. Для обработки фотографических наблюдений, полученных на длиннофокусных телескопах, особенно важно то обстоятельство, что для строгой стандартизации измерений необходимо учитывать не только влияние рефракции на масштаб измеренных координат отдельно по x и y , но и влияние начальной ориентировки их осей, заданной условием (7.11). Ортогональность экваториальной сетки координат сохраняется только при наблюдениях строго в меридиане (часовой угол $t = 0$), однако и в этих условиях направления осей измеренных координат можно считать правильными, если с самого начала ориентировать их либо по касательной к суточной параллели ($\psi_0 = 90^\circ$), либо строго по меридиану. Только в этих случаях стандартизацию измерений можно выполнить строго, ограничиваясь исправлением масштабов отдельно по x и y ,

$$M_x = M_0(1 + \beta_\zeta), \quad M_y = M_0(1 + \beta_\zeta \sec^2 \zeta). \quad (7.30)$$

Во всех остальных случаях ($t \neq 0$) необходимо учитывать условия начальной ориентировки измерений (7.11) и (7.8) или (7.9), при этом формулы преобразования (7.24) приобретают специфический вид в зависимости от того, какой способ начальной ориентировки был применен. Например, если начальная ориентировка выполнена по суточной параллели ($\psi_0 = 90^\circ$), получаем следующие формулы стандартизации:

$$\begin{aligned} \xi &= M_0 [1 + \beta_\zeta (1 + k_1^2)] x + 2 M_0 \beta_\zeta k_1 k_2 y, \\ \eta &= M_0 [1 + \beta_\zeta (1 + k_2^2)] y. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Эти формулы совпадают с известными формулами редукции Герцшпрунга (Герцшпрунг, 1922). В случае ориентировки по меридианной паре звезд

Т а б л и ц а 14

Общий поворот изображения сетки экваториальных координат
вследствие дифференциальной рефракции
(фактор $\gamma_1 + \gamma_2$ при $\psi_0 = 20^\circ$, в единицах 10^{-5})

t	δ				
	0°	20°	40°	60°	80°
0^h	27,5	6,5	1,2	0,0	1,3
1	32,0	7,6	1,5	-0,2	1,0
2	41,4	9,4	1,8	-0,5	0,6
3	62,2	12,4	3,4	-0,9	-2,1
4	118,2	18,8	3,6	-1,8	-3,0

($\psi_0 = 0^\circ$) получим другие формулы стандартизации

$$\xi_0 = M_0 [1 + \beta_\zeta (1 + k_1^2)] x,$$

$$\eta = M_0 [1 + \beta_\zeta (1 + k_2^2)] y + 2 M_0 \beta_\zeta k_1 k_2 x. \quad (7.32)$$

Обе формулы выражают одну и ту же деформацию сетки экваториальных координат, только в первом случае истинное направление закреплено за осью x , а во втором случае — за осью y . В общем случае, когда позиционный угол ψ_0 произволен, справедливы формулы (7.24), которые так же, как и в рассмотренных частных случаях, одинаково выражают деформацию экваториальной сетки координат, но истинное направление закреплено за ориентирующим отрезком $S_1 S_2$ в соответствии с условием (7.11). Таким образом, хотя преобразования (7.24), (7.31), (7.32) могут иметь разные по величине коэффициенты, они одинаково точно выражают геометрический эффект дифференциальной рефракции, который полностью определяется законом рефракции и астрономическими условиями наблюдений, т.е. параметрами ζ , χ , вычисленными для среднего момента наблюдений, а также температурой t° и давлением B , которые влияют на величину коэффициента рефракции β .

Т а б л и ц а 15

Деформация изображения сетки экваториальных координат
вследствие дифференциальной рефракции
(фактор $\gamma_2 + \gamma_3$, в единицах 10^{-5})

t	δ				
	0°	20°	40°	60°	80°
0^h	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	27,6	8,6	3,1	0,1	-4,2
2	66,6	19,5	7,1	0,8	-6,8
3	141,1	36,1	13,1	3,0	-6,7
4	345,8	65,2	22,7	7,1	-3,8

В заключение, имея в виду разнообразие задач и условий, в которых могут применяться полученные нами формулы стандартизации измерений (7.24), приводим две таблицы, в которых факторы общего поворота ($\gamma_1 + \gamma_2$) сетки экваториальных координат и ее деформации ($\gamma_2 + \gamma_3$) вычислены отдельно по аргументам t и δ для широты Пулковской ($\varphi = 59^\circ 46'$). Фактор общего поворота ($\gamma_1 + \gamma_2$) вычислен при позиционном угле начальной ориентации $\psi_0 = 20^\circ$, что соответствует случаю ориентировки по "меридианной паре" в условиях острого недостатка ориентирующих звезд.

Приведенные в табл. 14, 15 данные наглядно показывают, с какими дополнительными искажениями определяемых позиционных углов (кроме тех, которые связаны с изменением масштабов) необходимо считаться при обработке астрофотографий, полученных на длиннофокусных телескопах. В частности, из таблиц следует, что при астрометрической редукции измерений двойных звезд пулковской программы ($\delta > 30^\circ$, $\rho > 3''$, $|t| < 2^h$) в большинстве случаев можно ограничиться учетом дифференциальной рефракции, применяя масштаб измеренных координат отдельно по x и y .

* * *

Итак, мы рассмотрели задачу астрометрической стандартизации измерений астрофотографий в общем виде. Главный результат выполненного исследования отражают формулы (7.24). Эти формулы позволяют произвести стандартизацию измерений фотографий, полученных на длиннофокусных телескопах в самом общем случае астрономических условий наблюдений и начальной ориентировки измерений. Формулы учитывают влияние дифференциальной рефракции первого порядка на масштаб измеренных координат и их ориентировку при заданной начальной ориентировке измерений. Ограничения по ширине поля и зенитному расстоянию при заданной допустимой относительной погрешности измерений легко оцениваются формулами (7.12), (7.13), (7.14) и табл. 13, 14, 15.

По рассмотренному вопросу в специальной литературе нет полной ясности. Так, в работах (Дейч, 1957; Шахт, 1976) редукция измерений двойных звезд выполнена только посредством исправления масштабов измеренных координат. В работе (Дейч, 1973) рекомендованы общие формулы учета дифференциальной рефракции, дающие правильный результат только при начальной ориентировке $\psi_0 = 0$ или 90° . В монографии З.Н. Шукстовой (Шукстова, 1961) корректно излагается постановка задачи, но автор ограничивается выводом формул редукции только для случая ориентировки измерений по суточному следу; эти формулы совпадают с формулами Герцшпрунга (Герцшпрунг, 1912) и нашими (7.31). Можно утверждать, что только при измерениях фотографий двойных звезд с суточным следом применяются корректные формулы стандартизации. Во всех других случаях стандартизация измерений делается нестрогой, но это остается незамеченным, так как вносимые в позиционный угол систематические ошибки, зависящие от неправильного учета начальной ориентировки измерений, обычно малы — почти на порядок меньше относительных ошибок измере-

ний двойных звезд, оцениваемых

$$\epsilon_m/\rho > 5 \cdot 10^{-4}, \text{ если } \rho < 30''. \quad (7.33)$$

Другое дело, когда необходимо обработать фотографические наблюдения таких протяженных кратных объектов, как, например, Юпитер с галилеевыми спутниками, для которых $\rho \leq 600''$. Если считать, что ошибка измерений координат в этой конфигурации составляет $0,05''$ (относительная погрешность, соответственно, больше или равна $8 \cdot 10^{-5}$), то допустимая погрешность стандартизации измерений во всяком случае не должна превышать $4 \cdot 10^{-5}$, и тогда необходимо выполнять астрометрическую редуцицию со всей возможной точностью и строгостью. Этой цели и служит изложенная здесь теория, которая формально обеспечивает необходимую точность. На практике, однако, ошибки стандартизованных относительных координат светил в таких протяженных конфигурациях редко бывают лучше $\pm 0,1''$, что можно объяснить несоответствием классической модели усредненной рефракции, изменяющейся вместе с состоянием атмосферы от экспозиции к экспозиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДЫ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ КОРОТКОЙ ДУГИ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРОВ ВИДИМОГО ДВИЖЕНИЯ (МЕТОДОМ ПВД)

§ 1. Пулковская программа астрометрических исследований визуально-двойных звезд

Астрометрические наблюдения визуально-двойных звезд в настоящее время являются исключительной прерогативой длиннофокусных телескопов. Для визуально-двойных звезд с разделением компонент более $2''$ наилучшим (более точным и массовым) методом до сих пор остается фотографический, позволяющий с помощью длиннофокусных телескопов накапливать ряды высокоточных относительных положений компонент. Среднеквадратическая ошибка положений в таких рядах составляет $\pm 0,010-0,040''$ для одной пластинки со многими экспозициями и $\pm 0,003-0,010''$ для среднегодовых положений (нормальных мест), полученных по нескольким пластинкам. Продолжительность наблюдений достигает 20 – 30 лет, но в отдельных случаях может увеличиваться до 50 лет и более. Таковы ряды фотографических наблюдений некоторых визуально-двойных звезд, накопленные на обсерваториях Спроул (Странд, 1957) и Морской обсерватории в Вашингтоне (Франц и др., 1963). В Пулкове фотографические наблюдения визуально-двойных звезд на 26-дюймовом рефракторе ($f_0 = 10,4$ м, $D = 65$ см) были начаты в 1960 г. и особенно интенсивно продолжаются после 1968 г. (Дейч и др., 1965).

Программа исследований визуально-двойных звезд на 26-дюймовом рефракторе в Пулкове предусматривает, во-первых, обзорные наблюдения нескольких сотен двойных звезд северного неба, давно открытых, но не наблюдавшихся в последние 30–50 лет, накопление плотных, длительных рядов высокоточных относительных положений компонент нескольких десятков избранных двойных звезд, обнаруживающих заметное орбитальное движение. Цель первой части программы – выявление среди многих "забытых" визуально-двойных звезд наиболее близких к Солнцу; цель второй части программы – детальное астрометрическое исследование визуально-двойных звезд в окрестностях Солнца, включающее определение орбит, параллаксов и масс этих звезд. В программу наблюдений включаются только те визуально-двойные звезды, которые удовлетворяют условиям наиболее точных астрометрических измерений астрофотографий, полученных в Пулкове на длиннофокусном телескопе. Эти условия предполагают следующие ограничения: по видимому блеску $m \leq 12,0^m$, по разности блеска компонент $\Delta m \leq 1,0^m$, по угловому разделению компонент $\rho \geq 3''$, по положению на небесной сфере $\delta \geq 30^\circ$. При соблюдении пере-

численных условий на одной пластинке удается получить 10 – 30 хорошо разрешимых изображений исследуемой двойной звезды с оптимальными экспозициями от 0,5 до 3,0 мин. Астрометрическая редукция измерений этих пластинок выполняется со всей возможной строгостью на основе принципов, изложенных выше, в гл. 7. К настоящему времени в итоге отбора среди более чем двухсот двойных звезд, наблюдавшихся в обзорном порядке на 26-дюймовом рефракторе в Пулкове, регулярно наблюдаются около 40 визуально-двойных звезд, обладающих заметным орбитальным движением – от 0,1 до 0,5° в год. Среди этих звезд несколько известных, близких к Солнцу (ADS 48, 7251, 11632, 61 Cyg), а также многие другие двойные звезды, орбитальные движения у которых были впервые обнаружены в Пулкове (например, ADS 7639, 8002, 12727, IC 21^h 51,5^mN 31° 13' (Киселев и др., 1980)). Для многих из этих звезд за 10–20 лет уже накоплены ряды высокоточных положений, позволяющие определить динамические параллаксы этих звезд и поставить задачу об определении их орбит.

§ 2. Постановка задачи об определении орбиты визуально-двойной звезды

Создание высокоточных однородных рядов наблюдений визуально-двойных звезд, полученных фотографическим методом на одном телескопе в течение нескольких десятков лет наблюдений, сделало возможным по-новому поставить задачу определения орбиты широкой двойной звезды из наблюдений короткой дуги. Главными условиями, облегчающими решение этой задачи, являются следующие: 1) высокая точность относительных положений, 2) многочисленность положений, равномерно распределенных на сравнительно небольшой дуге видимой орбиты, составляющей 5–15°, 3) однородность положений по отношению к систематическим ошибкам. До внедрения фотографического метода наблюдений двойных звезд астрономы не располагали такими рядами положений, хотя для некоторых широких и медленных двойных звезд уже накоплены наблюдения за 100–150 лет, охватывающие дугу до четвертой части видимой орбиты. Однако эти ряды наблюдений, полученные на разных обсерваториях наблюдателями, использующими телескопы самых различных типов и разную технику измерений, никак нельзя назвать высокоточными и однородными. Таковы, например, ряды наблюдений известных близких к Солнцу визуально-двойных звезд: ADS 14636 (61 Cyg), ADS 7251, ADS 11632, полужившие основой для разработки астрономами старшего поколения методов определения орбит двойных звезд из наблюдений коротких дуг. В итоге этих исследований Е. де Каро и Г. Века определили орбиту 61 Cyg (Каро де и др., 1948), У. Гюнтцель-Лингнер и Й. Хопманн – орбиту ADS 7251 (Гюнтцель-Лингнер, 1955; Хопманн, 1954 (2)), а Й. Хопманн и В. Рабе – орбиту ADS 11632 (Хопманн, 1954 (1); Рабе, 1958). Примененные перечисленными авторами методы определения орбит можно назвать аналитическими или смешанными аналитическими и геометрическими, а метод Хопманна – динамическим. В этих методах широко используются степенные разложения наблюдаемых координат по времени вплоть до четвертого порядка. Коэффициенты этих разложений находятся по способу наименьших квадратов с учетом

интеграла площадей. Элементы орбиты вычисляются по коэффициентам разложений с учетом динамических и геометрических условий. Используется процесс последовательных приближений, чтобы добиться наилучшего согласия с наблюдениями. Хотя полученные таким путем орбиты, как правило, хорошо представляют наблюдения, они все-таки считаются предварительными, так как динамические элементы орбиты (большая полуось a , период обращения P , эксцентриситет e и долгота периастра ω) определяются неуверенно. Это подтверждается большими расхождениями в определениях a , P , e и ω разными авторами, использовавшими одинаковый наблюдательный материал. Например, для визуально-двойной звезды ADS 7251 двумя авторами были определены следующие значения динамических элементов:

a	P	e	ω	
22,4''	1555 лет	0,2	40°	Хопманн, 1954
16,5	687	0,5	58	Гюнтцель-Лингнер, 1955

Аналитические и динамические методы определения орбит, рассмотренные в исследованиях (Каро де и др., 1948; Гюнтцель-Лингнер, 1955; Рабе, 1951), хотя существенно различаются между собой и классическими, чисто геометрическими методами, объединяются общим отношением к наблюдениям, которое выражается в требовании, чтобы искомая орбита наилучшим образом представляла наблюдения на всем интервале измерений; динамические соображения при этом играют лишь вспомогательную роль, так как определяют лишь способ подбора подходящих элементов. Однако, как следует из нашего примера, указанное требование отнюдь не гарантирует определения истинной орбиты двойной звезды, если используются наблюдения короткой дуги.

По этому поводу имеется исследование В. Рабе (Рабе, 1951), который исходит из того, что в большинстве случаев из наблюдений надежно определяются лишь относительные положения и скорость движения в системе двойной звезды. Он убедительно показывает, что в этом случае наблюдениям могут удовлетворять семейства орбитальных эллипсов, различающихся по элементам a , e и ω . Таким образом, задача определения орбиты визуально-двойной звезды из наблюдений короткой дуги сохраняет принципиальную неопределенность. Из сказанного ясно, что мы не можем воспользоваться имеющимся опытом определения орбит визуально-двойных звезд из наблюдений коротких дуг, если не хотим растратить попусту все преимущества, которые нам дает обладание высокоточными рядами относительных положений компонент двойных звезд, и, следовательно, должны искать новые пути.

Новый подход к решению этой задачи может заключаться в следующем: нужно отказываться от чисто геометрического решения, т.е. от попыток согласовать с наблюдениями тем или иным способом подобранный орбитальный эллипс. Метод определения орбиты визуально-двойной звезды из наблюдений коротких и сверхкоротких дуг неизбежно должен быть чисто динамическим дифференциальным методом. Следует сосредоточить усилия на определении из наблюдений пространственных векторов положения и скорости спутника относительно главной звезды, используя для этого диф-

ференциальные уравнения в задаче двух тел. В такой постановке задача определения орбиты двойной звезды сближается с задачей определения орбиты планеты Солнечной системы по методу Лапласа. Остается разумным образом применить идею Лапласа для определения орбиты двойной звезды. В этой связи наиболее подходящим нам представляется метод параметров видимого движения (метод ПВД) (Киселев и др., 1973; Киселев и др., 1975), хорошо зарекомендовавший себя в задаче определения оскулирующей орбиты искусственного спутника Земли из наблюдений короткой дуги, выполненных на одной станции (Кириченко и Кудак, 1980).

2.1. Уравнения метода параметров видимого движения в задаче определения орбиты визуально-двойной звезды. Пусть в итоге обработки наблюдений визуально-двойной звезды AB получен ряд координат, определяющих положение спутника B относительно главной звезды A в известные моменты времени

$$\{\rho_j, \theta_j, \tau_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.1)$$

Здесь ρ_j и θ_j — полярные координаты звезды B в картинной плоскости, касающейся небесной сферы в точке A , принятой за начало координат (ρ — угловое расстояние между A и B , θ — позиционный угол направления AB в системе экватора эпохи T_0), τ — моменты наблюдений двойной звезды, отнесенные к некоторому фиксированному среднему моменту всего

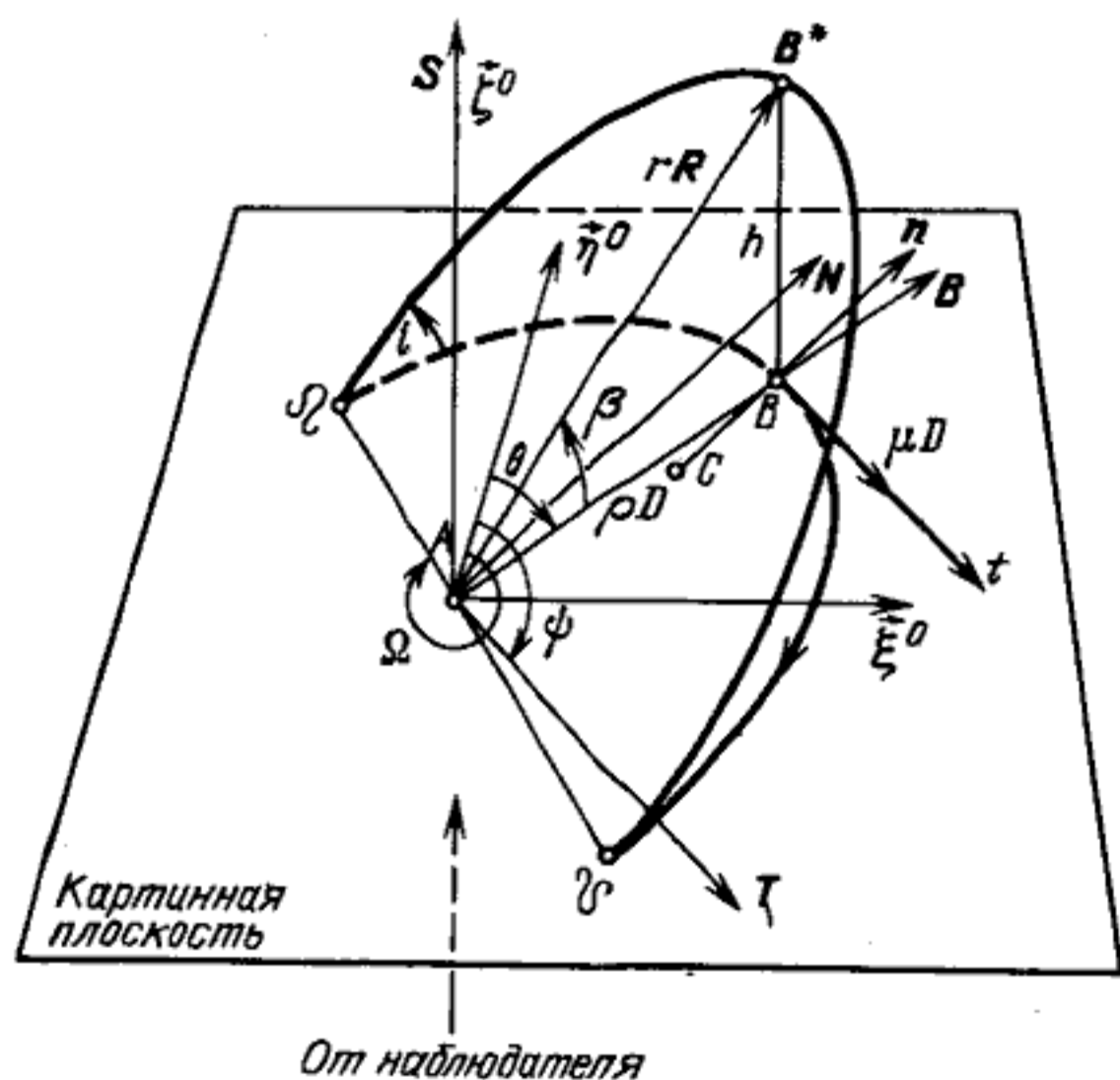


Рис. 24. Определение орбиты визуально-двойной звезды методом параметров видимого движения:

A — главный компонент двойной звезды AB^* , B^* — спутник; $\Omega B^* \mathcal{U}$ — дуга истинной орбиты двойной звезды, $\Omega B \mathcal{U}$ — ее проекция на картинную плоскость, $\Omega \mathcal{U}$ — линия узлов, i — наклонение, β — угол между вектором rR и картинной плоскостью; $h = BB^*$ — расстояние спутника от картинной плоскости по лучу зрения; N, T — орты нормали n и касательной t к дуге видимой орбиты спутника в точке B ; ρD и θ — длина и позиционный угол вектора AB ; μD и ψ — величина и позиционный угол видимой скорости спутника; C — центр кривизны дуги видимой орбиты спутника

периода наблюдений \bar{t} ,

$$\tau_j = t_j - \bar{t}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.2)$$

Предположим также, что в результате статистического выравнивания данных таблицы (8.1) или другим каким-либо методом определены средние значения, а также первые и вторые производные координат ρ и θ для момента \bar{t} , т.е. определены следующие величины:

$$\rho_0, \dot{\rho}, \ddot{\rho}; \quad \theta_0, \dot{\theta}, \ddot{\theta}. \quad (8.3)$$

Теперь введем в рассмотрение дифференциальные величины, также характеризующие видимое относительное движение в системе двойной звезды, но более удобными для дальнейшего изложения способом:

μ и ψ — величина и позиционный угол скорости видимого движения звезды B относительно звезды A ,

$\dot{\mu}$ и ρ_c — ускорение видимого движения и радиус кривизны дуги видимой орбиты спутника вблизи точки B (рис. 24), где спутник находится в момент t .

Перечисленные здесь величины $\rho, \theta, \mu, \psi, \dot{\mu}$ и ρ_c назовем параметрами видимого движения (ПВД) в системе двойной звезды, причем первые четыре из них условимся считать параметрами первого порядка (ПВД-I), а два последних — параметрами второго порядка (ПВД-II). В соответствии с данным определением ПВД легко вычисляются, если известны величины (8.3), по формулам

$$\mu = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2}; \quad \psi^0 = \theta^0 \pm 90^\circ \mp \arcsin \frac{\dot{\rho}}{\mu}, \quad (8.4)$$

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\mu} [\dot{\rho}(\dot{\rho} + \rho\dot{\theta}^2) + \rho^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}], \quad (8.5)$$

$$\rho_c = \frac{\mu^3}{\pm \dot{\theta}(\mu^2 + \dot{\rho}^2) + \rho(\pm \dot{\rho} \ddot{\theta} \mp \dot{\rho} \dot{\theta})}. \quad (8.6)$$

В этих формулах параметры ρ и μ имеют смысл существенно положительных величин, не зависящих от принятой системы отсчета. Что касается позиционных углов θ и ψ , то их величины определяются выбором системы отсчета, согласованной с экваториальной системой координат. Поэтому, чтобы вычислить по приведенным выше формулам правильные значения $\dot{\mu}$ и ρ_c , необходимо согласовать направление касательной (ψ) с направлением роста отсчетов θ . Соответственно в формулах (8.4), (8.6) необходимо принимать во внимание верхние знаки, если $\dot{\theta} > 0$, и нижние, если $\dot{\theta} < 0$. Параметр $\dot{\mu}$ вычисляется по формуле (8.5) всегда правильно, так как знак произведения $\dot{\theta} \ddot{\theta}$ не зависит от направления отсчетов θ .

По поводу знака радиуса кривизны ρ_c , вычисляемого согласно (8.6), следует заметить, что если $\rho_c > 0$, то центр кривизны C наблюдаемой дуги и начало координат в точке A лежат по одну сторону относительно касательной в точке B , если же $\rho_c < 0$, то точки A и C лежат по разные стороны относительно касательной; в последнем случае можно заключить, что ис-

следуемая пара звезд не является физической парой или что мы имеем дело с результатами ошибочных измерений.

Как следует из определения, параметры видимого движения описывают дифференциальные свойства наблюдаемого движения в системе двойной звезды наиболее естественным образом. Действительно, рассмотрим в картинной плоскости триэдр осей t, n, b , образованный касательной t , нормалью n и бинормалью b к исследуемой плоской кривой $\mathcal{C} B \mathcal{C}$ в точке B . Это так называемый естественный триэдр осей, который можно построить в любой точке кривой, заданной параметрически (как в нашем случае) или любым другим аналитическим способом.

ПВД, заданные согласно (8.4)–(8.6), как легко видеть, определяют скорость и ускорение видимого движения спутника B в направлении t и кривизну ρ_c участка измеренной дуги вблизи точки B , причем определяется также центр кривизны (точка C), лежащий на нормали n на расстоянии ρ_c от B . Бинормаль в условиях нашей задачи совпадает с нормалью к картинной плоскости и не изменяет своего направления при движении B .

Теперь определим расположение осей триэдра t, n, b относительно экваториальной системы координат. Опорные направления зададим ортами тангенциального экваториального триэдра $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$ (см. гл. 3, § 1), построенного для главной звезды $A(\alpha, \delta)$ исследуемой системы:

	X^0	Y^0	Z^0	
$\vec{\xi}^0$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0	(8.7)
$\vec{\eta}^0$	$-\cos \alpha \sin \delta$	$-\sin \alpha \sin \delta$	$\cos \delta$	
$S \equiv \vec{\zeta}^0$	$\cos \alpha \cos \delta$	$\sin \alpha \cos \delta$	$\sin \delta$	

Здесь, как и прежде, X^0, Y^0, Z^0 – орты основного экваториального триэдра для фиксированной эпохи. Орты осей t, n, b обозначим T, N, S ; в системе экваториального тангенциального триэдра они легко определяются, если известен позиционный угол ψ (см. (8.4)):

	$\vec{\xi}^0$	$\vec{\eta}^0$	$\vec{\zeta}^0$	
T	$\sin \psi$	$\cos \psi$	0	(8.8)
N	$-\cos \psi$	$\sin \psi$	0	
S	0	0	1	

Таким образом, мы задали положительное направление оси t в направлении движения спутника, а положительное направление бинормали выбрали таким же, как у $\vec{\zeta}^0$. При этих предположениях положительное направление нормали N определяется из условия

$$T \times N = S, \quad (8.9)$$

которое обеспечивает конгруэнтность триэдров осей t, n, b и $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$.

Воспользуемся системой осей $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$, чтобы определить основные пространственные векторы, участвующие в рассматриваемой задаче. Во-пер-

вых, определим астроцентрический вектор спутника B (вектор \overline{AB}^* на рис. 24):

$$\overline{AB}^* = rR = r \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \beta \\ \cos \theta \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Здесь r — модуль вектора \overline{AB}^* , R — единичный вектор, определяющий его направление, β — угол между R и картинной плоскостью. Если параллакс π_t звезды A известен, а r выражен в астрономических единицах (а.е.), то

$$\cos \beta = \frac{\rho}{\pi_t r} = \frac{D\rho}{r}, \quad (8.11)$$

где D — расстояние до звезды A в парсеках, ρ и π_t выражены в секундах дуги ($1''$). Нормальную составляющую вектора \overline{AB}^* относительно картинной плоскости обозначим h . Очевидно,

$$h = r \sin \beta, \quad (8.12)$$

причем $h > 0$, если спутник находится дальше от наблюдателя, чем главная звезда. Согласно (8.11) знак β не определяется, однако можно условиться, что $|\beta| < \pi/2$.

Во-вторых определим вектор проекции спутника B в картинной плоскости, т.е. вектор \overline{AB} (рис. 24):

$$\overline{AB} = r'B = r' \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Здесь r' — модуль вектора \overline{AB} , B — его единичный вектор. Для r' , очевидно, справедливо соотношение

$$r' = r \cos \beta = D\rho, \quad (8.14)$$

которое можно применять при тех же условиях, что и в случае (8.11).

В-третьих, определим астроцентрический вектор скорости v спутника:

$$\dot{r} = v = vV = v \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \gamma \\ \cos \psi \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

Здесь v — модуль вектора v , V — его единичный вектор, γ — угол между V и картинной плоскостью. Если наряду с ПВДІ для исследуемой звезды известны еще лучевая скорость V относительно A (\dot{h}) и параллакс, то можно воспользоваться следующими соотношениями для определения v и γ :

$$v = \sqrt{(\mu D)^2 + \dot{h}^2}, \quad (8.16)$$

$$\sin \gamma = \dot{h}/v, \quad \cos \gamma = \mu D/v; \quad (8.17)$$

при этом предполагается, что v , \dot{h} , μ и D имеют следующие размерности:

$$[v] = [\dot{h}] = \text{а.е./год}, \quad [\mu] = 1''/\text{год}, \quad [D] = \text{пк}. \quad (8.18)$$

Теперь в нашем распоряжении имеются все данные, чтобы вывести основные уравнения метода ПВД для определения орбиты визуально-двойной звезды. Исходить будем из следующего геометрического соотношения между определяемым вектором rR и наблюдаемыми топоцентрическими векторами главной звезды DS_0 и спутника $(D+h)S$:

$$rR = (D+h)S - DS_0. \quad (8.19)$$

Это уравнение очевидным образом преобразуется к "рабочему" виду

$$rR = D\rho B + hS, \quad (8.20)$$

поскольку в нашей задаче можно считать

$$S - S_0 = \rho B. \quad (8.21)$$

Последующие уравнения получим из (8.19) путем последовательного дифференцирования этого уравнения по времени. При дифференцировании необходимо учитывать относительный характер наблюдаемых движений, т.е. условия

$$\frac{dS_0}{dt} = 0, \quad \frac{dD}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = \dot{h}, \quad \frac{d^2h}{dt^2} = \ddot{h}, \quad (8.22)$$

которые показывают, что мы пренебрегаем переносным движением наблюдателя относительно системы визуально-двойной звезды. Кроме того, при выводе новых уравнений необходимо соблюдать правила дифференцирования единичных векторов

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = T\mu = \mu T, \quad (8.23)$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \dot{\mu}T + \mu \frac{dT}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\mu}T \mp c\mu^2 N = \dot{\mu}T \mp \frac{\mu^2}{\rho_c} N. \quad (8.24)$$

Здесь введены обозначения: $d\sigma$ — для элемента дуги видимой орбиты спутника B и c — для кривизны дуги видимой орбиты вблизи точки B . Кривизна c и радиус кривизны ρ_c (см. (8.6)) — обратные величины; двойной знак в (8.24) введен для того, чтобы удовлетворить поставленному нами условию выбора положительного направления нормали N (см. рис. 24 и формулу (8.9)), согласно которому следует брать верхний знак, если $\dot{\theta} > 0$, и нижний, если $\dot{\theta} < 0$. При выполнении этого правила вектор $\mp c\mu N$ оказывается всегда направленным к центру кривизны измеренной дуги, т.е. по направлению действующей центральной силы. В связи с формулами (8.23) и (8.24) обращаем внимание на то обстоятельство, что введенные нами формально параметры видимого движения (8.4)–(8.6) и орты астроцентрического триэдра TNS (8.8) естественным образом возникают при дифференцировании вектора топоцентрического направления S , несущего основную информацию об относительном движении компонент в системе двойной звезды.

Поскольку дифференцирование уравнения (8.24) связано с некоторыми методическими тонкостями, приводим подробные выкладки. Первое

дифференцирование дает

$$\dot{r} = (D+h)\mu T + \dot{h}S. \quad (8.25)$$

Второе дифференцирование выполняется в следующем порядке:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \dot{h}\mu T + (D+h)\dot{\mu}T + (D+h)\frac{\mu^2}{\rho_c}N + \ddot{h}S + \dot{h}\mu T = \\ &= [(D+h)\dot{\mu} + 2\mu\dot{h}]T + (D+h)\frac{\mu^2}{\rho_c}N + \ddot{h}S. \end{aligned} \quad (8.26)$$

В уравнениях (8.25) и (8.26) $h \ll D$, поэтому мы можем заменить $D+h$ на D . Окончательная редакция системы уравнений (8.19), (8.25) и (8.26) должна учитывать еще основное предположение метода ПВД, согласно которому движение в системе двойной звезды происходит под действием центральной силы по закону Ньютона:

$$\ddot{r} = -k^2 \frac{R}{r^2}. \quad (8.27)$$

Учитывая сделанные замечания, систему векторных уравнений метода ПВД для визуально-двойных звезд перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} rR &= D\rho V + hS, \\ \dot{r} &= vV = D\mu T + \dot{h}S, \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$\ddot{r} = -k^2 \frac{R}{r^2} = (D\dot{\mu} + 2\dot{h}\mu^*)T + D\frac{\mu^2}{\rho_c}N + \ddot{h}S.$$

Коэффициент k^2 в (8.27) и (8.28) закономерно назвать динамической постоянной астроцентрического движения. В теории обращения двойных звезд для k^2 принято выражение

$$k^2 = \frac{4\pi^2(M_A + M_B)}{M_\odot}; \quad [k^2] = \frac{(a.e.)^3}{(\text{год})^2}, \quad (8.29)$$

обеспечивающее наиболее простое выражение для третьего закона Кеплера

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} = M_A + M_B. \quad (8.30)$$

Таким образом устанавливаются удобные выражения интегралов в задаче двух тел применительно к двойным звездам в системе измерений, где в качестве единицы длины принята астрономическая единица, в качестве единицы времени — год, а в качестве единицы масс — масса Солнца M_\odot .

Обращаем внимание на размерности длин векторов, участвующих в системе (8.28). Это обстоятельство особенно важно для применения системы (8.28) на практике. Условимся считать, что параметры ρ , μ , r , h и D выражены в привычных единицах как указано в (8.18), а размерность k^2 дана в определении (8.29), тогда все слагаемые в первом уравнении системы будут иметь размерность (а.е.), а во втором уравнении — а.е./год. Что касается третьего уравнения, то общая размерность его слагаемых а.е./год² нарушается в первом слагаемом правой части, если считать раз-

мерность μ , как обычно, в $1''/\text{год}$. Поэтому нам пришлось восстановить естественную размерность μ в радианах, т.е. принять $\mu^* = \mu \sin 1''$, $[\mu^*] = 1/\text{год}$, так что

$$[D\dot{\mu}] = [\dot{h}\mu^*] = [D\mu^2/\rho_c] = [\ddot{h}] = \frac{\text{а.е.}}{(\text{год})^2}, \quad (8.31)$$

и принятая размерность сохраняется также и во всех слагаемых третьего уравнения.

Система уравнений (8.28) является фундаментальной для исследования динамики и кинематики движения в системе двойной звезды. Обратимся к анализу ее решения.

2.2. Решение системы уравнений метода ПВД. Главная задача, которую мы себе ставим при решении системы (8.28), состоит в определении пространственных векторов положения rR и скорости vV спутника B в астроцентрической системе координат $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$. Дальнейшая часть задачи — определение элементов орбиты — выполняется хорошо известными в небесной механике приемами. Таким образом, из девяти неизвестных $r(r_1, r_2, r_3), \dot{r}(\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3), h, \dot{h}, \ddot{h}$, имеющих в исследуемой системе девяти уравнений, существенными для решения задачи определения орбиты являются первые шесть. Наблюдательная основа представлена шестью параметрами видимого движения $(\rho, \theta, \mu, \psi, \dot{\mu}, \rho_c)$, определенными для среднего момента \bar{t} интервала наблюдений короткой дуги видимой орбиты двойной звезды. Чтобы найти r и \dot{r} , необходимо исключить неизвестные h, \dot{h} и \ddot{h} и решить систему шести уравнений с шестью неизвестными. Однако даже в идеальном случае, если параметры видимого движения известны совершенно точно нельзя получить однозначного решения для r и \dot{r} , так как оно будет зависеть от двух неизвестных или недостаточно определенных величин, а именно — величин k^2 и D . Чтобы решить исследуемую систему хотя бы формально точно, эти величины следует доопределить: например, положить сумму масс компонент двойной звезды равной единице, а D вычислить по известному тригонометрическому параллаксу.

З а м е ч а н и е. В неопределенности величин k^2 и D проявляется существенное различие в применении метода ПВД в задаче определения орбиты спутника Земли и в задаче определения орбиты визуально-двойной звезды. В первой задаче величина k^2 (динамическая постоянная геоцентрического движения) является точно известной величиной, а значение D (топоцентрическое расстояние до ИСЗ) определяется в процессе решения системы уравнений типа (8.28), чему способствует условие засечки в замкнутом треугольнике OAB (рис. 24), (если принять, что точка O соответствует положению наблюдателя). В задаче с двойной звездой постоянная k^2 неизвестна, а треугольник OAB практически не замкнут, так что отсутствует геометрическое условие для определения D из системы уравнений. Однако для решения задачи существенно учитывать лишь разность векторов \vec{OB} и \vec{OA} , т.е. величины h и ρ и их изменение со временем $\dot{h}, \dot{\rho}$, и ПВД. Что касается расстояния D , то его необходимо знать, чтобы задать правильный масштаб величин в системе уравнений (8.28) в выбранной системе единиц. Таким образом, при применении метода

ПВД для определения орбиты визуально-двойной звезды величины k^2 и D являются в известном смысле свободными параметрами, которые остаются в нашем распоряжении до тех пор, пока не появятся условия для их обоснованного определения. Такие условия, как показано ниже, имеются для большинства близких визуально-двойных звезд, у которых известны тригонометрические параллаксы и, кроме того, есть отдельные измерения положений компонент, полученные в отдаленные относительно \bar{t} эпохи.

Вернемся к решению системы (8.28). Умножим третье уравнение системы скалярно на N . Получим

$$k^2 \frac{RN}{r^2} = \pm c \mu^2 D.$$

Заменяя здесь R его выражением (8.20), найдем

$$r^3 = \pm k^2 \frac{\rho \rho_c}{\mu^2} BN, \quad (8.32)$$

или

$$r^3 = \pm (k/\mu)^2 \rho \rho_c \sin(\psi - \theta), \quad (8.32a)$$

причем знак в формулах (8.28) выбирается в соответствии с правилом (8.24), чем автоматически удовлетворяется естественное требование $r > 0$.

Формула (8.32) позволяет вычислить расстояние между компонентами двойной звезды в астрономических единицах, если для этой звезды определены параметры видимого движения первого порядка, радиус кривизны наблюдаемой дуги орбиты и, кроме того, если постоянную k^2 можно считать известной. Самостоятельное значение формулы (8.32) состоит в том, что она может быть принята за основу для определения динамического параллакса визуально-двойной звезды (типа динамического параллакса Рессела—Мура, но с меньшим количеством допущений). Действительно, учитывая (8.11), можно переписать формулу (8.32) в виде

$$\begin{aligned} D &= \cos \beta \sqrt[3]{k^2 \frac{\rho_c}{\rho^2 \mu^2} \sin(\psi - \theta)} = \\ &= \cos \beta \sqrt[3]{4\pi^2} \sqrt[3]{(M_A + M_B) \frac{\rho_c}{\rho^2 \mu^2} \sin(\psi - \theta)}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Здесь угол β остается не определенным. Полагая направление вектора r равновероятным относительно небесной сферы, найдем

$$\overline{\cos \beta} = \frac{1}{4} \pi, \quad (8.34)$$

откуда следует

$$D = 2,67 \sqrt[3]{(M_A + M_B) \frac{\rho_c}{\rho^2 \mu^2} \sin(\psi - \theta)}, \quad (8.35)$$

где D — среднее расстояние до наблюдаемой двойной звезды, которое вычисляется в парсеках, если M_A и M_B выражены в единицах массы Солнца, ρ и ρ_c — секундах дуги, а μ — в $1''/\text{год}$. Формула (8.35) позволяет оценить расстояния до избранных двойных звезд, для которых удалось определить кривизну дуги видимой траектории из наблюдений. Вычисленные по формуле (8.35) динамические расстояния D статистически лучше обоснованы, чем расстояния, вычисленные по динамическим параллаксам Рессела–Мура, так как зависят только от одного неопределенного параметра, а именно — от $\cos \beta$. Опыт показывает (Кияева, 1981), что эти расстояния точнее найденных другими способами, использующими динамические свойства орбитального движения в системах двойных звезд. К сожалению, расстояния D , найденные на основе ПВД, пока могут иметь лишь ограниченное применение, так как их определение на практике требует плотных высокоточных рядов наблюдений.

Продолжим анализ решения системы уравнений метода ПВД. Определив r согласно (8.32) и полагая D известным, вычислим $\cos \beta$ и $\sin \beta$ из соотношений, вытекающих из (8.11),

$$\cos \beta = \frac{D\rho}{r}, \quad \sin \beta = \pm \sqrt{1 - \frac{D^2 \rho^2}{r^2}} \quad (8.36)$$

и найдем вектор rR в соответствии с его определением (8.10). Из (8.36) следует, что в общем случае определяются два значения радиуса-вектора r , удовлетворяющих геометрическому и динамическому условиям движения. Эти векторы, различающиеся только третьей компонентой в системе осей $\vec{\xi}^0, \vec{\eta}^0, \vec{\zeta}^0$, очевидно, располагаются симметрично картинной плоскости. Теперь, чтобы определить орбиту, остается найти вектор скорости спутника \dot{r} . Для этого умножим третье уравнение в (8.28) скалярно на T и решим получившееся уравнение относительно \dot{h} :

$$\dot{h} = \frac{1}{2\mu^*} \left(k^2 \frac{RT}{r^2} + \dot{\mu}D \right) = -\frac{D}{2\mu \sin 1''} \left[k^2 \frac{\rho}{r^3} \cos(\psi - \theta) + \dot{\mu} \right]. \quad (8.37)$$

Выражение (8.37) формально позволяет вычислить проекцию вектора скорости \dot{r} на луч зрения и соответственно определить величину и направление этого вектора по формулам (8.15)–(8.17). Однако формула (8.37) едва ли может иметь практическое применение, так как заключенные в квадратные скобки слагаемые — малые величины (порядка $10^{-4} \div 10^{-5} 1''/\text{год}^2$), определяемые из наблюдений с большой погрешностью вследствие их зависимости от ПВДШ, т.е. от ρ_c и $\dot{\mu}$. Положение осложняется еще и тем обстоятельством, что эти слагаемые — ввиду свойств эллиптического движения — имеют, как правило, противоположные знаки. Например, при моделировании на ЭВМ задачи определения орбиты двойной звезды типа ADS 48 в условиях, близких к реальным (Киселев и др., 1980), было вычислено

$$k^2 \rho \cos(\psi - \theta)/r^3 = 0,0004622826 1''/\text{год}^2, \quad (8.38)$$

$$\dot{\mu} = -0,00046226466 1''/\text{год}^2,$$

откуда следует, что для того чтобы получить по формуле (8.37) величину

\dot{h} хотя бы с одним правильным знаком, нужно определить из наблюдений $\dot{\mu}$ с точностью до $\pm 1'' \cdot 10^{-8}$, что на 3—4 порядка превосходит точность современных фотографических наблюдений двойных звезд. Таким образом, необходимо признать, что формула (8.37) не может быть принята за основу для определения \dot{h} и, следовательно, невозможно определить вектор \dot{r} , используя только шесть параметров видимого движения.

Рассмотрим альтернативное решение задачи. Примем как данное, что из наблюдений короткой дуги определяются только четыре параметра видимого движения первого порядка и один — второго, а именно ρ_c . Предположим также, что из спектральных наблюдений лучевых скоростей компонент двойной звезды AB удалось определить относительную лучевую скорость V и A .

$$\Delta V_r = (V_{rB} - V_{rA}) \text{ км/с} = 4,74 \dot{h} \text{ а.е./год} \quad (8.39)$$

для некоторого момента, близкого к \bar{t} . Тогда, следуя условиям (8.15) — (8.17), определим астрочентрический вектор скорости спутника $\dot{r}(vV)$ в системе осей $\vec{\xi}^0 \vec{\eta}^0 \vec{\zeta}^0$ и элементы орбиты двойной звезды выведем по известным r и \dot{r} . В итоге получим две системы элементов, соответствующие двум решениям для единичного вектора R . Эти орбиты могут существенно различаться с точки зрения геометрии (различные элементы e, i, ϱ, ω и T_{II}), но будут идентичными в динамическом отношении, так как большая полуось орбиты и период обращения двойной звезды полностью определяются величиной r , однозначно выводимой из (8.32),

$$a = (2/r - v^2/k^2)^{-1}. \quad (8.40)$$

Таким образом, при использовании наблюдений коротких дуг методом ПВД определяются две равноправные орбиты, одинаково удовлетворяющие наблюдениям, и нет возможности уточнить величины k^2 и D . Необходимыми для определения орбиты величинами, получаемыми из наблюдений, являются пять параметров видимого движения ρ, θ, μ, ψ и ρ_c , а также относительная лучевая скорость компонент \dot{h} на средний момент интервала наблюдений; дополнительно нужно задать расстояние до звезды D в парсеках и сумму масс M_{AB} компонент в единицах массы Солнца.

Возможность определения единственной орбиты в методе ПВД, а также возможность уточнения суммы масс, зависит от наличия далеких во времени наблюдений исследуемой звезды. Идея использования этих наблюдений состоит в том, что рассматривая знак $\sin \beta$ в (8.36) и сумму масс как свободные параметры, а наблюденные ПВД и ΔV_r как фиксированные начальные данные, мы можем определить два семейства орбит ПВД, зависящих от одного параметра, и вычислить $(O - C)$ на моменты старых наблюдений. Оба семейства орбит одинаково хорошо удовлетворяют современным наблюдениям на участке орбиты, использованном для определения ПВД. Остается выбрать то семейство орбит (знак $\sin \beta$) и то значение параметра M_{AB} , при которых достигается наилучшее согласие со старыми наблюдениями. Соответствующие вычислительные операции легко реализуются на ЭВМ. Ввиду низкой точности и неоднородности наблюдений визуально-двойных звезд, выполненных 100 и более лет назад, нет необходимости прибегать на этом этапе сравнения с наблюдениями к методу наименьших квадратов, достаточно "провести" выбранную орбиту ПВД

”поближе” к наиболее надежным положениям, измеренным в прошлом веке. Опыт показывает, что для определения знака $\sin \beta$ достаточно даже одного наблюдения, далекого во времени по отношению к средней эпохе ПВД. Кроме того, показано, что наличие таких старых наблюдений двойной звезды, исследуемой методом ПВД, создает условия для определения суммы масс ее компонент. Этой задаче посвящено специальное исследование О.В. Кияевой (Кияева, 1983). Здесь мы не будем детально останавливаться на этой проблеме. Отметим только, что использование старых наблюдений в методе ПВД принципиально отличается от того, как эти наблюдения принято использовать при определении орбит геометрическим или динамическим методами. В этих методах не делается различия между новыми и старыми наблюдениями, все они одинаково используются для подбора тем или иным способом наиболее вероятнейшей орбиты. В методе ПВД, однако, старые наблюдения служат лишь для уточнения одного свободного параметра, именно $M_A + M_B$, в остальном орбита полностью определяется пятью параметрами видимого движения, параллаксом и величиной ΔV_r , которые не изменяются в процессе определения свободного параметра. Основание для такого подхода к задаче создает высокая точность современных фотографических наблюдений, целенаправленно организованных так, чтобы обеспечить наиболее благоприятные условия для определения параметров видимого движения.

2.3. Результаты применения метода ПВД для определения орбит трех визуально-двойных звезд. Рассмотренный здесь метод ПВД был применен для определения орбит некоторых визуально-двойных звезд, интенсивно наблюдавшихся в Пулковке на 26-дюймовом рефракторе в последние 20 лет. В числе этих звезд — двойные, расположенные не далее 10 пс от Солнца: ADS 48, ADS 7251, ADS 14636 (61 Cyg). Наблюдательные данные представлены рядами высокоточных относительных положений компонент ρ и θ , общее число пластинок — от 40 до 130 на звезду, на каждой пластинке в среднем по 15–20 изображений двойной звезды. Обработка наблюдений производилась в соответствии с изложенной здесь (см. гл. 7) методикой. Ряды положений $\{\rho, \theta\}$, приведенные к экватору 2000.0, были аппроксимированы разложениями

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \dot{\theta}\tau + \frac{1}{2} \ddot{\theta}\tau^2, \\ \rho &= \rho_0 + \dot{\rho}\tau + \frac{1}{2} \ddot{\rho}\tau^2, \end{aligned} \tag{8.41}$$

на основе которых были вычислены параметры видимого движения первого порядка. Для определения радиуса кривизны ρ_c было испытано несколько способов; наиболее надежным оказался способ, при котором ρ_c определялся как радиус окружности, наилучшим образом представлявшей наблюдения на короткой дуге вблизи точки B . Центр этой окружности искался по нормали N , построенной в точке B (см. рис. 24, а также (Кияева, 1984)). Результаты определения пяти параметров видимого движения вместе с их ошибками приведены в табл. 16. Ошибки имеют смысл среднеквадратических, они определены в процессе выравнивания наблюдений с помощью аппроксимирующих полиномов (8.41). Во второй, третьей и

Таблица 16

Начальные данные для определения орбит визуально-двойных звезд методом ПВД

Номера двойных звезд по каталогу Айткена	Продолжит. наблюдений (лет)	Средняя эпоха наблюдений, \bar{t}	Число пластинок n_p	Параметры видимого движения					Параллакс π_r	Разность лучевых скоростей, ΔV_r км/с	Сумма масс, M_{AB}
				ρ	θ	μ	ψ	ρ_c			
48	16	1968,7	35	5,826"	168,49°	0,0474"	241,8°	4,8"	0,094"	-1,4	1,0
				± 4	± 3	± 6	± 9	± 8	± 4	± 0,4	
7251	11	1967,6	48	17,916	83,10	0,0876	184,3	17,7	0,166	-1,1	1,0
				± 3	± 1	± 9	± 6	± 1,0	± 4	± 0,4	
14636 (61 Cyg)	16	1966,5	132	28,211	143,37	0,1330	195,8	25,9	0,296	+0,8	1,0
				± 5	± 1	± 10	± 4	± 4	± 6	± 0,4	

Таблица 17

Результаты определения орбит трех визуально-двойных звезд методом ПВД и другими методами

Номера звезд по каталогу ADS	Период наблюдений	Элементы орбиты							Параллакс, π_t	Сумма масс, M_{AB}	Разность лучевых скоростей, ΔV_r	Метод или автор, ссылка
		P	a	e	ϱ	i	ω	T_{II}				
48	1961–1977	448	5,51"	0,34	34°	48°	294°	1716	0,094"	(1,0)	(–1,4)	ПВД 1980
		±75	±0,67	±8	±8	±5	±16	±70	±4			
	1864–1954	362	6,18	0,50	19	62	276	1710	0,094	2,17	–3,2	Гюнтцель-Лингнер 1955
7251	1962–1973	1249	19,2	0,3	309	28	237	2215	0,166	(1,0)	(–1,1)	ПВД 1980
		±324	±3,2	±0,1	±18	±7	±14	±365	±4			
	1823–1954	1555	22,4	0,24	74	32	58	2091	0,166	1,02	1,6	Хопманн 1954
	1823–1954	687	16,5	0,54	164	40	74	2194	166	2,08	0,9	Гюнтцель-Лингнер, 1955
14636 (61 Cyg)	1961–1977	713	23,6	0,50	175	46	163	1724	0,296	(1,0)	(0,8)	ПВД 1980
		±86	±1,9	±0,13	±8	±6	±9	±42	±6			
	1844–1948	653	24,3	0,40	171	55	147	1677	0,296	1,3	1,3	де Каро и Века, 1948

четвертой графах таблицы указаны интервал времени наблюдений $t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}}$ в годах, средний момент, для которого определены ПВД, и число измеренных пластинок. Кроме ПВД, в табл. 16 приведены и другие данные, послужившие для определения орбит названных трех звезд методом ПВД, а именно: величины тригонометрических параллаксов с их ошибками (π_r) согласно каталогу Р. Вулли (Вулли, 1970), величины относительных лучевых скоростей компонент (ΔV_r) из этого же каталога и суммы масс компонент двойных звезд (M_{AB}), которые в рассматриваемой задаче приняты равными единице. Ошибки параметров ΔV_r ввиду отсутствия таких данных мы приняли равным $\pm 0,4$ км/с; эти ошибки имеют чисто формальное значение и необходимы для вычисления ошибок элементов орбит, полученных методом ПВД.

Результаты определения элементов орбит трех визуально-двойных звезд методом ПВД представлены табл. 17. Для сравнения в этой же таблице приведены элементы орбит этих же звезд, определенные другими авторами, применявшими для своих исследований геометрические и динамические методы и использовавшими все доступные им наблюдения, накопленные приблизительно за 100 лет.

Для элементов орбит в табл. 17 использованы общепринятые обозначения. В графах M_{AB} и ΔV_r приведены значения этих величин, вычисленные на основе элементов орбит в соответствующих строках при данном π_r . Те же значения M_{AB} и ΔV_r в скобках повторяют данные табл. 16: они использованы как начальные данные при вычислении орбит методом ПВД.

Обращаем внимание на то обстоятельство, что элементы орбит, вычисленные методом ПВД, в отличие от элементов орбит, вычисленных другими методами, имеют оценку точности. Этого можно было ожидать, так как проведение орбит с помощью традиционных приемов в условиях нашей задачи ($t_{\text{кон}} - t_{\text{нач}} < P/4$) связано с таким большим произволом, что оценить ошибки элементов практически невозможно; цитируемые авторы даже и не пытались этого делать. Напротив, при применении метода ПВД ошибки определяются однозначно, если только известны ошибки начальных данных — семи параметров p_i (5 ПВД, π_r и ΔV_r). В методе ПВД ошибки элементов орбиты определяются путем повторных многократных вычислений на ЭВМ при варьировании начальных данных задачи в пределах заданных средних ошибок параметров p_i . Средняя ошибка некоторого элемента орбиты E_i при таком подходе получается как геометрическая сумма уклонений этого элемента от его среднего значения, возникающих вследствие изменения начальных условий

$$\epsilon(E_i) = \sqrt{\Delta E_i^2(p_1) + \Delta E_i^2(p_2) + \dots + \Delta E_i^2(p_7)}, \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (8.42)$$

Поскольку в задаче определения орбиты двойной звезды методом ПВД параметры p_i являются независимыми величинами, такой подход к определению ошибок элементов можно считать статистически корректным, а сами величины ошибок реалистичными. Этот вывод подтверждается сравнением элементов орбит, приведенных в табл. 17.

В качестве примера, иллюстрирующего определения ошибок элементов орбиты, приводим результаты вычисления элементов орбиты двойной

Т а б л и ц а 18

Влияние ошибок определения параметров видимого движения,
а также величин π_T и ΔV_r
на элементы орбиты двойной звезды 61 Cyg

Пара- метры	Ошибки парамет- ров	Ошибки элементов						
		Δa	ΔP , лет	Δe	$\Delta \varrho$	Δi	$\Delta \omega$	ΔT , в годах
ρ	0,005"	0,00"	0,09	0,00	0,0°	0,0°	0,0°	0,0
θ	0,01°	0,00	0,06	0,00	0,0	0,0	0,0	0,2
μ	0,001"	0,03	1,28	0,00	0,2	0,4	1,1	3,2
ψ	0,4°	0,07	2,96	0,00	0,4	0,1	0,5	2,6
ρ_c	0,4"	0,18	8,08	0,01	0,3	0,4	0,5	3,6
π_T	0,006"	0,41	18,7	0,00	1,0	1,9	4,8	5,7
ΔV_r	0,4 км/с	1,82	84,1	0,13	8,3	5,7	7,5	41,2
Средняя ошибка элемента		$\pm 2''$	± 86	$\pm 0,1$	$\pm 8^\circ$	$\pm 6^\circ$	$\pm 9^\circ$	± 42

звезды 61 Cyg. Эти результаты сведены в табл. 18, где каждая горизонтальная строка показывает, как изменяются элементы определяемой орбиты в зависимости от изменения одного из параметров p_i на величину своей ошибки, указанной в начале каждой строки. В последней строке приведены оценки ошибок элементов, вычисленные согласно (8.42).

Таблица 18 отчетливо показывает, что наибольшее влияние на точность определяемых методом ПВД элементов орбит двойных звезд оказывают ошибки относительной лучевой скорости и параллакса. С другой стороны, замечаем, что величины ПВД-I определяются из наблюдений настолько точно, что их ошибки совершенно неощутимы для определяемой орбиты. Таким образом, заключаем, что задача определения надежных орбит многих близких визуально-двойных звезд с большим периодом обращения ($P > 400$ лет) может быть решена методом ПВД, коль скоро астрометрические наблюдения этих звезд будут дополнены спектроскопическими наблюдениями с целью определения относительных лучевых скоростей компонент с точностью $\pm(0,1 - 0,2)$ км/с; такой сравнительно высокой для настоящего времени точности можно достичь только на больших телескопах, если исследуемые звезды не слабее 8-й звездной величины.

* *
*

1. Выведена система уравнений методом ПВД (8.28) для определения орбиты визуально-двойной звезды из наблюдений короткой дуги. Уравнения связывают пространственные векторы относительных положения и скорости компонент в системе визуально-двойной звезды с параметрами видимого движения системы, определяемыми из наблюдений. Уравнения, их вывод и решение в задаче определения орбит визуально-двойных звезд существенно отличаются от случая применения метода ПВД к определению орбит спутников Земли. Показано, что уравнения метода ПВД являются

эффективным инструментом для исследования задачи определения орбиты визуально-двойной звезды из наблюдений короткой дуги. Успешное применение метода ПВД в задаче определения орбиты визуально-двойной звезды показывает универсальность этого метода.

2. Анализ системы уравнений метода ПВД для двойных звезд показал, что решение задачи не может быть получено, если использовать только позиционные наблюдения двойной звезды. Для определения орбиты необходимо результаты позиционных наблюдений дополнить данными об относительной лучевой скорости компонент и о расстоянии до исследуемой звезды. Необходимо также задать сумму масс компонент двойной звезды. Решение получается двузначным. Эта неопределенность снимается, если привлечь хотя бы одно наблюдение, далеко отстоящее по времени от среднего момента наблюдений короткой дуги. Привлечение "старых" наблюдений может помочь также доопределить сумму масс компонент.

3. Установлено фундаментальное значение радиуса кривизны видимой дуги орбиты двойной звезды, который определяется из оптических позиционных наблюдений. Значение радиуса кривизны наряду с параметрами видимого движения первого порядка позволяет определить величину радиуса-вектора r в астрономических единицах (формула (8.32)) и оценить динамический параллакс звезды (формула (8.35)). Вообще знание радиуса кривизны наблюдаемой видимой дуги является необходимым условием для определения орбиты визуально-двойной звезды методом ПВД.

4. Применение метода ПВД для определения орбит трех близких двойных звезд ADS 48, ADS 7251 и ADS 14636 (61 Cyg) на основе фотографических наблюдений длительностью в 10–20 лет на 26-дюймовом рефракторе в Пулковке подтвердило главный вывод об эффективности метода ПВД. Полученные орбиты хорошо согласуются с определениями других авторов, использовавших традиционные методы и наблюдения, полученные на интервалах времени порядка ста лет.

5. Подтверждена точка зрения, что метод определения орбиты визуально-двойной звезды из наблюдений короткой дуги должен быть дифференциальным и чисто динамическим. Предложенный для этой цели метод ПВД можно принять за основу для исследования многих аспектов поставленной задачи. В частности, метод ПВД открывает хорошую возможность исследований близких двойных звезд в окрестности Солнца. Для этой цели необходимо, чтобы все еще не исследованные визуально-двойные звезды, показывающие заметное орбитальное движение, стали бы объектом интенсивных фотографических и спектральных наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абалакин В.К.* Основы эфемеридной астрономии. — М.: Наука, 1979, 448 с.
2. *Балк М.Б.* Геометрические приложения понятия о центре тяжести. — М.: Физматгиз, 1959, 230 с.
3. *Блажко С.Н.* Курс сферической астрономии. — М.: Гостехиздат, 1954, 332 с.
4. *Бронникова Н.М., Киселев А.А.* Фотографические наблюдения Венеры в Пулковке на 26" рефракторе // Изв. ГАО в Пулковке. — 1973. — № 191. — С. 148—162.
5. *Бугославская Е.Я.* Фотографическая астрометрия. — М.; Л.: Гостехиздат, 1947. — 296 с.
6. *Веселовский Н.Н.* Фотограмметрия. — М.: Геозедиздат, 1945, 430 с.
7. *Вингисаар Э.И.* Сравнение двух методов редукции астрофотографий // Вестн. ЛГУ. — 1970. — № 13. — С. 133—141.
8. *Гаусс К.Ф.* Теоретическая астрономия. — Петроград: Изд. Глав. Адмиралтейства, 1919, 186 с.
9. *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия. — М.: Высшая школа, 1963, 343 с.
10. *Дейч А.Н.* Определение собственных движений 18 000 звезд в площадях Каптейна от $+67^\circ$ до $+15^\circ$ склонения // Труды ГАО. — 1940. — Серия 2, т. 55. — С. 167.
11. *Дейч А.Н.* Определение фотографического положения объекта по двум и трем опорным звездам // Астрон. журн. — 1948. — Т. 25, вып. 1. — С. 44—58.
12. *Дейч А.Н.* Основы фотографической астрометрии // Курс астрофизики и звездной астрономии/Под ред. акад. А.А. Михайлова. — М.; Л.: Гостехиздат, 1951. — Т. 1. — С. 183—258.
13. *Дейч А.Н.* О привязке звезд КСЗ к внегалактическим туманностям на астрографах с небольшим полем // Тр. 11-й Всесоюзной Астрометр. конф. — 1955. — С. 213—220.
14. *Дейч А.Н.* О темном спутнике 61 Лебеда // Изв. ГАО в Пулковке. — 1957. — № 160. — С. 62—82.
15. *Дейч А.Н.* К вопросу о редукции фотографических положений при произвольном оптическом центре // Астрон. журн. — 1965. — Т. 42., вып. 2 — С. 1114—1116.
16. *Дейч А.Н., Киселев А.А., Плюгин Г.А., Соколова В.А.* Измерения двойных звезд по снимкам, полученным на 26 рефракторе в Пулковке // Изв. ГАО в Пулковке. — 1965. — № 176. — С. 124—137.
17. *Дейч А.Н.* Фотографическая астрометрия // Курс астрофизики и звездной астрономии // Под. ред. акад. А.А. Михайлова. — М.: Наука, 1973. Т. 1. — С. 178—271.
18. *Дейч А.Н.* Об эффекте собственных движений опорных звезд // Астрон. журн. — 1974. — Т. 51, № 5. — С. 1095—1099.
19. *Жонголович И.Д.* Спутники Земли и геодезия // Астрон. журн. — 1961. — Т. 38, вып. 1. — С. 115—124.
20. *Жуков Л.В.* Шаровые скопления М3 и М5 // Астрон. журн. — 1969. — Т. 46, вып. 2. — С. 389—401.
21. *Загребин Д.В.* Введение в астрометрию. — М.; Л.: Наука, 1966. — 478 с.

22. *Занегин Н.А., Романова А.А.* О точности определения положений звезд и искусственных спутников Земли с самолета // Изв. ГАО в Пулкове. — 1971. — № 187. — С. 58–67.
23. *Зинченко Ю.Ф., Подобед В.В.* О получении каталога положений звезд полярной области методом перекрывающихся пластинок // Астрометрия и астрофизика. — 1977. — № 33. — С. 16–20.
24. *Идельсон Н.И.* Способ наименьших квадратов. — 2-е изд. — Л., 1932. 200 с.
25. *Идельсон Н.И.* Редукционные вычисления в астрономии // Астрономический Ежегодник на 1941 г. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. — С. 379–432.
26. *Кадла З.И.* Исследование шарового скопления М 13 // Астрон. журн. — 1963. Т. 40, № 4. — С. 691–695.
27. *Кадла З.И.* Исследование шарового скопления М 13 // Изв. ГАО в Пулкове. — 1966. № 181. — С. 93–139.
28. *Казаков С.А.* Курс сферической астрономии. — М.; Л.: Гостехиздат, 1940. — 284 с.
29. *Камп П. ван де.* Астрометрия с длиннофокусными астрографами. // Методы астрономии / Пер. с гол. под ред. В.А. Крага. — М.: Мир, 1967. — С. 412–453.
30. *Киселев А.А.* Интерполяционный метод определения положений небесного объекта на фотографии // Астрон. журн. — 1959. — Т. 36, вып. 2. — С. 348–360.
31. *Киселев А.А.* О влиянии погрешности принятого положения оптического центра на результат редукции астрофотографий // Изв. ГАО в Пулкове. — 1960. — № 166. — С. 165–175.
32. *Киселев А.А.* Об учете дисторсии при определении фотографических положений небесных светил с небольшим числом опорных звезд. // Изв. ГАО в Пулкове. — 1962. — № 171. — С. 159–168.
33. *Киселев А.А.* Определение масштаба 26" рефрактора Пулковской обсерватории // Изв. ГАО в Пулкове. — 1964. — № 174. — С. 120–126.
34. *Киселев А.А.* (1). Векторная интерпретация основных методов фотографической астрометрии // Астрон. журн. — 1965. — Т. 42, вып. 2. — С. 452–463.
35. *Киселев А.А.* (2). Применение гомографии в фотографической астрометрии // Астрон. журн. — 1965. — Т. 42, вып. 4. — С. 831–844.
36. *Киселев А.А., Киселева Т.П.* Об учете рефракции в фотографической астрометрии // Изв. ГАО в Пулкове. — 1966. — № 179. — С. 153–159.
37. *Киселев А.А.* Определение собственных движений звезд с помощью каталога "Карта неба" // Изв. ГАО в Пулкове. — 1968. — № 183. — С. 106–117.
38. *Киселев А.А.* Применение векторной формулы большого круга в космической триангуляции // Бюл. СОН ИСЗ. — М., 1969, № 55. — С. 86–91.
39. *Киселев А.А.* Алгоритм метода гомографических координат для определения положения небесного объекта по четырем опорным звездам с учетом дифференциальной рефракции // Методы вычислений топоцентрических координат искусственных спутников Земли по их фотографическим наблюдениям / Под ред. А.Г. Масевич. — М.: Изд. Интеркосмос, 1969. — С. 59–67.
40. *Киселев А.А.* Об ориентировке астрофотографий при наблюдениях и измерениях // Изв. ГАО в Пулкове. — 1971. — № 187. — С. 49–57.
41. *Киселев А.А., Быков О.П.* Определение орбиты спутника по одной фотографии со многими экспозициями // Астрон. журн. — 1973. — Т. 50, № 6. — С. 1298–1307.
42. *Киселев А.А., Ягудин Л.И.* Об абсолютизации фотографических собственных движений звезд // Современные проблемы позиционной астрометрии / Под ред. В.В. Подобеда. — М.: Изд. МГУ, 1975. — С. 201–214.
43. *Киселев А.А.* Векторные формулы учета годичной и суточной абберации и годичного параллакса // Труды Томского Гос. ун-та. — 1976. — Т. 262, вып. 5. — С. 59–67.
44. *Киселев А.А., Быков О.П.* Определение эллиптической орбиты спутника по одной фотографии со многими экспозициями // Астрон. журн. — 1975. — Т. 53, вып. 4. — С. 879–887.
45. *Киселев А.А., Кияева О.В., Калиниченко О.А.* Геометрический метод астрометрической редукции фотографий и его применение для калибровки широкоугольных камер // Изв. ГАО в Пулкове. — 1976. — № 194. — С. 149–160.

46. *Киселев А.А., Чантурия С.М.* Об определении собственных движений на основе каталогов "Карта неба". Новый список собственных движений звезд в окрестностях α Per // Бюл. Абастум. астрофиз. обс. — 1977. — № 48. — С. 81–102.
47. *Киселев А.А., Быков О.П., Ягудин Л.И.* Алгоритмы метода параметров видимого движения для определения орбит ИСЗ и параметров слежения за спутниками // Изв. ГАО в Пулкове. — 1980. — № 198. — С. 139–149.
48. *Киселев А.А., Кияева О.В.* Определение орбиты визуально-двойной звезды методом параметров видимого движения по короткой дуге // Астрон. журн. — 1980. — Т. 57, вып. 6. — С. 1227–1241.
49. *Киселев А.А.* Ошибки фотографических положений и собственных движений звезд при использовании различных моделей астрометрической редукции // Задачи современной астрометрии в создании инерциальной системы координат / Под ред. В.П. Щеглова. — Ташкент, 1981. — С. 181–186.
50. *Киселев А.А.* Опыт определения тригонометрических параллаксов по наблюдениям в часовых углах // Изв. ГАО в Пулкове. — 1982. — № 199. — С. 3–12.
51. *Киселев А.А.* Теоретические основы фотографической астрометрии // Проблемы астрометрии / Под ред. В.В. Подобеда. М.: Изд. МГУ, 1984. — С. 44–55.
52. *Киселев А.А., Киричук В.С., Яковенко Н.С.* Опыт применения автоматической измерительной машины Зенит-2. // Проблемы астрометрии / Под ред. В.В. Подобеда. М.: МГУ, 1984. — С. 183–186.
53. *Киселев А.А., Кияева О.В.* Результаты калибровки некоторых широкоугольных астрографов и короткофокусных камер на основе геометрического метода // Изв. ГАО в Пулкове. — 1985. — № 203. — С. 59–64.
54. *Киселева Т.П.* Фотографические положения Марса, полученные на короткофокусном астрографе Пулковской обсерватории в 1960–1961 гг // Изв. ГАО в Пулкове. — 1965. — № 176. — С. 248–255.
55. *Киселева Т.П.* Определение систематических ошибок Пулковского двойного короткофокусного астрографа // Изв. ГАО в Пулкове. — 1966. — № 181. — С. 154–158.
56. *Киселева Т.П.* Фотографические положения Марса, полученные на двойном короткофокусном астрографе Пулковской обсерватории в 1962–1965 гг. // Изв. ГАО в Пулкове. — 1970. — № 185. — С. 98–101.
57. *Киселева Т.П., Панова Г.В., Калиниченко О.А.* Позиционные фотографические наблюдения Сатурна и его спутников в 1971–1974 гг. в Пулкове // Изв. ГАО в Пулкове. — 1977. — № 195. — С. 49–65.
58. *Кириченко А.Г., Кудак К.А.* Элементы круговой орбиты ГЕОС-С, полученные по наблюдениям на одной станции // Проблемы космической физики. — 1980. — № 15. — С. 47–53.
59. *Кияева О.В.* Определение динамического параллакса и оценка угла наклона орбиты двойной звезды на основе наблюдений короткой дуги // Изв. ГАО в Пулкове. — 1981. — № 199. — С. 13–18.
60. *Кияева О.В.* Использование далеких по времени наблюдений для уточнения орбиты визуально-двойной звезды, полученной методом параметров видимого движения по короткой дуге // Астрон. журн. — 1983. — Т. 60, вып. 6. — С. 1208–1216.
61. *Кияева О.В.* О точности определения параметров видимого движения визуально-двойной звезды из наблюдений короткой дуги // Изв. ГАО в Пулкове. — 1984. — № 201. — С. 44–50.
62. *Колчинский И.Г., Онегина А.Б.* План фотографирования неба на широкоугольных астрографах // Астрометрия и астрофизика. — 1977. — № 33. — С. 11–15.
63. *Костинский С.К.* Основы фотографической астрометрии. // Курс астрофизики и звездной астрономии / Под ред. Б.П. Герасимовича. — Л.: ГТТИ, 1934, ч 1. — С. 66–116.
64. *Куликов Д.К.* Новый метод обработки наблюдений пар Цингера // Бюл. ИТА. — 1947. — Т. 4, № 2 (55). — С. 77–86.
65. *Кумкова И.И.* Определение оптических координат радиоисточников. // Новые идеи в астрометрии / Под ред. М.С. Зверева. М.: Наука, 1978. — С. 78–81.
66. *Курьянова А.И., Кизюм Л.Н.* Опыт использования ортогональных полиномов для установления связи между измеренными и идеальными координатами // Кинематика и физика небесных тел. — 1985. — Т. 1, № 2. — С. 9–14.

67. Лавдовский В.В. Исследование 8-ми рассеянных скоплений по собственным движениям и фотометрическим характеристикам звезд // Изв. ГАО в Пулкове. — 1965. — № 176. — С. 136–218.
68. Левитская Т.И. Использование пластинок эклиптикальной зоны при астрометрической редукции с двухступенчатой системой опорных звезд // Астрометрия и астрофизика. — Киев, 1979. — Вып. 38. — С. 72–76.
69. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1958. — 333 с.
70. Максудов Д.Д. Астрономическая оптика. — М.; Л.: Гостехиздат, 1946. — 368 с.
71. Мельников О.А. Об атмосферной дисперсии и хроматической рефракции // Изв. ГАО в Пулкове. — 1957. — № 157. — С. 1–32.
72. Муминов М.М. Собственные движения и трехцветная фотометрия в области рассеянного скопления χ и h Персея // Задачи современной астрометрии в создании инерциальной системы координат. / Под ред. В.П. Щеглова. — Ташкент, 1981. — С. 221–227.
73. Подобед В.В., Нестеров В.В. Общая астрометрия. — М.: Наука, 1975., 547 с.
74. Поттер Х.И., Чудовичева О.Н. Исследование координатно-измерительной машины КИМ-3 // Изв. ГАО в Пулкове. — 1957. — № 157. — С. 121–132.
75. Поттер Х.И. К вопросу об использовании наблюдений Луны в геодезических целях // Астрон. журн. — 1958. — Т. 35, вып. 4. — С. 618–622.
76. Поттер Х.И. Методы обработки фотографических наблюдений Луны, ведущихся с помощью камеры Марковица в Пулкове // Труды XIV Астрометр. конференции СССР. М.; Л.: 1960. — С. 385–394.
77. Пэску Д. Методы астрометрических наблюдений естественных спутников // Спутники планет.: / Перевод под ред. В.Г. Дёмина. — М.: Мир, 1980. — С. 77–105.
78. Рахимов А.Г. Относительные собственные движения звезд в 25 площадках Пулковской программы // Цирк. Астр. ин-та АН УзССР. — 1976. — № 71 (418). — С. 11–31.
79. Ренц Ф.Ф. Результаты обработки 98 клише с 1046 отдельными снимками Галилеевых спутников Юпитера // Записки Импер. Акад. наук. — СПб, 1902. — Т. XIII, № 1. — С. 1–271.
80. Слуцкий Е.Е. Таблицы для вычислений неполной Γ -функции и функции вероятностей / Под ред. акад. А.Н. Колмогорова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950, 72 с.
81. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. — М.: Наука, 1968. — 800 с.
82. Фатчихин Н.В. Абсолютные собственные движения 14600 звезд в 85 площадках северного неба, полученные по галактикам на Пулковском нормальном астрографе // Труды ГАО АН СССР в Пулкове. — 1974. — Серия П, т. 81. — С. 3–211.
83. Фролова Н.Б. Фотографический каталог координат 323 звезд Московской зенитной зоны // Труды ГАИШ. — 1974. — Т. 45. — С. 95–105.
84. Фролов В.Н. Собственные движения и BV фотометрия звезд в области рассеянного скопления NGC 129 // Изв. ГАО в Пулкове. — 1975. — № 193. — С. 80–90.
85. Шахт Н.А. Результаты фотографических наблюдений ADS 7251 в Пулкове // Изв. ГАО в Пулкове. — 1976. — № 194. — С. 130–137.
86. Шокин Ю.А. О редукции измеренных координат к идеальным с использованием членов, зависящих от блеска и цвета звезд // Сообщ. ГАИШ. — 1974. — № 190. — С. 3–19.
87. Шокин Ю.А., Евстигнеева Н.М. Широкоугольный астрометрический стандарт в Московской зенитной зоне // Труды ГАИШ. — 1983. — Т. 55. — С. 3–20.
88. Шукстова З.Н. Фотографические наблюдения двойных звезд на Московской обсерватории // Труды ГАИШ. — 1961. — Т. 30 — С. 3–53.
89. Ющенко А.П. Картография, — Л.М.: Изд. Главсевморпути, 1941. — 283 с.
90. Яцкив Я.С., Курьянова А.И. Об одном возможном способе обработки астрофотографий // Кинематика и физика небесных тел. — 1985. — Т. 1, № 1, — С. 18–26.
91. Арло, 1980. Arlot J.E. Recherche d'une amelioration des mesures des positions des satellites galilean de Jupiter sur plaques photographique a l'aide d'un traitement photometrique des images // Astron. and Astrophys. — 1980. — V. 86. — P. 55–63.

92. *Балановский*, 1916. Balanovsky J. — Positions des satellites des Jupiter deduites d'apres les cliches obtenus par m.Kostinsky a Poulkovo dans les oppositions de 1904 a 1910. — Publ. de l'observatoire Central Nikolas. — 1916. — Ser. 2, No 31. — P. 1–92.
93. *Банахевич*, 1927. Banachewicz T. : La trigonometrie spherique et les voies nouvelle dans l'astronomie mathematique. — Cracovie impr. de l'universite. — 1927.
94. *Барней*, 1959. Barney Ida. Catalogue of 8380 stars +50° to +55° // Yale University Transactions of the Astronomical Observatory. — V. 26, part 2. — P. 5–161.
95. *Браун*, 1966. Brown D. An advanced reduction and calibration for photogrammetric cameras. — Cambridge, Massachusetts. — 1966, 133 p.
96. *Каро де и др.*, 1948. de Caro E., Veca G. Su un metodo dinamico per il calcolo d'orbita di un sistema binario visuale // Contr. osservatoria Catania. — 1948, — No. 62, 63, 64, Nota 1, 2, 3.
97. *Дикфосс*, 1975. Dieckvoss W., Heckman O. AGK-3 Star Catalogue of Positions and Proper Motions North of -2.5° Decl. — Hamburg, Bergedorf, 1975.
98. *Эйхгорн и др.*, 1963. Eichhorn H. and Williams C. On the Systematic accuracy of photographic Astrometric data // Astron. J. — 1963. — V. 68. — P. 221–231.
99. *Эйхгорн*, 1967. Eichhorn H. Modern developments and problems in photographic Astrometry // Astr. Contr. from the Univ. of South Florida at Tampa. — 1967. — No. 1. — P. 771–780.
100. *Эйхгорн*, 1970. Eichhorn H. Accurate Positions of 502 Stars in the region of Pleiades // Memoir of the R.A.S. — 1970. — V. 73. — P. 125–151.
101. *Эйхгорн*, 1974. Eichhorn H. Astronomy of Star Positions. — New York: Ungar, 1974. — 357 p.
102. *Гудж и др.*, 1970. Googe W., Eichhorn H., Lukas C. The overlap algorithm photographic star catalogues // Mon. Not. R.A. S. — 1970, — V. 150. — P. 35–44.
103. *Гюнтцель-Лингнер*, 1955. Güntzel-Lingner U. Bahnbestimmung von drei Doppelsternen mit grosser paralaxe // Mitt. Univ. Observ. Potsdam. — 1955. — B. 41. — S. 183–190.
104. *Гекман и др.*, 1956. Heckmann O., Dieckvoss W., Koh H. Die Umgebung von α Persei // Astr. Nachr. — 1956. — B. 283, Heft 2–3. — S. 2–3.
105. *Герцшпрунг*, 1912. Herzprung E. Photographische Messung der atmosphärischen Dispersion // Astr. Nachr. — 1912, — B. 192, Nr. 4603. — S. 309–319.
106. *Герцшпрунг*, 1940. Hertzsprung E. Photographic measures of double stars made of plates taken with 36-inch refractor of the Lick Observatory // Bull. Astr. Netherlands. — 1940. — V. 9, N 330. — P. 113–116.
107. *Хопманн*, 1954 (1), Hopmann J. Die systemkonstanten von ADS 7251. Dynamische Bestimmung der parabel Bahn eines Visuellen Doppelsternes // Mitt. Univ. Sternwarte Wien. — 1954. — B. 7, N 6. — C. 101–107.
108. *Хопманн*, 1954 (2), Hopmann J. Der Doppelstern ADS 11632 // Mitt. Univ. Sternwarte Wien. — 1954. — B. 7, Nr. 3. — S. 67–82.
109. *Кайзер*, 1921. Kaiser F. Eine sphärische Interpolations Methode für photographische Himmelsaufnahmen // Astr. Nachr. — 1921. — B. 213, Nr. 5102. — S. 217–225.
110. *Камп ван де и др.*, 1937. Kamp P. van de and Vyssotsky A.N. A study of the proper motions of 18000 stars derived at the Leander McCormick Observatory // Publ. of the Leander McCormick obs. — 1937. — V. 7, 246 p.
111. *Киселев*, 1970. Kisselev A.A. Reduction astrometrique des observations photographique des satellites artificial de la terre du point de vue de l'astrometric photographique classique. — Cospas Transactions. — Paris, 1970. — No. 7, P. 53–65.
112. *Киселев*, 1974. Kisselev A.A. The errors of absolute photographic proper motions of stars relative to galaxies. — New problems in Astrometry. — Copyright by IAU, 1974. — P. 207–208.
113. *Нокс-Шоу Н. и др.*, 1934. Knox-Show H., Scott-Barreth H. The Radcliff Catalogue of Proper motions of the Selected Areas I to 115. — Oxford, 1934, 300 p.
114. *Кёниг*, 1933. König A. Reduction photographische Himmelsaufnahmen. — Handbuch der Astrophysik. Berlin, 1933. — Band I, Teil I. — S. 502–560.
115. *Кустанхеймо*, 1959. Kustanheimo P. On Vector Methods in Spherical Astronomy // Helsinki Astr. Obs. Publ. — 1959. — N 73. — P. 3–12 (1). — 1960. — N 77. — P. 3–12 (2).
116. *Лакрут и др.*, 1974. Lacroute P., Valbousquet A. Nouvelle resolution de l'AGK2–AGK3. — Astron. Astrophysic Supple. — 1974. — V. 16. — P. 345–351.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "НАУКА"

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

117017 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ВЫХОДИТ ИЗ ПЕЧАТИ В 1989 ГОДУ:

Климишин И.А. Релятивистская астрономия. — 2-е изд., перераб. и доп.

(Темплан 1989 г., № 123)

В популярной форме излагаются идеи специальной и общей теории относительности. Рассказывается об использовании этих идей в астрономии, в частности при решении проблемы черных дыр и построении модели Вселенной. Подробно рассматриваются красное смещение в спектрах галактик, природа квазаров, проблемы "скрытой массы" и "больших чисел", возможная взаимосвязь микро- и мегамира. Рассматривается самая ранняя стадия развития Вселенной — "инфляционная вселенная", обсуждается связь космологии с физикой элементарных частиц.

Для учителей физики и астрономии, студентов и учащихся старших классов, специалистов-астрономов, а также для широкого круга любителей астрономии.